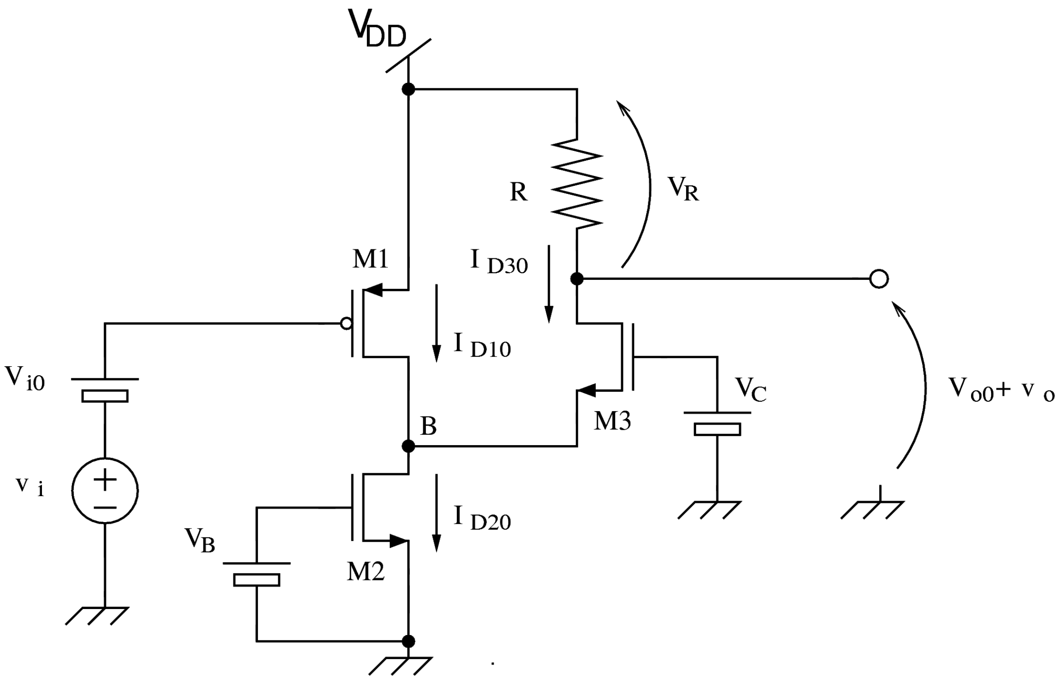
Fondamenti di Elettronica B/BC – A.A. 2008/2009
Correzione Prova n°6 del 18/09/09

Esercizio 1

Ipotesi iniziale: Tutti I transistori MOSFET operanti in regione di saturazione.

Per prima cosa occorre individuare il punto di riposo del circuito.



Essendo nota la V_{o0} risulta specificata la caduta su R e quindi:

$$V_R = V_{DD} - V_{o0} = V_{DD} - V_{DD} + 2.6 = 2.6\,V \qquad (1)$$

$$I_{R0} = I_{D30} = \frac{V_R}{R} = 742.9\,\mu A \qquad (2)$$

Essendo nota la V_B si può calcolare la corrente su M2; per l'ipotesi di funzionamento in regione di saturazione:

$$I_{D20} = \frac{1}{2}(\mu_n C_{ox})_2 \left(\frac{W}{L}\right)_2 (V_{gs20} - V_{tn})^2 \qquad (3)$$

con $V_{gs20} = V_B$

quindi

$$I_{D20} = 999.2\,\mu A \qquad (4)$$

Applicando Kirchhoff al nodo B:

$$I_{D10} + I_{D30} = I_{D20} \qquad (5)$$

$$I_{D10} = I_{D20} - I_{D30} = 256.2\,\mu A \qquad (6)$$

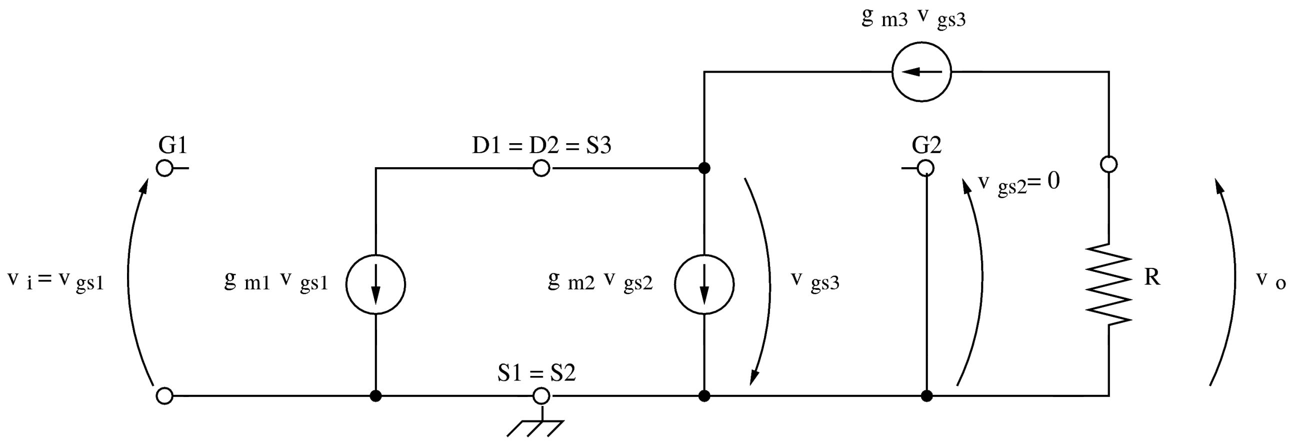
Essendo note le correnti è possibile calcolare I parametri del circuito equivalente per piccoli segnali:

$$g_{m1} = \sqrt{2(\mu_p C_{ox})_1 \left(\frac{W}{L}\right)_1 I_{D10}} = 530.9\,\mu S \qquad (7)$$

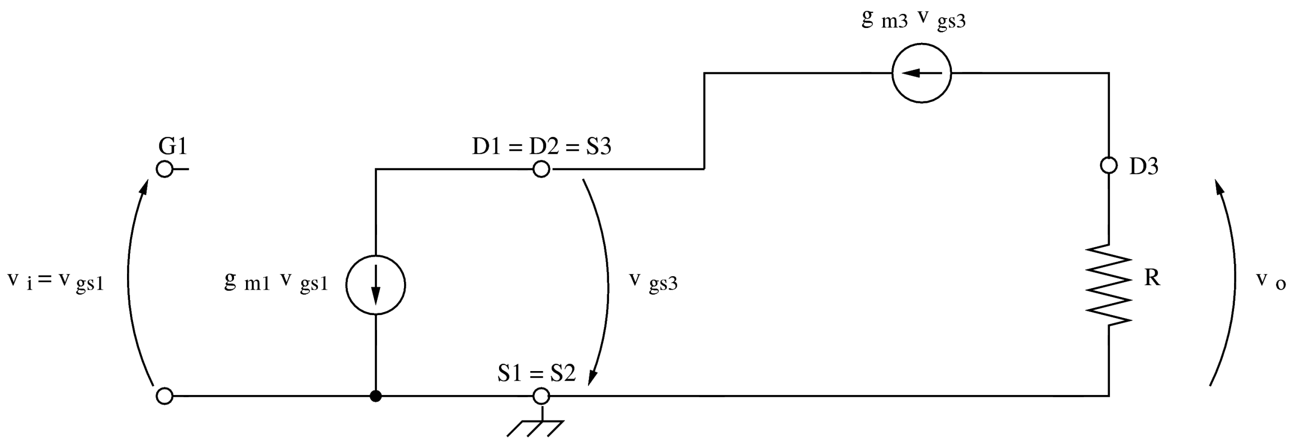
$$g_{m2}=\sqrt{2\left(\mu_n C_{ox}\right)_2\left(\frac{W}{L}\right)_2 I_{D20}}=2.7375\,mS \qquad (8)$$

$$g_{m3}=\sqrt{2\left(\mu_n C_{ox}\right)_3\left(\frac{W}{L}\right)_3 I_{D30}}=1.4929\,mS \qquad (9)$$

Per il calcolo del guadagno occorre tracciare il circuito per piccoli segnali.



che, essendo $v_{gs2}=0$ si riduce alla seguente versione:



Applicando il principio di Kirchhoff al nodo D1 si ottiene

$$g_{m1} v_{gs1}=g_{m3} v_{gs3} \qquad (10)$$

Tuttavia

$$v_{gs1}=v_i \qquad (11)$$

$$v_o=-g_{m3} v_{gs3} R \qquad (12)$$

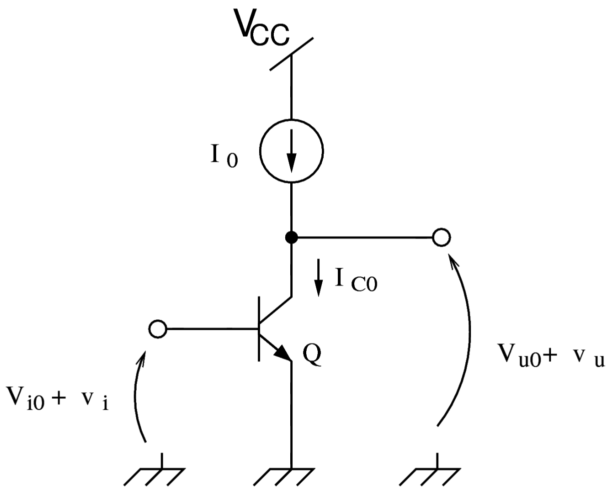
Sostituendo la (11) e la (12) nella (10) e risolvendo in modo da esplicitare la v_o in funzione della v_i si ottiene

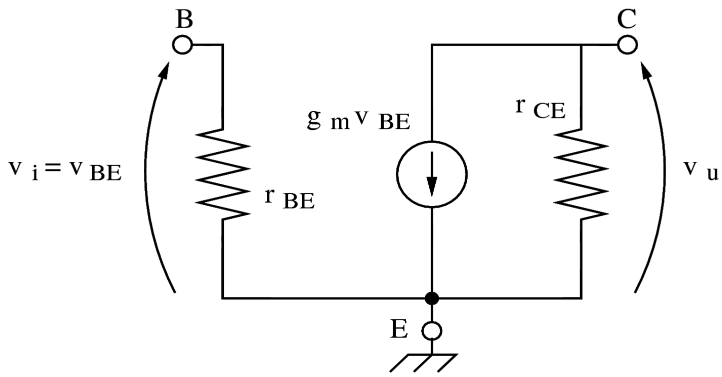
$$A_v=\frac{v_o}{v_i}=-g_{m1} R=-1.86 \qquad (13)$$

Esercizio 2

<u>Ipotesi iniziale</u>: Il transistore bipolare opera in zona attiva diretta.

Il rapporto v_u/v_i rappresenta il guadagno di tensione dello stadio ad emettitore comune riportato in figura. Essendo noto il punto di riposo determinato dalla corrente I_0 è possibile tracciare il circuito per piccoli segnali che di fatto coincide con quello del singolo transistore bipolare.





Nel quale

$$r_{BE} = \frac{\beta_F}{g_m} \qquad (1)$$

$$g_m = \frac{I_{C0}}{V_{th}} = \frac{I_{C0} q}{kT} \qquad (2)$$

$$r_{CE} = \frac{V_A}{I_{C0}} \qquad (3)$$

$$I_{C0} = I_0 \qquad (4)$$

Come noto, q rappresenta la carica elementare ($1.602 \mathrm{X} 10^{-19} C$), k rappresenta la Costante di Boltzmann ($1.38 \mathrm{X} 10^{-23} J/K$) e T denota la temperatura assoluta (nell'esempio assunta pari a $300.15 K$).

Dallo studio del semplice circuito:

$$v_u = -g_m v_{BE} r_{CE} \qquad (5)$$

$$v_{BE} = v_i \qquad (6)$$

e quindi

$$\left|\frac{v_u}{v_i}\right| = \left|-g_m r_{CE}\right| = \frac{V_A}{V_{th}} \qquad (7)$$

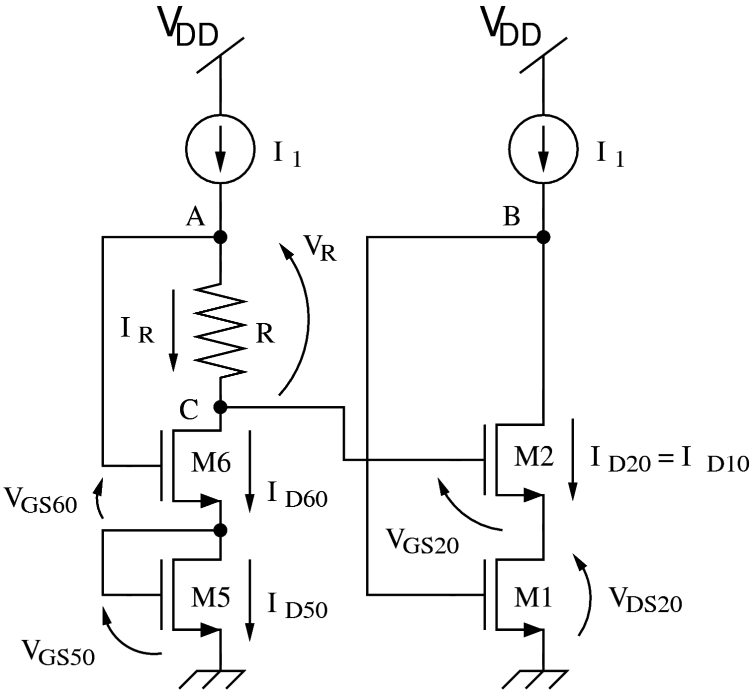
Risolvendo rispetto a V_A e imponendo la condizione richiesta

$$V_A > 500 V_{th} \qquad (8)$$

$$V_A > 12.9 V \qquad (9)$$

Esercizio 3

Ipotesi iniziale: Tutti I transistori MOSFET operanti in regione di saturazione.



Analizzando la maglia che partendo ga massa contempla V_{GS50} e V_{GS60} giungendo in A per poi giungere a massa attraverso V_{GS20} e V_{DS10} si ha

$$V_{GS50}+V_{GS60}-V_R-V_{GS20}-V_{DS10}=0 \qquad (1)$$

Osservando che

$$I_R=I_{D6}=I_{D50}=I_{D20}=I_{D10}=I_1 \qquad (2)$$

si ottiene

$$V_R=RI_1 \qquad (3)$$

$$V_{GS60}=V_T+\sqrt{\frac{2I_{D60}}{\beta_6}}=V_T+\sqrt{\frac{2I_1}{\beta_6}}=0.9\,V \qquad (4)$$

$$V_{GS50}=V_T+\sqrt{\frac{2I_{D50}}{\beta_5}}=V_T+\sqrt{\frac{2I_1}{\beta_5}}=1.12\,V \qquad (5)$$

$$V_{GS20}=V_T+\sqrt{\frac{2I_{D20}}{\beta_2}}=V_T+\sqrt{\frac{2I_1}{\beta_2}}=0.9\,V \qquad (6)$$

$$V_{GS10}=V_T+\sqrt{\frac{2I_{D10}}{\beta_1}}=V_T+\sqrt{\frac{2I_1}{\beta_1}}=1.12\,V \qquad (7)$$

Sostituendo nella (1)

$$1.12+0.9-250X10^{-6}R-0.9-V_{DS10}=0 \qquad (8)$$

Volendo

$$V_{DS10}=V_{DSSAT}=V_{GS10}-V_T=0.72\,V \qquad (9)$$

sostituendo nella (8) e risolvendo rispetto a R

$$R=1.6\,K\Omega \qquad (10)$$

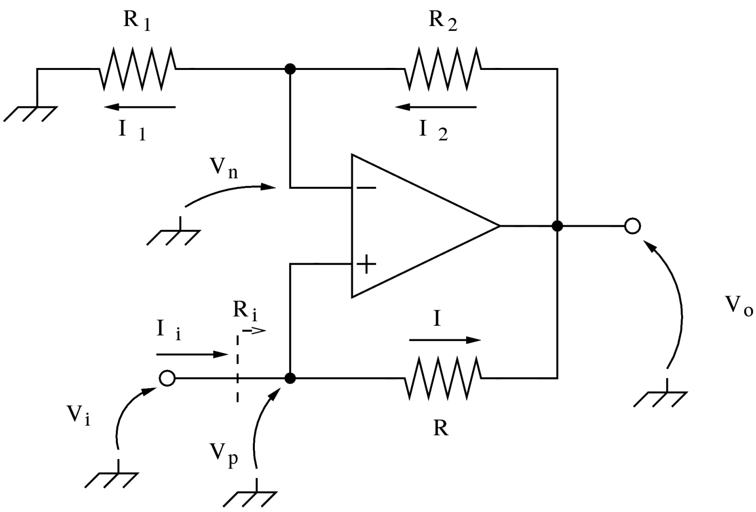
Esercizio 4

Ipotesi iniziale: Amplificatore operazionale ideale e operante in regione di alto guadagno

(A) $R_i=\infty \rightarrow I_i=0$

(B) $A_d=\infty \rightarrow v_d=v_p-v_n=0$

(C) $R_o=0$



Per l'ipotesi (B)

$$V_n=V_p=V_i \qquad (1)$$

Inoltre applicando il principio di kirchhoff ai nodi corrispondenti ai morsetti dell'amplificatore operazionale, tenuto conto dell'ipotesi (A) si ha

$$I_i=I \qquad (2)$$

$$I_1=I_2 \qquad (3)$$

Scrivendo l'equazione alla maglia contenente R_1, R_2 e si richiude su V_o si ottiene

$$R_1 I_1+R_2 I_2=V_o \qquad (4)$$

Impiegando la (3)

$$I_1(R_1+R_2)=V_o \qquad (5)$$

Inoltre, tenuto conto della (1)

$$I_1=\frac{V_n}{R_1}=\frac{V_i}{R_1} \qquad (6)$$

Sostituendo nella (5)

$$\frac{V_i}{R_1}(R_1+R_2)=V_o \qquad (7)$$

Se ora si considera la maglia che, partendo da V_i, include R e si richiude su V_o e si considera l'equazione (2) si ha

$$V_i-RI_i=V_o \qquad (8)$$

Sostituendo la (7) nella (8) e risolvendo rispetto a I_i

$$V_i-RI_i=V_i\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\rightarrow R_i=\frac{V_i}{I_i}=-R\frac{R_1}{R_2}=6.4\,K\,\Omega \qquad (9)$$

Esercizio 5

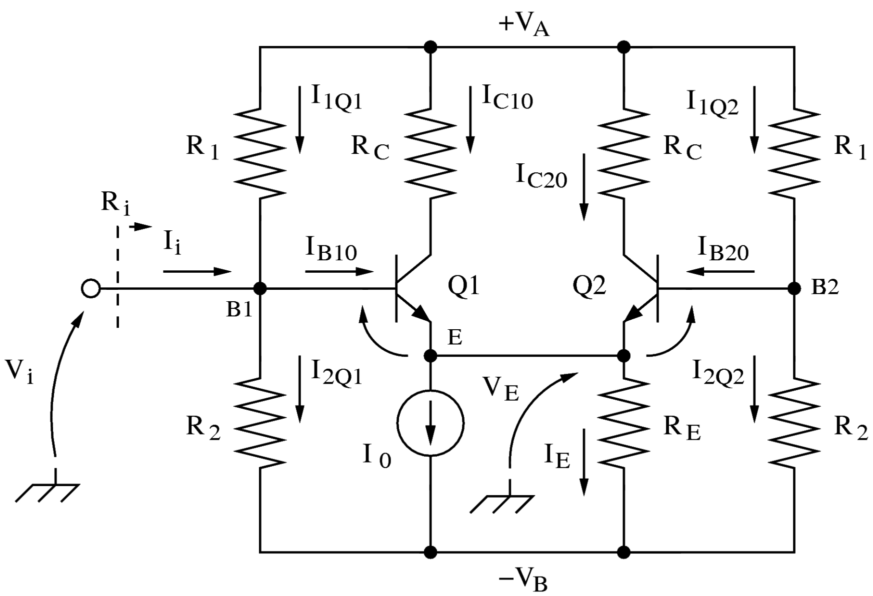
Ipotesi iniziale: Transistori bipolari operanti in zona attiva diretta.

Per la simmetria del circuito il punto di riposo dei due transistori Q1 e Q2 è identico quindi, per l'ipotesi fatta

$$V_{BE10}=V_{BE20}=V_{\gamma} \quad (1)$$

$$I_{B10}=I_{B20} \quad (2)$$

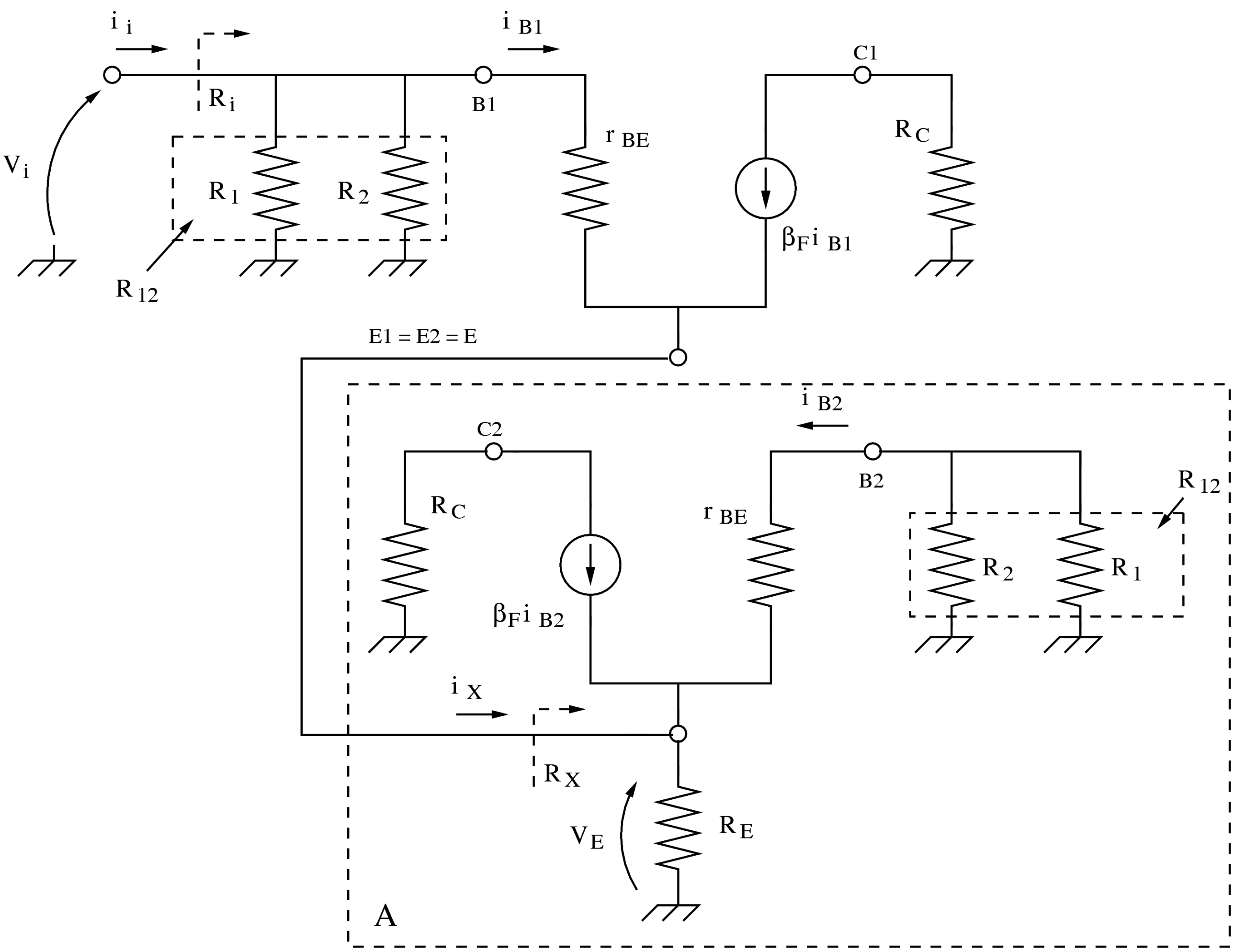
Di conseguenza anche I parametri del circuito per piccoli segnali coincidono:



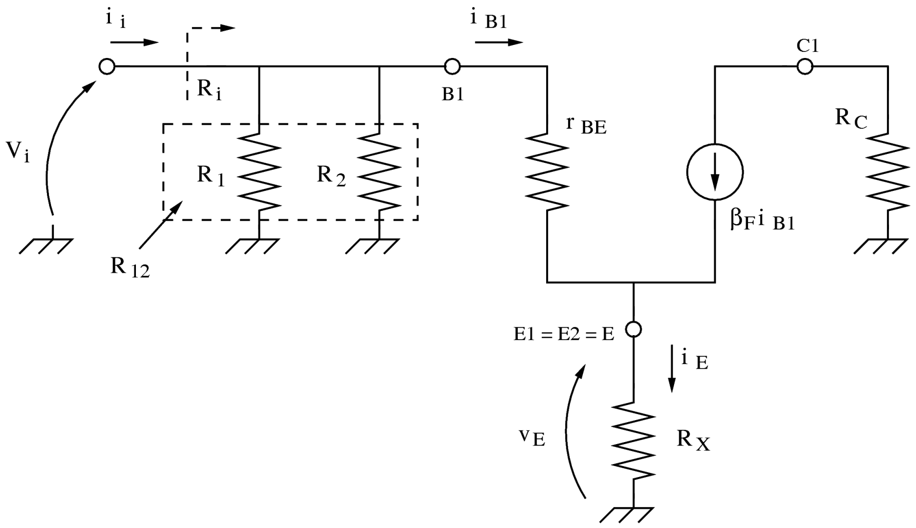
$$g_m=g_{m1}=g_{m2}=\frac{I_{C10}}{V_{th}}=3.094\,mS \quad (3)$$

$$r_{BE}=r_{BE1}=r_{BE2}=\frac{\beta_F}{g_m}=25.856\,K\Omega \quad (4)$$

Il circuito per piccoli segnali complessivo risulta il seguente:



Se R_X è la resistenza di ingresso della porzione A, la resistenza di ingresso R_i richiesta può essere calcolata studiando il circuito e quivalente seguente:



Applicando Kirchhoff al nodo B1

$$i_i - i_{B1} - i_{12} = 0 \qquad (5)$$

In essa i_{12} rappresenta la corrente sul parallelo di R_1 e R_2 (R_{12}), ovvero

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 33.333\, K\Omega \quad (6)$$

$$i_{12} = \frac{v_i}{R_{12}} \qquad (7)$$

Applicando Kirchhoff al nodo E

$$i_{B1}(1+\beta_F) = i_E \qquad (8)$$

inoltre

$$i_E = \frac{v_i - i_{B1} r_{BE}}{R_X} \qquad (9)$$

Uguagliando la (8) e la (9) è possibile ricavare i_{B1} in funzione di v_i

$$i_{B1} = \frac{v_i}{r_{BE} + R_X(\beta_F + 1)} \qquad (10)$$

Sostituendo la (7) e la (10) nella (5) e risolvendo rispetto a i_i si ottiene

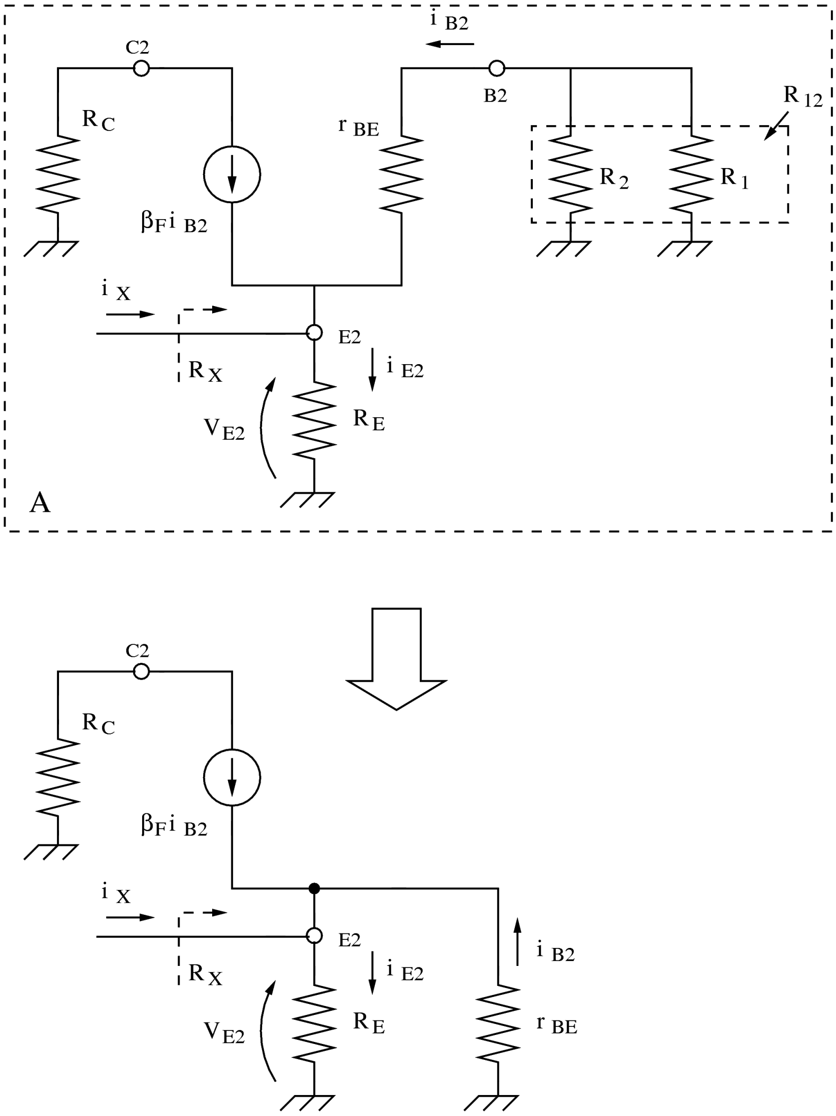
$$R_i = \frac{v_i}{i_i} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{12}} + \dfrac{1}{r_{BE} + R_X(\beta_F + 1)}} \qquad (11)$$

A questo punto occorre calcolare R_X che rappresenta la resistenza di ingresso dello stadio formato da Q2. Per fare ciò si può procedere in due modi.

METODO 1:

Si consideri il circuito di partenza e si supponga la base del transistore Q2 a potenziale costante (stadio a base comune); sotto questa ipotesi alle variazioni le resistenze R_1 e

R_2 associate allo stadio formato da Q2 risultano cortocircuitate. Il circuito equivalente associato alla porzione A risulta il seguente:



Applicando Kirchhoff al nodo E2

$$i_X + \beta_F i_{B2} + i_{B2} - i_{E2} = 0 \qquad (12)$$

nella quale

$$i_{E2} = \frac{v_{E2}}{R_E} \qquad (13)$$

Inoltre

$$v_{E2} = -i_{B2} r_{BE} \qquad (14)$$

quindi

$$i_{B2} = \frac{-v_{E2}}{r_{BE}} \qquad (15)$$

Sostituendo la (13) e la (15) nella (12) e risolvendo rispetto a i_X si ottiene

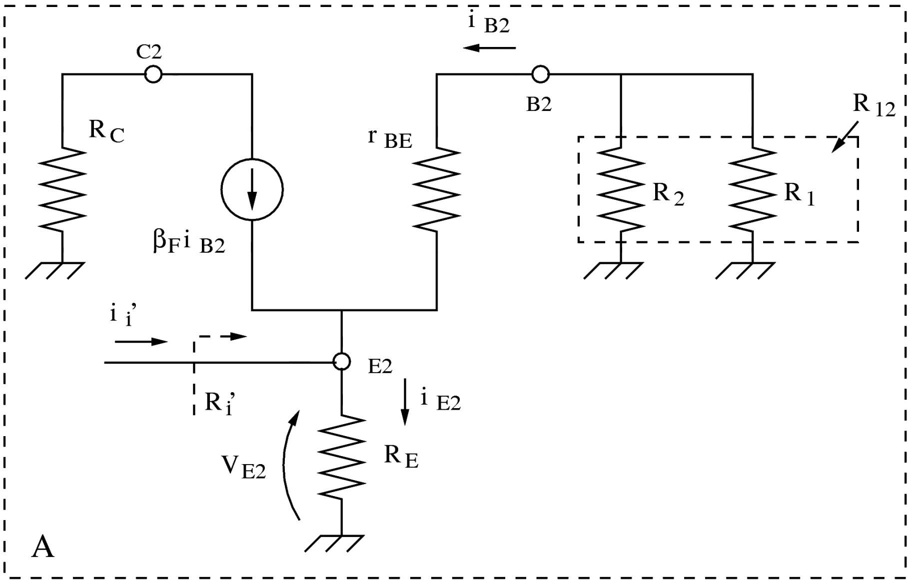
$$R_X = \frac{v_{E2}}{i_X} = \frac{R_E r_{BE}}{R_E(\beta_F + 1) + r_{BE}} = 239\,\Omega \qquad (16)$$

Sostituendo la (16) nella (11) si ottiene

$$R_i = \frac{v_i}{i_i} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{12}} + \dfrac{1}{r_{BE} + R_X(\beta_F + 1)}} = 19.188\mathrm{K}\,\Omega \qquad (17)$$

METODO 2:

Rimuovendo l'ipotesi sul potenziale di B2 occorre studiare il circuito equivalente associato alla porzione A senza semplificazioni:



Come sopra, applicando Kirchhoff al nodo E2:

$$i_X + \beta_F i_{B2} + i_{B2} - i_{E2} = 0 \qquad (18)$$

nella quale

$$i_{E2} = \frac{v_{E2}}{R_E} \qquad (19)$$

In questo caso

$$v_{E2} = -i_{B2} R_{12} - i_{B2} r_{BE} = -i_{B2}\left(R_{12} + r_{BE}\right) \qquad (20)$$

dalla quale

$$i_{B2} = \frac{-v_{E2}}{R_{12} + r_{BE}} \qquad (21)$$

Sostituendo la (19) e la (21) nella (18) e risolvendo rispetto a i_X si ottiene

$$R_X = \frac{v_{E2}}{i_X} = \frac{R_E\left(r_{BE} + R_{12}\right)}{R_E(\beta_F + 1) + r_{BE} + R_{12}} = 422\,\Omega \qquad (22)$$

Sostituendo la (22) nella (11) si ottiene

$$R_i = \frac{v_i}{i_i} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{12}} + \dfrac{1}{r_{BE} + R_X(\beta_F + 1)}} = 21.433\mathrm{K}\,\Omega \qquad (23)$$

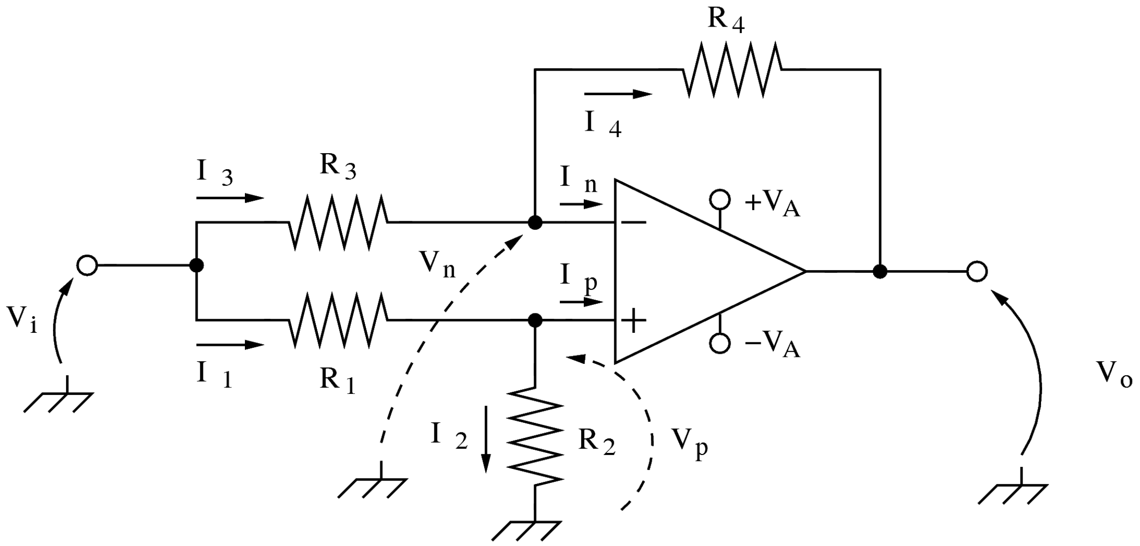
Esercizio 6

Ipotesi iniziale: Amplificatore operazionale ideale e operante in regione di alto guadagno

(A) $R_i=\infty \rightarrow I_i=0$

(B) $A_d=\infty \rightarrow v_d=v_p-v_n=0$

(C) $R_o=0$



Per l'ipotesi (A)

$$I_p=0 \rightarrow I_1=I_2=\frac{V_i}{R_1+R_2} \qquad (1)$$

quindi

$$V_p=V_i\frac{R_2}{R_1+R_2} \qquad (2)$$

e per il cortocircuito virtuale, ipotesi (B),

$$V_n=V_p=V_i\frac{R_2}{R_1+R_2} \qquad (3)$$

Sempre per l'ipotesi (A)

$$I_n=0 \rightarrow I_3=I_4=\frac{V_i-V_n}{R_3}=V_i\left[\frac{1}{R_3}-\frac{R_2}{R_3(R_1+R_2)}\right] \qquad (4)$$

S V_i crivendo l'equazione della maglia che partendo da V_i si richiude su V_u passando per R_3 e R_4 si ottiene

$$V_i-R_3I_3-R_4I_4-V_u=0 \qquad (5)$$

Impiegando la (4) e risolvendo rispetto a V_u

$$V_i-V_i\left[\frac{1}{R_3}-\frac{R_2}{R_3(R_1+R_2)}\right](R_3+R_4)-V_u=0 \qquad (6)$$

dalla quale

$$V_u=V_i\frac{1}{R_1+R_2}\left[R_2-\frac{R_1R_4}{R_3}\right] \qquad (7)$$

L'uscita raggiunge il massimo valore in corrispondenza del massimo valore dell'ingresso, quindi

$$V_u^{MAX} = V_i^{MAX} \frac{1}{R_1 + R_2} \left[R_2 - \frac{R_1 R_4}{R_3} \right] \quad (8)$$

Come noto il massimo valore raggiungibile dal terminale di uscita che mantiene l'amplificatore operazionale in regione di alto guadagno è in prima approssimazione il valore della tensione di alimentazione V_A , quindi ponendo $V_u^{MAX} = V_A$ e risolvendo la (8) rispetto a V_i^{MAX} si ottiene

$$V_i^{MAX} = V_u^{MAX} \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} \left[R_2 - \frac{R_1 R_4}{R_3} \right]} = 8\mathrm{V} \qquad (9)$$

In alternativa si poteva pensare di applicare la sovrapposizione degli effetti considerando le due seguenti situazioni: V_i applicato ad R_3 con il terminale di R_1 a massa; V_i applicato ad R_1 con il terminale di R_3 a massa.