

Appunti di:

Controlli Automatici

A cura di: Francesco di Dio

francesco1983@tele2.it

Indice

Controlli Automatici	1
Indice	2
1. Introduzione	4
Obiettivi del Corso.....	4
Il Controllo a Retroazione.....	4
2. Esempi di Modelli e Sistemi di Controllo	5
2.1 Modello Motore a tensione costante	5
Equazioni del Modello	5
Schema a blocchi dettagliato	5
Schema a blocchi sintetico	6
Analisi quantitativa.....	6
Conclusioni.....	6
2.2 Controllo di Livello	7
Modello Matematico del Serbatoio	7
Schema a Blocchi del Serbatoio	7
Schema a Blocchi Sintetico del Sistema	7
Analisi delle condizioni d'equilibrio del Sistema	8
Conclusioni.....	8
2.3 Schema Standard del Controllo a Retroazione	9
Riduzione a Reazione Unitaria.....	10
Separazione Processo Controllore.....	11
2.4 Semplificazioni con lo Spazio di Stato	12
2.5 Controllo di Temperatura	13
Modello dello Scambiatore.....	13
Schema dettagliato scambiatore di calore	14
Schema dello Scambiatore "Standardizzato"	15
Schema dello scambiatore con lo Spazio di Stato	15
Funzione di trasferimento (Tecnica).....	16
2.6 Modello del Diodo Controllato	17
3. Analisi dei Sistemi di Controllo	19
3.1 Scelta dei parametri progettuali e Stabilità del Sistema	19
Esempio: Controllo di Livello	19
4. Relazione Tra Specifiche e Parametri di progetto	22
4.1 Metodo Di Nyquist per la Stabilità	22
Studio Della Stabilità: I Diagrammi di Nyquist.	23
Margini di Fase e Di Guadagno.....	27
4.2 Studio della Precisione	28
Rapporto ingresso-errore	31
Calcolo pratico dell'errore.....	32
Risposta ai disturbi.....	33
4.3 Analisi della Risposta Transitoria	35
Casi di Studio	36
I parametri della risposta Transitoria	38
4.4 La Carta Di Nichols	40
Esempi: Carta di Nichols	44
4.5 Studio della Robustezza: Funzione di Sensibilità	46
Robustezza del sistema per il singolo parametro	47
4.6 Stabilità Robusta	48
Esempio di Stabilità Robusta: Motore a Controllo In Corrente (V costante)	48
Stabilità Robusta e Precisione Robusta.....	49
5. Sintesi di $G(s)$	53
5.1 Sintesi di $G(s)$: Reti Compensatrici	53
La Funzione Anticipatrice	54
La funzione Attenuatrice	55
Regolatori P.I e Regolatori P.I.D.....	56

5.2 Sintesi di $G(s)$: Esercizi Pratici per Funzioni Compensatrici	58
Funzione Anticipatrice:	58
Funzione Attenuatrice.....	59
Funzione Anticipatrice: Caso II	60
Sintesi con più reti compensatrici.....	61
6. Analisi con il Luogo delle Radici	62
6.1 Calcolo del Luogo delle Radici	62
6.2 Sintesi di $G(s)$ con il Luogo delle Radici	64

1. Introduzione

Il corso di Controlli automatici prevede l'analisi e la progettazione di sistemi a comando automatico, per esempio, il controllo della temperatura di una caldaia. Per potere effettuare studi di analisi e progettazione di sistemi con controlli (comandi) automatici, occorre:

- ⇒ Modellizzare matematicamente il sistema;
- ⇒ Analizzare come risponde il sistema;
- ⇒ Progettare il controllo nel modo migliore possibile;

Obiettivi del Corso

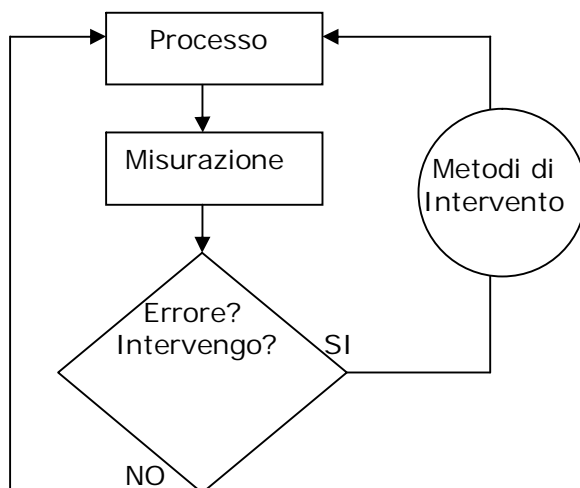
- Modelli Matematici dei Sistemi di Controllo:
 - ⇒ Controllo di Velocità;
 - ⇒ Controllo di Temperatura;
 - ⇒ Controllo di Livello;
 - ⇒ Controllo di posizione;
- Metodi di Analisi dei Modelli;
- Metodi di Progetto:
 - ⇒ Luogo delle Radici;
 - ⇒ Autovalori;
 - ⇒ Controllo Ottico;
 - ⇒ Diagrammi di Bode;
- Progettazione Assistita:
 - ⇒ Matlab;
 - ⇒ Simulink;

II Controllo a Retroazione

In questo corso ci occuperemo prevalentemente del controllo a retroazione. Il controllo a retroazione ottiene un obiettivo dal sistema, valutando di volta in volta il suo intervento attraverso delle misurazioni sul parametro da controllare.

Si basa su tre fattori:

- Misura
- Errore
- Comando



2. Esempi di Modelli e Sistemi di Controllo

2.1 Modello Motore a tensione costante

Modelliamo un motore elettrico a tensione costante:

Le variabili in gioco sono:

V	Tensione;	
Ω	Velocità angolare del motore;	
I	Corrente (ampere);	$I = C_m / K_m$
R	Resistenza;	
E	Forza elettro contro motrice;	$E = K_m \Omega$;
K_m	Coefficiente d'attrito del motore(spazzole,ecc...)	
C_m	Coppia motrice;	$C_m = K_m I$;
C_r	Coppia resistente;	$C_r = C_d + F \Omega$
C_d	Coefficiente di disturbi esterni (avarie, meccanica,ecc...)	
F	Coefficiente d'attrito volvente;	

Equazioni del Modello

Il motore elettrico è caratterizzato da due elementi, uno di tipo elettrico, l'altro di tipo meccanico.

Le equazioni che lo descrivono tengono conto di questi due elementi;

Parte Elettrica

$$L \frac{dI}{dt} + RI + E = V$$

Parte Meccanica

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_m - C_r$$

Con le dovute sostituzioni, dalla prima equazione, ci ricaviamo (Integrando) I:

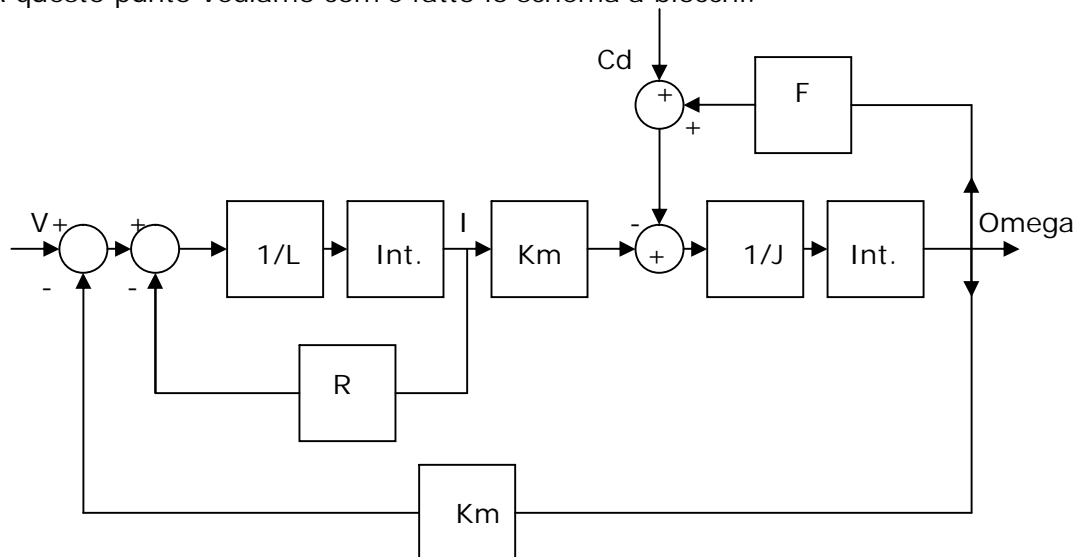
$$V - (K_m \Omega) - RI + \frac{1}{L} \int \left(\frac{dI}{dt} \right) dt = 0$$

Dalla seconda grazie a I ricaviamo Ω :

$$(K_m I) - (C_d + F \Omega) + \frac{1}{J} \int \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) dt = 0$$

Schema a blocchi dettagliato

A questo punto vediamo com'è fatto lo schema a blocchi.



Schema a blocchi sintetico

Possiamo sintetizzare questo schema ed eliminare parte degli anelli andando a manipolare le equazioni del modello utilizzando la trasformata di Laplace.

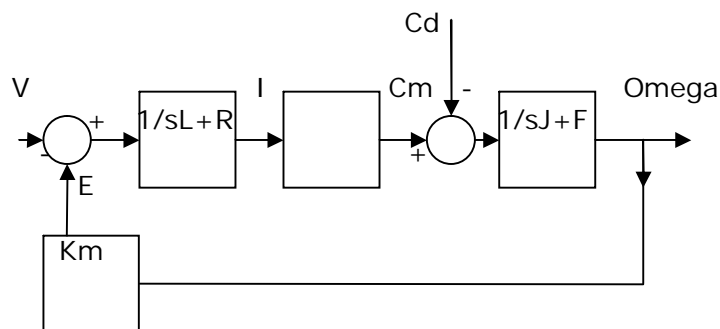
$$L \frac{dI}{dt} = sLI \quad \text{e} \quad J \frac{d\Omega}{dt} = sJ\Omega$$

Applicandole avremo:

$$1) \quad sLI + RI + E = V \quad \text{da cui:} \quad I = \frac{V - E}{sL + R}$$

$$2) \quad sJ\Omega = C_m - C_d - F\Omega \quad \text{da cui:} \quad \Omega = \frac{C_m - C_d}{sJ + F}$$

In questo modo avremo uno schema più sintetico in questo modo:



Analisi quantitativa

Analisi quantitativa ci permette di conoscere i parametri dai quali dipende il sistema quando si trova in condizioni costanti. A questo scopo si trattano come valori costanti tutte le variabili, e si annullano tutte le derivate. (La derivata di una costante è 0!).

Quindi le equazioni che descrivono il motore diventano:

$$1) \quad I = \frac{V - E}{R} \quad 2) \quad C_m = C_r$$

Dalla 2 sostituendo otteniamo: $K_m I = C_d + F\Omega$

Dalla 1 otteniamo: $K_m \left(\frac{V - K_m \Omega}{R} \right) = C_d + F\Omega =$

$$K_m V - C_d = \frac{K_m^2 \Omega}{R} + F\Omega =$$

$$\Omega = \left[\frac{1}{FR + K_m^2} \right] (K_m V - RC_d)$$

Relazione Statica del Motore

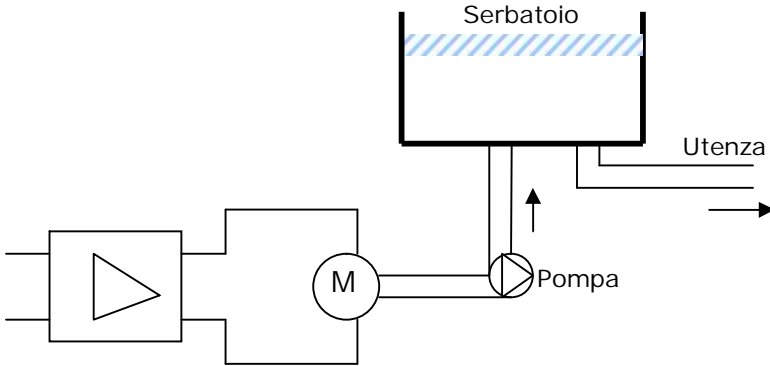
(Dato che $\left[\frac{1}{FR + K_m^2} \right]$ è costante possiamo indicarlo con K')

Conclusioni

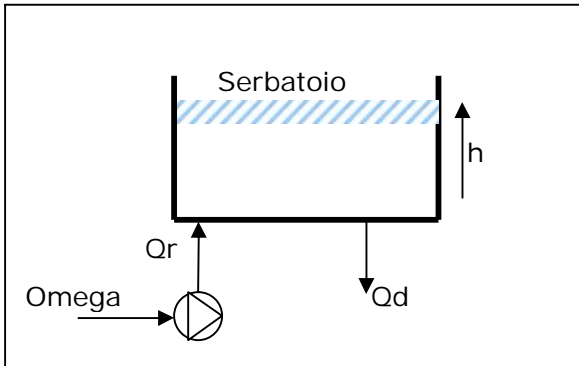
Abbiamo stabilito quali sono le equazioni che descrivono un modello di un semplice motore, abbiamo costruito lo schema dettagliato e sintetico. Ma la parte più importante è quella che riguarda la statica del modello, in quanto posta a sistema con l'equazioni statiche di altri sistemi interconnessi ad un motore, permette di analizzare la scelta dei parametri del sistema di controllo.

2.2 Controllo di Livello

Esaminiamo il modello di un sistema motore-pompa-serbatoio-controllo; Il sistema di controllo deve imporre che il livello dell'acqua del serbatoio sia costante.



Modello Matematico del Serbatoio



$$\frac{dV}{dt} = Q_r - Q_d$$

Il volume deve eguagliare la
Quantità d'acqua totale;

$$Q_r = K_p \Omega$$

La quantità Q_r è proporzionale alla capacità della pompa (K_p)

Ricorda che:

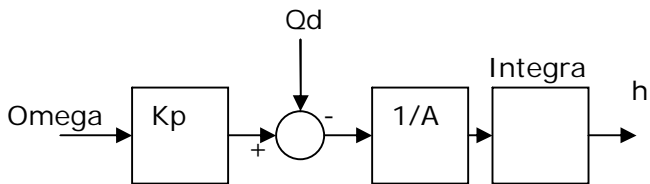
$$V = Ah;$$

L'equazione che descrive il modello è:

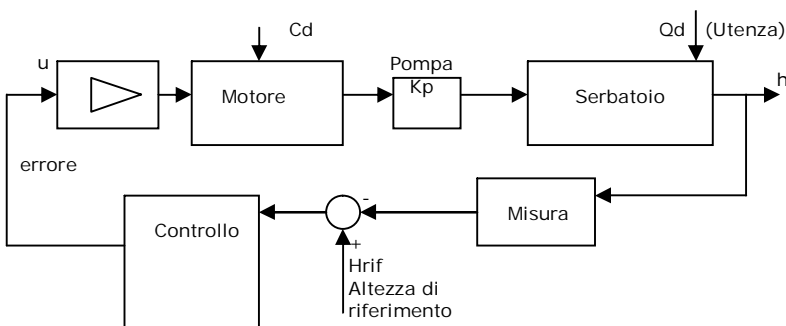
$$A \frac{dh}{dt} = K_p \Omega - Q_d$$

Modello Matematico Serbatoio

Schema a Blocchi del Serbatoio



Schema a Blocchi Sintetico del Sistema



Analisi delle condizioni d'equilibrio del Sistema

Una volta costruito il modello matematico di tutto il sistema, è necessario studiarlo nella condizione di equilibrio, al fine di stabilire quali sono i parametri sui quali intervenire nella progettazione del controllo a retroazione.

⇒ In condizione di equilibrio, nel serbatoio, l'acqua che entra eguaglia l'acqua che esce.

$$K_p \Omega = Q_d$$

⇒ In condizione di equilibrio la velocità del motore (vedi Modello Motore) è costante e vale:

$$\Omega = K'(K_a K_m u - RC_d)$$

⇒ Infine in condizione di equilibrio, anche l'ingresso del sistema sarà costante e vale:

$$u = K_c (h_{rif} - h)$$

I parametri sui quali possiamo intervenire sono K_a e K_m .

Andando a sostituire le variabili avremo un'unica equazione che le lega tutte:

$$h - h_{rif} = \frac{1}{K_p K' K_m K_a K_c} Q_d + \frac{1}{K_m K_a K_c} C_d$$

Dato che il nostro obiettivo è di azzerare la quantità $h - h_{rif}$, è chiaro che dobbiamo scegliere i parametri del nostro controllo (il guadagno K_a) quanto più grande possibile, in modo che entrambi gli addendi del secondo membro tendano a zero.

Conclusioni

La scelta in casi come questo di guadagno (K_a) molto grande permette:

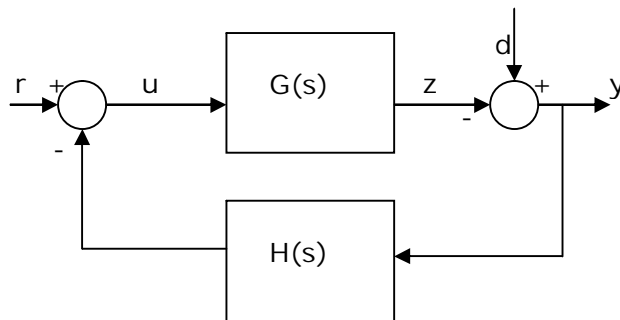
1. **Protezione da disturbi esterni;**
2. **Protezione da errori del modello;**

Attenzione!

Non sempre è possibile scegliere il guadagno così grande per diversi motivi, (limitazioni tecniche, specifiche, concettuali) a volte è possibile che il sistema oscilli anziché convergere per un valore di K troppo grande.

2.3 Schema Standard del Controllo a Retroazione

Non è necessario determinare lo schema dettagliato di ogni componente del sistema sul quale vogliamo effettuare un controllo. In generale tutti i sistemi a retroazione possono essere ricondotti ad un unico modello.



Variabile	Descrizione
D	Disturbo del sistema
r	Riferimento del controllo
G(s)	Funzione di Trasferimento

I segni degli addizionatori sono convenzionali e possono cambiare da sistema a sistema. Le equazioni del sistema sono:

$$\begin{cases} y = d \pm z \\ z = uG(s) \\ u = r \pm H(s)y \end{cases} \text{ sostituendo possiamo ottenere una variabile in funzione delle altre.}$$

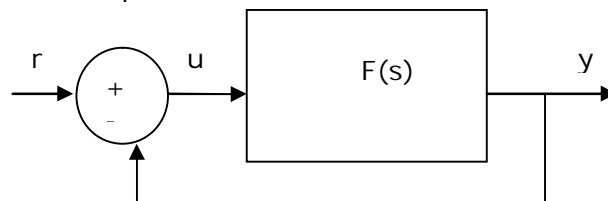
In questo caso y e z con la configurazione in figura.

$$y = \frac{d}{1 + G(s)H(s)} + \frac{rG(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$z = \frac{-G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}d + \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}r$$

Basta ora sostituire le variabili r,d,G(s) e H(s) con le rispettive funzioni del sistema che vogliamo modellizzare.

Ovviamente non sempre lo schema che vogliamo modellizzare è del tipo (o assimilabile) allo schema standard. Per esempio:



In questo caso, facendo i dovuti calcoli, si trova che la funzione di trasferimento (W(s)) associata a questo schema con ingresso r e uscita y è:

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

Dato che F(s) è a sua volta una funzione di trasferimento, si può scrivere:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

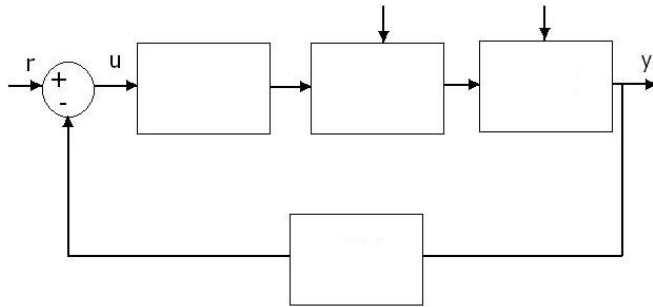
E quindi:

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}$$

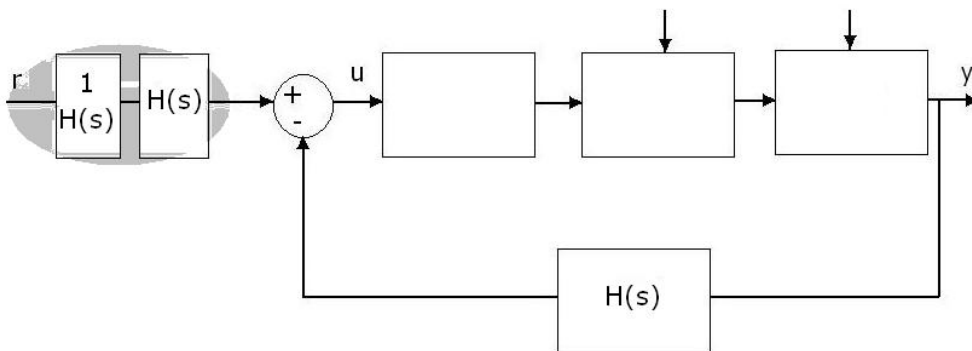
Riduzione a Reazione Unitaria

Questa riduzione consente di semplificare notevolmente i calcoli e ci permette di effettuare altre semplificazioni in maniera più agevole.

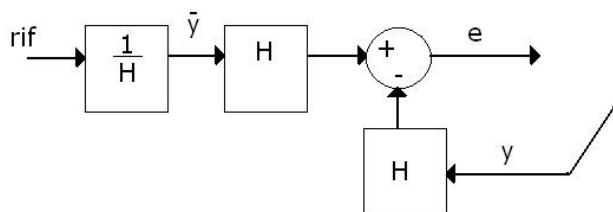
Generalmente abbiamo più di un blocco che descrive il nostro sistema, per esempio:



Manipoliamo il nostro sistema aggiungendo due blocchi che non ne alterino le caratteristiche:



Dando un nome ai diversi rami così creati possiamo fare delle manipolazioni al fine di eliminare il ramo di retroazione $H(s)$.

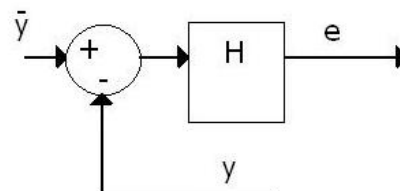


Allora possiamo scrivere:

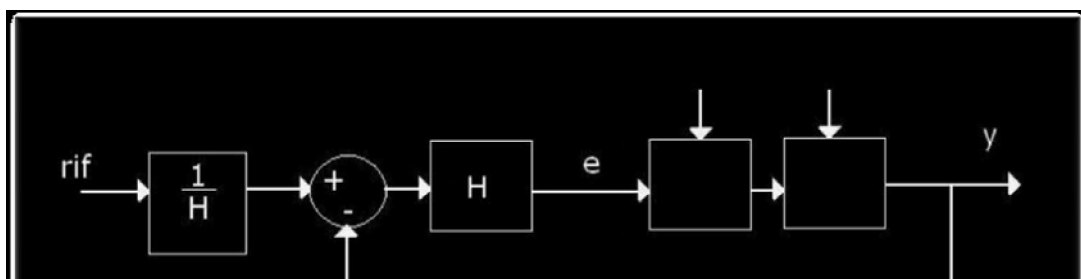
$$e = \bar{y}H - yH$$

$$e = H(\bar{y} - y)$$

Quest'ultima equazione ci dice che il seguente sistema è equivalente al precedente:



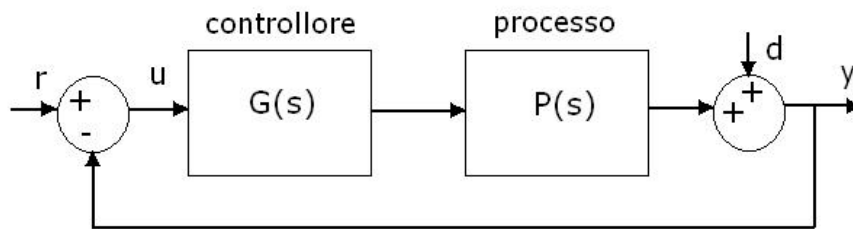
Questo comporta che, a patto di post-moltiplicare il riferimento per $1/H$, e aggiungere H a monte dell'errore, permette di eliminare il ramo di retroazione e semplificare lo schema a **reazione unitaria**.



Separazione Processo Controllore

A volte è molto utile separare i blocchi in modo da esplicitare il processo dal dispositivo di controllo. In questo modo è possibile esplicitare il disturbo in modo da potere ottenere una funzione di trasferimento che legghi l'uscita al disturbo stesso. Nella maggior parte dei casi abbiamo due possibili schemi:

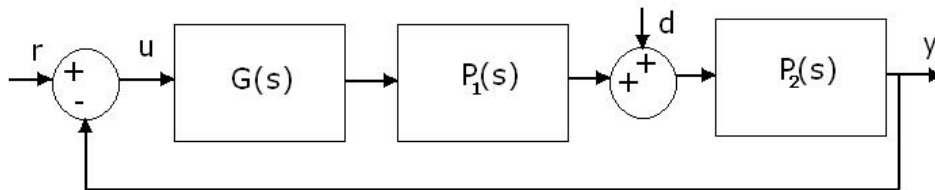
Disturbo a valle del processo:



Se indichiamo con $F(s) = G(s)P(s)$, otteniamo che:

$$\frac{\text{uscita}}{\text{riferimento}} = W_{rif}(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)} \quad \left| \quad \frac{\text{uscita}}{\text{disturbo}} = W_d(s) = \frac{1}{1 + F(s)}$$

Disturbo in un punto del processo:



In questo caso abbiamo:

$$P(s) = (P_2(s) + d)P_1(s)$$

$$F(s) = G(s)P(s)$$

$$Y = P_2(s)(d + P_1(s)G(s)u);$$

Facendo i calcoli otteniamo:

$$\frac{\text{uscita}}{\text{riferimento}} = W_{rif}(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)} \quad \left| \quad \frac{\text{uscita}}{\text{disturbo}} = W_d(s) = \frac{P_2(s)}{1 + F(s)}$$

Per tutti gli altri casi, per ricavare la funzione di trasferimento che lega una particolare entrata (quindi anche un disturbo) all'uscita, basta dividere la funzione di trasferimento che si avrebbe in assenza di retroazione a partire dall'ingresso desiderato, per la somma dell'unità più il di anello.

2.4 Semplificazioni con lo Spazio di Stato

Un modo forse più semplice per semplificare un modello, è quello di utilizzare le equazioni di stato del modello per poterlo ricondurre ad un Sistema Lineare del tipo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

2.1 Sistema lineare

Essendo il nostro modello generalmente descritto da equazioni di questo tipo, è possibile scriverlo sotto questa forma, così come ci viene insegnato nella Teoria dei Sistemi e calcolarne le sue funzioni di trasferimento che legano le entrate del sistema, alle uscite. In questo modo lo schema a blocchi risulta di molto semplificato.

Ricordiamo come si ottengono le funzioni di trasferimento $W(s)$ a partire da un sistema lineare. $W(s)$ è una matrice che si ottiene:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

2.2 Equazioni di trasferimento

Generalmente si procede in questo modo:

1. Si calcola la matrice $(sI - A)$
2. Si calcola l'inversa:
 - ⇒ Si calcola il determinante della matrice $(sI - A)$ che indichiamo con Ds ;
 - ⇒ Si calcolano i complementi algebrici di tutti gli elementi di $(sI - A) = A_{ij}$;
 - ⇒ Il rapporto $\frac{A_{i,j}}{Ds}$ dà l'inversa di $(sI - A)$;
3. Si calcola il prodotto con le matrici C e B ;

In questo modo, gli elementi del vettore $W(s)$ sono sempre dei rapporti di polinomi.

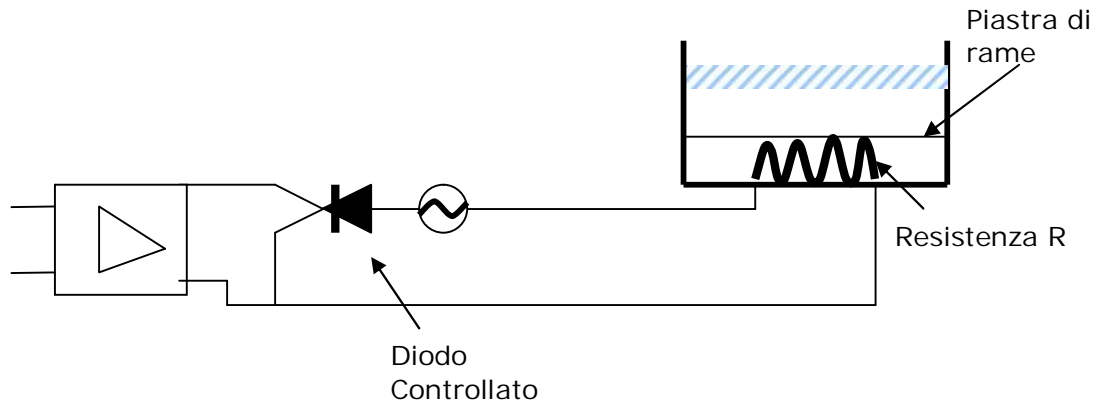
Al denominatore abbiamo Ds di grado n ;

Al numeratore un polinomio in s di grado $n-1$;

L'esempio di questo procedimento è riportato nell'esempio del controllo di temperatura.

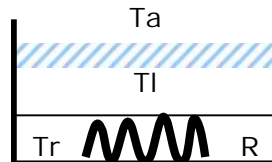
2.5 Controllo di Temperatura

Vediamo di applicare lo **schema standard** ad un sistema di controllo della temperatura. Il sistema in questione è quello in figura.



Modello dello Scambiatore

La parte più importante del sistema è lo scambiatore.



P	Potenza dissipata dalla resistenza R
R	Resistenza
Tr	Temperatura della Resistenza
Tl	Temperatura del liquido
Ta	Temperatura dell'ambiente
Kt	Coefficiente di proporzionalità della temperatura (Resistenza – Liquido)
K2	Coefficiente di proporzionalità della temperatura (Liquido-Ambiente)
Cr	Capacità termica della resistenza
Cl	Capacità termica del liquido

Le equazioni che descrivono lo scambiatore sono dei bilanci termici.

Il primo tra Resistenza e Liquido, il secondo tra Liquido e Ambiente.

Bilancio Termico	Equazione	Condizione d'equilibrio
R-L	$P = K_t (T_r - T_l) + C_r \frac{dT_l}{dt}$	$P = K_t (T_r - T_l)$
L-A	$K_t (T_r - T_l) = K_2 (T_l - T_a) + C_l \frac{dT_l}{dt}$	$K_t (T_r - T_l) = K_2 (T_l - T_a)$

Il nostro sistema, sinteticamente è così fatto:

Entrate	P, T_a
Variabili di Stato	T_r, T_l
Uscite	T_l

Schema dettagliato scambiatore di calore

Come si può vedere lo schema dettagliato risulta troppo complicato, utilizzeremo lo schema standard per semplificarlo. Dividiamo innanzitutto lo schema in due blocchi: Blocco A e Blocco B. Nel Blocco A individuiamo le analogie con lo schema standard per associare alle variabili dello schema standard ($Y, Z, G(s), H(s), \text{ecc...}$) quelle del nostro sistema.

Blocco A

Il blocco A è perfettamente analogo allo schema standard.

$$P=r;$$

$$G(s) = \frac{1}{Cs};$$

$$H(s) = Kt;$$

$$d=TL;$$

Quello che ci interessa calcolare è la Y del sistema in quanto è indispensabile per sintetizzare il blocco B. Quindi calcoliamo la y (Vedi Schema Standard) che vale:

$$y = \frac{d}{1 + G(s)H(s)} + \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} r$$

Sostituendo le variabili e semplificando:

$$Y = \frac{C_1 s}{C_1 s + K_t} T_l + \frac{1}{C_1 s + K_t} P$$

In questo modo possiamo costruirci uno schema notevolmente più semplice del precedente.

Blocco B

Il blocco B è anch'esso analogo allo schema standard, solo che in questo caso dobbiamo esplicitare la variabile (z) che rappresenta l'entrata del disturbo nel blocco A.

La variabile z nello schema standard vale:

$$z = \frac{-G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} d + \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} r$$

$$G(s) = Cls;$$

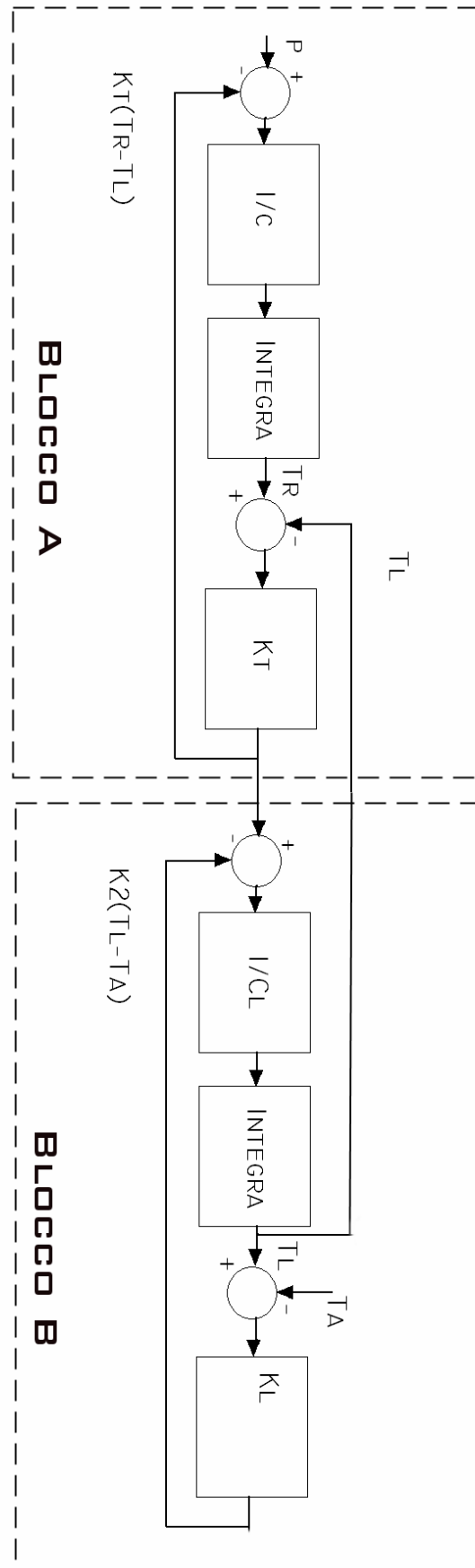
$$H(s) = Kl;$$

$$d=Ta;$$

$$r = \text{l'uscita del blocco A};$$

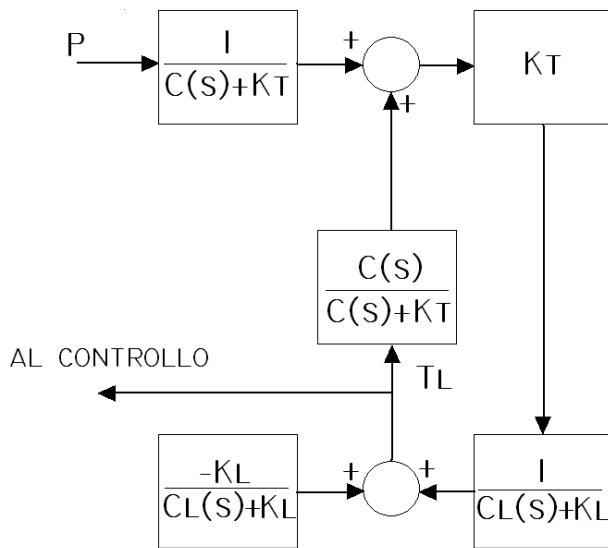
Sostituuiamo, semplifichiamo e otteniamo:

$$z = \frac{-T_a K_l}{C_l s + K_l} + \frac{r}{C_l s + K_l}$$



Schema dello Scambiatore "Standardizzato"

A partire dalle due equazioni che abbiamo trovato possiamo costruire uno schema sicuramente più sintetico:



Come possiamo vedere lo schema risulta più semplice anche se si sono "complicate" le equazioni all'interno dei blocchi.

Schema dello scambiatore con lo Spazio di Stato

Le equazioni di stato che descrivono lo scambiatore abbiamo visto essere:

1. $\frac{dT_r}{dt} = \frac{1}{C_r} [P - K_t(T_r - T_l)]$
2. $\frac{dT_l}{dt} = \frac{1}{C_l} [K_t(T_r - T_l) - K_2(T_l - T_a)]$

E' facile identificare le variabili di stato, dato che sono quelle che vengono derivate. Lo schema comprende le variabili u, x e y con:

Variabile	Descrizione	Specifica	
u	Vettore a due componenti	$P; T_a;$	Ingressi
x	Vettore a due componenti	$T_r; T_a;$	Variabili di Stato
y	Vettore a un componente	T_l	Uscite

Il sistema diventa quindi:

$$\begin{pmatrix} \dot{T}_r \\ \dot{T}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{K_t}{C_r} & \frac{K_t}{C_r} \\ \frac{K_t}{C_l} & -\frac{K_t}{C_l} - \frac{K_2}{C_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_r \\ T_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_r} & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ T_a \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_r \\ T_l \end{pmatrix}$$

Funzione di trasferimento (Tecnica)

Avendo le matrici A, B e C è possibile determinare le funzioni di trasferimento associate al sistema.

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$W(s) = C \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - A \right)^{-1} B$$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s + \frac{K_t}{C_r} & -\frac{K_t}{C_r} \\ -\frac{K_t}{C_l} & s + \frac{K_t}{C_l} - \frac{K_2}{C_l} \end{pmatrix} \quad \det(sI - A) = s^2 + a_1s + a_2 = Ds;$$

Il complementare algebrico di $sI - A$ fratto Ds dà l'inversa di $(sI - A)$.

Il complementare algebrico di una matrice 2x2 di tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Quindi il complementare algebrico di $(sI - A)$ vale:

$$\begin{pmatrix} s + \frac{K_t - K_2}{C_l} & \frac{K_t}{C_r} \\ \frac{K_t}{C_l} & s + \frac{K_t}{C_r} \end{pmatrix} \frac{1}{Ds}$$

Che moltiplicato per $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ diventa: $\begin{pmatrix} \frac{K_t}{C_l} & s + \frac{K_t}{C_r} \end{pmatrix};$

Che moltiplicato per $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_r} & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}$ diventa:

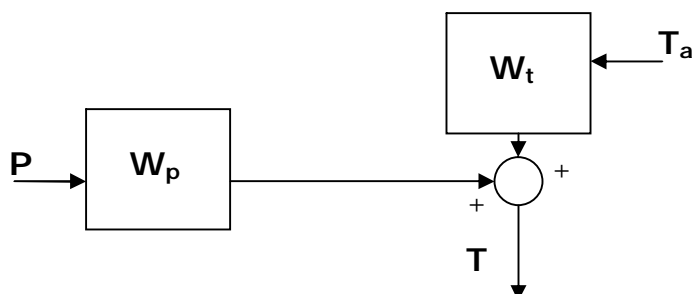
$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{K_2}{C_l C_r} & \frac{K_2}{C_l} \left(s + \frac{K_t}{C_r} \right) \end{pmatrix} \frac{1}{Ds}$$

Indichiamo con:

$$W_P(s) = \frac{\frac{K_2}{C_l C_r}}{Ds} \quad \text{La funzione di trasferimento che lega } P \text{ all'uscita;}$$

$$W_T(s) = \frac{\frac{K_2}{C_l} \left(s + \frac{K_t}{C_r} \right)}{Ds} \quad \text{La funzione di trasferimento che lega } T \text{ all'uscita;}$$

A questo punto possiamo costruire lo Schema a Blocchi:

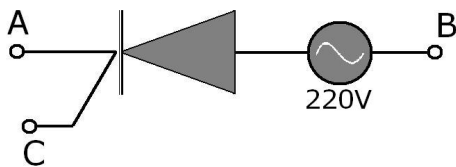


2.6 Modello del Diodo Controllato

Il problema del controllo che stiamo analizzando è quello di potere variare la potenza dissipata (attraverso il diodo) nella resistenza, e fare in modo che questo processo di controllo sia poco dispendioso. A questo scopo ci serviamo di un **diodo controllato**, che ha un comportamento diverso da un **diodo semplice**.

Il **Diodo "semplice"** lascia passare la corrente semplicemente quando la tensione è positiva: siamo in regime di corrente alternata, quindi il grafico della tensione è il seguente.

Il **diodo controllato** invece si comporta come quello semplice, ma lascia passare la tensione soltanto quando è presente un segnale (in verde nel grafico), (generalmente un piccolo impulso), nel ingresso "C".



Ora dobbiamo vedere come possiamo controllare la corrente efficace, che nel grafico è rappresentata dall'area sottesa dalla funzione V nell'ultimo grafico e che varia semplicemente spostando nel tempo l'impulso nell'ingresso C.

La corrente efficace è definita quindi come:

$$I_{eff} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

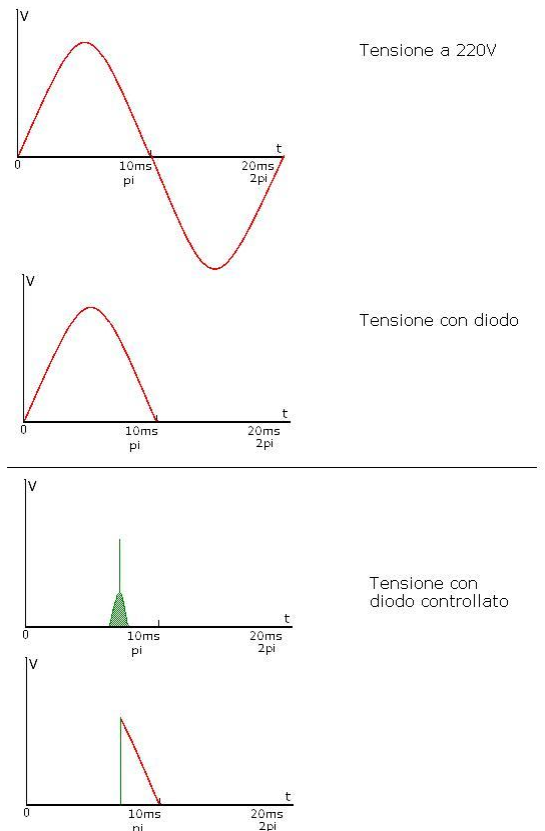
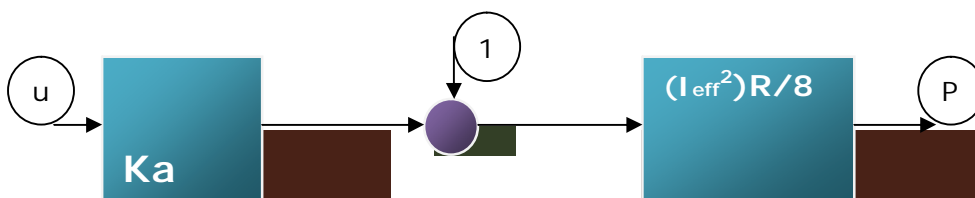
È comunque possibile semplificare questo integrale con la seguente formula che lega l'ingresso u con la corrente efficace che lasciamo scorrere nel circuito.

$$I_{eff}^2(u) \cong \frac{I^2}{8} [1 + K_a u]$$

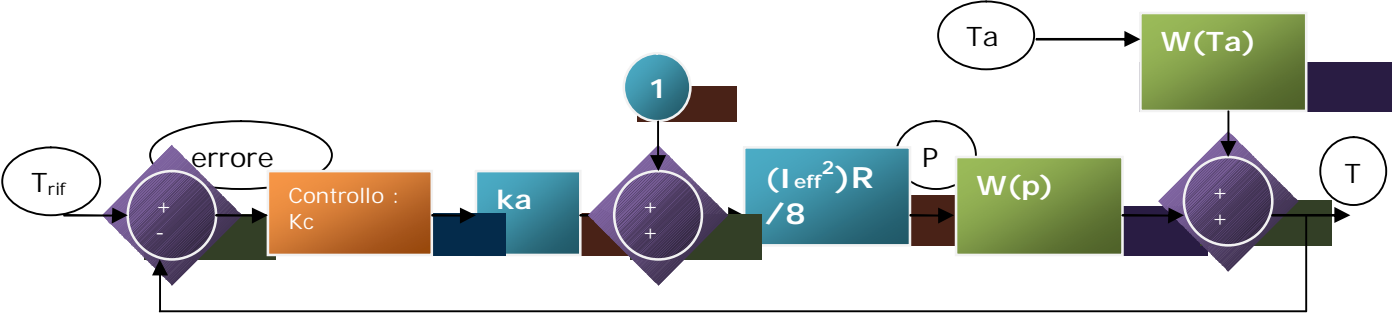
La potenza dissipata, infine è definita come:

$$P = R I_{eff}^2$$

A questo punto posso scrivere lo schema a blocchi dell'alimentatore a diodo controllato:



A questo punto siamo in grado di costruire lo schema completo dello scambiatore di controllo, (ma ancora senza il blocco di controllo (che a partire dall'errore genera il comando sull'alimentatore)).



3. Analisi dei Sistemi di Controllo

3.1 Scelta dei parametri progettuali e Stabilità del Sistema

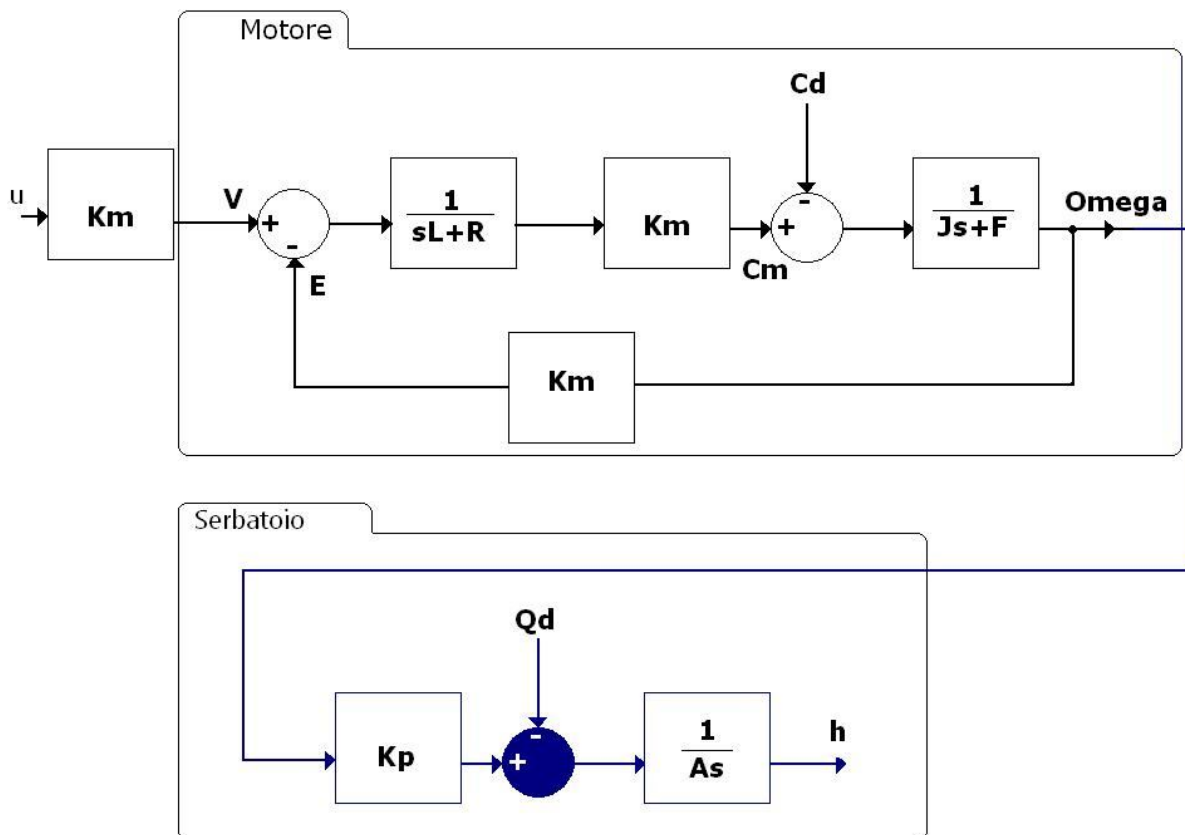
Abbiamo già visto nelle prime analisi qualitative effettuate, che è conveniente scegliere i parametri K_a e K_c (parametri del controllo del sistema), molto grandi per fare in modo che il nostro sistema risulti abbastanza robusto da sopportare eventuali errori di progetto, eventuali disturbi esterni ecc... Ovviamente esistono dei limiti alla possibilità di scelta di questi parametri, limiti che hanno diversa natura:

- Limiti di Specifica: Le specifiche di progetto non consentono di impostare a piacere questi parametri;
- Limiti Tecnici: I dispositivi hanno valori già prefissati che non possono essere variati;
- Limiti Strutturali: Il sistema perde di stabilità oltre certi valori limite di questi parametri;

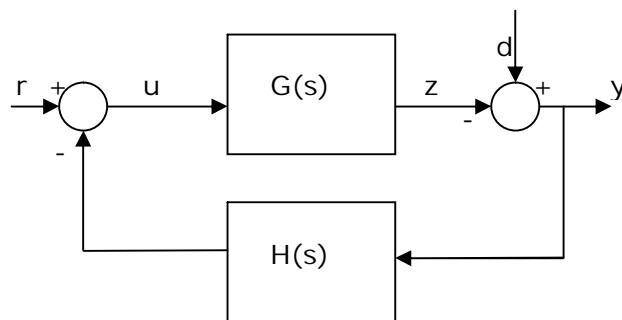
L'ultimo "limite" è quello più interessante, in quanto ci consente di ottenere informazioni circa la stabilità del sistema, e ci consente di stabilire quali sono le variabili in gioco che influiscono sulla stabilità del sistema. Queste limitazioni si trovano per via analitica, attraverso delle tecniche matematiche.

Esempio: Controllo di Livello

Prendiamo per esempio lo schema del controllo di livello che abbiamo già visto nelle sezioni precedenti:



Adesso cercheremo di semplificare tutto il modello ad una sola funzione di trasferimento al fine di poterne calcolare la stabilità (quindi prescindendo dai disturbi esterni C_d, Q_d). Ovviamente utilizzeremo lo schema standard per far ciò. Se riprendiamo lo schema standard possiamo subito associare le nostre equazioni a quelle dello schema standard:



Schema Standard	Contr. Livello
$G(s)$	$\frac{Km}{(sL + R)(sj + F)}$
r	V
d	C_d
$H(s)$	K_m

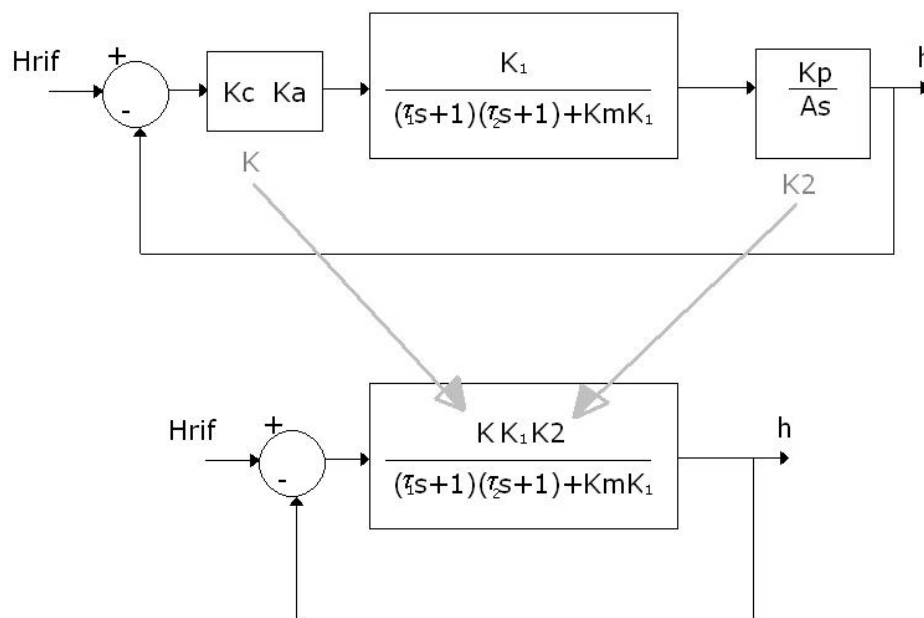
Adesso, grazie allo schema standard, possiamo scrivere una sola funzione che descrivi tutto il comportamento del motore da V a Ω (vedi Schema). La funzione di trasferimento del motore è:

$$W(m) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{Km}{(sL + R)(sj + F)}}{1 + \frac{Km}{(sL + R)(sj + F)}}$$

Facendo tutti i calcoli:

$$W(m) = \frac{Km}{(sL + R)(sj + F) + Km^2}$$

Adesso, esprimendo il nostro amplificatore e il nostro dispositivo di controllo come costanti (K_a, K_c), ed ignorando Q_d nel modello del serbatoio. Otteniamo uno schema di questo tipo:



Come abbiamo già visto in precedenza, (vedi sez. "Schema Standard del controllo a Retroazione") quest'ultimo schema può essere descritto da un'unica funzione di trasferimento che legghi H_r all'uscita h . Attraverso la formula:

$$W_h(s) = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)} = \frac{K_1 K K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + K_m K_1 + K_1 K K_2}$$

Effettuando tutti i calcoli, si trova che l'equazione caratteristica (quella al denominatore e con l'introduzione di opportune variabili per semplificare i calcoli) è del tipo:

$$s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + K_a a_0 = 0$$

Applicando il criterio di Routh (Vedi Appunti di Teoria dei Sistemi pp. 44 e seg.) troviamo che il sistema è stabile alle seguenti condizioni:

$$a_2 > 0$$

$$K < \frac{a_1 a_2}{a_0}$$

Ma K lo abbiamo posto uguale al prodotto $K_a K_c$, quindi affinché il sistema sia stabile e robusto dobbiamo scegliere K_a e K_c abbastanza grandi ma non troppo dato che non possiamo superare la quantità: $\frac{a_1 a_2}{a_0}$.

4. Relazione Tra Specifiche e Parametri di progetto

Definiamo specifiche di un sistema le seguenti proprietà:

- ✓ Stabilità;
- ✓ Errore;
- ✓ Robustezza;

Stabilità: E' importante controllare la stabilità di un sistema, e vedere come essa dipenda dai parametri sui quali possiamo intervenire al fine di far convergere il sistema verso i valori che desideriamo;

Errore: L'errore è la distanza che separa la variabile controllata dal valore che vogliamo che assuma, è importante osservare come l'errore sia legato agli altri parametri del sistema in modo da poterlo mantenere il più basso possibile;

Robustezza: Il sistema contiene diversi componenti le cui specifiche tendono a variare col tempo e comunque ad avere un certo margine, specie se queste sono legate a dispositivi con potenze in gioco alte, in quanto avranno margini di tolleranza più ampi. E' importante che il sistema sia stabile e funzioni bene entro i valori di tolleranza che ci aspettiamo.

Creare una relazione di dipendenza tra le specifiche e i parametri di progetto, ci permette di scegliere con metodo, i valori dei parametri in modo da soddisfare le specifiche.

Nel caso della **stabilità** abbiamo diversi metodi:

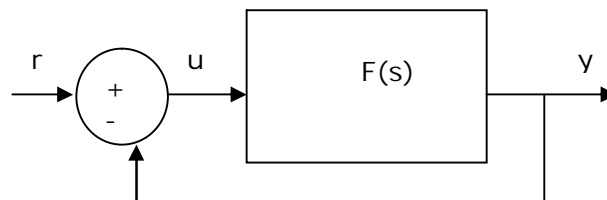
- Metodo di Routh;
- Metodo di Nyquist;

Il metodo di Routh l'abbiamo già visto nel corso di Teoria dei Sistemi, tuttavia siamo più interessati ai metodi che ci permettono di visualizzare graficamente la dipendenza di certi parametri dagli altri.

4.1 Metodo Di Nyquist per la Stabilità

Questo criterio consente di visualizzare graficamente la funzione di trasferimento di un sistema a reazione unitaria nel piano complesso, ed interpretare il grafico che si ottiene, riuscendo ad osservare l'eventuale **stabilità** del sistema e i suoi **margini di Stabilità**.

Per semplificazione utilizzeremo un sistema del tipo riportato in figura, (in ogni caso è sempre possibile ricondurre qualsiasi sistema allo schema seguente attraverso le tecniche di riduzione che abbiamo già visto).



Se scriviamo la rappresentazione con lo spazio di stato del sistema ad anello aperto otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

A noi interessa però studiare il sistema ad anello chiuso, nel quale $u=r-y$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + B(r - y) \\ y = Cx \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + B(r - Cx) \\ y = Cx \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (A - BC)x + Br \\ y = Cx \end{array} \right\}$$

Per il sistema ad anello chiuso, è facile osservare che il polinomio caratteristico vale:

$$d_{ch} = C(sI - (A - BC))^{-1}B$$

La **formula fondamentale** per lo studio della stabilità con il metodo di Nyquist, ci dice che:

$$1 + F(s) = \frac{Num}{Den} = \frac{d_{ch}}{d_{ap}} = \frac{C(sI - (A - BC))^{-1}B}{C(sI - A)^{-1}B}$$

$$\text{Dove: } F(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Grazie a questa equazione fondamentale siamo in grado di esprimere la stabilità del sistema $F(s)$ sia esso ad anello aperto, sia esso chiuso.

Infatti:

Caso 1: d_{ch} ha uno zero complesso

In questo caso avremo che:

$$1 + F(s) = \frac{d_{ch} = 0}{d_{ap}}$$

$$1 + F(s) = 0$$

$$F(s) = -1 \text{ per un certo } j\omega$$

E dal diagramma di Nyquist, questo lo si vede perché il grafico passa dal punto $(-1,0)$;

Caso 2: d_{ap} ha uno zero complesso

In questo caso la funzione $(1 + F(s))$ tende a infinito (per valori di omega prossimi allo zero), poiché questa sarebbe un'anomalia, approssimiamo il grafico per valori di omega sufficientemente piccoli, in modo che il grafico non vada all'infinito, ma giri su se stesso.

Ciò è importante, come vedremo, per contare il numero di rotazioni del grafico sul punto $(-1,0)$

Studio Della Stabilità: I Diagrammi di Nyquist.

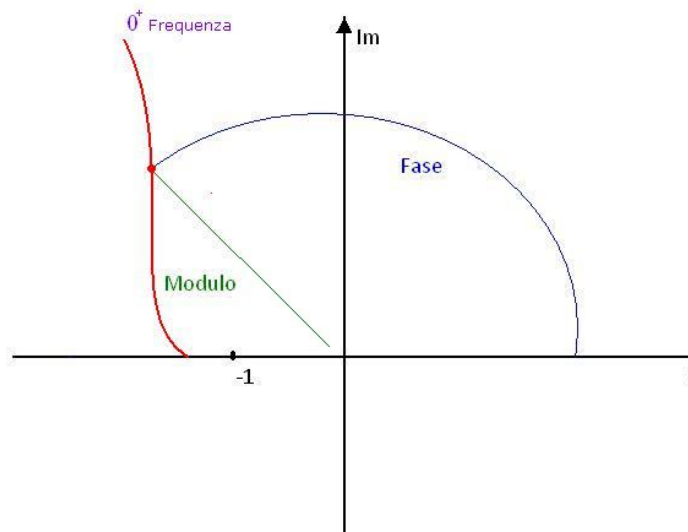
Al fine di potere studiare la stabilità di un sistema, è utile tracciare il diagramma di Nyquist in quanto mette subito in evidenza la stabilità del sistema e ci permette di capire e visualizzare determinati parametri che ci consentono di calcolare dei **margini di guadagno e di fase** del sistema per i quali questi risultati ancora stabile.

Il Diagramma di Nyquist, non è altro che la rappresentazione nel piano complesso della risposta armonica del sistema. Abbiamo già imparato a descrivere la risposta armonica attraverso i diagrammi di Bode, questi ci permettono di trasferire la stessa informazione nel piano complesso, utilizzando un sistema di coordinate polari.

Vediamo adesso la nomenclatura che useremo per potere trasferire i diagrammi di Bode in quelli di Nyquist.

I diagrammi di Bode esprimono la f.d.t. in due diagrammi separati: quello del modulo e quello della fase.

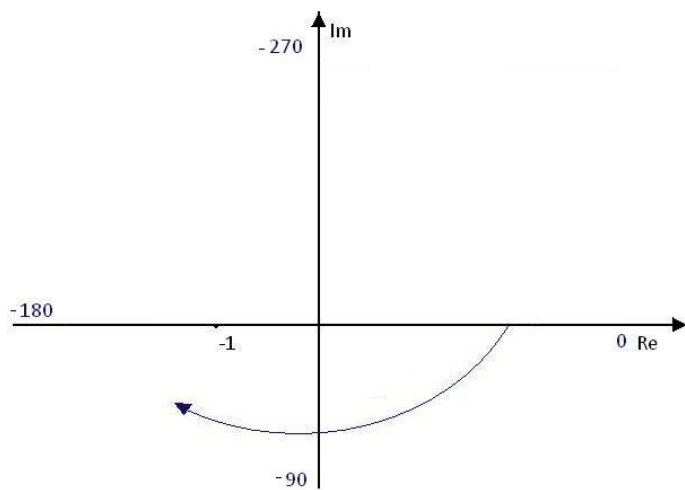
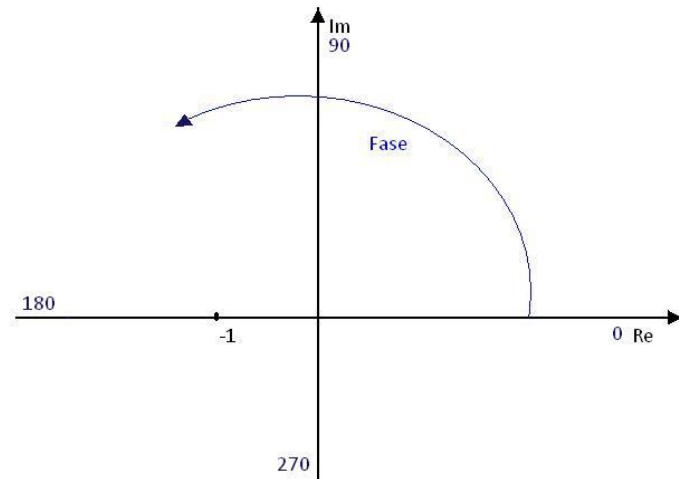
Nel diagramma di Nyquist invece ogni punto del piano è individuato proprio dal modulo, e dalla fase indicati da Bode, per frequenze sempre crescenti, ecco perché nel diagramma è indispensabile individuare il verso della funzione in quanto ci indica che frequenza stiamo considerando.



In violetto è indicata la frequenza di Omega, il vettore verde, indica il modulo in quel punto e l'arco blu indica la fase.

Per indicare la fase, si distinguono i casi in cui questa è positiva o negativa.

- **Fase Positiva:** Il piano si suddivide in spicchi da 90° a partire dal Ramo dei reali positivi e procedendo in senso anti-orario, come in figura.



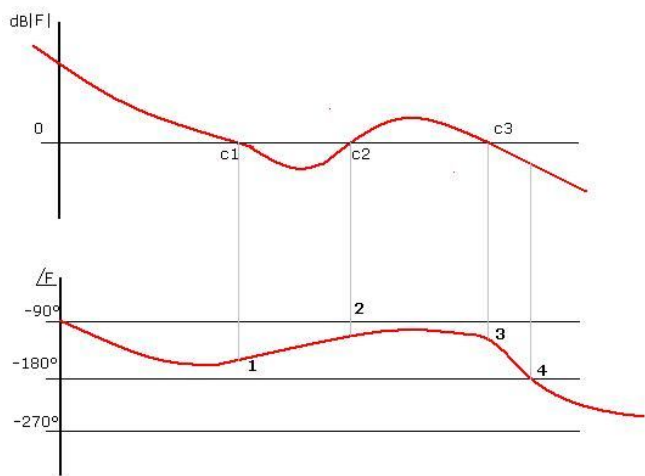
- **Fase Negativa:** Il piano si suddivide in spicchi da 90° questa volta però procedendo in senso anti-orario come riportato in figura.

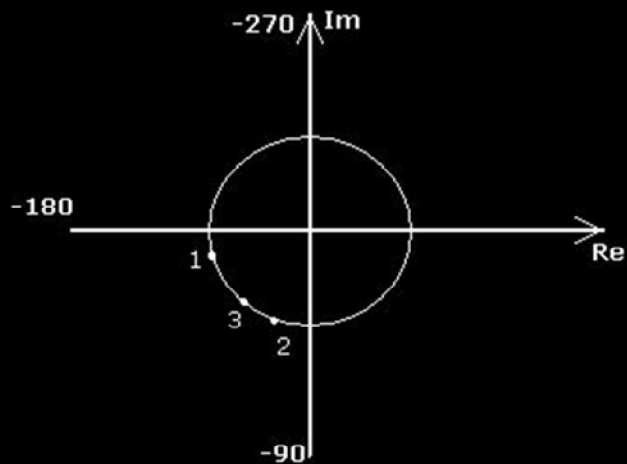
Per quanto riguarda il modulo, ai fini della stabilità è importante stabilire il valore del modulo quando la fase è $\pm 180^\circ$. Se il modulo è maggiore di 0 in

dB, allora il grafico intersecherà (in quel punto) l'asse dei reali oltre il valore unitario. Viceversa se il modulo è minore di 0, allora il grafico per quel valore della frequenza avrà un valore minore di uno.

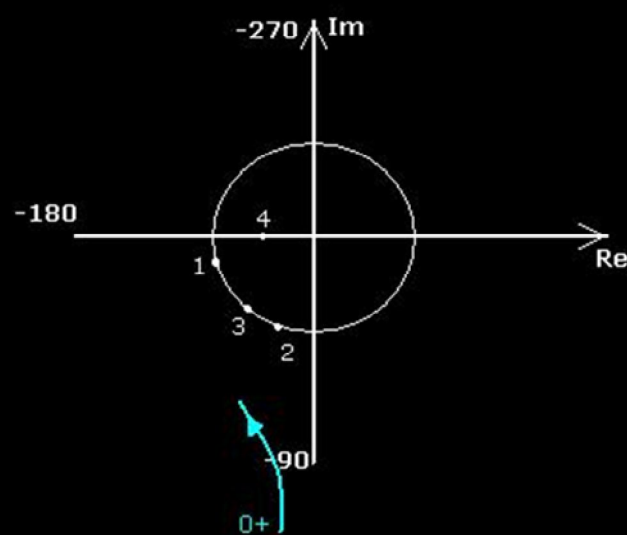
Esempio n° 1

Ammettiamo di avere un sistema che ha per diagramma di Bode il seguente:

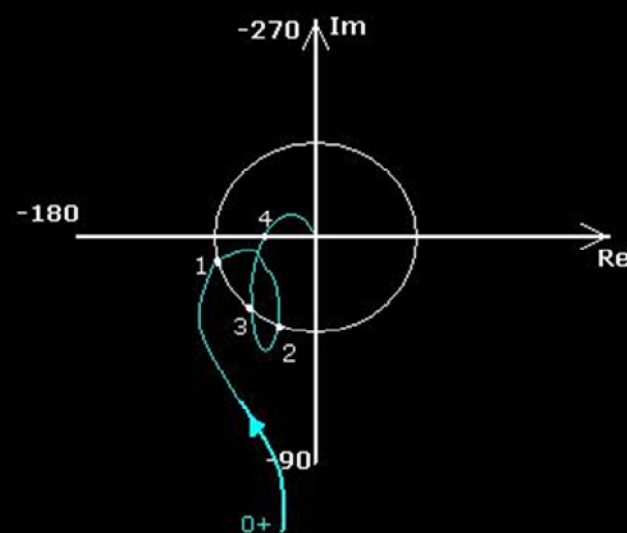




Segno i punti 1,2,3 che corrispondono a quelli di modulo 1 (0dB,c1,c2,c3), e che si trovano sulla circonferenza unitaria. Disponendoli con l'angolo indicato dal diagramma delle fasi di Bode



Il diagramma parte dalla frequenza 0, da valori di moduli infiniti e da fase 90° . Segno il punto 4 sull'asse negativo dei reali, in quanto è il punto dove la fase passa da -180 a -270 , siccome in questo punto il modulo è minore di zero, nel diagramma è all'interno della circonferenza unitaria



Completo il grafico notando che dal punto 4 all'origine il diagramma delle fasi di Bode mi dice che siamo tra -180 e -270 .

A questo punto utilizziamo il diagramma di Nyquist per ottenere informazioni sulla stabilità del sistema.

Tracciamo il grafico per frequenze negative (che non hanno nessun significato fisico ma puramente matematico), facilmente ottenibile ribaltando simmetricamente il grafico che abbiamo appena ottenuto.

Come si vede in figura, oltre a ribaltare il grafico abbiamo anche congiunto gli estremi.

Per verificare la **STABILITA'** non dobbiamo far altro che sommare i mezzi giri attorno al valore "-1";

- Sommando **+1/2** per ogni mezzo giro nel punto -1 se il verso è in **senso orario**;
- Sommando **-1/2** per ogni mezzo giro nel punto -1 se il verso è in **senso antiorario**;

La somma di questi valori, mi da il numero **N** di rotazioni orarie che la funzione F compie da -infinito a + infinito.

Se **Z_{ch}** è il numero di Radici A Parte Reale Positiva della funzione ad anello chiuso;

E Se **Z_{ap}** il numero di Radici A Parte Reale Positiva della funzione ad anello aperto;

Vale la Relazione

$$N = Z_{ch} - Z_{ap}$$

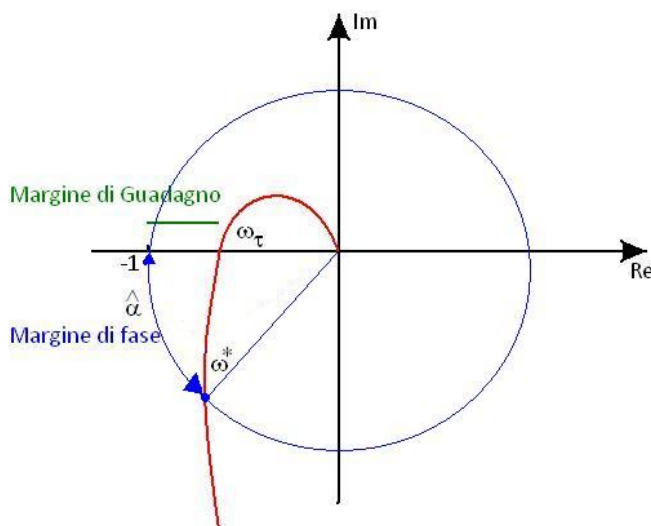
Dato che N si trova col metodo di Nyquist, e N_{ap} è noto, possiamo trovarci Z_{ch} , che deve essere uguale a zero per avere stabilità nel sistema.

Margini di Fase e Di Guadagno

Con questi termini indichiamo delle grandezze che mettono in evidenza la quantità di Guadagno e di Fase che il sistema può ancora tollerare rimanendo asintoticamente stabile.

Definiamo **Margine di Guadagno** la distanza tra il punto d'intersezione della funzione nel diagramma di Nyquist, e il punto (-1,0).

Definiamo **Margine di Fase** l'angolo compreso tra l'asse dei Reali, e la retta che interseca l'origine del piano complesso e il punto della funzione che interseca la circonferenza unitaria centrata sull'origine degli assi.

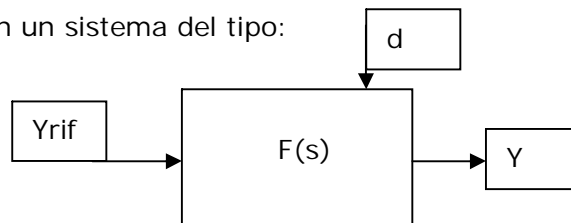


Un buon sistema deve avere un margine di guadagno del 50%, ciò significa che il punto ω_t deve essere posizionato all'incirca nel punto $(-1/2, 0)$. E il margine di fase, deve superare l'angolo di 45° .

4.2 Studio della Precisione

Lo studio della precisione consiste nello studio dell'andamento dell'errore dipendentemente da alcune classi notevoli di segnali e di sistemi:

Ricordandoci che in un sistema del tipo:



L'errore è dato da:

$$e(t) = y_{rif}(t) - y(t)$$

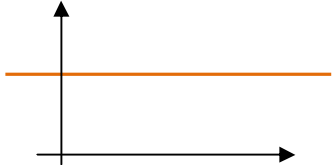
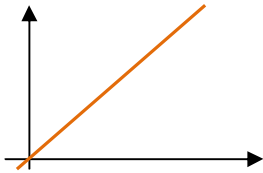
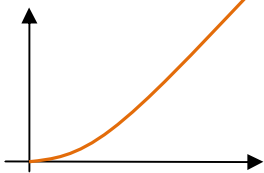
Facendo i calcoli, troviamo che la funzione trasferimento d'errore è data da:

$$W_{r-y}(s) = 1 - W(s)$$

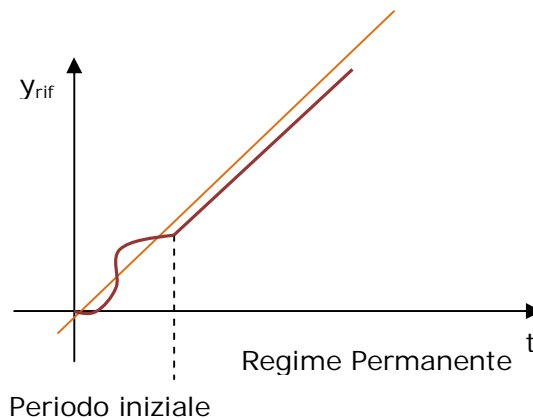
$$W(s) = y_{rtf}(s) - y(s)$$

Classi di segnali di riferimento notevoli:

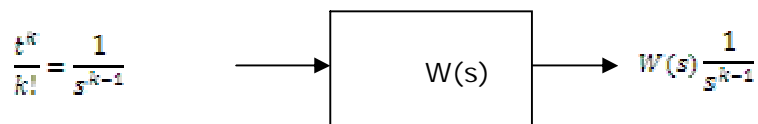
Polinomi: $y_{rif} = \frac{t^k}{k!}$

K=0	$Y_{rif}=1$	Costante	
K=1	$Y_{rif}=t$	Rampa	
K=2	$Y_{rif}=t^2/2$	Parabola	

Quello che ci interessa studiare, è la risposta a regime permanente della funzione di trasferimento d'errore (che d'ora in poi chiameremo f.d.t d'errore!).



Se ho un sistema del tipo:



E calcolo la risposta a regime permanente mi accorgo che:

$$regime\ permanente = L^{-1}\{W(s) + \frac{1}{s^{k-1}}\}$$

$$W(s) = \sum R_i e^{p_i t}$$

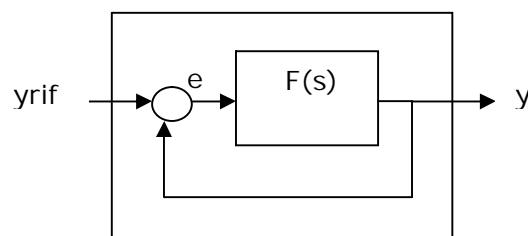
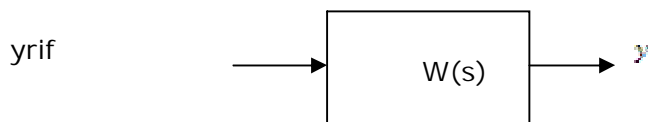
$$\frac{1}{s^{k-1}} = \left\{ C_k + C_{k-1}t + \dots + C_0 \frac{t^k}{k!} \right\}$$

$W(s) \rightarrow$ tende a zero in quanto p_i sono a parte reale negativa (per ipotesi parliamo sempre di sistemi stabili);

Affinchè il sistema $W(s)$ sia definito di **tipo k**, è necessario che:

- ✓ $C_k = 0$;
- ✓ $C_0 \neq 0$;

Per verificare velocemente ciò abbiamo due modi:



Sapendo che:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)} = \frac{N(s)}{N(s) + D(s)}$$

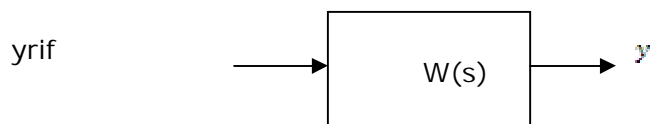
$$W_{err}(s) = \frac{1}{1 + F(s)} = \frac{D(s)}{N(s) + D(s)}$$

1) Se $W_{err}(s)$ ha uno zero (numeratore) nell'origine di molteplicità k , allora il sistema è del "tipo k ";

Difficilmente si ha che fare con sistemi del tipo $k > 2$;
Dalle equazioni precedenti si nota anche che:

2) Se $F(s)$ ha un polo (denominatore) nell'origine di molteplicità k , allora il sistema è di "tipo k ";

Per verificare velocemente se la $W_{err}(s)$ ha zeri nell'origine, basta guardare i coefficienti dei suoi polinomi:



In una situazione di questo tipo, $W_{err}(s) = 1 - W(s)$

Dove:

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

Perciò

$$W_{err}(s) = \frac{(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)s + (a_2 - b_2)s^2 + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})s^{n-1}}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

Adesso, per stabilire il tipo, basta osservare i coefficienti:

Tipo 0	$\begin{cases} a_0 - b_0 \neq 0 \\ a_1 - b_1 \neq 0 \end{cases}$
Tipo 1	$\begin{cases} a_0 - b_0 = 0 \\ a_1 - b_1 \neq 0 \end{cases}$
Tipo 2	$\begin{cases} a_0 - b_0 = 0 \\ a_1 - b_1 = 0 \\ a_2 - b_2 \neq 0 \end{cases}$

Rapporto ingresso-errore

Adesso ci interessa sapere come si comporta l'errore, a seconda della funzione in ingresso e del **tipo k** del sistema.

Abbiamo detto che in un sistema del tipo k, la risposta in uscita vale:

$$y = \sum R_i e^{p_i t} + \left\{ C_k + C_{k-1} t + \dots + C_0 \frac{t^k}{k!} \right\}$$

Risposta Permanente

e deve valere:

- ✓ $C_k = 0$;
- ✓ $C_0 \neq 0$;

Di conseguenza, la risposta permanente in un **sistema del tipo k** vale:

$$Y_p = C_0 \frac{t^k}{k!}$$

L'ingresso ovviamente, può essere di qualsiasi tipo, se ci riferiamo alla classe di segnali notevoli $\frac{t^k}{k!}$, y_{rif} può valere:

$$K = 0 \quad y_{rif} = 1$$

$$K = 1 \quad y_{rif} = t$$

$$K = 2 \quad y_{rif} = \frac{t^2}{2}$$

E' facile osservare che, se noi vogliamo che la nostra risposta permanente, sia il più vicino possibile al segnale di riferimento, dovremo avere cura di:

- ✓ **Verificare il tipo di segnale di riferimento ($K=0,1,2$);**
- ✓ **Verificare il tipo del sistema a cui sottoponiamo il segnale;**

Dalla tabella vediamo l'errore che ci si aspetta nelle diverse possibilità:

Riferimento→	$Y(t)=1$	$Y(t)=t$	$Y(t)=t^2/2$
Tipo 0	C_0	Infinito	Infinito
Tipo 1	0	C_0	Infinito
Tipo 2	0	0	C_0

E' quello che ci aspettiamo, infatti, indicando con:

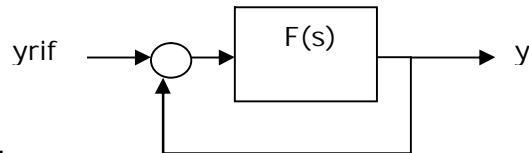
- $K_r \rightarrow$ La classe dei segnali di riferimento;
- $K_p \rightarrow$ La risposta permanente di un sistema tipo $K_{(r)}$;

Abbiamo diverse possibili combinazioni, che di volta in volta, annullano, rendono proporzionale o infinito l'errore. (**L'errore è la differenza tra il riferimento e l'uscita!**);

$$\frac{t^{K_r}}{K_r!} - C_0 \frac{t^{K_p}}{K_p!} = \begin{cases} 0 \\ C_0 \\ \infty \end{cases}$$

Calcolo pratico dell'errore

Dopo avere analizzato l'andamento dell'errore per tipi di sistemi e per classi di segnali, ci interessa ora, saper quantificare l'errore nei sistemi a retroazione.



Se il sistema è di **tipo k**;

Se $y_{rif} = \frac{t^k}{k!}$;

Allora → L'errore $(y - y_{rif})$, a regime permanente varrà: $C_{0,k}$ (come in precedenza mostrato);

Quanto vale $C_{0,k}$ che corrispondenza c'è con $F(s)$?

Se abbiamo tipo k, allora

$$C_{0,k} = \left[\frac{W_e(s)}{s^k} \right]_{s=0}$$

Ricordando che:

$$W_e(s) = \frac{1}{1 + F(s)} = \frac{D(s)}{N(s) + D(s)}$$

Tipo k=0

$$C_{0,k} = \left[\frac{W_e(s)}{s^k} \right]_{s=0} = W_e(0) = \frac{1}{1 + F(0)}$$

Dove $F(0)$ lo indichiamo come **Guadagno della Funzione F(s)**;

Da notare anche come il guadagno sia inversamente proporzionale all'errore, così come avevamo già detto nei capitoli precedenti;

Tipo k>0

$$C_{0,k} = \left[\frac{W_e(s)}{s^k} \right]_{s=0} = \frac{1(s)}{1 + F(s)} \frac{1}{s^k} = \frac{1}{F(s) s^k} \Big|_{s=0} \neq 0$$

Risposta ai disturbi

Consideriamo ora lo studio dell'errore a partire dal disturbo. Poiché generalmente trasformiamo il sistema in modo da avere il ramo di retroazione unitario, non ci aspettiamo grandi cambiamenti nello studio della risposta ai disturbi.

Immaginiamo di avere il seguente schema:

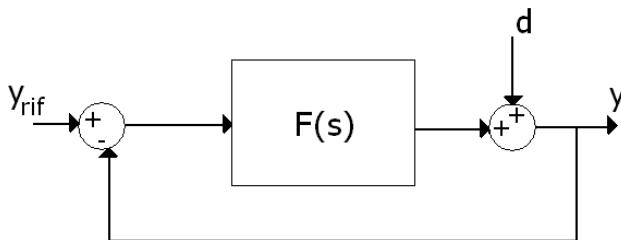


fig 13.1

Abbiamo che:

$$W_{d-y}(s) = \frac{1}{1 + F(s)} = W_{err}(s)$$

Quindi è lo stesso del caso precedente!

Casi di **studio notevoli** sono:

- Disturbo Costante:
 - ✓ TIPO '0' : errore **non nullo**;
 - ✓ TIPO '1' : errore **nullo**;

Quindi l'uscita relativa al disturbo può essere nulla o non nulla, ovviamente noi vogliamo che il disturbo non abbia nessun impatto sull'uscita del sistema e quindi dobbiamo capire come si genera un errore in uscita in modo da poterlo azzerare;

Nel caso precedente, basta imporre che la $F(s)$ sia di tipo '1' (ovviamente se il disturbo è costante), ma se il sistema è più complesso...

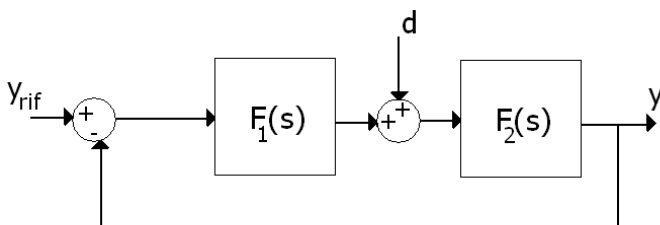


fig 13.2

$$W_{d-y}(s) = \frac{F_2(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}$$

Noi vogliamo che $W_{d-y}(s)$ abbia almeno uno zero di molteplicità 1 nell'origine (TIPO '1').

Notiamo che:

- ✓ Se F_2 si annulla nell'origine, $W_{d-y}(s) \rightarrow$ all'infinito, in quanto F_2 è sia al numeratore che al denominatore;
- ✓ Se $F_1 = \frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow$ all'infinito per $s=0$, allora anche $W_{d-y}(s) \rightarrow 0 \big|_{s=0}$

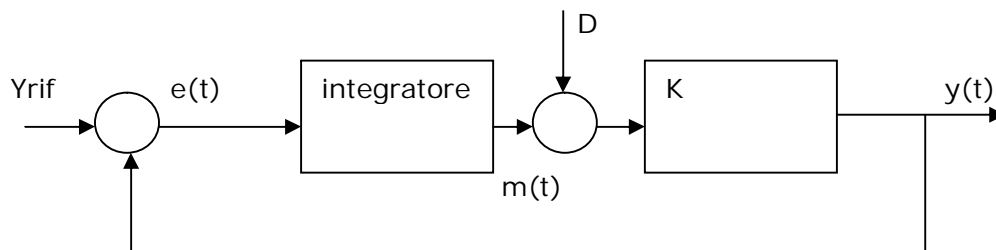
Quindi se F_1 ha un polo nell'origine, allora ho disturbo nullo;
Più in generale:

In un sistema a retroazione, la risposta al disturbo tende a zero per $t \rightarrow$ infinito SE E SOLO SE

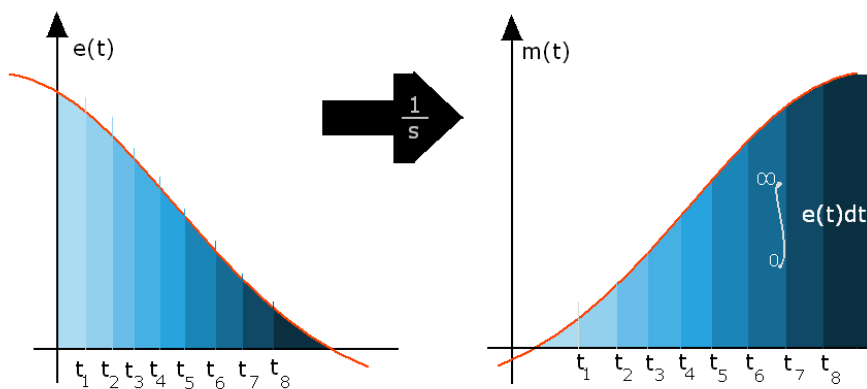
Nel ramo diretto c'è un polo in $s=0$ a monte del punto d'ingresso del disturbo;

Il Ruolo di $1/s$

Vediamo adesso di capire il perché un integratore $\frac{1}{s}$ a monte di un disturbo costante, annulla il suo effetto sull'uscita.



L'integratore non fa altro che l'integrale del suo ingresso.
Quindi:

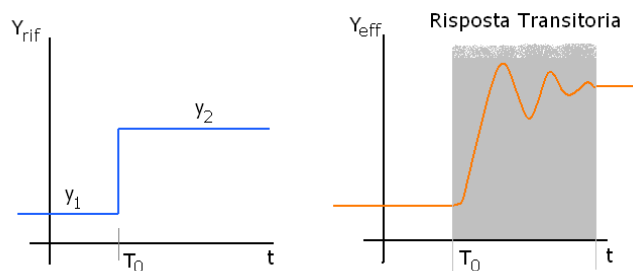


Vediamo quindi che $m(t)$ raggiunge un valore di equilibrio, che viene appunto compensato (prima di arrivare in uscita) dalla sottrazione del disturbo.

4.3 Analisi della Risposta Transitoria

Abbiamo appena analizzato la risposta ai disturbi-errori di un sistema, ammettendo per ipotesi che questi siano costanti nel tempo, ciò non è sempre vero nella pratica, un termostato ad esempio, consente di variare il riferimento per ottenere la temperatura desiderata. E' quindi interessante lo studio del sistema al variare del disturbo; in particolare ci si aspetta che il sistema converga al valore desiderato in maniera veloce e senza brusche variazioni. Lo studio di ciò si traduce nell'analisi della **risposta transitoria**.

Per visualizzare graficamente la risposta transitoria, immaginiamo di variare bruscamente il riferimento ed osservare la risposta del sistema.



Dal grafico si vede che la risposta effettiva tende ad oscillare fino ad assestarsi verso il valore desiderato. La parte evidenziata in grigio è appunto la risposta transitoria.

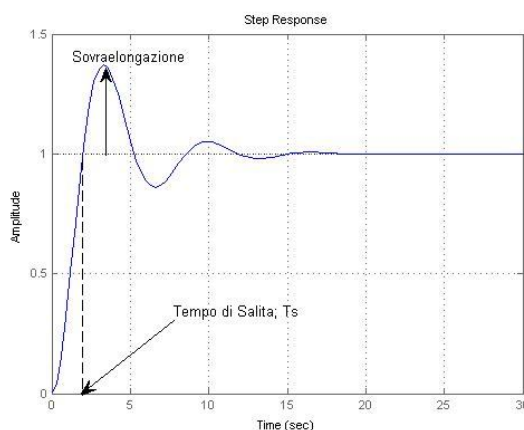
Da un punto di vista analitico, lo studio della risposta transitoria equivale allo studio della funzione che si ottiene moltiplicando la funzione di trasferimento del sistema per la trasformata della funzione gradino.

Ovviamente in questa sede ci interessa capire quali siano i parametri qualitativi che descrivono il transitorio di un sistema, e come questi siano legati ai parametri della funzione di trasferimento, in modo tale che il progettista possa intervenire sui parametri di propria competenza per il miglioramento delle prestazioni del sistema.

Parametri Caratterizzanti della risposta al gradino

La risposta al gradino è caratterizzata da due parametri fondamentali:

- ✓ Sovraelongazione;
- ✓ Tempo di Salita;



- La **sovra elongazione** è la parte della funzione che supera per la prima volta il valore di regime, ed è tollerabile se non lo supera del 15-20%;
- Il **Tempo di Salita** è il tempo necessario alla funzione ad arrivare a circa il 90% del valore di regime;

N.B. Se la risposta al gradino ha un certo ritardo iniziale, il tempo di salita è la differenza tra il tempo necessario a raggiungere il 90% del valore di regime, meno il tempo necessario a superare il 10% (a causa appunto del ritardo!);

Casi di Studio

Risposta al Gradino di un sistema TIPO '1', con radici complesse coniugate;

Prendiamo un sistema di TIPO '1' asintoticamente stabile:

$$F(s) = \frac{\alpha_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Possiamo riscrivere l'equazione in questo modo:

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\vartheta s\omega_n + \omega_n^2} \quad \begin{aligned} s_1 &= \alpha + j\beta \\ s_2 &= \alpha - j\beta \end{aligned}$$

Possiamo anche scrivere le radici in funzione della pulsazione:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\vartheta\omega_n \\ \beta &= \sqrt{1 - \vartheta^2}\omega_n \end{aligned}$$

Posizionando le radici nel piano complesso attraverso un sistema di coordinate polari dove:

$$\omega_n = \text{modulo};$$

$$\vartheta = \sin\varphi;$$

Ci rendiamo conto che la risposta transitoria dipende dalla pulsazione teta;

In particolare vediamo che il valore ottimo della pulsazione per avere il miglior transitorio è 0,707.

Vediamo adesso quali sono i comandi matlab che ci permettono di trovare la risposta al gradino per diversi valori di teta:

```
t=[0:.3:30]; %Crea Un vettore t, da 0 a 30 a intervalli di 0.3;

teta=0.9; %Variabile che contiene il valore di teta;

num=[ 1 ]; %Crea il numeratore come costante;
den=[1 2*teta 1 ]; %Crea il denominatore, vale s^2 + 2*teta*s + 1;

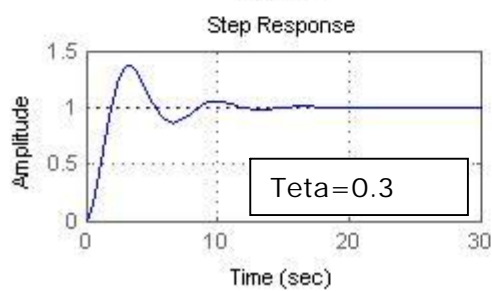
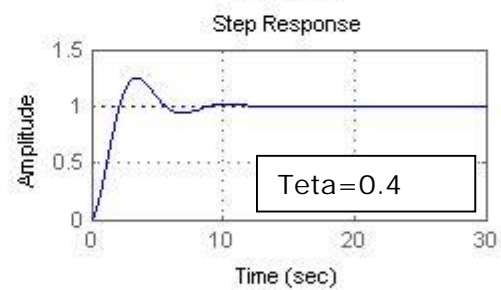
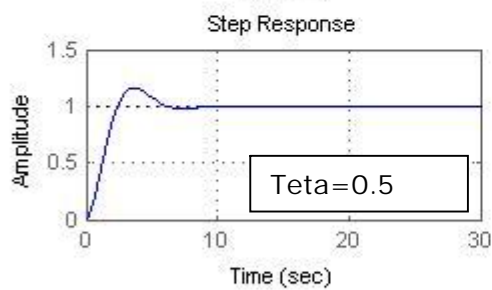
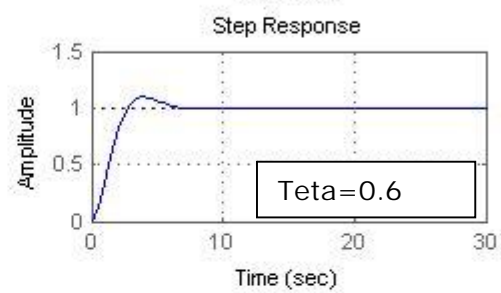
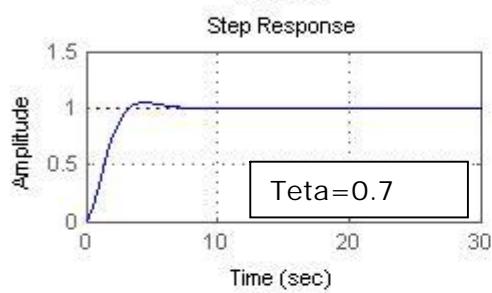
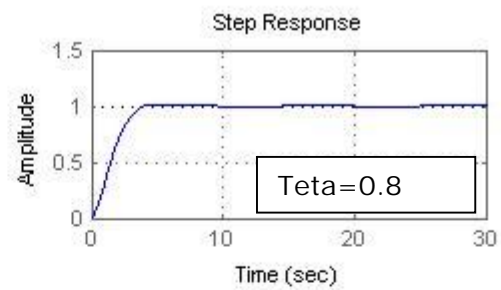
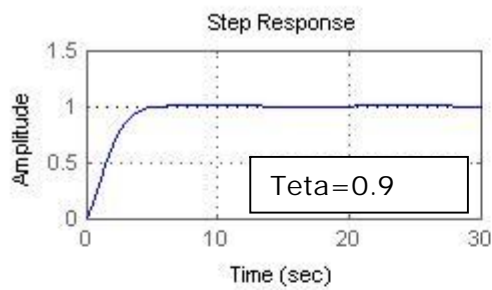
SYS=tf(num,den); %Crea il sistema

step(SYS,t); %Stampa a video la risposta al gradino;

axis([0 30 0 1.5]) %Normalizza gli assi ([minX maxX minY maxY ]);

grid on %Attiva la griglia;
hold on %Sovrappone eventuali altri grafici;
```

E questi sono i risultati per diversi valori di teta:



Risposta al gradino di un sistema di TIPO '1' con radici a Parte Reale

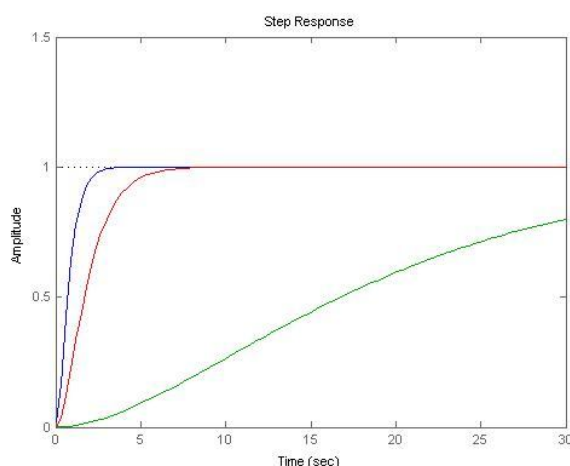
Consideriamo adesso lo stesso sistema di TIPO '1' del caso precedente, ma che abbia radici a parte reale (negativa, in quanto ci interessa studiare sistemi asintoticamente stabili!)

Prendiamo il sistema di TIPO '1':

$$W(s) = \frac{a_0}{s^2 + sa_1 + a_0} = \frac{p_1 p_2}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1 p_2}$$

Ci accorgiamo studiando diversi valori di p_1 e p_2 , che più ci si allontana dal piano degli immaginari, più la risposta è veloce. Infatti, immaginando di piazzare le radici p_1 e p_2 nel piano immaginario, più queste sono vicine a zero, più sono vicine all'asse immaginario.

Con matlab ci rendiamo conto di come varia la risposta.



verde: $p_1=p_2=0,1$;
rosso: $p_1=p_2=1$;
blu: p_1 e $p_2 \gg 1$;

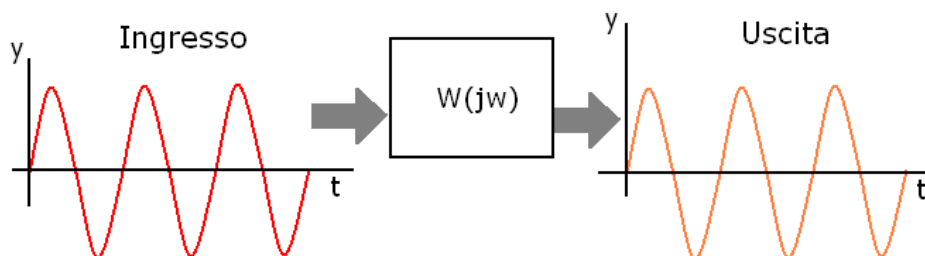
I parametri della risposta Transitoria

Possiamo sintetizzare le informazioni contenute nella risposta transitoria attraverso due parametri:

- ✓ Sovra elongazione;
- ✓ Tempo di Salita;

Quindi occorre un modo pratico e veloce per potere calcolare queste due quantità. Per fare ciò utilizziamo la risposta in frequenza del sistema (e quindi i diagrammi di Bode).

Sappiamo che la risposta a regime di un ingresso sinusoidale ad una data funzione di trasferimento, è anch'essa una funzione sinusoidale:



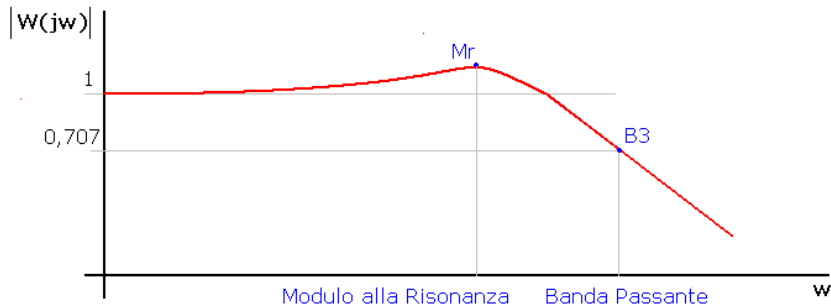
In uscita quindi la $y(t)$ sarà caratterizzata (come tutte le funzione sinusoidali) da un modulo e da una fase:

$$y(t) = M \sin(\omega t + \varphi)$$

$$M = |W(j\omega)|$$

$$\varphi = \text{fase}(W(j\omega))$$

Con questi elementi costruisco il diagramma di Bode ed identifico due parametri importanti di questa rappresentazione:



- ✓ Il **Modulo alla Risonanza**: Il massimo valore che il modulo assume;
- ✓ La **Banda Passante**: Il Valore nel quale il modulo si attenua di un fattore 3dB pari a $\frac{1}{\sqrt{2}}$, circa 0,707;

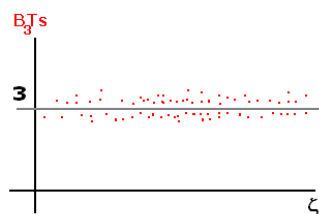
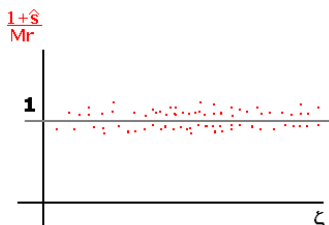
Questi parametri sono legati da una legge **empirica** la quale prevede che:

Chiamati:

\hat{S} = *sovraelongazione*;

t_s = *Tempo di Salita*;

Valgono le relazioni:



$$\frac{1 + \hat{S}}{M_r} \cong 1$$

$$B_3 t_s \cong 3$$

Conclusioni

In questo modo posso sia intervenire sulla risposta armonica per ottenere determinate caratteristiche nel transitorio, sia individuare immediatamente il comportamento del transitorio a partire dai diagrammi di Bode;

4.4 La Carta Di Nichols

Abbiamo appena visto come la risposta transitoria sia legata a determinati parametri della $W(s)$, tuttavia spesso ci troveremo a lavorare direttamente sulla funzione di trasferimento ad anello aperto $F(s)$, per cui è molto utile cercare di trovare caratteristiche nella $F(s)$ che si leghino direttamente con la risposta al gradino.

Ciò deve essere teoricamente possibile in quanto la $F(s)$ è collegata ai parametri B_3, M_r e questi sono a loro volta collegati, abbiamo visto alla Sovraelongazione e al Tempo di Salita;

$F(s)$
Funzione ad anello Aperto

$$F(j\omega)$$

$W(s)$
Funzione d anello chiuso

$$W(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)}$$

Possiamo adesso scrivere la Funzione $F(s)$ in forma polare:

$$F(j\omega) = Ae^{j\alpha}$$

Dove:

$$A = |F|$$

$$\alpha = \text{fase}(F)$$

Anche la $W(s)$ può essere scritta in questa forma:

$$W(s) = Me^{j\theta}$$

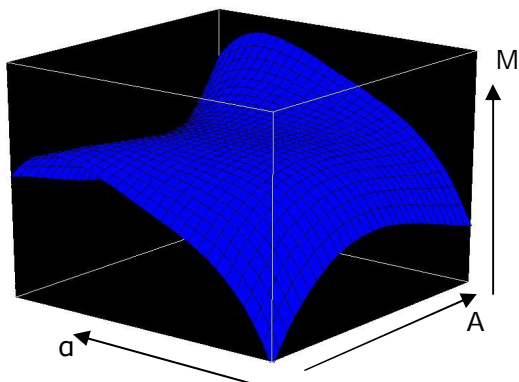
Quindi Abbiamo la Relazione:

$$Me^{j\theta} = \frac{Ae^{j\alpha}}{1 + Ae^{j\alpha}}$$

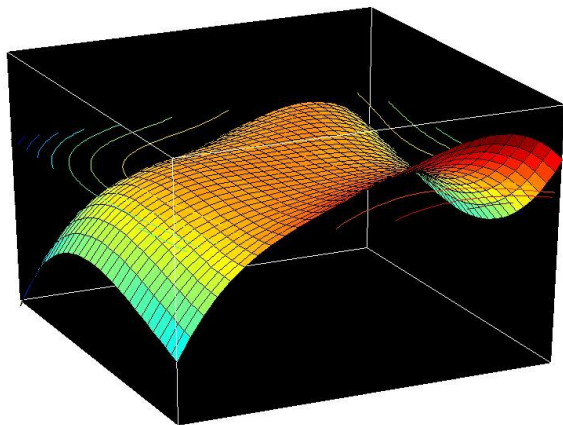
Adesso il modulo di $W(s) = Me^{j\theta}$ possiamo scriverlo in funzione di (A, α) che sono parametri della $F(s)$.

$$M(A, \alpha) = \left| \frac{Ae^{j\alpha}}{1 + Ae^{j\alpha}} \right| \quad \theta(A, \alpha) = \text{fase} \left(\frac{Ae^{j\alpha}}{1 + Ae^{j\alpha}} \right)$$

Poiché modulo e fase adesso sono funzioni di due variabili, i grafici che otteniamo sono delle superfici:



Ovviamente trattare le superfici non semplifica il problema, anzi. Ma esiste il modo di rappresentare una superficie tridimensionale in un piano, attraverso le **linee di livello**; le linee di livello non fanno altro che rappresentare nel piano (A, α) , i luoghi dei punti in cui M si mantiene costante;



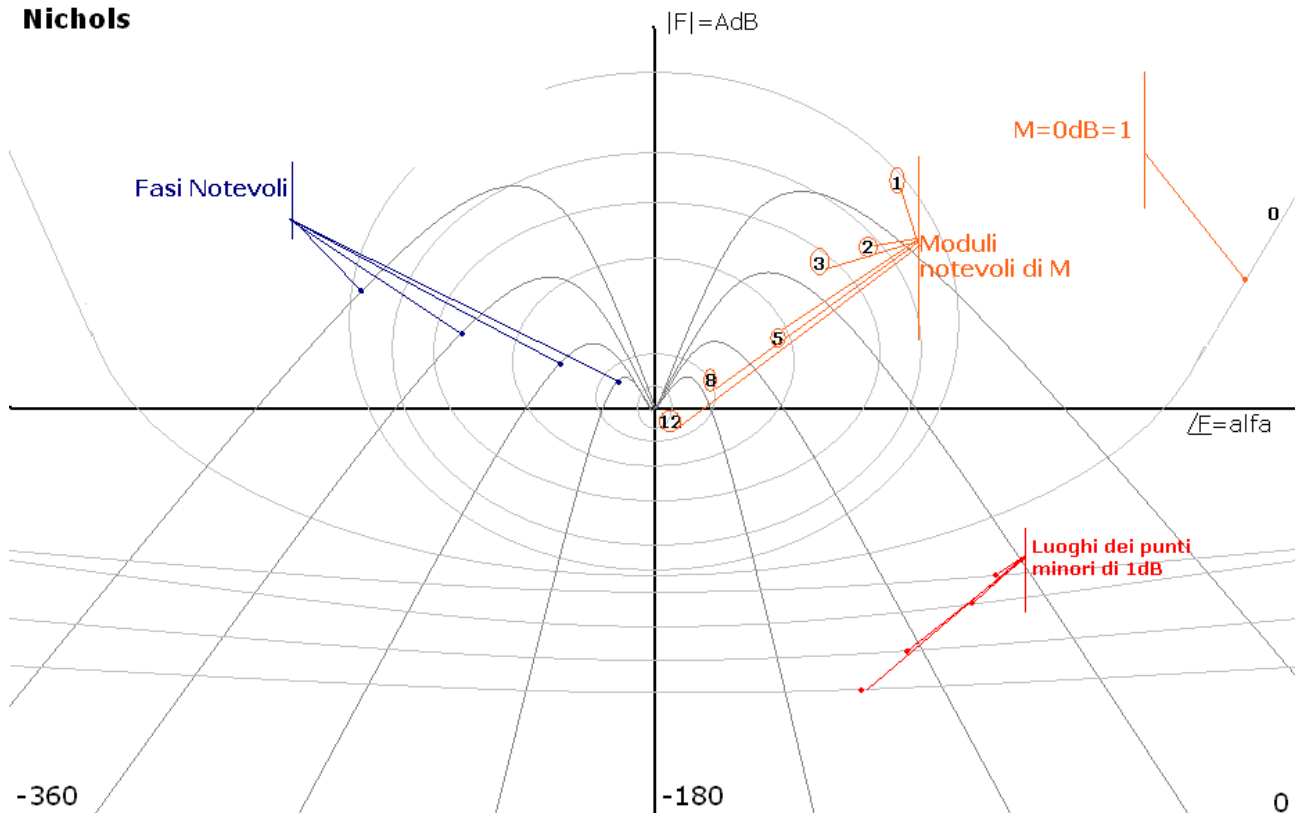
Nell'immagine appunto, si individuano delle linee di livello e ad ogni colore corrisponde una quota specifica;

Con questa tecnica possiamo costruire un insieme di linee di livello che vanno poi ad identificare una superficie!

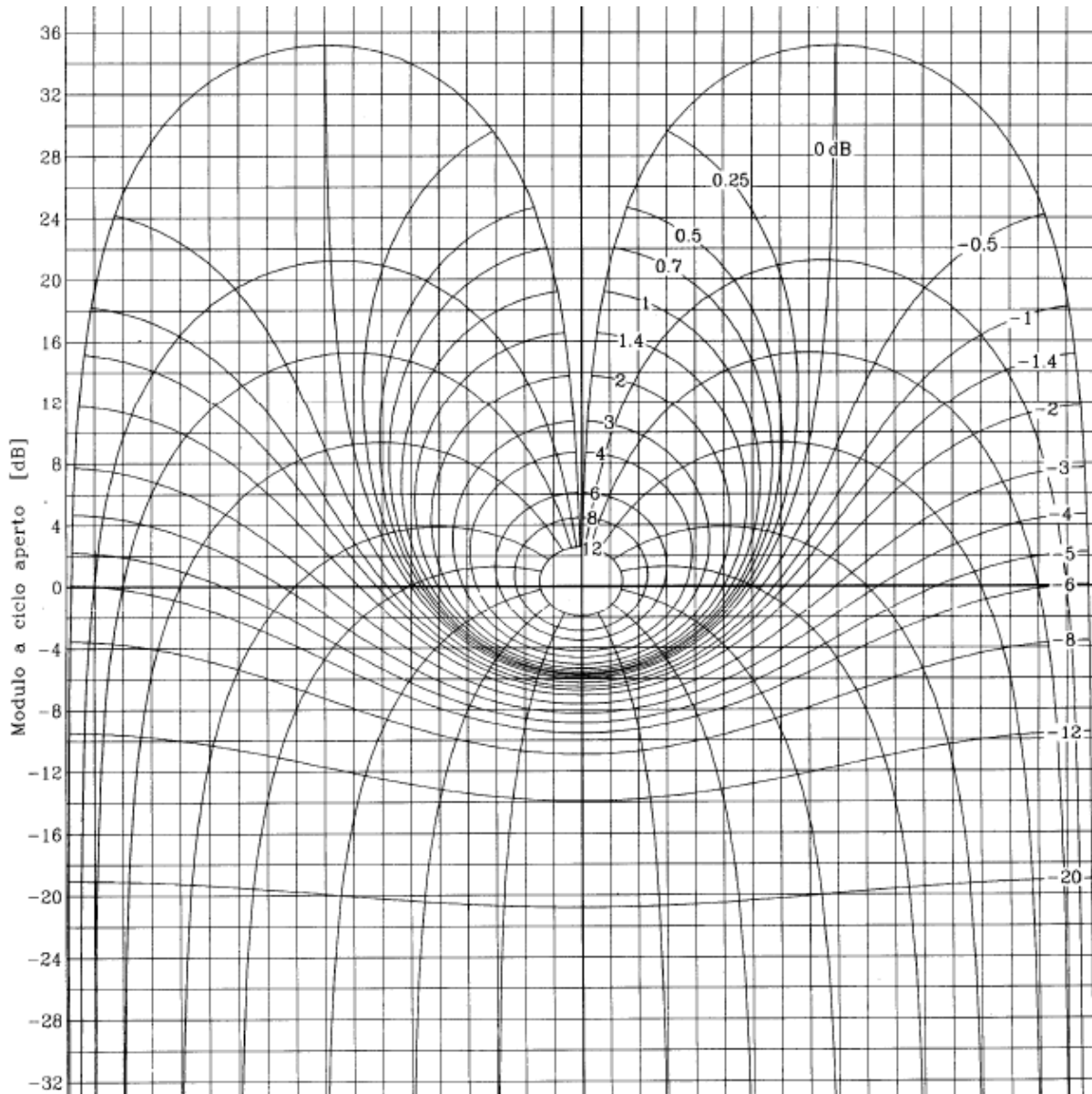
Con questa tecnica rappresentiamo sia il diagramma dei moduli sia quello delle fasi nello stesso diagramma strutturato presentando i moduli e le fasi notevoli;

- ✓ Negli assi della carta sono riportati Modulo e Fase della $F(s)$;
- ✓ Le curve rappresentano Moduli e Fasi Notevoli della $W(s)$;

Nichols

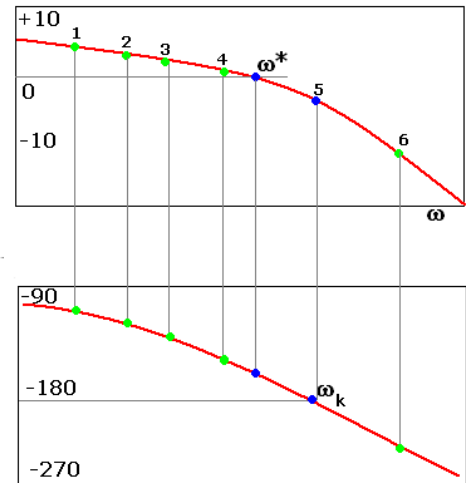
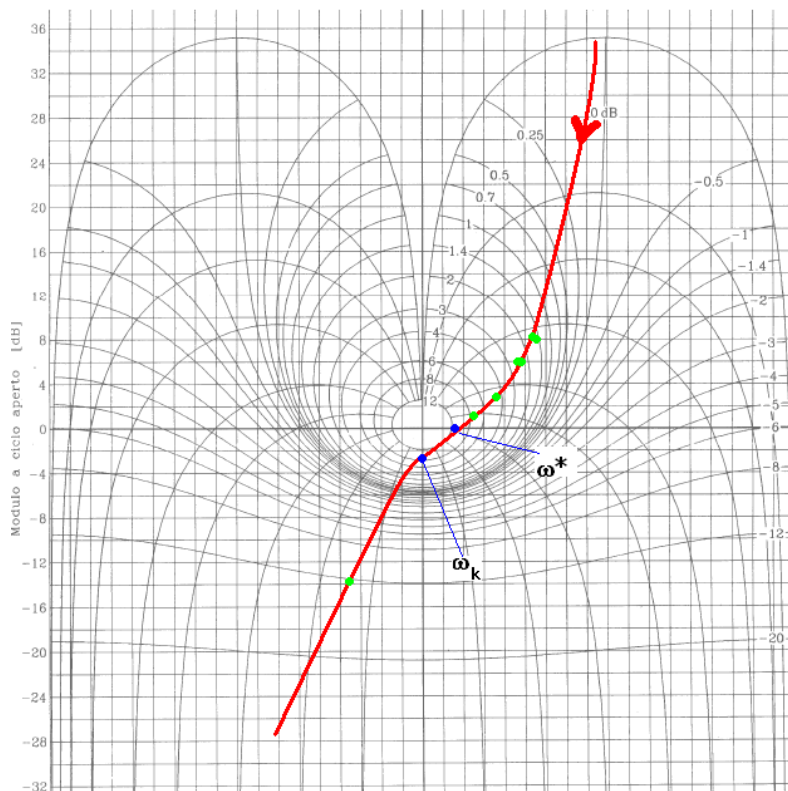


La carta si presenta in questo modo:



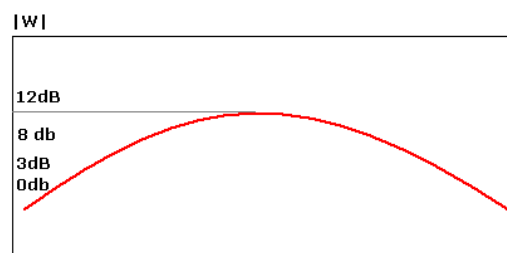
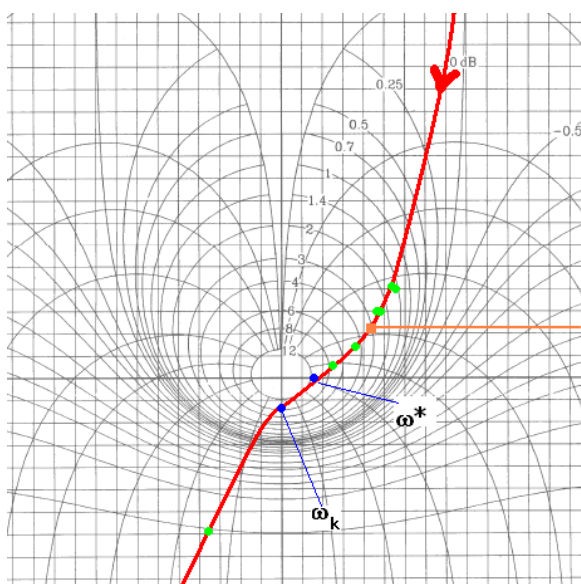
Per utilizzare la carta di Nichols, basta trovare i diagrammi di Bode della $F(s)$, e trasferire i valori di ω nella carta di Nichols.

Come illustrato nella figura:



- ✓ **Step 1:** Si costruisce il diagramma di Bode della funzione ad anello aperto $F(s)$;
- ✓ **Step 2:** Si individuano due punti notevoli ω^* e ω_k rispettivamente le intersezioni con l'asse delle fasi nella carta di Nichols, e l'asse dei moduli;
- ✓ **Step 3:** Si trasferiscono tutti i valori nella carta di Nichols; (facendo riferimento agli assi e non alle curve notevoli!);

Adesso possiamo disegnare il diagramma di Bode della **funzione di trasferimento ad anello**



aperto $W(s)$;

Anche senza disegnare il diagramma di Bode, posso comunque individuare graficamente sulla carta di Nichols i due parametri che caratterizzano la risposta in frequenza della $W(s)$: **Modulo alla Risonanza (M_r)**, **Banda Passante (B_3)**.

- ✓ **M_r** : E' il valore della curva di livello notevole tangente alla funzione $F(s)$ disegnata sulla carta (In questo caso 12dB);
- ✓ **B_3** : E' il valore di ω che attraverso la curva di livello notevole di 3dB; (sulla figura è indicata dal segno arancione!);

Esempi: Carta di Nichols

Vediamo adesso con Matlab che aspetto hanno alcune funzioni notevoli:

Esempio 1:

$$F(s) = \frac{\sqrt{0,1}}{s(1+s)(1+5s)}$$

I comandi Matlab sono:

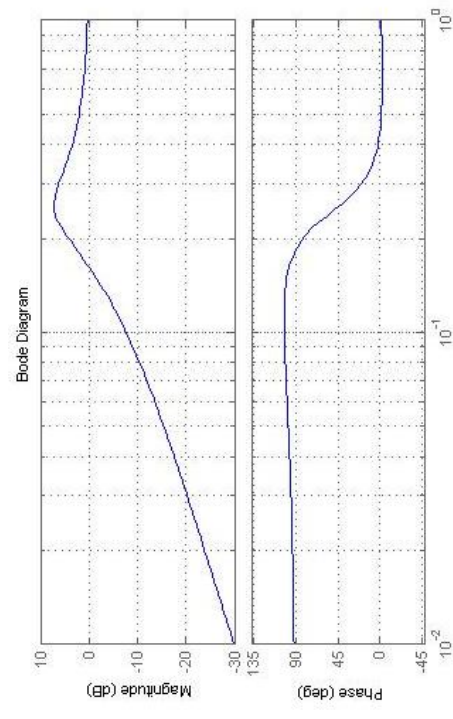
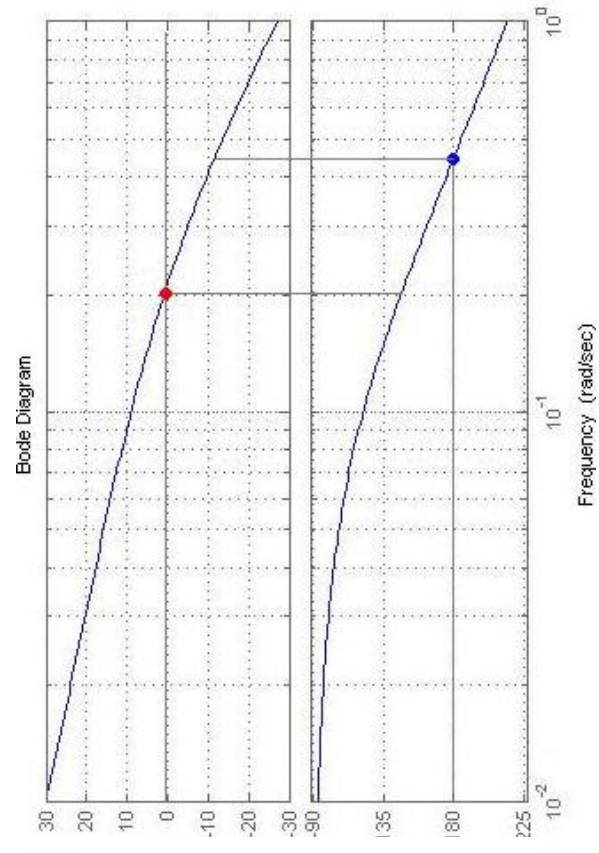
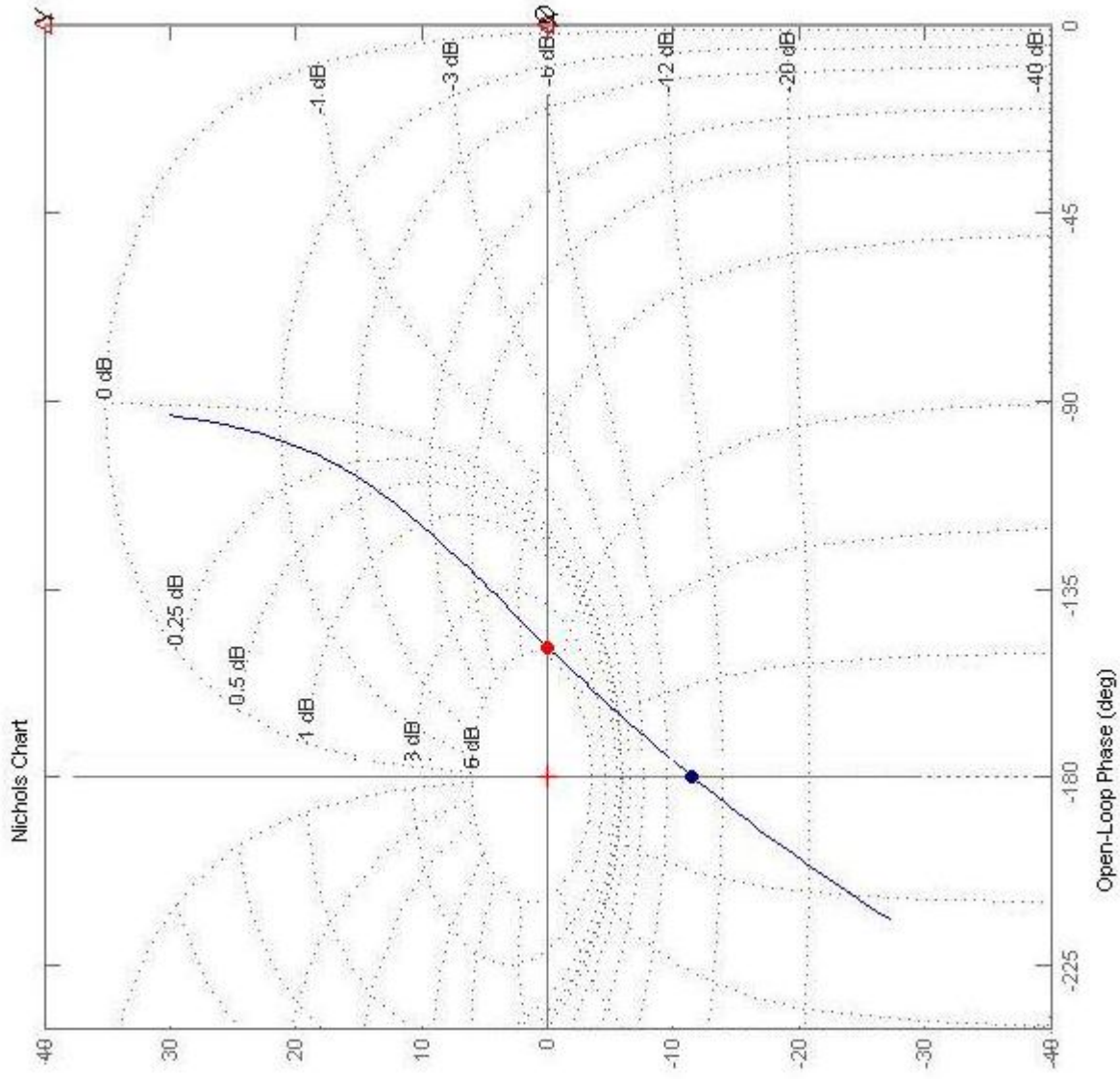
```
>> num=[0 0 0 sqrt(.1)];
>> den=conv(conv([5 1],[1 1]),[1 0]);
>> om=logspace(-2,0,100);
>> bode(num,den,om)
>> ngrid('new')
>> nicols(num,den,om)
>>
>> bode(den,num+den,om)
```

Nel diagramma sono evidenziati:

In rosso: Margine di Fase:	0.2rad/s -149° 0dB
In blu: Margine di Guadagno:	0.4rad/s -180° -11dB

Il Modulo alla risonanza della Funzione ad anello chiuso vale: **7dB**;

Come viene fuori dai dati, ma anche graficamente, il margine di fase della $F(s)$ (11dB) è sempre leggermente maggiore del modulo alla risonanza di $W(s)$ (7dB)



4.5 Studio della Robustezza: Funzione di Sensibilità

Vediamo adesso come possiamo analizzare la funzione d'errore, per fare in modo che questa abbia un andamento che sia del tipo che vogliamo.

Abbiamo già definito la funzione d'errore, e sappiamo che vale:

$$W_e(s) = \frac{1}{1 + F(s)}$$

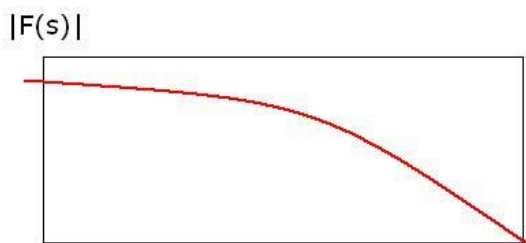
Volendo analizzare la risposta in frequenza della funzione d'errore, ci accorgiamo che per definizione abbiamo:

$$W_e(j\omega) = e(t) = \left| \frac{1}{1 + F(s)} \right| \sin \left(\omega t + \text{fase} \left(\frac{1}{1 + F(s)} \right) \right)$$

Quindi, la risposta armonica della funzione d'errore (come ci aspettavamo) è una sinusoide di ampiezza $\left| \frac{1}{1 + F(s)} \right|$. Ovviamente, noi desideriamo che questo modulo sia quanto più piccolo possibile.

Questo modulo viene anche chiamato **Funzione di Sensibilità** $S(j\omega)$.

Tuttavia, sappiamo già che l'andamento del modulo di $F(s)$, è generalmente del tipo:



cioè, tende a zero per omega che tende a infinito!

Per cui:

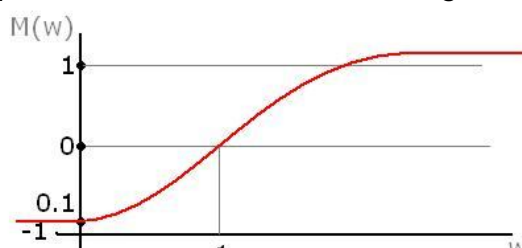
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 + F(s)} \right| = 1$$

Quindi: **Non possiamo avere un errore piccolo a frequenze alte.**

Non possiamo pretendere che l'errore sia piccolo per qualsiasi frequenza, ma che sia minore di una certa funzione $M(\omega)$ che generalmente ha un andamento del tipo:

errore piccolo \rightarrow basse frequenze \rightarrow 10%
errore grande \rightarrow alte frequenze \rightarrow +100%

Generalmente possiamo pretendere che l'errore abbia un grafico di questo tipo:



Dobbiamo, quindi imporre che:

$$|S(j\omega)| < M(\omega)$$

Per esempio:

$$M(\omega) = \frac{s-1}{s+100}$$

Noi vogliamo che:

$$|S(j\omega)| < M(\omega) \quad \forall \omega$$

$$\left| \frac{1}{1+F(j\omega)} \right| < M(\omega)$$

Se pongo:

$$W_1(\omega) = \frac{1}{M(\omega)} \quad (\text{Funzione Peso})$$

Posso Scrivere:

$$|S(j\omega)W_1(\omega)| < 1$$

Robustezza del sistema per il singolo parametro

Vediamo come risponde il sistema a perturbazioni relative ai singoli parametri. Questo tipo di perturbazioni sono abbastanza frequenti, perché generalmente il valore nominale di un parametro in realtà varia entro un certo margine di tolleranza. Vediamo quali sono le caratteristiche affinché la $F(s)$ risponda bene a queste variazioni.

Ammettiamo che la $F(s)$ abbia un parametro 'p' al suo interno, quindi $F(s,p)$.

Se vogliamo quantificare le variazioni della risposta del sistema rispetto alle variazioni del parametro, scriviamo:

$$\frac{d\frac{W}{p}}{d\frac{p}{p}} = \frac{\Delta W(s)}{\Delta p} \frac{p}{W(s)}$$

Dato che a noi interessa vedere il modo in cui p influenza F, scriviamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial p} \frac{p}{W(s)} &= \frac{(1+F)-F}{(1+F)^2} \frac{df}{dp} \frac{p(1+F)}{F} = \frac{dF}{dp} \frac{1}{1+F} \frac{p}{F} = \\ &= \left(\frac{\frac{\partial F}{F}}{\frac{\partial p}{p}} \right) \left(\frac{1}{1+F} \right) \end{aligned}$$

E' chiaro dunque che se vogliamo minimizzare l'effetto delle variazioni $\left(\frac{\frac{\partial F}{F}}{\frac{\partial p}{p}} \right)$ allora, la

quantità $\left(\frac{1}{1+F} \right)$ deve essere minore di 1;

$$\left(\frac{1}{1+F} \right) < 1$$

Se questa condizione è soddisfatta, l'effetto delle perturbazioni dei parametri di $F(s)$ viene attenuato di un fattore $\left(\frac{1}{1+F} \right)$

Ovviamente, tale valore varia al variare della ω , per cui, dal diagramma di Bode possiamo capire quali sono le frequenze per le quali ciò avviene.

4.6 Stabilità Robusta

Abbiamo visto che le qualità di un sistema sono:

- ✓ **Stabilità;**
- ✓ **Precisione;**
- ✓ **Robustezza;**

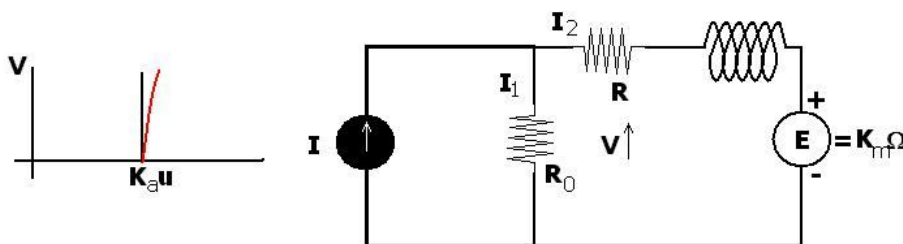
Abbiamo già analizzato le prime due, con robustezza intendiamo la capacità del sistema di lasciare inalterate stabilità e precisione nonostante sollecitazioni e disturbi.

Definiamo:

- ✓ **Perturbazione strutturata:** i disturbi che intervengono in parametri del sistema a noi noti, con intensità che possiamo racchiudere entro un certo intervallo di incertezza;
- ✓ **Perturbazione non strutturata:** I disturbi che intervengono a causa di elementi di cui non elementi del modello trascurati, ecc...

Esempio di Stabilità Robusta: Motore a Controllo In Corrente (V costante)

Nel primo modello del motore, abbiamo posto come ipotesi semplificativa, che l'impedenza d'armatura fosse zero e che quindi R_0 sia infinita. Sappiamo in realtà che R_0 non è infinita e quindi avremo una certa corrente I_1 .



Se non sappiamo quanto questo elemento sia trascurabile dobbiamo aggiungere all'equazione $P(s)$ una certa equazione che tenga conto di questo fatto.

Se pongo $P_0(s)$ uguale all'equazione che ottengo trascurando R_0 ;
 $W_2(s)$ = all'equazione che tiene conto dell'effetto di R_0 diverso da zero su $P(s)$;
 e Δ il grado in cui $W_2(s)$ interviene in $P(s)$; $-1 < \Delta < 1$

Ottingo:

$$P(s) = P_0(s)(1 + \Delta W_2(s))$$

Esempio: Motore A Tensione Costante:

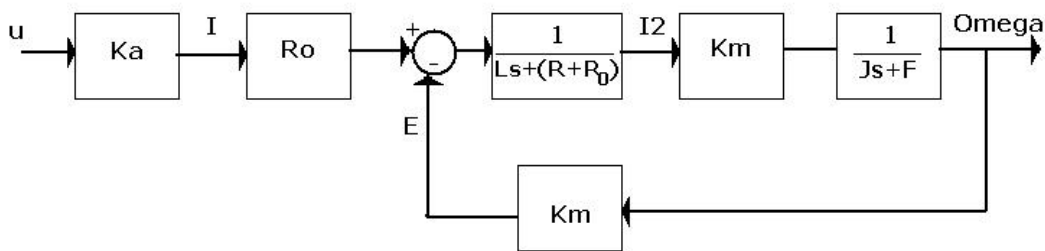
Le equazioni in gioco sono:

$$\begin{cases} I_2 = I - I_1 = I - \frac{V}{R_0} \\ V - E = RI^2 + L \frac{dI_2}{dt} \end{cases}$$

Eliminiamo la V dalla seconda equazione ed otteniamo:

$$R_0 - E = (R + R_0)I^2 + L \frac{dI_2}{dt}$$

Da cui otteniamo il seguente schema a blocchi che differisce da quello già visto per il termine $(R+R_0)$



La cui Funzione di Trasferimento sul Ramo diretto...

$$P(s) = \frac{K_a R_0 K_m}{(R + R_0)F(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K_m^2}$$

Con:

$$\tau_1 = \frac{L}{R + R_0}$$

$$\tau_2 = \frac{J}{F}$$

La P(s) può essere adesso vista come la produttoria di due componenti:

- ✓ P_0 : La parte che non contiene la modellizzazione di R_0 e assume che questo sia infinito, e praticamente ha la stessa funzione di trasferimento del modello del motore a tensione costante che abbiamo già visto;
- ✓ $(1 + \Delta W_2(s))$: La parte che tiene conto dell'effetto di R_0 sul sistema.

Difatti, facendo tendere R_0 a infinito troviamo quella che chiamiamo $P_0(s)$:

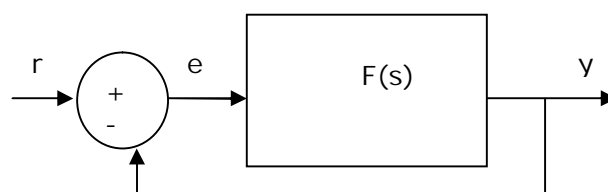
$$\lim_{R_0 \rightarrow \infty} P(s) = \frac{K_a K_m}{F(1 + \tau_2 s)}$$

$$\text{La Parte Rimanente: } \frac{R_0(F(1 + \tau_2 s))}{(R + R_0)F(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + K_m^2} = (1 + \Delta W_2(s)) \text{ con } -1 < \Delta < 1$$

L'introduzione di questo termine fa sì che posso incorporare nel mio modello semplice anche l'effetto di elementi che ho trascurato (**Perturbazioni non Strutturate**).

Stabilità Robusta e Precisione Robusta

Per effettuare uno studio sulla **Precisione Robusta**, vediamo la funzione d'errore dal punto di vista della risposta in frequenza. Supponiamo di avere un sistema caratterizzato dallo schema in figura:



La funzione di trasferimento d'errore vale:

$$e(s) = \frac{1}{1 + F(s)}$$

Se pensiamo di ottenere la funzione d'errore ad un ingresso sinusoidale nel dominio del tempo, quello che ci aspettiamo è:

$$e(t) = \left| \frac{1}{1 + F(s)} \right| \sin \left(\omega t + \left| \frac{1}{1 + F(s)} \right| \right)$$

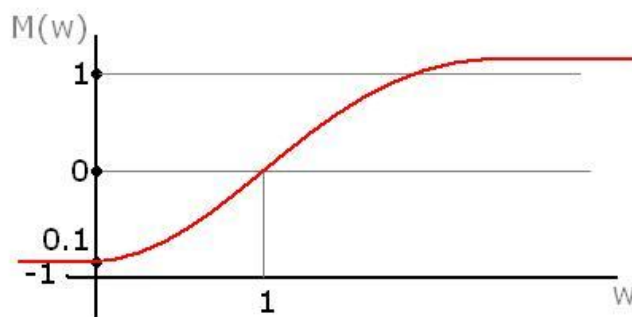
Quindi il massimo errore che ci aspettiamo è: $\left| \frac{1}{1 + F(s)} \right|$ **Funzione di Sensibilità;**

Poiché generalmente le funzioni che studiamo hanno un andamento dei moduli decrescente, è ovvio che a grandi valori della frequenza non possiamo avere un errore nullo.

Nota che alle alte frequenze $F(s)$ tende a diventare molto piccola, per cui $\left| \frac{1}{1 + F(s)} \right| \rightarrow 1$

Ne deduciamo che non possiamo avere un errore arbitrariamente piccolo alle alte frequenze.

Tuttavia possiamo imporre che l'errore abbia un andamento del tipo:



Quindi vogliamo imporre che:
 $|S(s)| < M(s)$ per ogni omega.

Se pongo:

$$W_1(s) = \frac{1}{M(s)} \quad \text{Funzione Peso d'errore}$$

E sapendo che:

$$s(s) = \left| \frac{1}{1 + F(s)} \right|$$

Ne consegue che:

$$|S(s)W_1(s)| < 1$$

Per ciò che riguarda la **Stabilità Robusta**, possiamo suddividere le problematiche in due gruppi:

- ✓ **Perturbazioni Strutturate:** Parametri di progetto sui quali abbiamo un certo intervallo di confidenza;
- ✓ **Perturbazioni non Strutturate:** Elementi del progetto del sistema che abbiamo trascurato in favore di una più semplice modellazione;

Dobbiamo quindi trovare delle tecniche che ci permettono di sopperire a questi inconvenienti in maniera generale.

PERTURBAZIONI STRUTTURATE

Immaginiamo di avere la funzione:

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

Ed immaginiamo che all'interno della $F(s)$ abbiamo un parametro p di cui non conosciamo niente. La misura con la quale questo parametro perturba la $W(s)$ è data da:

$$\frac{\frac{\Delta W}{W}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\Delta W}{\Delta p} \frac{p}{W} = \frac{\partial W}{\partial p} \frac{p}{W}$$

Adesso moltiplichiamo e dividiamo per ∂F .

$$\frac{\partial W}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial p} \frac{p}{W} = \frac{(1+F) - F \frac{\partial F}{\partial p} p (1+F)}{(1+F)^2} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{1}{(1+F)} \frac{p}{F} =$$

$$= \left(\frac{\frac{\partial F}{F}}{\frac{\partial p}{p}} \right) \left(\frac{1}{1+F} \right)$$

Se quindi vogliamo che le perturbazioni di p rispetto alla $F(s)$ siano attenuati, basta imporre che $\left(\frac{1}{1+F} \right) \ll 1$

PERTURBAZIONI NON STRUTTURATE

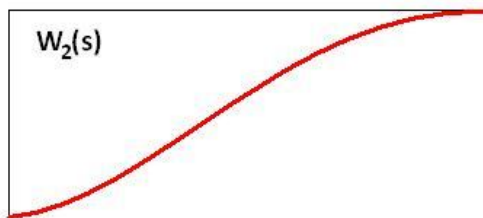
Abbiamo visto cosa dobbiamo imporre per attenuare l'effetto di perturbazioni indesiderate sui parametri del sistema. Vediamo adesso cosa bisogna fare per incorporare e tener conto nel nostro sistema di eventuali elementi del sistema fisico che abbiamo trascurato in fase di modellizzazione.

Ammettiamo di avere un processo che abbiamo modellizzato tenendo conto dei valori nominali dei parametri e lo chiamiamo $P_0(s)$, sapendo che il nostro modello è una semplificazione si può dimostrare che il modello effettivo $P(s)$ è uguale a:

$$P(s) = P_0(s)(1 + \Delta W_2(s))$$

Dove $|\Delta| \ll 1$;

e $W_2(s)$ è una f.d.t detta **Peso della Perturbazione** così fatta:



In questo modo, riusciamo ad inserire nel nostro sistema l'effetto di elementi che non abbiamo (ovvero che abbiamo male) modellizzato. E questo effetto lo inseriamo nella misura del valore di DELTA.

Alla luce di ciò si dimostra che il sistema è robustamente stabile (**Stabilità Robusta**), anche sotto l'effetto di W_2 (Processo Perturbativo con modello moltiplicativo) se e solo se:

Indicando con $G(s)$ una funzione che stabilizzi $P_0(s)$;

Indicando con $W_0(s)$ la funzione: $\frac{GP_0}{1+GP_0}$;

Abbiamo che:

$$|W_0(s)W_2(s)| < 1 \quad \forall \omega$$

N.B. : **Purché il numero di zeri a parte reale negativa della funzione ad anello aperto (Z_{ap}) sia uguale a quelli della funzione ad anello chiuso (Z_{ch}).**

STABILITA' E PRECISIONE ROBUSTI

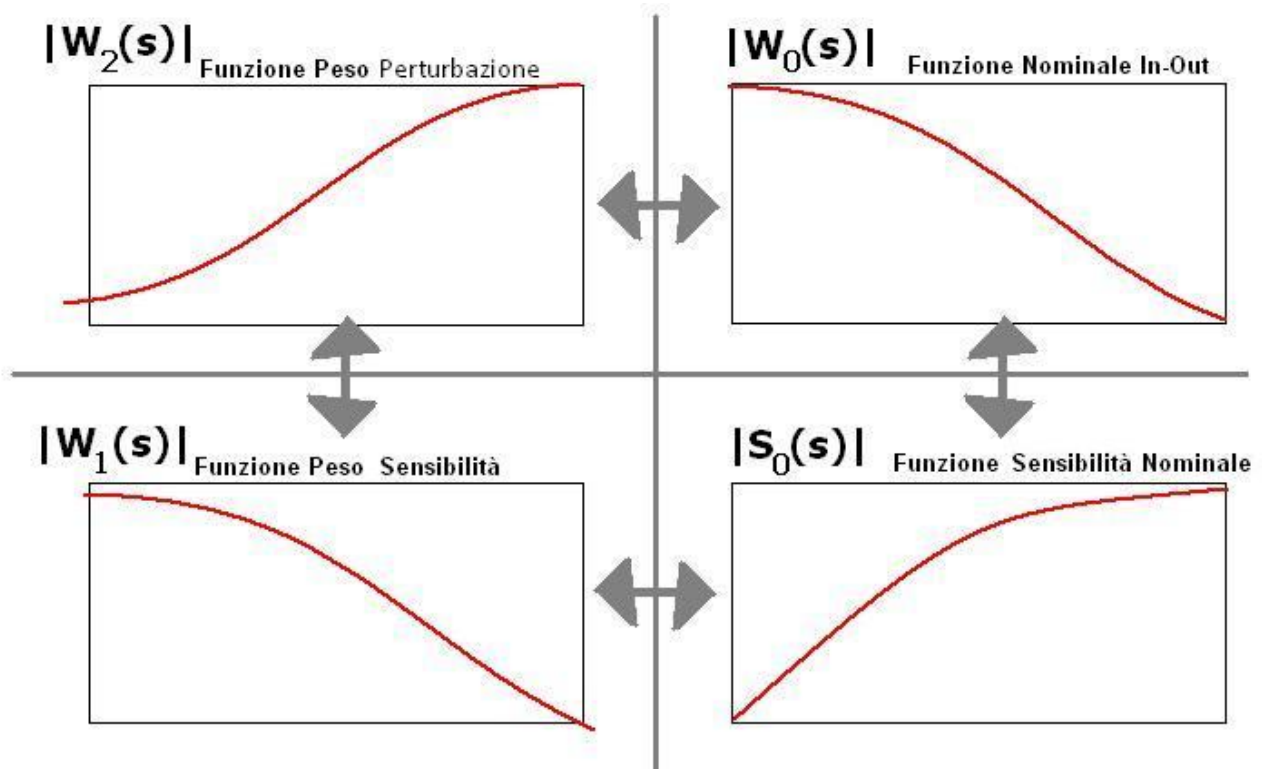
Dato che la stabilità e la precisione robusta sono legati dal termine W_0 è possibile associare una formula che implichi stabilità e precisione robuste, facendo due conti si trova che:

Abbiamo stabilità e precisione robusti se e solo se:

$$|W_0W_2| + |S_0W_1| < 1 \quad \forall \omega$$

N.B. Ricordiamoci che S è la funzione di sensibilità e vale $\frac{1}{1+F}$ se ad F sostituiamo GP_0 otteniamo la **funzione di sensibilità nominale** che si indica con S_0

Le funzioni in gioco in questa equazione sono da un certo punto di vista complementari:



5. Sintesi di $G(s)$

Dopo avere analizzato tutti gli strumenti che ci permettono di mettere in relazione tra loro i parametri della funzione di trasferimento del sistema con le specifiche di progetto, vediamo adesso le tecniche utilizzate per sintetizzare una funzione $G(s)$ tale che la funzione di trasferimento ad anello aperto soddisfi determinate specifiche.

Le specifiche si dividono in due grandi gruppi:

- ✓ **Specifiche RIGIDE:** Tipo 'K' di un sistema, guadagno, ecc...; questo tipo di specifiche hanno una corrispondenza diretta con i parametri della f.d.t.
- ✓ **Specifiche MORBIDE:** Stabilità Robusta, Risposta in frequenza (B_3, M_r), ecc... Le specifiche morbide si chiamano così, perché esistono classi di funzioni $G(s)$ che possono soddisfare le specifiche richieste, scopo del progettista è quello di riuscire a sintetizzare la migliore (dal punto di vista delle prestazioni) $G(s)$ tra la classe che soddisfa quella specifica;

Abbiamo due tipi di approccio per la sintesi di $G(s)$ per le specifiche morbide:

1. Approccio Elementare: Sintesi Per Tentativi, Funzioni Compensatrici;
2. Approccio Analitico;

5.1 Sintesi di $G(s)$: Reti Compensatrici

Abbiamo visto che alcune caratteristiche dei Sistemi sono **qualitativamente indicative** di molti aspetti che riguardano Precisione, Robustezza, Stabilità.

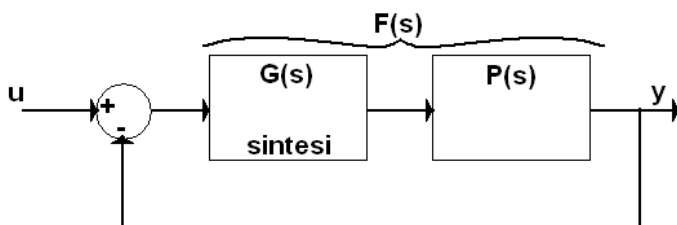
Parametri Caratteristici

Margine di Fase $>40^\circ$
Margine di Guadagno
Modulo Alla Risonanza
Banda Passante
Frequenza di Attraversamento

Specifiche Corrispondenti

Robustezza, Precisione;
Robustezza, Stabilità;
Precisione;
Precisione;
Stabilità;

Poiché queste caratteristiche sono ben evidenziate dai Diagrammi di Bode, di Nyquist e di Nichols, possiamo pensare di aggiungere una funzione $G(s)$ alla $P(s)$, in modo da avere una $F(s)$ che abbia un determinato comportamento in frequenza (Bode) e che quindi risponda a determinate specifiche.



La $G(s)$ è composta da più parti, una è quella che soddisfa le specifiche rigide, tipicamente noi vogliamo per esempio che la $P(s)$ abbia un polo nell'origine (TIPO '1') e che l'errore a regime non si discosti più di una certa quantità.

Ricordandosi che per il tipo 1 l'errore vale:

$$e_1 = \frac{1}{K_g K_p}$$

Quindi:

$$G(s) = \frac{K_g}{s}$$

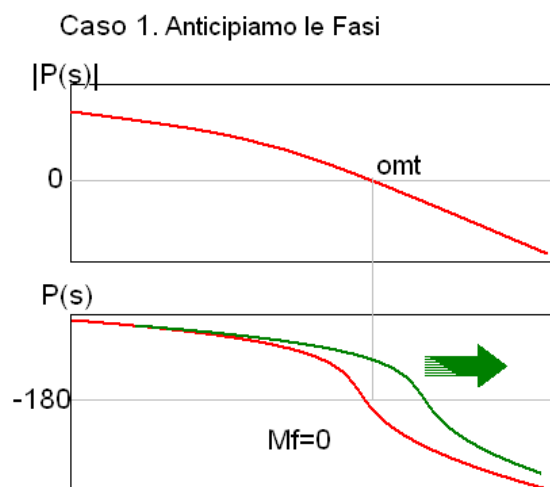
Ovviamente una $G(s)$ fatta in questo modo non risolve tutte le specifiche, abbiamo bisogno di un'altra funzione che moltiplichiamo $G(s)$ per la soddisfazione delle specifiche morbide.

La Funzione Anticipatrice

Quando vogliamo che la $F(s)$ abbia un certo valore della pulsazione di attraversamento (ω_{mt}) e un certo margine di fase (M_f), dobbiamo fare in modo che il diagramma di bode della $G(s)$ sommato a quello della $P(s)$, dia il risultato desiderato.

Possiamo avere diversi casi:

Caso 1.



Possiamo trovarci ad avere una funzione $P(s)$, a cui abbiamo già applicato una funzione $G(s)$ che incorpori le specifiche rigide, che abbia il seguente diagramma di bode (in rosso sulla figura). Notiamo che se riusciamo ad aumentare le fasi in corrispondenza di ω_{mt} , riusciamo ad aumentare il margine di fase, che altrimenti sarebbe zero.

Applichiamo quindi una funzione $R_a(s)$ tale che la somma di R_a con P dia il risultato desiderato (in verde sulla figura).

Una funzione che svolge questo lavoro è chiamata **Funzione Anticipatrice** si indica con $R_a(s)$ e ha la forma seguente.

$$R_a = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a}}$$

Dove:

m_a stabilisce il modulo dell'aumento delle fasi;

τ_a stabilisce la pulsazione nella quale deve avvenire questo aumento;

Per determinare questi parametri si usano delle tavole con dei valori standard di m_a e per valori di τ_a normalizzati.

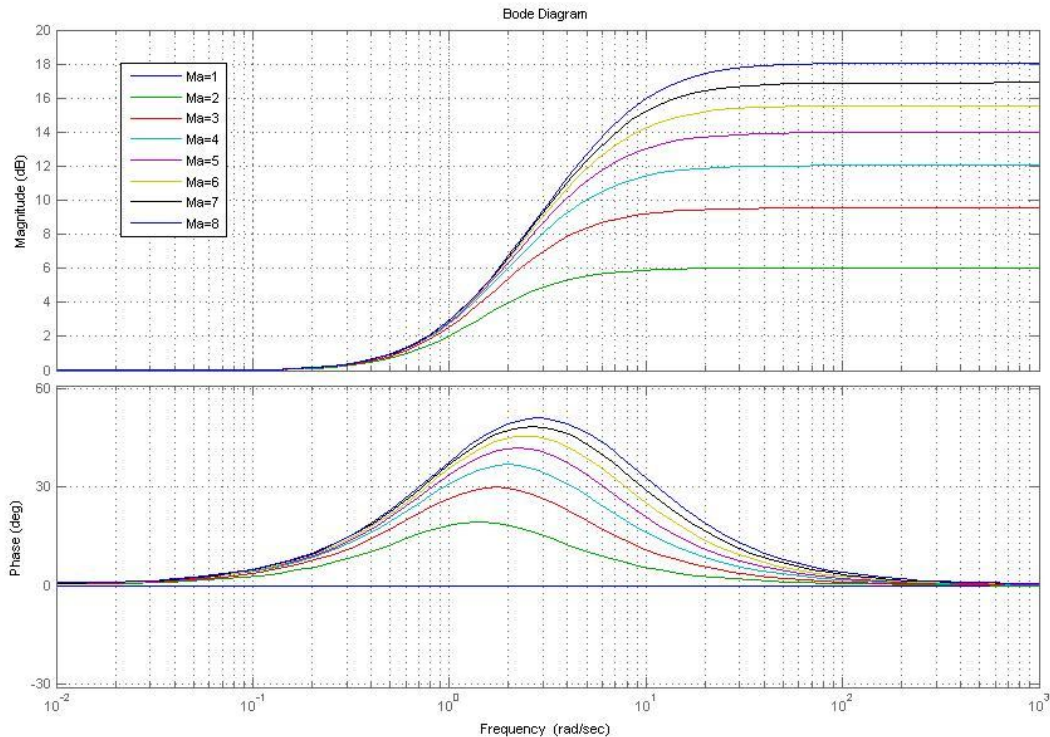
Infatti considerando che:

$$R_a = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a}} = \frac{1 + \tau_a j\omega}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} j\omega}$$

Se poniamo:

$$\tau_a \omega = u \text{ allora } ==> \frac{1 + uj}{1 + \frac{1}{m_a} j}$$

Le tavole utilizzano appunto quest'ultima equazione per valori notevoli di m_a , e per u che va da 0 a 10^2 .



Nel caso della figura, se l'aumento di fase desiderato nel punto omt è di 40° , andiamo a leggere nel diagramma delle fasi delle tavole per quale M_a si ha un valore 40° in $u=1$.

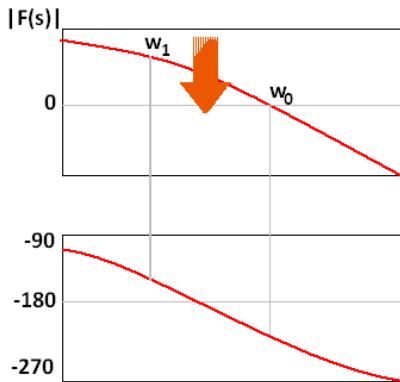
N.B. La funzione Anticipatrice ha il "vizio" di spostare verso destra la pulsazione di attraversamento, per limitare ciò nel caso in questione e in tutti quelli analoghi, t_a deve valere $1/\omega_{mt}$, cioè andiamo a pescare M_a in corrispondenza di $u=1=10^0$;

Nel caso in questione vediamo che per $u=1$, la curva con fase che arriva a 40° è quella fucsia corrispondente a $M_a=5$;

A questo punto abbiamo i due valori, t_a ed M_a . Se applichiamo R_a al sistema otteniamo il miglioramento che abbiamo previsto.

La funzione Attenuatrice

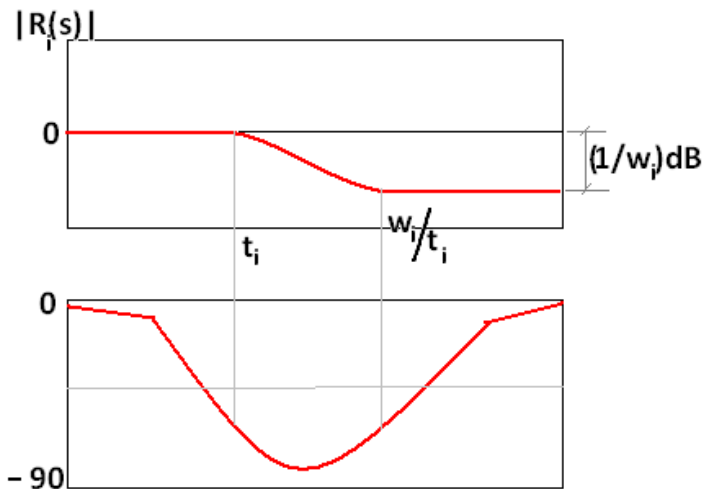
Abbiamo visto come, sfruttando l'andamento delle fasi della funzione Anticipatrice, possiamo aumentare la fase in corrispondenza della omega di attraversamento per ottenere un certo Margine di Fase, tuttavia, se la nostra $F(s)$ ha un buon margine di fase per valori alla destra della nostra omega di attraversamento (come in figura), possiamo pensare di attenuare la funzione in modo tale che la nuova omega di attraversamento risulti in quel punto. Ovviamente non possiamo far ciò diminuendo il guadagno, in quanto il guadagno che abbiamo già specificato è il minimo necessario a tenere basso l'errore secondo specifica!



Quindi vogliamo sintetizzare una funzione che attenui la $F(s)$ dopo una certa frequenza. La funzione che svolge questo "lavoro" è detta **Funzione Attenuatrice**:

$$R_i = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i} s}{1 + \tau_i s}$$

Il cui andamento, nei diagrammi di Bode è uguale a quello della funzione anticipatrice ma con i segni invertiti:



L'effetto negativo delle fasi, che può risultare un inconveniente, si limita notevolmente se scegliamo τ_{o1} e ω_{a1} in modo che l'intervallo evidenziato in figura sia spostato più a sinistra possibile rispetto alla ω di attraversamento, in modo che in corrispondenza di questa, abbiamo comunque l'attenuazione dei moduli, e un limitato anticipo delle fasi.

L'uso delle tavole è molto simile a quello della funzione anticipatrice, con due sole eccezioni:

1. Il parametro M_i si sceglie per valori di u abbastanza grandi; (alla destra del grafico per intenderci, dove la diminuzione di fase è minima)
2. I grafici vanno letti come se fossero ribaltati, infatti le quantità in gioco della funzione attenuatrice vanno sottratte dalla $F(s)$;

Regolatori P.I e Regolatori P.I.D.

Generalmente la funzione $G(s)$ ha questa forma:

$$G(s) = \frac{K' (1 + \tau_a s)}{s \left(1 + \frac{\tau_a}{M_a} s \right)}$$

Se consideriamo valori di M_a abbastanza grandi ne consegue che $\left(1 + \frac{\tau_a}{M_a} s \right) \rightarrow 1$;

Se chiamiamo K_i il guadagno di $(1 + \tau_a s) \dots$

Otteniamo:

$$G(s) = K_p + K_i \frac{1}{s}$$

Dove:

Azione **Integrale**

$$K_p = K_i$$
$$K_i = K_{T_a}$$

Azione **Proporzionale**

5.2 Sintesi di G(s): Esercizi Pratici per Funzioni Compensatrici

Funzione Anticipatrice:

$$R_a = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a}}$$

Caratteristiche:

- ✓ **Aumento della Fase;**
- ✓ **Spostamento a destra della ω_t ;**

Nel caso in cui vogliamo limitare lo spostamento a destra della ω_t scelgo m_a (nelle tavole) in corrispondenza di $u=1$ (10^0) in questo modo:

Dato che: $u = \omega_t T \rightarrow \tau = \frac{u}{\omega_t} = \frac{1}{\omega_t}$

Esempio:

$$P = \frac{1}{(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

Vogliamo sintetizzare G(s) tale che G(s)P(s) sia:

1. TIPO '1'
2. $E_1 = 0.01$
3. $M_f = 40^\circ$

1. Aggiungiamo un polo nell'origine:
 $G(s) = \frac{1}{s}$
- 2.

Se l'errore deve valere 0.01 allora:

$$\frac{1}{K_G K_P} = 0.01 \quad K_P = 1 \quad \text{Quindi } K_G = 100$$

$$G(s) = \frac{100}{s}$$

3. Utilizziamo la funzione Anticipatrice:

$$R_a = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a}}$$

- a. Guardando il diagramma di Bode di G(s)P(s) notiamo che:

$$\omega_t = 3 \times 10^1;$$

$$M_f = 0^\circ;$$

- b. Guardando i grafici notevoli scegliamo il coefficiente M_a tale che per $u=1$ (10^0) la fase della funzione valga 40° ;

Vediamo che i valori che troviamo sono:

$$u = t\omega_t = 1 \rightarrow t = 1/\omega_t \rightarrow 1/3 \times 10^1 = 0.03$$

$$M_a = 10;$$

- c. A questo punto possiamo scrivere tutta la funzione compensatrice:

$$G(s) = \frac{100}{s} \frac{1 + 0.03s}{1 + \frac{0.03}{10}}$$

$$F(s) = G(s)P(s) = \frac{100}{s} \frac{1 + 0.03s}{1 + \frac{0.03}{10}} \frac{1}{(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

Guardando i grafici di F(s), W(s) e di S(s) ci accorgiamo che abbiamo ottenuto ciò che volevamo.

Funzione Attenuatrice

$$R_i = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i} s}{1 + \tau_i s}$$

Caratteristiche:

- ✓ **Spostamento a sinistra della ω_t ;**
- ✓ **Diminuzione della fase in corrispondenza di ω_t ;**

Nel caso in cui vogliamo limitare la diminuzione della fase in corrispondenza della nuova ω_t scelgo m_a (nelle tavole) in corrispondenza di $u \geq 50$ (5×10^1) in questo modo, (lo si vede dai grafici notevoli), massimizziamo l'attenuazione dei moduli e minimizziamo la diminuzione delle fasi, ma anche in questo modo perdo un po' di fase, quindi inizialmente cerco un margine di fase maggiore di quello voluto per compensare questo effetto.

Esempio:

$$P = \frac{1}{(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

Vogliamo sintetizzare $G(s)$ tale che $G(s)P(s)$ sia:

1. TIPO '1'
2. $E_1 = 0.01$
3. $M_f = 40^\circ$

a. Aggiungiamo un polo nell'origine:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

b. Se l'errore deve valere 0.01 allora:

$$\frac{1}{K_G K_P} = 0.01 \quad K_P = 1 \quad \text{Quindi } K_G = 100$$

$$G(s) = \frac{100}{s}$$

c. Utilizziamo la funzione Attenuatrice:

$$R_i = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i} s}{1 + \tau_i s}$$

d. Guardando il diagramma di Bode di $G(s)P(s)$ notiamo che:

$$\omega_t = 3 \times 10^1;$$

$$M_f = 0^\circ;$$

Ma in corrispondenza di $\omega_{t1} = 7$ (7×10^0) notiamo che la fase vale circa 130° (che sono il margine di fase che cerchiamo), mentre il modulo vale circa 22dB;

e. Guardando i grafici notevoli scegliamo il coefficiente M_a tale che per $u = 50$ (5×10^0) il modulo della funzione valga circa 22dB;

Vediamo che i valori che troviamo sono:

$$u = t\omega_{t1} = 50 \rightarrow t = 50/\omega_{t1} \rightarrow 50/7 \times 10^0 = 7.14 = \tau_i$$

$$M_a = 12;$$

f. A questo punto possiamo scrivere tutta la funzione compensatrice:

$$G(s) = \frac{100}{s} \frac{1 + 7.14s}{1 + \frac{7.14}{12}s}$$

$$F(s) = G(s)P(s) = \frac{100}{s} \frac{1 + 7.14s}{1 + \frac{7.14}{12}s} \frac{1}{(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

Guardando i grafici di $F(s)$, $W(s)$ e di $S(s)$ ci accorgiamo che abbiamo ottenuto ciò che volevamo.

Funzione Anticipatrice: Caso II

$$R_a = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a}}$$

Caratteristiche:

- ✓ Aumento della Fase;
- ✓ Spostamento a destra della ω_t ;

Nel caso in cui non vogliamo limitare lo spostamento a destra della ω_t scelgo m_a (nelle tavole) in corrispondenza di $u=x$ in modo che il modulo della funzione notevole in x valga tanto quanto l'aumento del modulo che desideriamo applicare alla nuova ω_{t1} per farla diventare una pulsazione di attraversamento.

Esempio:

$$P = \frac{10}{s(0.25s + 1)(0.05s + 1)}$$

Vogliamo sintetizzare $G(s)$ tale che $G(s)P(s)$ sia:

1. $M_f = 40^\circ$
2. $\omega_{t1} = 13 \text{ rad/s}$

- a. Utilizziamo la funzione Anticipatrice:

$$R_a = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a}}$$

- b. Guardando il diagramma di Bode di $P(s)$ notiamo che:

$$\begin{aligned} \omega_t &= 7 \times 10^0; \\ M_f &= 10^\circ; \\ \omega_{t1} &= 13 \text{ rad/s}; \\ M_{f1} &= -10^\circ \quad (-190^\circ) \end{aligned}$$

- c. Guardando i grafici notevoli scegliamo il coefficiente M_a tale che la curva abbia una fase massima di 50° (i 40° che vogliamo + 10° dato che in quel punto siamo sotto i 180°); Vediamo che i valori che troviamo sono:

$$\begin{aligned} u &= t\omega_{t1} = 2 \rightarrow t = 2/12 \rightarrow 1/6 = 0.17 \\ M_a &= 10; \end{aligned}$$

- d. A questo punto possiamo scrivere tutta la funzione compensatrice:

$$G(s) = \frac{1 + 0.17s}{1 + \frac{0.17}{10}s}$$

$$F(s) = G(s)P(s) = \frac{1 + 0.17s}{1 + \frac{0.17}{10}s} \frac{10}{s(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

Guardando i grafici di $F(s)$, $W(s)$ e di $S(s)$ ci accorgiamo che non abbiamo ottenuto ciò che volevamo, in quanto la ω_{t1} è ancora a destra del punto desiderato. Quindi: introduciamo un guadagno $K > 1$, ricordandoci che è lecito in quanto il guadagno che si stabilisce all'inizio è il minimo per avere l'errore definito dalla specifica, se aumentiamo il guadagno ancora diminuiamo l'errore ma generalmente si perde stabilità. In questo caso possiamo farlo perché l'introduzione di questo guadagno aumenta la stabilità. (Lo abbiamo introdotto per far sì che in ω_{t1} abbiamo un margine di fase di 40°)

Nel grafico notiamo che nel punto 13rad/s il modulo vale -7dB (un fattore 2.25). Aumentiamo il guadagno otteniamo ciò che vogliamo.

Sintesi con più reti compensatrici

Immaginiamo di avere la seguente funzione:

$$P = \frac{10}{s(0.2s + 1)(0.05s + 1)}$$

E di sintetizzare una $G(s)$ tale che $G(s)P(s)$ abbia:

1. $\omega_{t1} = 1 \times 10^1$; (Attenuiamo i moduli)
2. $M_f = 50^\circ$; (Aumentiamo la fase)

Per facilitare la sintesi e diminuire i tentativi invertiamo l'ordine degli interventi.

Notiamo nel grafico di $P(s)$ che:

$\omega_t = 20 \text{ rad/s}$ (2×10^1);
 $M_f = 197^\circ$;
 $\omega_{t1} = 10 \text{ rad/s}$ (1×10^1); 12,6dB
 $M_{f1} = +10^\circ$ (-170°)

Per aumentare la fase nel punto ω_{t1} utilizzo la funzione anticipatrice, in modo da avere un aumento di fase di 40° ($-170 + 40 = -130$; circa 50°), senza curarmi dello spostamento a destra, e quindi non impongo $u=1$, ma prendo la u in corrispondenza della massima fase.

$u = t\omega_{t1} = 2,5 \rightarrow t = 2,5/10 \rightarrow \tau_a = 0.25$;
 $M_a = 5$;

Applico la R_a alla $P(s)$ con i valori trovati:

$$R_a(s)P(s) = \frac{1 + 0.25s}{1 + \frac{0.25}{5}} \frac{100}{s(0.2s + 1)(0.05s + 1)}$$

Guardando il diagramma di bode di $R_aP(s)$ vedo che:

6. Analisi con il Luogo delle Radici

Il luogo delle radici è uno strumento che ci permette di determinare la posizione degli zeri e dei poli nel piano complesso, dipendentemente dalla scelta di un parametro K' . Questo strumento ci permette di stabilire quanto vale K' , e di stabilizzare il sistema.

Sappiamo che la stabilità di un sistema a retroazione dipende dai poli della $W(s)$.

$$\text{Se } F(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$$

$$\text{Allora } W(s) = \frac{\text{num}(s)}{\text{num}(s) + \text{den}(s)}$$

Se vogliamo che i poli della $W(s)$ dipendano da un parametro K' , aggiungiamo alla $F(s)$ un coefficiente K' detto **guadagno ad alta frequenza** (che non è il guadagno della funzione, in quanto è bene ricordare che il guadagno è definito come il valore che la funzione assume per $s=0$).

A questo punto avremo:

$$F(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Quindi i poli della $W(s)$ dipenderanno da s e da K' , e quindi la nostra **funzione caratteristica** sarà:

$$f(s, K') = \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K' \prod_{i=1}^m (s - z_i)$$

Al variare di K' varieranno le radici di $f(s, K')$, dobbiamo cercare ora di costruire nel piano complesso, gli spostamenti degli zeri e dei poli in funzione di K' , in modo da potere scegliere il valore corrispondente alla migliore configurazione possibile.

6.1 Calcolo del Luogo delle Radici

Adesso ci occuperemo di come poter disegnare velocemente e con una buona approssimazione il Luogo delle Radici. Per far questo abbiamo delle regole di comportamento generale, ed una scaletta delle operazioni da fare.

Innanzitutto è bene ricordare che il luogo delle radici è diverso per $K' > 0$ e per $K' < 0$.

Regola 1. Il verso della freccia del luogo delle radici, indica sempre la direzione crescente di K' . Quindi nel luogo positivo le frecce indicheranno i valori $0 \rightarrow \infty$; Nel luogo negativo invece i valori $-\infty \rightarrow 0$;

Regola 2. Per $K' = 0$ il luogo coincide con gli n poli della $W(s)$. Per $K' = \infty$ il luogo converge agli Zeri.

Dalle prime due regole deduciamo che: **Il luogo positivo esce dai Poli ed entra negli Zeri; il luogo negativo è esce dagli Zeri ed entra nei Poli.**

Regola 3. Se n è la molteplicità di uno Zero o di un Polo, per ognuno di essi vi saranno n -rami del luogo entranti, ed n rami del luogo uscenti;

Dalle prime tre regole osserviamo che per $K' \rightarrow \text{Inf}$, i rami convergeranno agli Zeri e vi sarà un numero proporzionale di rami entranti negli Zeri proporzionale alle eventuali molteplicità. Ma in tutte le funzioni $W(s)$ il numero di Zeri è al più uguale a quello dei Poli ($W(s)$ è sempre una funzione fratta propria!), per questo motivo si dimostra che:

Regola 4. Per $K' \rightarrow \text{Inf}$, $(n-m)$ rami del luogo convergono al punto improprio del piano complesso.

Il punto improprio è il punto che identifica il valore infinito nel piano.

E' possibile che i rami del luogo si scontrino, dando vita a punti singolari.

Regola 5. I punti singolari sono soluzione dell'equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 0$$

Questa equazione restituisce i valori di s in corrispondenza dei quali abbiamo una singolarità. Le soluzioni valide sono SOLO quelle appartenenti ai Reali.

Il numero di punti singolari che ci aspettiamo è minore o uguale a: $n+m-1$;

In corrispondenza dei punti singolari i rami si dividono e tendono agli asintoti.

Regola 6. Gli asintoti sono in numero $(n-m)$, hanno un centro S_0 appartenente all'asse reale soluzione dell'equazione:

$$S_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (p_i) - \sum_{i=1}^m (z_i)}{n - m}$$

E dividono l'angolo giro in $(n-m)$ parti uguali;

Regola 7. Gli n -rami che convergono ad uno zero, si dispongono dividendo l'angolo giro in n parti uguali.

Regola 8. I valori di K' per i quali i coefficienti, della prima colonna della tabella di Routh del polinomio caratteristico, si annullano, sono quelli per i quali il luogo attraversa l'asse Immaginario.

Regola 9. Sull'asse reale il luogo delle radici si dispone alternativamente tra positivo e negativo, ad ogni passaggio su di uno Zero o su di un Polo.

La regola 9 ci indica il luogo delle radici sull'asse reale, partendo da sinistra il luogo è sempre negativo, appena passa un Polo o uno Zero, il luogo diventa positivo. Se il Polo o lo Zero hanno molteplicità n , il luogo cambierà alternativamente n volte.

In generale se la molteplicità è dispari il luogo commuta da positivo a negativo e viceversa, se la molteplicità n è un numero pari, il luogo non commuta nell'attraversare quel Polo o quello Zero.

Date le regole possiamo passare alla realizzazione di un Luogo delle Radici, seguendo la scaletta proposta:

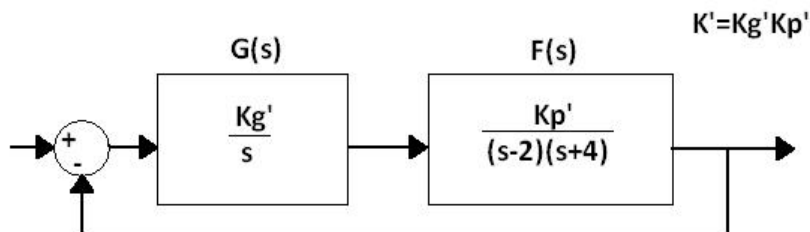
1. **Si riportano i Poli(x) e gli Zeri(o) sul piano complesso;**
2. **Si determina il luogo sugli assi reali;**
3. **Si determinano eventuali punti singolari;**
4. **Si determina il centro e l'inclinazione degli asintoti;**

Seguendo la scaletta e le regole, si può facilmente determinare il luogo delle radici.

6.2 Sintesi di G(s) con il Luogo delle Radici

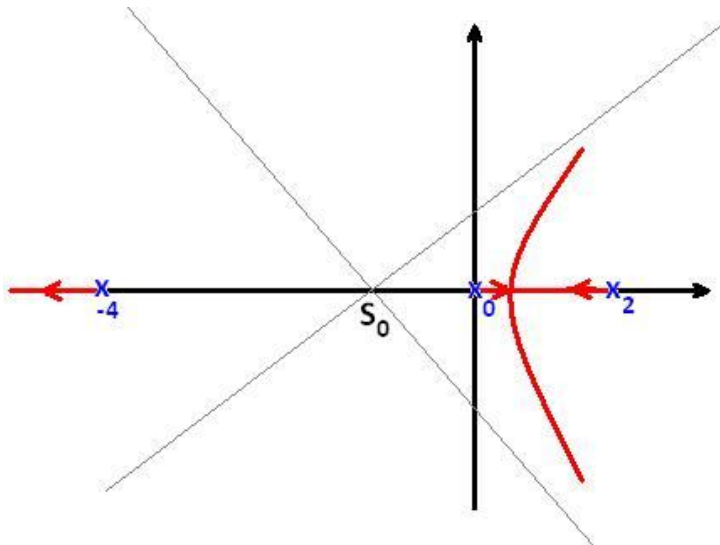
Vediamo adesso come utilizzare il luogo delle radici in modo da poterlo utilizzare per la compensazione di una funzione.

Immaginiamo di avere un sistema del tipo rappresentato in figura:



Vediamo se con questa configurazione di poli e zeri riesco a trovare un valore di K' che renda stabile tutto il sistema.

Andiamo a guardare il luogo delle radici positive ($K' > 0$):



$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (p_i) - \sum_{i=1}^m (z_i)}{n - m} = \frac{-4 + 2 + 0}{2} = -1$$

Come si vede, quale che sia K' , il Polo in 2, non attraverserà mai l'asse immaginario.

Supponiamo ora:

$$\begin{cases} n - m = 2 \\ \text{Re}(z_i) > 0 \end{cases}$$

Con queste condizioni siamo in grado di affermare che riusciamo sempre a trovare un valore di K' per il quale il sistema risulti stabile.

Ciò è evidente quando il centro degli asintoti è posto a sinistra dell'asse immaginario, nel caso non lo sia, possiamo fare alcune operazioni.

Immaginiamo che il centro degli asintoti abbia un valore < 0 :

$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (p_i) - \sum_{i=1}^m (z_i)}{n - m}$$

Posso comunque aggiungere un termine $(-p+z)$, che equivale all'aggiunta nella funzione compensatrice di uno zero e di un polo:

$$\frac{s+z}{s-p}$$

Questa funzione, non modifica il numero di asintoti ($n-m$ fa sempre due!), ma scegliendo con accortezza p e z posso modificare il centro degli asintoti:

$$S_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (p_i) - \sum_{i=1}^m (z_i) - p + z}{n-m}$$

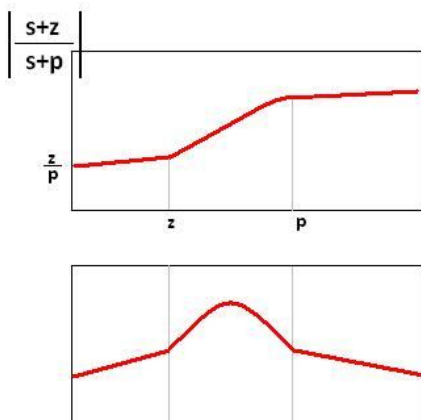
Generalmente scelgo 'p' abbastanza grande da compensare (o tanto quanto) le due sommatorie, e z resta un parametro di libera scelta.

In questo modo, ottengo la stabilità del sistema compensandolo con una funzione del tipo:

$$\frac{s+z}{s-p}$$

Che ha una struttura molto simile a quella delle funzioni compensatrici già viste. Ed in effetti si tratta di una funzione anticipatrice (in quanto $p > z$!).

E dal diagramma di Bode ce ne accorgiamo subito:



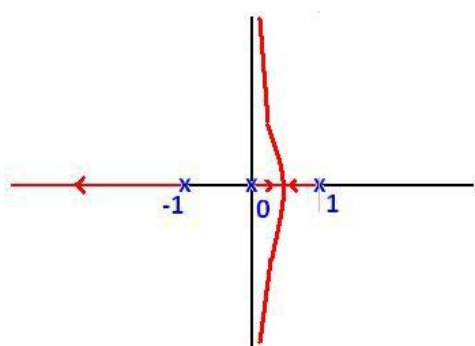
L'ipotesi che abbiamo fatto fino ad adesso è che $n-m=2$, vediamo cosa succede per $n-m=3$;

Supponiamo quindi:

$$\begin{cases} n-m=3 \\ \operatorname{Re}(z_i) > 0 \end{cases}$$

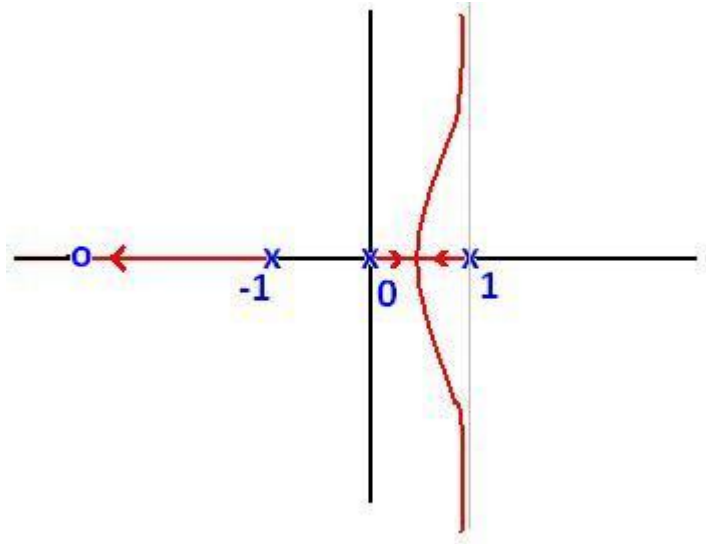
$$F(s) = \frac{1}{s(s^2-1)}$$

Se guardiamo il luogo delle radici ci accorgiamo subito della situazione:



$$\text{Il centro degli asintoti } S_0 = \frac{1-1}{2} = 0$$

Poiché dobbiamo ricondurci al caso $n-m=2$, aggiungiamo uno zero a parte reale positiva (come da ipotesi)



$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 - 1)} (s + 2)$$

Il centro degli asintoti si è ora spostato nel punto 1.

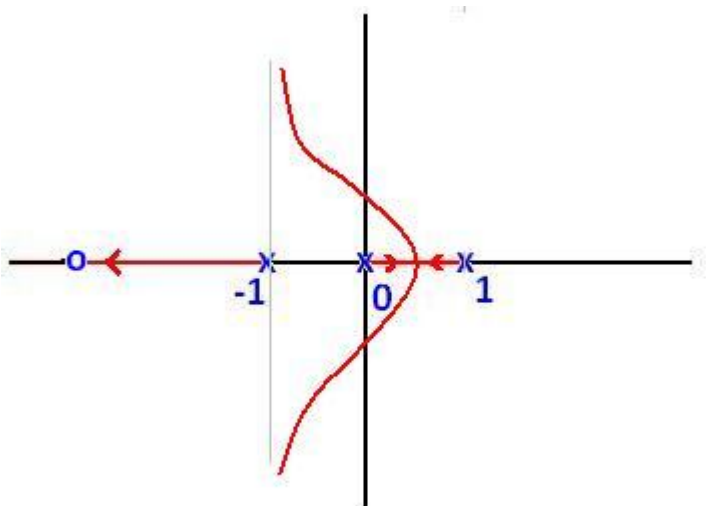
$$S_0 = \frac{1 - 1 + 2}{2} = 1$$

Adesso che ci siamo ricondotti nel caso $n-m=2$, non ci resta che spostare gli asintoti aggiungendo un polo e uno zero alla funzione, in modo che S_0 risulti minore di 0;

Osservando S_0 , e volendo porlo a -1, poniamo $p=-6$, $z=2$;
La funzione diventa quindi:

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 - 1)} \frac{(s + 2)(s + 2)}{(s + 6)}$$

Andando a guardare il luogo delle radici, osserviamo che per valori di K' sufficientemente elevati ($K' > 17$), il polo in +1, si sposta a sinistra dell'asse immaginario!



Tuttavia la funzione compensatrice così trovata: $\left[\frac{(s+2)(s+2)}{(s+6)} \right]$ non è fisicamente realizzabile, occorre necessariamente aggiungere un Polo.
La scelta del Polo non può essere casuale, ma deve in tutti i modi, cercare di non alterare i risultati già raggiunti.

La funzione utilizzata allo scopo deve avere la forma:

$$\frac{1}{(1 + \tau s)} \quad \tau \ll 1$$

Scegliendo τ abbastanza piccolo, si limita l'attenuazione dei moduli a valori della frequenza superiori a $1/\tau$. Se τ è piccolo si ottiene l'effetto solo alle frequenze più alte, che poi sono quelle che interessano meno.

Per concludere la funzione stabilizzata ha ora la forma:

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 - 1)} \frac{(s + 2)(s + 2)}{(s + 6)(1 + \tau s)}$$

N.B. Abbiamo aggiunto un Polo, quindi il numero degli asintoti è di nuovo $3 > 2$, ma se andiamo a guardare il luogo delle radici, ci accorgiamo che esiste un intervallo di valori di K' per i quali i poli della funzione sono tutti a parte reale negativa.