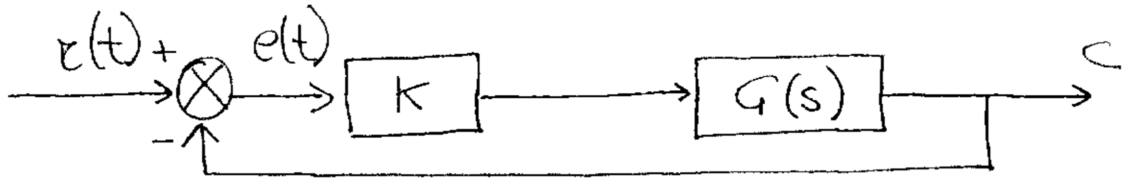
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
FACOLTÀ di INGEGNERIA

Corso di Laurea/D.U. in Ingegneria ______ Insegnamento ______

Nome/Cognome ______ Matricola ______ Data 21/09/'02

DIPLOMI DI INGEGNERIA INFORMATICA A DISTANZA
COMPITO SCRITTO DI CONTROLLI AUTOMATICI

PROBLEMA A.1



$$G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)(s^2+2s+2)}$$

1) Determinare il valore di K che assicura un errore a regime, in risposta a un gradino di set point, inferiore al 5%

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,E(s) = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s}}{\cancel{s}\left[1+KG(s)\right]}$$

$$e(\infty) = \frac{12}{K+12}$$

In base alle specifiche $e(\infty) < 0{,}05 \Rightarrow \frac{12}{K+12} < 0{,}0$

$\Rightarrow K > 228$

2) Stabilire se le specifiche al punto 1) sono compatibili con la stabilità del sistema.

L'eq. caratteristica è: $1+kG(s)=0$

$$1+\frac{k(s+2)}{(s+3)(s+4)(s^2+2s+2)}=0$$

$$s^4+9s^3+28s^2+(38+k)s+(24+2k)=0$$

Costruendo la tabella di Routh ho:

4	1	28	$24+2k$
3	9	$38+k$	0
2	$214-k$	$216+18k$	0
1	$(214-k)(38+k)-9(216+18k)$		
0	$(216+18k)$		

Per avere la stabilità bisogna imporre:

$$\begin{cases} 214-k>0 \\ (214-k)(38+k)-9(216+18k)>0 \\ 216+18k>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k<214 \\ ** \\ ** \end{cases}$$

Basta solo la disuguaglianza $k<214$ per affermare l'incompatibilità con la specifica al punto 1) per cui $k>228$.

PROBLEMA A.2

Risolvere l'eq. differenziale $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = (1+3t)u$

date le seguenti condizioni iniziali $\begin{cases} y(0^-) = 1 \\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^-} = 0 \end{cases}$

La soluzione dell'eq. differenziale è data da:

$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$ dove: $y_0(t)$ evoluzione libera

$y_1(t)$ evoluzione forzata

Calcolo $y_0(t)$ annullando il 2° membro dell'eq. differenziale

$$s^2Y(s) - s + 3sY(s) + 2Y(s) = 0$$

$$Y(s)\left[s^2+3s+2\right] = s+3 \qquad Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

POLI REALI e DISTINTI

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

$$K_1\Big|_{p=-1} = 2 \qquad K_2\Big|_{p=-2} = -1$$

$$Y_0(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \qquad y_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y_0(s)\right] = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

Calcolo ora $y_1(t)$ annullando le condizioni iniziali

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

$$Y(s)\left[s^2+3s+2\right] = \frac{s+3}{s^2} \quad \Rightarrow Y_1(s) = \frac{s+3}{s^2(s+1)(s+2)}$$

$$\frac{s+3}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{(s+1)} + \frac{K_4}{(s+2)}$$

$K_1 = \frac{3}{2}$; $K_2 = -\frac{7}{4}$; $K_3 = 2$; $K_2 = -\frac{1}{4}$

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{7}{4s^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}\right]$$

$$y_1(t) = \frac{3}{2} - \frac{7}{4}t + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

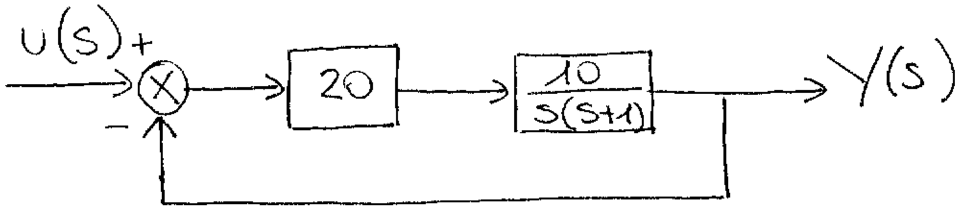
Come detto in precedenza $y(t) = \underbrace{y_0(t)}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA}} + \underbrace{y_1(t)}_{\text{EVOLUZIONE FORZATA}}$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
FACOLTÀ di INGEGNERIA

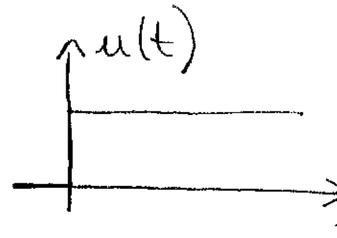
Corso di Laurea/D.U. in Ingegneria ______ Insegnamento ______

Nome/Cognome ______ Matricola ______ Data 21/09/'02

PROBLEMA B.1



, con



1) Determinare la massima sovraelongazione S e il tempo di assestamento Ta del sistema retroazionato dato.

$$G(s) = \frac{200}{s^2 + s + 200}$$

In generale la f.d.t. per un sistema del 2° ordine si pone nella forma:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

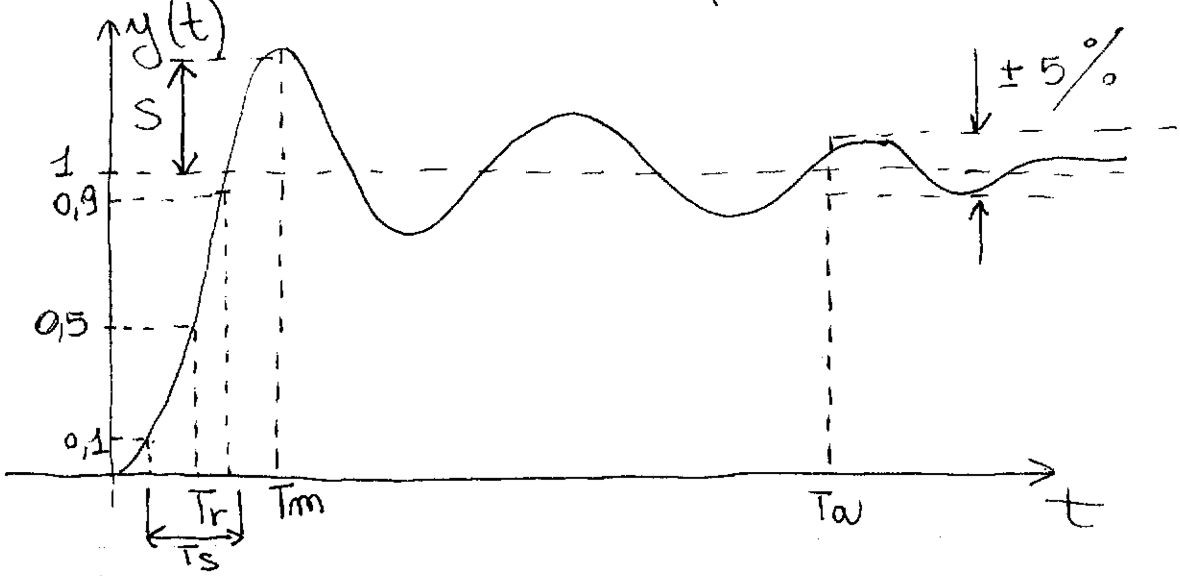
δ: coeff. di smorzamento
ω_n: pulsazione naturale

$$\begin{cases} \omega_n^2 = 200 \\ 2\delta\omega_n = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_n = 14,14 \ \frac{rad}{sec} \\ \delta = 0,0353 \end{cases} \quad , \ \delta \in (0;1)$$

$$S = 100 \exp\left\{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right\} = 89,5\%$$

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = 6,06 \text{ sec.}$$

2) Cosa rappresentano, nello studio qualitativo della risposta al gradino, i parametri sopra individuati? Quali altri parametri descrivono qualitativamente il transitorio nelle condizioni precedenti?



S: differenza tra il valore massimo raggiunto dall'uscita ed il valore finale; normalmente si dà in %.

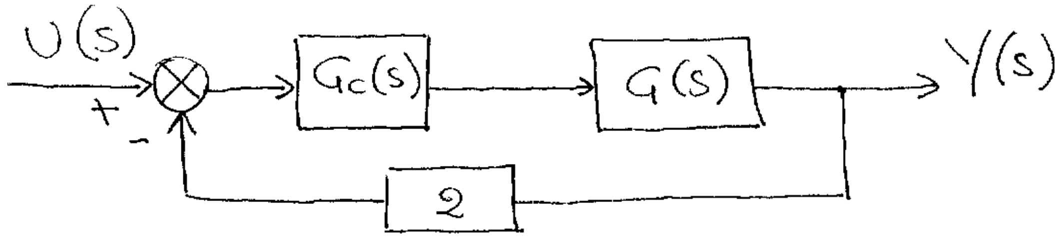
Ta: tempo occorrente perchè l'uscita rimanga entro il valore ±5% del valore finale.

Tr (tempo di ritardo): tempo per raggiungere il 50% del valore finale.

Ts (tempo di salita): tempo occorrente perchè l'uscita passi dal 10 al 90% del valore finale

Tm (Istante di massima sovraelongazione): istante al quale si presenta la massima sovraelongazione.

PROBLEMA B.2



$$G(s)=\frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)} \quad ; \quad \begin{cases} \tau_1 = 1\ sec \\ \tau_2 = 0,5\ sec \\ \tau_3 = 0,2\ sec \end{cases}$$

1) Con $G_c(s)=1$ e $K=6$ tracciare il diagramma polare completo.

$$F(j\omega)=\frac{12}{(1+j\omega)(1+0,5j\omega)(1+0,2j\omega)}$$

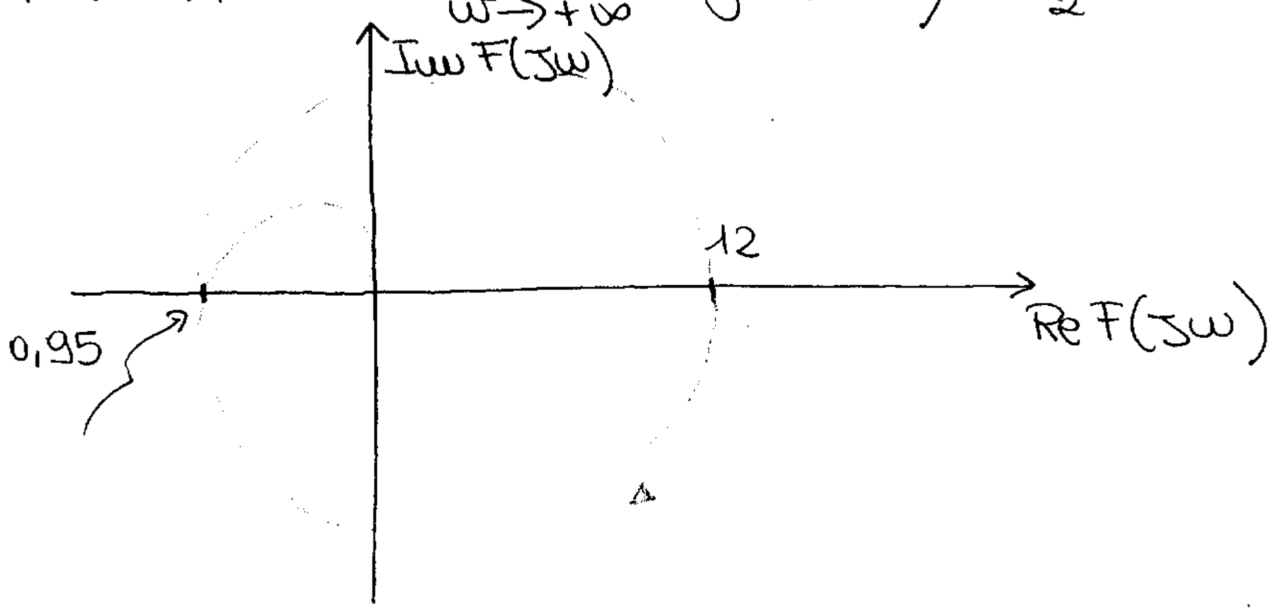
- Comportamento per $\omega \to 0^+$

$$\lim_{\omega\to 0^+} |F(j\omega)| = 12$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} \arg F(j\omega) = \lim_{\omega\to 0^+} \left[-\operatorname{arctg}\omega - \operatorname{arctg} 0,5\omega - \operatorname{arctg} 0,2\omega\right] =$$

- Comportamento per $\omega \to +\infty$

$$\lim_{\omega\to +\infty} |F(j\omega)| = 0 \qquad \lim_{\omega\to +\infty} \arg F(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$



Calcolo l'intersezione del diagramma polare con l'asse re

$F(s)+\eta=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{12+\eta(1+s)(1+0{,}5s)(1+0{,}2s)}{(1+s)(1+0{,}5s)(1+0{,}2s)}=0$

$\eta s^3+8\eta s^2+17\eta s+\eta 10+120=0$

Costruisco la tabella di Routh

3	η	17η	0
2	8η	$120+10\eta$	0
1	$126\eta^2-120\eta$	0	0
0	$120+10\eta$	0	0

Annullo la riga 1 $\Rightarrow \eta(126\eta-120)=0$

$\rightarrow \eta=0$ non acc.

$\rightarrow \eta=\dfrac{120}{126}=0{,}95$

2) Utilizzando il criterio di Nyquist, determinare la stabilità del sistema.

SISTEMA STABILE non circondo con il diagramma polare il punto critico $(-1+j0)$.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PARMA
FACOLTÀ di INGEGNERIA

Corso di Laurea/D.U. in Ingegneria ______ Insegnamento ______

Nome/Cognome ______ Matricola ______ Data 21/09/'02

3) Assumendo $K=6$, $G_c(s)=\frac{1+\tau_1 s}{1+\alpha\tau_1 s}$ con $\alpha=0,05$ e mantenendo inalterata l'espressione di $G(s)$, determinare i corrispondenti margini di ampiezza e di fase.

$$F(s)=\frac{12}{(1+0,05s)(1+0,5s)(1+0,2s)}$$

Ricavo M_A: $F(s)+\eta=0 \Rightarrow \frac{12}{(1+0,05s)(1+0,5s)(1+0,2s)}+\eta=$

$$\eta s^3+27\eta s^2+150\eta s+2400+200\eta=0$$

Costruisco la tabella di Routh

3	η	150η	0
2	27η	$(2400+200\eta)$	0
1	$3850\eta^2-2400\eta$	0	0
0	$200\eta+2400$	0	0

Annullando la 1° riga ho: $\eta(3850\eta-2400)=0$

$\eta=0$ $\eta=0,6$

$$\Rightarrow M_A=\frac{1}{\eta}=1,6$$

$M_F = 180^\circ + \text{arctg}\, F(j\omega_0)$

$\text{arctg}\, F(j\omega) = -\text{arctg}\, 0{,}05\omega - \text{arctg}\, 0{,}5\omega - \text{arctg}\, 0{,}2\omega$

$|F(j\omega_0)| = 1 \implies \dfrac{12}{\sqrt{1+0{,}0025\omega_0^2}\cdot\sqrt{1+0{,}25\omega_0^2}\cdot\sqrt{1+0{,}04\omega_0^2}} = 1$

$143 = 0{,}000025\omega_0^6 + 0{,}010725\omega_0^4 + 0{,}2925\omega_0^2$

Iterando ho: $\omega_0 = 9{,}7$ rad/sec

$M_F = 180^\circ - \text{arctg}(0{,}05\cdot 9{,}7) - \text{arctg}(0{,}5\cdot 9{,}7) - \text{arctg}(0{,}2\cdot 9{,}7)$
$= 13{,}06^\circ$.