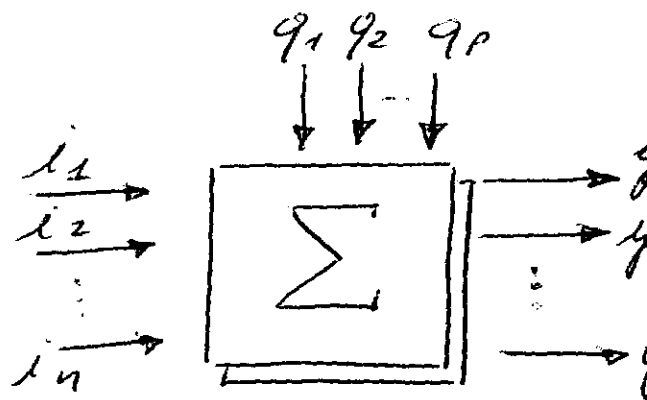


SISTEMI

SISTEMA ORIENTATO:



VARIABILI $\begin{cases} \nearrow \text{INGRESSO} \\ \searrow \text{USCITA} \end{cases}$ $\begin{cases} \nearrow \text{MANIPOLABILI} \\ \searrow \text{NON MANIPOLABILI} \end{cases}$ (disturbi)

MODELLO MATEMATICO STATICO // input costanti
o PARAMETRICO ALGEBRICO // per lunghi periodi

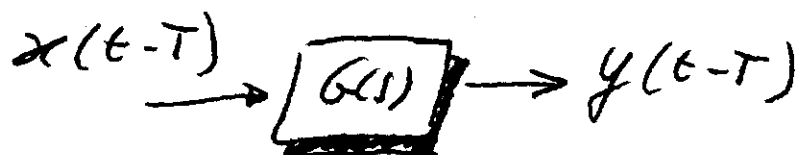
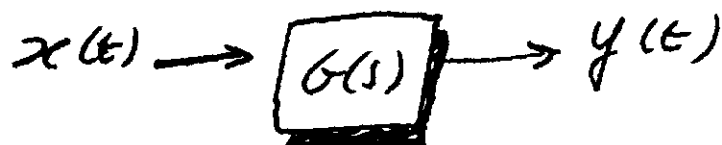


MODELLO MATEMATICO DINAMICO // • eq. in diff. le
// • informazioni reg. transitorie



SISTEMI LINEARI: si applicano i principi di sovrapposizione degli effetti

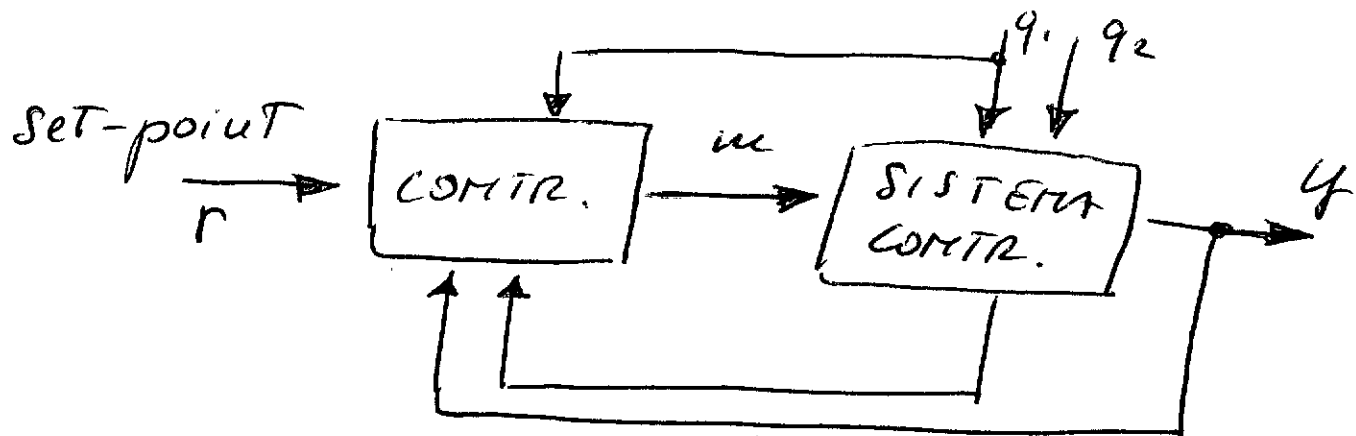
SISTEMI STAZIONARI: tempo invariante



SCHETTI A BLOCCHI

- punti di diramazione
- giunzioni sommanti
- proprietà di riduzione A FORMA MINIMA

SCHEMA DI CONTROLLO GENERALE:



TIPO DI CONTROLLO:

- IL CONTROLLORE OPERA UTILIZZANDO, OLTRE AL SEGNALE DI RIFERIMENTO r , SOLO INFORMAZIONI CHE RIGUARDANO GLI INGRESSI DEL SIST. CONTROLLATO

→ AZ. DIRETTA

- IL CONTROLLORE UTILIZZA ANCHE INFORMAZIONI SULLE USCITE DEL SISTEMA CONTROLLATO

→ RETROAZIONE

TRASFORMATE LAPLACE

modello:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t)$$

- evoluzione libera (OMOGENEA ASSOCIATA)
- evoluzione FORZATA

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} dt$$

- $f(t) \equiv 0$ per $t < 0$
- osserva di convergenza su $F(s)$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}}$$

PROPRIETÀ DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE

$$L(k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)) = k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)$$

$$L(f(t - \tau)) = e^{-s\tau} F(s)$$

$$F(s - a) = L(e^{at} \cdot f(t))$$

$$L(f(a \cdot t)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$F_1(s) \cdot F_2(s) = L(f_1(t) * f_2(t))$$

$$L\left(\frac{df}{dt}\right) = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$L\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = L(-t \cdot f(t))$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) \quad \text{TEOREMA VALORE INIZIALE}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \quad \text{TEOREMA VALORE FINALE}$$

$\delta(t)$ (impulso)	1
$H(t)$ (gradino)	$1/s$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$	$\frac{1}{s^n}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^n}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{\sin(\varphi) \cdot s + \cos(\varphi) \cdot \omega}{(s^2 + \omega^2)}$
$e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{\sin(\varphi) \cdot (s - \alpha) + \cos(\varphi) \cdot \omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)^n} \cdot \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left[(-1)^k \binom{n}{2k+1} \cdot \omega^{2k} \cdot s^{n-2k-1} \right]$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cos(\omega t)$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^n} \cdot \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \left[(-1)^k \binom{n}{2k} \cdot \omega^{2k} \cdot s^{n-2k} \right]$

ANTI TRASFORMATA di f. razionali
fratte

$$F(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots +$$

(se i poli hanno molteplicità 1)

$$F(s) = \frac{(s-z_1)}{(s-p_1)^3 (s-p_2)^2} = \frac{K_1}{(s-p_1)^3} + \frac{K_2}{(s-p_1)^2} +$$

$$+ \frac{K_3}{(s-p_1)} + \frac{K_4}{(s-p_2)^2} + \frac{K_5}{(s-p_2)}$$

(molteplicità
triple e doppie)

IMPULSO DI DIRAC $\delta(t)$:

$\tau \rightarrow 0$

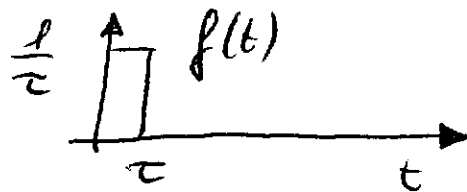


fig. 1

- $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

- $\int_a^b \delta(t - t_0) dt = 1 \quad t_0 \in (a, b)$

- $\int_a^b \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) \quad t_0 \in (a, b)$

- $\mathcal{L}^{-1}\{K\} = K\delta(t)$

ESERCIZIO:

dalle figure 1 dimost
re che $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} =$
 $= \frac{1}{\tau s} (1 - e^{-\tau s})$ e

$\lim_{\tau \rightarrow 0} F(s) = 1$

F.ME TRASFERIMENTO SIST. DINAMICI: $G(s)$

RISPOSTA ALL'IMPULSO: $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

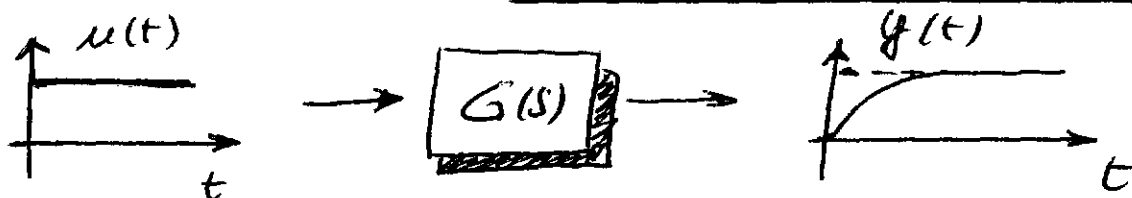
RISPOSTA AL GRADINO: $g_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\}$

SISTEMI DEL PRIMO ORDINE

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$



risposte al gradino: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(1+\tau s)}\right\} =$
 $= 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$



TEMPO ASSESTAMENTO: Tempo occorrente affinché l'uscita rimanga entro il 5% del valore finale

es.

$$G(s) = \frac{10}{s+3} \rightsquigarrow G(s) = \left(\frac{10}{3}\right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)s}$$

$$\rightarrow \tau = \frac{1}{3}$$

SISTEMI DEL II ORDINE

per approssimazione \rightarrow anche sist. ordine elev.
(poli dominanti)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + 2\delta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

RISPOSTA AL GRADITO UNITARIO:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}\right\} = 1 - A e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi)$$

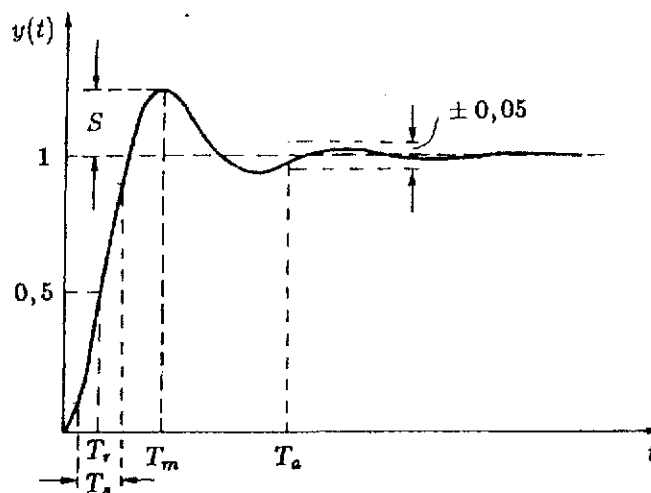
$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \quad \omega = \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} = \arcsin \sqrt{1-\delta^2} = \arccos \delta$$

ω_n = PULSAZIONE NATURALE

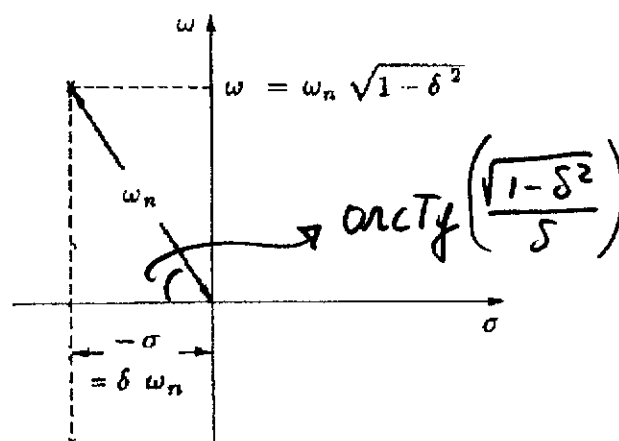
δ = COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO

SPECIFICHE NEL DOMINIO DEL TEMPO



- **massima sovraelongazione S** (o anche *massimo sorpasso*): differenza tra il valore massimo raggiunto dall'uscita ed il valore finale di regime: normalmente si dà in percentuale del valore finale, per cui si parla di massima sovraelongazione percentuale;
- **tempo di ritardo T_r** : tempo necessario affinché l'uscita raggiunga il 50% del valore finale;
- **tempo di salita T_s** (in inglese *t-rise*): tempo necessario affinché l'uscita passi dal 10% al 90% del valore finale;
- **tempo di assestamento T_a** : tempo necessario affinché l'uscita rimanga entro il $\pm 5\%$ del valore finale;
- **istante di massima sovraelongazione T_m** : istante al quale si presenta la massima sovraelongazione.

Tutti questi parametri dipendono dalla posizione dei poli del sistema nel piano complesso, ossia quindi dai valori del coefficiente di smorzamento δ e della pulsazione di risonanza ω_n , il cui significato geometrico è illustrato nella figura seguente:



- MASSIMA SOVRAELONGAZIONE:

$$S = 100 (y_{max} - 1) = 100 e^{\frac{-\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

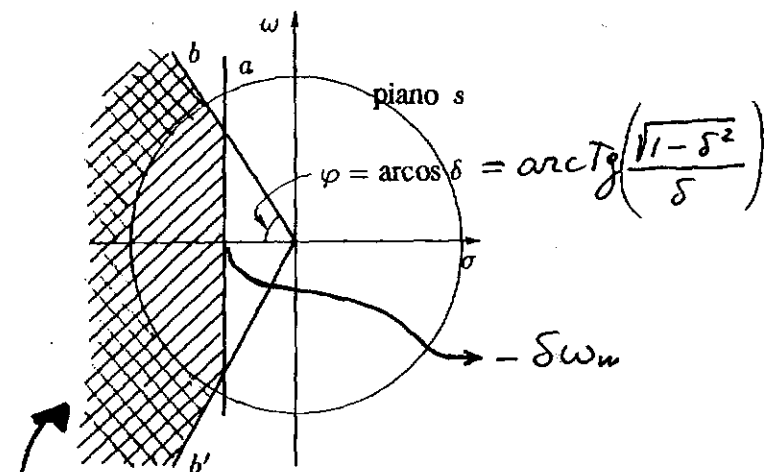
- MASSIMO TEMPO DI ASSESTAMENTO:

$$T_a = \frac{3}{\delta \omega_n}$$

$$\delta \omega_n \geq \frac{3}{T_a}$$

- TEMPO DI SALITA:

$$T_s \approx \frac{1,8}{\omega_n}$$



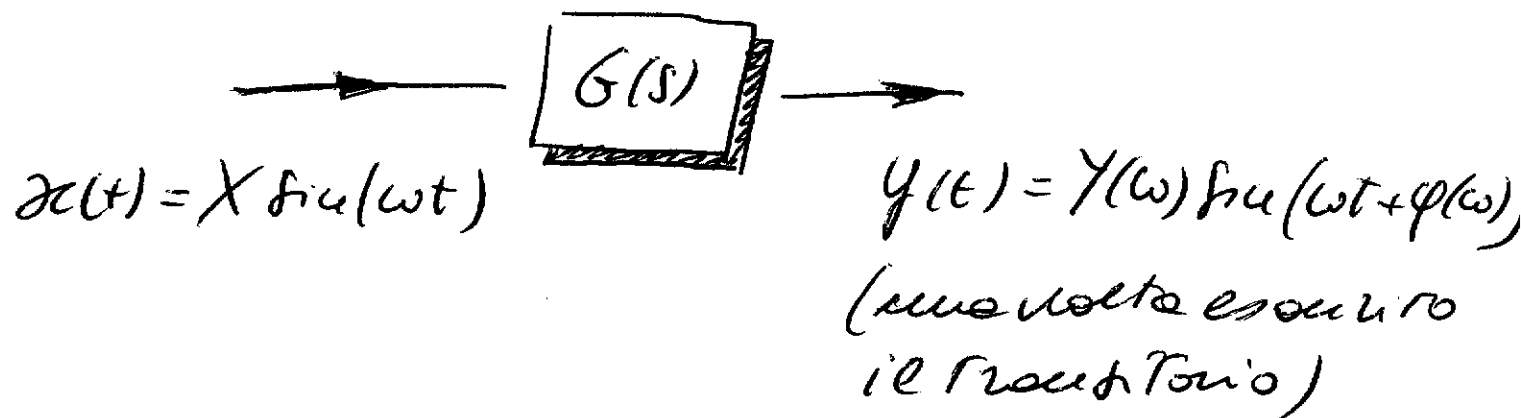
I POLI DOMINANTI DEVONO
CAPERLI!

ANALISI ARMONICA

→ Si passa dall'analisi nel dominio del tempo all'ANALISI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

F.ne di Trasferimento \rightarrow F.ne di risposta armonica

SISTEMI LINEARI STAZIONARI:



F.NE DI RISPOSTA ARMONICA: $F(\omega) = \left(\frac{Y(\omega)}{X} \right) e^{j\varphi(\omega)}$

- è indipendente dall'ampiezza X
- descrive il sistema in condizioni stazionarie alla data frequenza
- definita per $0 \leq \omega < +\infty$

TEOREMA:

Un sistema lineare e stazionario con
funzione di trasferimento razionale
fatta con poli e zeri reali
negativi, con ingresso un segnale
sinusoidale, presenta a regime
una risposta sinusoidale avente
la stessa frequenza di oscillazione -
La sua f.ve di risposta armonica
 $F(\omega)$ è legata alle f.ve di
trasferimento $G(s)$ dalle:

$$F(\omega) = G(j\omega)$$

DIAGRAMMI DI BODE

- diagramma delle ampiezze (o diagr. α)
- diagramma delle fasi (o diagramma β)

DIAGRAMMA α : logaritmo del modulo della risposta armonica in funzione del logaritmo della pulsazione ω

DIAGRAMMA β : argomento della risposta armonica in funzione del logaritmo della pulsazione ω

PROP. LOGARITMI:

$$\log x^y = y \log x$$
$$\log(ab) = \log a + \log b$$
$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$
$$\log_A x = \log_B x \cdot \log_B A$$

- di nome si usano i logaritmi naturali
- $B_{dB} = 20 \log_{10} A$

$$A = r \cdot 10^u \quad 1 \leq r < 10$$

$$B = (20u + S) \text{ dB}$$

$$\text{con } 0 \leq S < 20$$

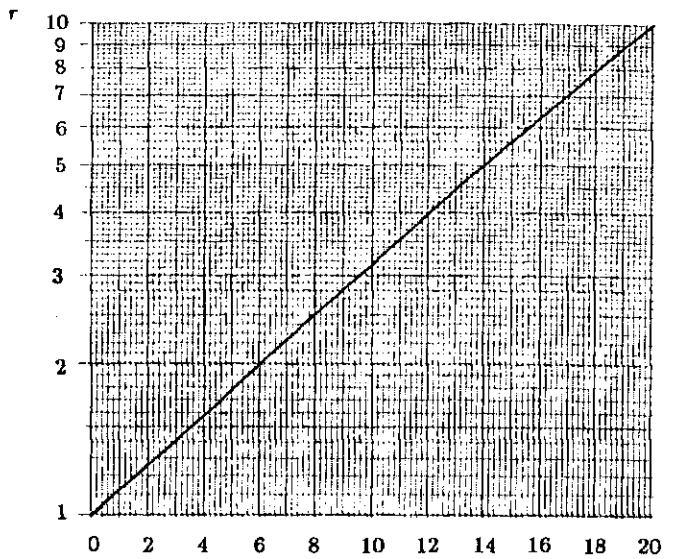
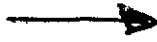
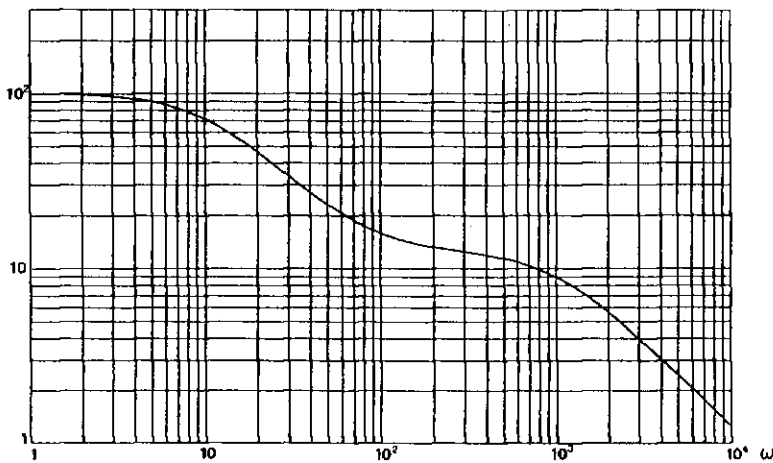


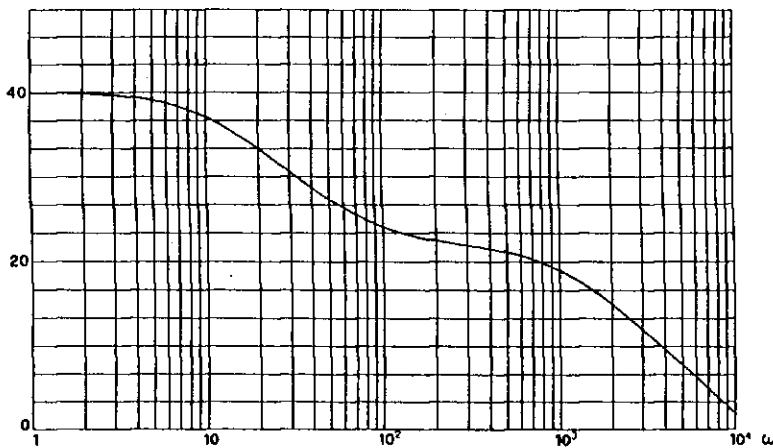
Diagramma per la conversione in decibel.

$|G(j\omega)|$



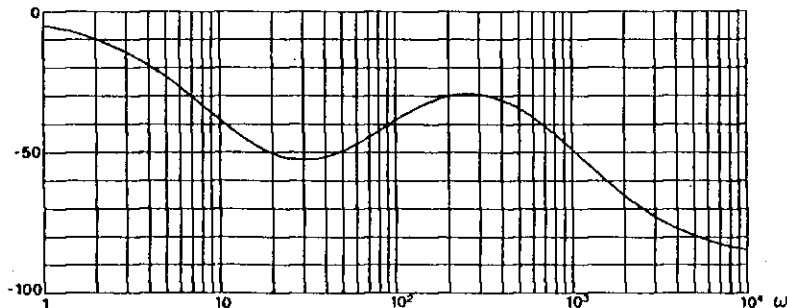
← diagramma Δ
(carte logaritmiche)

$|G(j\omega)| \text{ (dB)}$



← diagramma (carte
semi logaritmiche)
dB!

$\arg G(j\omega) \text{ (gradi)}$



← diagramma β
(carte semi logaritmiche)

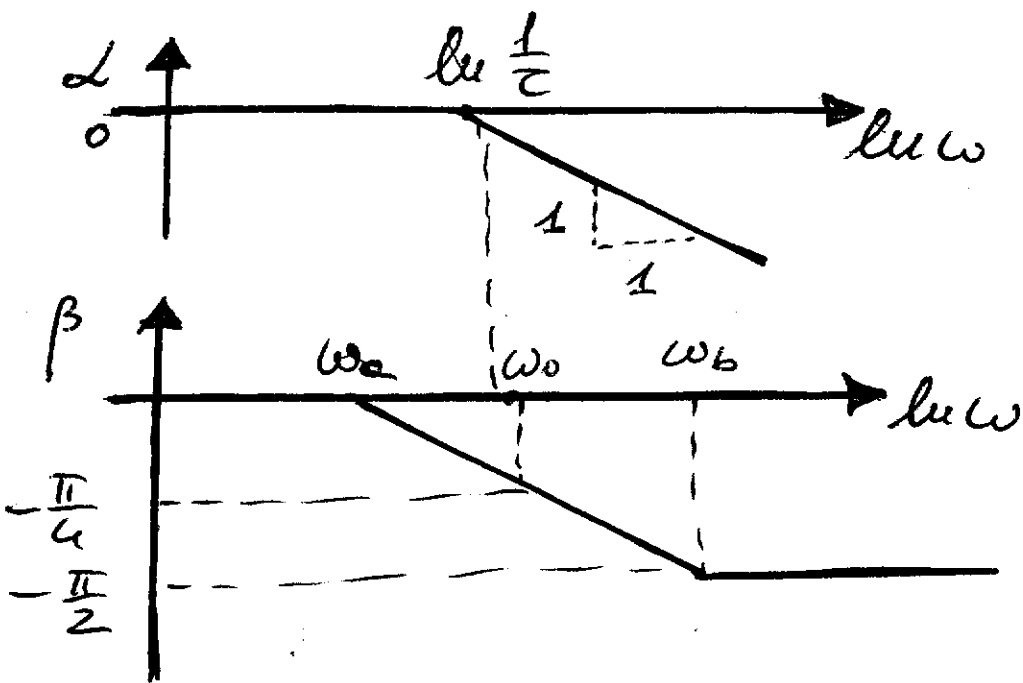
approximative asintotice
diagrammi BODE:

$$G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$$

$$\ln G(j\omega) = \ln \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} + j(-\arctan \omega\tau)$$

• $\omega \ll \frac{1}{\tau} \rightarrow \alpha \approx 0$

• $\omega \gg \frac{1}{\tau} \rightarrow \alpha \approx \ln \frac{1}{\tau} - \ln \omega$



$$\begin{cases} \ln \frac{\omega_0}{\omega_a} = \ln \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = 4,81 \end{cases}$$

$$G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_u^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_u} \right)^{-1}$$

per $\frac{\omega}{\omega_u} \ll 1 \quad \alpha \approx 0$

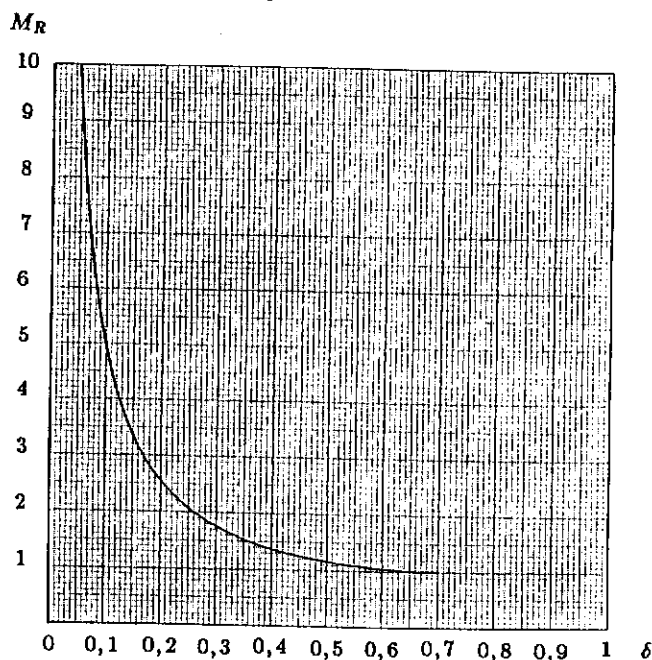
per $\frac{\omega}{\omega_u} \gg 1 \quad \alpha \approx 2 \ln \omega_u - 2 \ln \omega$

PICCO DI RISONANZA: massimo valore (M_R) del modulo della funzione di risposta omogenea $|G(j\omega)|$, visto dal diagramma α

PULSAZIONE DI RISONANZA: pulsazione ω_R (ω_R) alle quale si verifica il picco di risonanza

$$\omega_R = \omega_u \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

$$M_R = \frac{1}{2\delta \sqrt{1 - \delta^2}}$$



DIAGRAMMI POLARI o DI NYQUIST

forniscono le curve di raffronto,
nel piano di Gours, il valore del
numero COMPLESSO $G(j\omega)$ al variare di ω

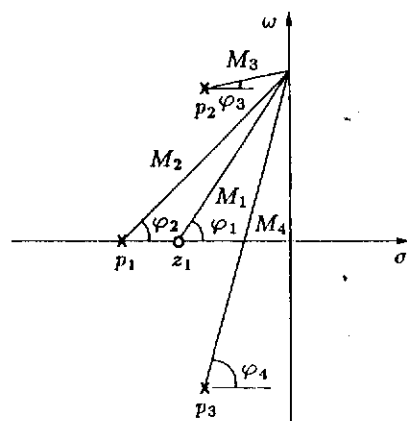
Diagramma polare \longleftrightarrow Diagramma Bode

Suono principalmente per lo studio delle
stabilità (criterio Nyquist)

- si ricava $G(j\omega)$
- si separa parte reale ed immaginaria di $G(j\omega)$
- si disegna il diagramma per punti al variare di ω .

$$G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)} =$$

$$= K_1 \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)}$$



REGOLE PER IL TRACCIAMENTO dei DIAGRAMMI POLARI

1) $\omega \rightarrow 0^+$

$$R=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} G(j\omega) = K \end{array} \right.$$

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)}{(j\omega)^R (j\omega - p_1)}$$

$$R > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = \infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arg(G(j\omega)) = -R \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \end{array} \right.$$

to pseudo



$$G(j\omega) \approx K \frac{b_0 + j\omega b_1}{a_0 + j\omega a_1}$$

$$G(s) = \frac{s^u + \dots + s b_1 + b_0}{s^u + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$\text{Tg } \alpha \approx \alpha$$

$$\Delta \arg G(j\omega) \approx \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right) \omega \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{variazione del} \\ \text{argomento di} \\ G(j\omega) \text{ rispetto} \\ \text{a zero} \end{array} \right.$$

$R=1$ associato sull'asse immaginario

$$G(j\omega) \approx K \frac{b_0 + j\omega b_1}{j\omega(a_0 + j\omega a_1)} \rightarrow \sigma_0 = K \frac{a_1 b_1 - a_2}{a_1^2}$$

è l'associato (parte reale)

$$2) \omega \rightarrow +\infty$$

$$G(s) = \frac{s^m + \dots + b_0}{s^n + \dots + a_0}$$

• Se $m \geq n$ il

diagramma di Bode in ampiezza dell'asse reale

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = K$$

• Se $m < n$ il diagramma di Bode nell'origine

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg G(j\omega) = (m-n) \frac{\pi}{2} + \left(\text{contributo costante} \right)$$

↑
vedi i contributi delle
costanti e fase

3) Notezioni complementari ottenute dall'origine per $\omega \in (0, +\infty)$

$$\Delta \arg G(j\omega) = (m-n) \frac{\pi}{2} - (\mu-\nu) \frac{\pi}{2} - (n_z - n_p) \pi$$

μ è # zeri immaginari | n_z è # zeri a parte reale > 0
 ν è # poli immaginari | n_p è # poli a parte reale > 0