ANALISI MATEMATICA AB

- ACERBI-BUTTAZZO "AN. MAT. ABC - FUNZ DI 1 VAR. REALE"
  ROSSO
- MUCCI "AN. MAT. ABC ESERCIZI - FUNZ. DI 1 VAR. REALE
  PITAGORA VERDE

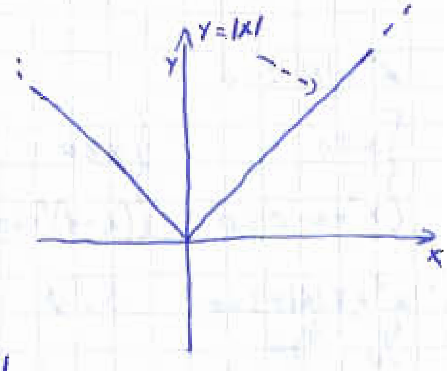
RICEVIMENTO
LU 11.30 - 12.30
ME 10.30 - 11.30
GIO 10.30 - 11.30
DIP. MAT.
TEL. 0521-906959
domenico.mucci@unipr.it

2. INSIEMI NUMERICI
3. FUNZIONI CONTINUE E LIMITI } PROVA SCRITTA IN ITINERE (METÀ NOV.)
4. DERIVATE
5. INTEGRALI E SERIE

PROVA SCRITTA + ORALE (facoltativo)

VALORE ASSOLUTO (modulo)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad a \longmapsto f(a) = \max\{a, -a\} \quad |a|$:



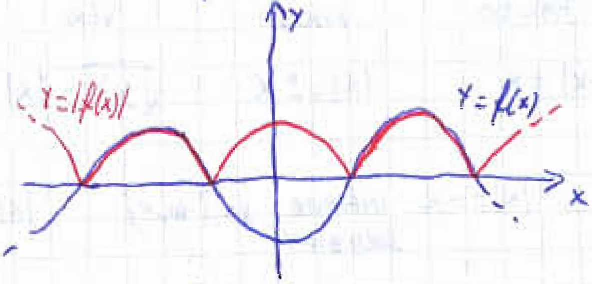
PROPRIETÀ: per ogni $a \in \mathbb{R}$,

1) $|a| \geq a$ 2) $|a| = a$ se $a \geq 0$ e $|a| = -a$ se $a \leq 0$ 3) $|a| \geq 0$

4) $|a| = 0 \iff a = 0$ 5) $|-a| = |a|$ 6) $-|a| \leq a \leq |a|$

GRAFICI DI $|f(x)|$ e $f(|x|)$

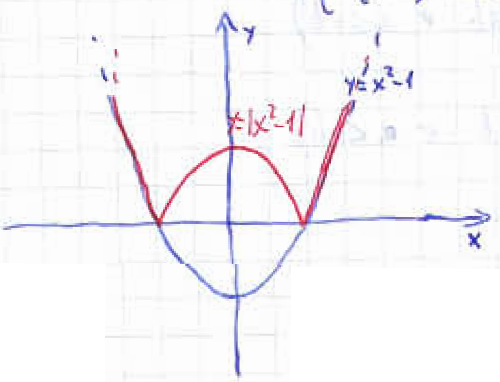
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$



Il grafico viene riflesso rispetto all'asse x quando $f(x) \leq 0$

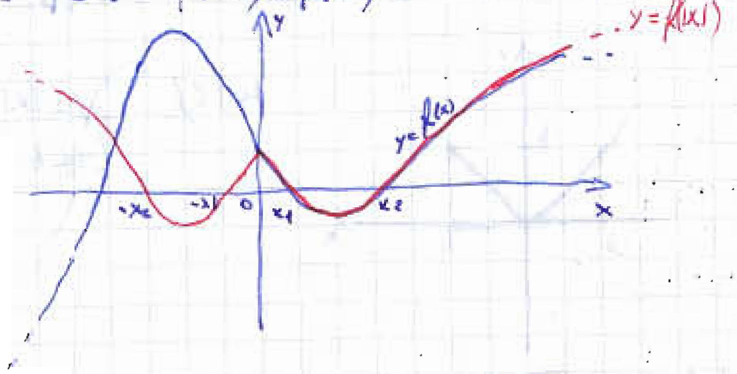
$y = |x^2-1|$

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x^2-1 \geq 0 \\ -(x^2-1) & \text{se } x^2-1 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x \geq 1 \text{ o } x \leq -1 \\ -(x^2-1) & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$f(|x|)$ è pari: $f(|-x|) = f(|x|)$

$y = f(|x|)$



$|2x+1| = 5-4x$ $\quad$ $I \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x+1 = 5-4x \end{cases}$ $\quad$ $II \begin{cases} 2x+1 \leq 0 \\ -(2x+1) = 5-4x \end{cases}$ $\quad$ $S = I \cup II$

$I \begin{cases} x \geq -1/2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ $\quad$ $II \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases}$ No perchè $3 > -\frac{1}{2}$ $\quad$ $S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

$x^2 - 3|x| + 2 = 0$ si possono usare le simmetrie perchè x^2 è una funzione pari e $|x|$ è pari.

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x = +1 \text{ e } x = +2 \end{cases}$ prendo anche le opposte $\quad$ $S = \{-2, -1, 1, 2\}$

$x^2 + |x| - 2 = 0$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)(x+2) = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \text{ e } x = -2 \end{cases}$ NO $\quad$ $S = \{-1, 1\}$

$\underset{\geq 0}{x^2} + 2\underset{\geq 0}{|x|} + 3 = 0$ $\quad$ $S = \emptyset$

OSSERVAZIONI :

FALSO	FALSO	VERO	VERO
$\lvert -x \rvert = x$	$\lvert x \rvert = \pm x$	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$(\sqrt{x})^2 = x \quad \forall x \geq 0$

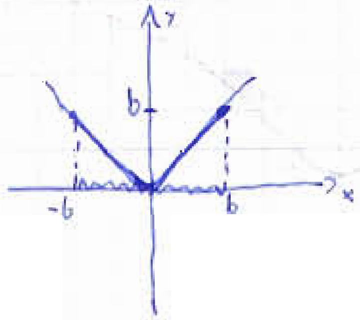
$|x| = -3$ NON HA SOLUZIONI $\quad$ $|x| = -x$ INFINITE SOLUZIONI $S =]-\infty, 0]$ $\quad$ $|x| = 4$ 2 soluzioni

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

7) $|a| \leq b$ sse $-b \leq a \leq b$ $\quad$ 8) $|a| \geq b$ sse $(a \geq b$ o $a \leq -b)$

$\Longleftrightarrow$

9) $|a| < b$ sse $-b < a < b$ $\quad$ 10) $|a| > b$ sse $(a > b$ o $a < -b)$



$|a| \leq b$ $\begin{cases} y = |x| \\ y \leq b \end{cases}$

$|x| \leq 0$ $\boxed{x = 0}$ $\quad$ $|x| > -3$ SEMPRE

$|x| < 0$ MAI

DISUGUAGLIANZE TRIANGOLARI: $\forall a,b \in \mathbb{R}$

I) $|a+b| \leq |a| + |b|$ II) $||a|-|b|| \leq |a-b|$

dim(I): ⑥ $\Longrightarrow$ $\begin{matrix} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{matrix} \xrightarrow[\text{A MEMBRO}]{\text{SOMMO MEMBRO}} -|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$

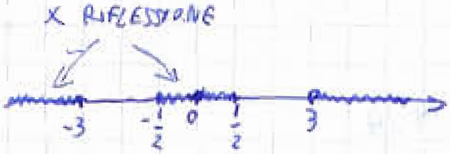
$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$

⑦ $A \leq B$ sse $-B \leq A \leq B$

$A = a+b$ $B = |a|+|b|$ $-B \leq A \leq B$ C.V.D.

$2x^2-7|x|+3>0$ SIMMETRIA $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2-7x+3>0 \end{cases}$ $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \dfrac{7 \pm 5}{4} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow \frac{1}{2} \end{matrix}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < \frac{1}{2} \text{ o } x>3 \end{cases}$



$S: \left\{ x \in \mathbb{R} : x<-3 \text{ o } -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \text{ o } x>3 \right\}$

$|x^2+1| \leq 2x$ $x^2+1 \leq 2x$ $x^2-2x+1 \leq 0$ $(x-1)^2 \leq 0$ $x=1$

$S = \{1\}$

↓

sempre >0

↓

sempre $=$ a x^2+1

$|x^2-1| \leq 2x$ o si fa $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-1 \leq 2x \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-1 \leq 0 \\ -(x^2-1) \leq 2x \end{cases}$ oppure uso la (*)

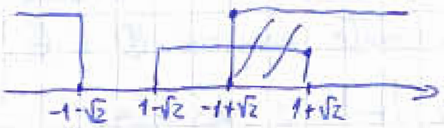
$a = x^2-1$

$b = 2x$

$-2x \leq x^2-1 \leq 2x$ $\begin{cases} -2x \leq x^2-1 \\ x^2-1 \leq 2x \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+2x-1 \geq 0 \\ x^2-2x-1 \leq 0 \end{cases}$ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+1}}{1} = -1 \pm \sqrt{2}$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+1}}{1} = 1 \pm \sqrt{2}$

$\begin{cases} x \leq -1-\sqrt{2} \text{ o } x \geq -1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2} \end{cases}$

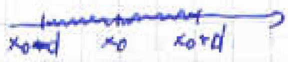


$S: \left[-1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]$

$\text{dist}(a,b) = |a-b|$

$\forall a,b \in \mathbb{R}$

PUNTI CHE DISTANO DA x_0 MENO DI $D \geq 0$



$|x-x_0| < d$

SOMMATORIE

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $\quad a_1+a_2+\dots+a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{1\le i\le n} a_i = \sum_{h=0}^{n-1} a_{h+1}$

gli indici si possono cambiare

$\{a_i : i \in I\}$ $\quad I =$ insieme indici $\in \mathbb{N}$ $\quad a_i \in \mathbb{R}$

$\sum_{i\in I} a_i$ esempio: $I =$ numeri pari minori di 20 $\quad a_i = 2i+1$

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\begin{cases} i \text{ pari} \\ i\le 20\end{cases}} (2i+1) \quad \begin{matrix} i = 2J = \text{pari} \\ J = 0, 1, \dots, 10 \end{matrix} = \sum_{J=0}^{10}(2\cdot(2J)+1) = \sum_{J=0}^{10}(4J+1)$$

PROPRIETÀ

① $\sum_{i\in I} c\cdot a_i = c\cdot\sum_{i\in I} a_i$ DISTRIBUTIVA

② se I e J sono insiemi disgiunti di indici

$$\sum_{i\in I} a_i + \sum_{J\in J} a_J = \sum_{K\in I\cup J} a_K$$ ASSOCIATIVA

$$\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \le \sum_{i\in I} |a_i| \qquad \begin{matrix} |a+b+c| \le |a+b|+|c| \\ \Downarrow \\ |a+b+c| \le |a|+|b|+|c| \end{matrix}$$

ESERCITAZIONI

$|a| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b|$

① $|a|-|b| \le |a-b|$ scambio b con a $|b|-|a| \le |b-a|$ per la definizione di valore assoluto $|b|-|a| \le |a-b|$

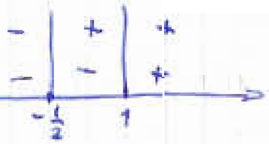
② $-|a-b| \le |a|-|b|$ Se metto insieme ① e ②, ottengo $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$

Se chiamo $|a|-|b| = x$ e $|a-b| = 3$, diventa

① $x \le 3$ ② $x \geq -3$ $\Longrightarrow |x| \le 3$

$|2x+1| = |x-1| + 3x$ $\quad 2x+1>0 \quad x>-\frac{1}{2}$

$x-1>0 \quad x>1$



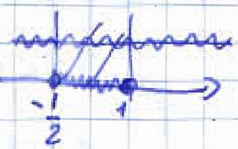
FACCIO I TRE CASI

$$① \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -2x-1 = -x+1+3x \end{cases} \cup ② \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x < 1 \\ 2x+1 = -x+1+3x \end{cases} \cup ③ \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x+1 = x-1+3x \end{cases}$$

Ⓐ $\begin{cases} x<-\frac{1}{2} \\ -4x=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x<-\frac{1}{2} \end{cases}$ $\emptyset$

Ⓑ $\begin{cases} -\frac{1}{2}\le x<1 \\ 0x=0 \quad \forall x \left[-\frac{1}{2},1\right[\end{cases}$

Ⓒ $\begin{cases} x\ge 1 \\ -2x=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 1 \\ x=1 \end{cases}$ $x=1$



$S=\left[-\frac{1}{2},1\right]=-\frac{1}{2}\le x\le 1$

$\frac{|x-1|}{x+\sqrt{x}}=1$ C.E. $\begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq 0 \end{cases} \rightarrow x>0$

$|x-1|=x+\sqrt{x}$ dato che $x+\sqrt{x}>0$

Ⓐ $\begin{cases} x>0 \\ x-1\geq 0 \\ x-1=x+\sqrt{x} \end{cases}$ $\cup$ Ⓑ $\begin{cases} x>0 \\ x-1<0 \\ -x+1=x+\sqrt{x} \end{cases}$

Ⓐ $\begin{cases} x>0 \\ x\geq 1 \\ \sqrt{x}=-1 \end{cases}$ $\emptyset$

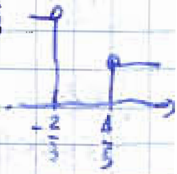
Ⓑ $\begin{cases} x>0 \\ x<1 \\ 2x+\sqrt{x}-1=0 \end{cases}$ $\sqrt{x}=t$ $x=t^2$ $2t^2+t-1=0$ $t=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}=$

$t=-1$ $\sqrt{x}=-1$ MAI VERIFICATO

$t=\frac{1}{2}$ $\sqrt{x}=\frac{1}{2}$ $x=\frac{1}{4}$

$\begin{cases} x>0 \\ x<1 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$ $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$

$3+|4x-1|<x$ $|4x-1|<x-3$ $\begin{cases} 4x-1<x-3 \\ 4x-1>-x+3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x<-2 \\ 5x>4 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-\frac{2}{3} \\ x>\frac{4}{5} \end{cases}$

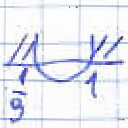


$S=\emptyset$

$\left|\frac{3x+1}{3x-1}\right|\leq 2$ C.E. $x\neq\frac{1}{3}$ moltiplico per $|3x-1|$ che è >0 $|3x+1|\leq 2|3x-1|$ elevo al quadrato dato che sono due valori positivi

$9x^2+1+6x\leq 36x^2+4-24x$ $-27x^2+30x-3\leq 0$ $9x^2-10x+1\geq 0$

$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{9}=\frac{5\pm 4}{9}=\begin{cases} 1 \\ \frac{1}{9} \end{cases}$



$x\leq\frac{1}{9}$ o $x\geq 1$ ($\frac{1}{3}$ è escluso dall'intervall

$S=\left]-\infty,\frac{1}{9}\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

$x^2-2|x|+1>0$ $|x|^2-2|x|+1>0$ $|x|=y$ $y^2-2y+1>0$ $(y-1)^2>0$ $y\neq 1$

$|x|\neq 1$ $x\neq\pm 1$

$S=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$\dfrac{|x-2|+\sqrt{x-2}}{x^2-7|x|+6} \geq 0$

$N \geq 0 \quad |x-2|+\sqrt{x-2} \geq 0 \quad \forall x \in D \quad D: x-2 \geq 0$

$x \geq 2$

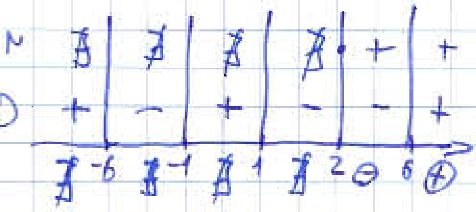
$D > 0 \quad x^2-7|x|+6 > 0 \quad |x| = t \quad t^2-7t+6 > 0 \quad (t-1)(t-6) > 0$

$t = 1$

$t = 6$

$|x| < 1$ o $|x| > 6$

$x < -6$ o $-1 < x < 1$ o $x > 6$



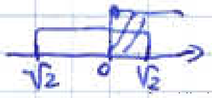
$S = \left]6, +\infty\right[\cup \{2\}$ per $x=2$, il numeratore si annulla e la frazione fa 0.

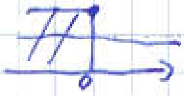
$x|x| < 2$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 < 2 \end{cases}$

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ $\qquad$ $x^2 > -2 \ \forall x$

$S = \left]-\infty, \sqrt{2}\right[$





$0 \leq x < \sqrt{2} \quad \cup \quad x < 0$

$\sqrt{x|x|-2} < 1 \quad \left[S: \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}\right]$

C.E. $x|x|-2 \geq 0 \quad x|x| \geq 2$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-2 \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x < 0 \\ x^2 \leq -2 \text{ MAI} \end{cases}$

$x|x|-2 < 1$

$x|x| < 3$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 3 \end{cases}$ o $\begin{cases} x < 0 \\ x^2 > -3 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -\sqrt{2} \text{ o } x \geq \sqrt{2} \end{cases}$ o ϕ

C.E. $x \geq \sqrt{2}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$ o $\begin{cases} x < 0 \\ \forall x \end{cases}$

$x < \sqrt{3}$

$\begin{cases} x < \sqrt{3} \\ x \geq \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right[$

$\left|x + |x^2-2|\right| > 4 \quad ① \ x + |x^2-2| > 4 \quad \cup \ ② \ x + |x^2-2| < -4$

① $|x^2-2| > 4-x \quad x^2-2 > 4-x$ o $x^2-2 < x-4$

$x^2+x-6 > 0$ o $x^2-x+2 < 0$

$(x+3)(x-2) > 0$ o $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \phi$

$x = 2 \quad x = -3$ $\qquad$ diseq. mai verif.

$x < -3$ o $x > 2$

② $|x^2-2| < -4-x$

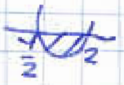
$\begin{cases} x^2-2 < -4-x \\ x^2-2 > 4+x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+x+2 < 0 \text{ MAI VER.} \\ x^2-x-6 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \phi \\ x^2-x-6 > 0 \end{cases} \quad S_2: \phi$

$x < -3$ o $x > 2$ $\quad$ o $\quad \phi \qquad S = \left]-\infty, -3\right[\cup \left]2, +\infty\right[$

$||2x^2-1|-3x|<1$ $\quad \begin{cases} |2x^2-1|-3x<1 \\ |2x^2-1|-3x>-1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} |2x^2-1|<3x+1 & ① \\ |2x^2-1|>3x-1 & ② \end{cases}$

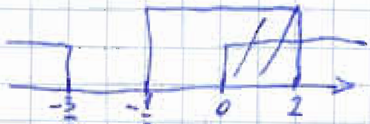
① $\begin{cases} 2x^2-1<3x+1 & (1A) \\ 2x^2-1>-3x-1 & (1B) \end{cases}$ $\quad$ (1A) $2x^2-3x-2<0$ $\quad x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm5}{4}=\begin{cases}2\\-\frac{1}{2}\end{cases}$



$-\frac{1}{2}<x<2$

(1B) $2x^2+3x>0$ $\quad x(2x+3)>0$ $\quad x=0$, $x=-\frac{3}{2}$

$x<-\frac{3}{2}$ o $x>0$



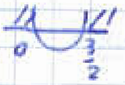
$S_1=]0,2[$

② $2x^2-1>3x-1$ $\quad$ o $\quad -2x^2+1>3x-1$

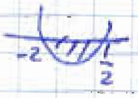
$2x^2-3x>0$ $\qquad -2x^2-3x+2>0$

$x(2x-3)>0$ $\qquad 2x^2+3x-2<0$

$x=0$ $\quad x=\frac{3}{2}$

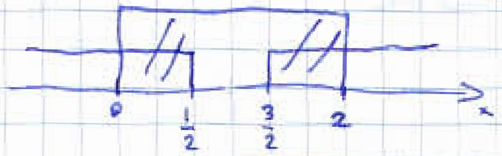


$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm5}{4}=\begin{cases}-2\\\frac{1}{2}\end{cases}$



$x<0$ o $x>\frac{3}{2}$ $\quad$ o $\quad -2<x<\frac{1}{2}$

$S_2=]-\infty,\frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2},+\infty[$



$S=]0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2},2[$

$|\text{sen}|x|+3|\geq 0$ $\quad S=\mathbb{R}$

$||e^{x-1}|+2|>5$ $\quad |e^{x-1}|+2>5$ o $|e^{x-1}|+2<-5$

$e^{x-1}>3$ o $e^{x-1}<-7$

$e^{x-1}>e^{\log_e 3}$ $\quad$ mai verificata perchè l'exp è sempre >0

$x-1>\log_e 3$

$x>\log_e 3+1$ $\qquad S=]\log_e 3+1,+\infty[$

$|2-\log(x+1)|<1$ $\quad \begin{cases} 2-\log(x+1)<1 \\ 2-\log(x+1)>-1 \end{cases} \quad \begin{cases} \log(x+1)>1 \\ \log(x+1)<3 \end{cases} \quad \begin{cases} \log(x+1)>\log e \\ \log(x+1)<\log e^3 \end{cases}$

C.E. $x+1>0$
$x>-1$

$\begin{cases} x+1>e \\ x+1<e^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x>e-1 \\ x<e^3-1 \end{cases} \qquad S=\,]e-1, e^3-1[$

ESERCIZIO:

$A=\{x \mid x^2-4|x|+3\geq 0\} \qquad B=\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{1}{2}<\sqrt{x|x|+1}<2\}$

Trovare A; B; $A\cup B$; $A\cap B$; $A\setminus B$

FINE – ESERCITAZIONE

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}$ $\qquad x^2-2=0 \quad x=\pm\sqrt{2}$

$\mathbb{Q} \downarrow$ numeri razionali $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots\right)$

$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

se $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ p e q primi tra loro $\in\mathbb{N}^+$

$\Rightarrow 2=\frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2=2q^2 \Rightarrow p^2$ è pari $\Rightarrow \underline{p \text{ è pari}}$, $p=2s$, $s\in\mathbb{N}^+$

$\Rightarrow p^2=4s^2 \Rightarrow 2q^2=4s^2 \Rightarrow q^2=2s^2 \Rightarrow q^2$ è pari $\Rightarrow \underline{q \text{ è pari}}$

p e q sono entrambi pari, per cui non sono primi tra loro, perchè hanno almeno il 2 come fattore comune. CONTRADDIZIONE ↯ $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

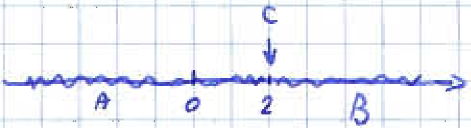
"$\mathbb{Q}$ è bucherellato" perchè se lo rappresento su una retta ho dei buchi.

I razionali hanno rappresentazione decimale periodica.

$\sqrt{2}=1,414213\dots$

$A=\{x\in\mathbb{Q} : x\leq 0 \text{ o } x^2<2\} \qquad B=\{x\in\mathbb{Q} : x>0 \text{ e } x^2\geq 2\}$

$A\cup B=\mathbb{Q}$; $A\cap B=\emptyset$; $\forall a\in A, \forall b\in B \Rightarrow a\leq b$



¿ $\exists\, c\in\mathbb{Q} : \forall a\in A, \forall b\in B, a\leq c\leq b$? NO: $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

$(X, +, \cdot, \leq)$ insieme che permette somma, prodotto e ordinamento

ASSIOMI DI $\mathbb{R}$

1) La somma + è commutativa

2) La somma + è associativa

3) La somma + ha un elemento neutro, lo 0

4) Ogni elemento ha il suo inverso rispetto alla somma, detto opposto $(-a)$

5) Il prodotto $\cdot$ è commutativo

6) Il prodotto $\cdot$ è associativo

7) Il prodotto $\cdot$ ha un elemento neutro, l'unità 1

8) Ogni elemento diverso da 0 ha inverso rispetto al prodotto, detto reciproco (a^{-1})

9) La somma è distributiva rispetto al prodotto $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

10) Se $a \leq b$, allora per ogni c si ha $a+c \leq b+c$

11) Se $a \leq b$ e $c \geq 0$ allora $a\cdot c \leq b\cdot c$

12) ASSIOMA DI DEDEKIND, o di separazione (permette di eliminare i "buchi"):
se $A, B \subset X$ non vuoti e tale che $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $a \leq b$ allora esiste $c \in X$ tale che $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $a \leq c \leq b$. c non dipende dalla scelta di a, b.

Quindi X è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

ESTREMO SUPERIORE ⇒ dove termina un insieme

- PROPRIETÀ ORDINAMENTO "$\leq$"

1) RIFLESSIVA: $\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq a$

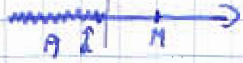
2) ANTISIMMETRICA: $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a \leq b \text{ e } b \leq a) \Longrightarrow a = b$

3) TRANSITIVA: $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ (a \leq b \text{ e } b \leq c) \Longrightarrow a \leq c$

$a < b \Longleftrightarrow a \leq b \text{ e } a \neq b$

Pensiamo a un insieme X che può essere sia $\mathbb{Q}$ sia $\mathbb{R}$

- Se $A \subset X$, un numero $M \in X$ è MAGGIORANTE per A se $\forall a \in A,\ a \leq M$.



m_A = insieme dei maggioranti di A

(I) Se un insieme A ammette maggioranti, ne ha infiniti

(II) Può succedere che $m_A = \emptyset$ (A non ha maggioranti)

$\Rightarrow \text{non}(\exists m \in \mathbb{R}: \forall a \in A,\ a \leq m) \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ \text{non}(\forall a \in A,\ a \leq m)$

$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ \exists a \in A: \text{non}(a \leq m) \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ \exists a \in A: a > m$

Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se $m_A \neq \emptyset$

Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice NON limitato superiormente se $m_A = \emptyset$

$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$

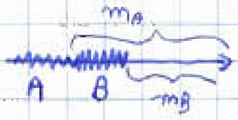
$m_A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ $m_B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ $m_A = m_B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

Il MASSIMO di $A \subset \mathbb{R}$, se esiste, è un elemento $M \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{array}{l} (1)\ M \in m_A \rightarrow M = \max A \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leq M \\ M \in A \end{cases} \\ (2)\ M \in A \nearrow \end{array}$$

OSS: il massimo, se esiste, è unico. Il massimo può non esistere o perchè non esistono maggioranti o perchè nessun maggiorante appartiene all'insieme.

se $A \subset B$, $m_A \underset{\substack{\downarrow \\ \text{contiene}}}{\supset} m_B$



se $A \subset B$ e i massimi esistono, allora $\max A \leq \max B$

$\max(A \cup B) = \max\{\max A, \max B\}$ (se esistono)

A non ha massimo, B ha massimo.

DEFINIZIONE: se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente, l'estremo superiore di A è il più piccolo tra i maggioranti di A.

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$

$2 \in m_A$ $\underbrace{\forall x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq 2}_{\text{maggioranti}}$

L'estremo superiore in $\mathbb{R}$ è $\sqrt{2}$; in $\mathbb{Q}$, non esiste l'estremo superiore.

Nei razionali non è garantita l'esistenza dell'estremo superiore.

TEOREMA ESISTENZA ESTREMO SUPERIORE

Ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ha estremo superiore (in

Se $A = \emptyset$, ogni numero è maggiorante e non si trova il più piccolo!

DIM.

A, $B = m_A$ usando l'assioma di Dedekind

$A \neq \emptyset$, A lim. sup. $\Rightarrow m_A \neq \emptyset$, inoltre $\forall a \in A, \forall M \in m_A, a \leq M \Rightarrow$ (A. Dedekind)

$\exists L \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall M \in m_A, a \overset{①}{\leq} L \overset{②}{\leq} M$

① $\rightarrow$ L è maggiorante di A ② L è il più piccolo dei maggioranti

$\Rightarrow$ L è l'estremo superiore di A. $L = \sup A$

L'estremo superiore, se esiste, è unico!

Se A ha massimo, max A è anche SUP A.

$A=\{x\in\mathbb{R} : x^2<2x\}$ $\quad S=0<x<2 \quad 2=\sup A$

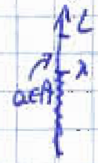
$\tilde{A}=\{x\in\mathbb{R} : x^2\leq 2x\}$ $\quad S=0\leq X\leq 2 \quad 2=\sup \tilde{A}=\max \tilde{A}$

$A\subset\mathbb{R}$ $\quad A\neq\phi$, A lim. sup.

$$L=\sup A \Leftrightarrow \begin{cases} L\in m_A \\ \forall M\in m_A, L\leq M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L\in m_A \\ \forall\lambda<L, \lambda\notin m_A \end{cases}$$

$$L=\sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a\in A, a\leq L \\ \forall\lambda<L, \text{non}(\forall a\in A, a\leq\lambda) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall a\in A, a\leq L \\ \forall\lambda<L, \exists a\in A : a>\lambda \end{cases}$$



$\boxed{\lambda=L-\varepsilon \ ; \ \varepsilon>0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall a\in A, a\leq L \\ \forall\varepsilon>0, \exists a\in A : a>L-\varepsilon \end{cases}$$

ESEMPIO

$$A=\left\{x\in\mathbb{R} : x=\frac{n-1}{n}, n\in\mathbb{N}^+\right\}=\left\{\frac{n-1}{n} : n\in\mathbb{N}^+\right\} \quad \sup A=?$$

$\frac{n-1}{n}\leq 1 \Leftrightarrow n-1\leq n \Leftrightarrow -1\leq 0$ VERO

$$1=\sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}^+, \frac{n-1}{n}\leq 1 \overset{\text{SI}}{\nwarrow} \\ \forall\varepsilon>0, \exists n\in\mathbb{N}^+ : \frac{n-1}{n}>1-\varepsilon \end{cases}$$

$\cancel{1}-\frac{1}{n}>\cancel{1}-\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow 1<\varepsilon\cdot n$

$\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$ VERA PER IL PRINCIPIO DI ARCHIMEDE → dato che $\mathbb{N}^+$ non è limitato superiormente

Quindi 1 è l'estremo superiore di A.

ESERCITAZIONE

Correzione esercizio

$A: x^2-4|x|+3\geq 0 \quad |x|=t \quad t^2-4t+3\geq 0 \quad (t-1)(t-3)=0 \quad \begin{matrix} t=1 \\ t=3 \end{matrix}$

$t\leq 1$ o $t\geq 3$

$|x|\leq 1$ o $|x|\geq$

$-1\leq x\leq 1$ o $x\leq -3$ o $x\geq 3$

$A=\left]-\infty,-3\right]\cup\left[-1,1\right]\cup\left[3,+\infty\right[$

$$B: \begin{cases} 2>\sqrt{x|x|+1} \ ① \\ \sqrt{x|x|+1}<\cancel{4}/_2 \ ② \end{cases} \qquad ① \begin{cases} x|x|+1\geq 0 \\ x|x|+1<4 \end{cases} \quad \begin{cases} x|x|\geq -1 & \text{(1A)} \\ x|x|<3 & \text{(1B)} \end{cases}$$

$$\text{(1A)} \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2\geq -1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x<0 \\ x^2\leq 1 \end{cases}$$

$x\geq 0 \qquad -1\leq x<0$

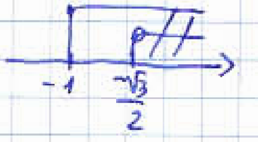
$$\begin{cases} x \geq -1 & \text{(1A)} \\ x < \sqrt{3} & \text{(1B)} \end{cases} \qquad -1 \leq x < \sqrt{3}$$

$$② \begin{cases} |x|x+1 \geq 0 & \text{(2A)} \\ x|x|+1 > \frac{1}{4} & \text{(2B)} \end{cases}$$

$$\text{(2B)} \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 > -\frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 > -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$x \geq 0$ $\qquad -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < 0$

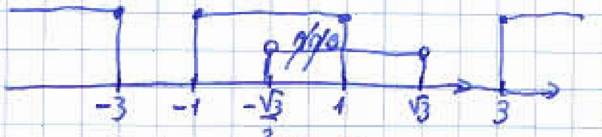
$$\begin{cases} x \geq -1 & \text{(2A)} \\ x > -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{(2B)} \end{cases}$$



$$x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x < \sqrt{3} \\ x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad B = \left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right[$$

$A \cup B$



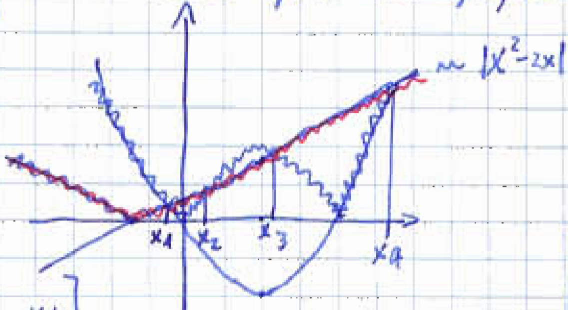
$$A \cup B = \left]-\infty, -3\right] \cup \left[-1, \sqrt{3}\right[\cup \left[3, +\infty\right[$$

$$A \cap B = \left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right] \qquad A \setminus B = \left]-\infty, -3\right] \cup \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[3, +\infty\right[$$ numeri che stanno in A ma non in B

ESERCIZIO

$|x^2-2x| \leq \left|\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right|$ risolvere per via grafica

1) $y = |x^2-2x|$



2) $y = \left|\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right|$

x	y
0	1/4
1	3/4

$$S = [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4]$$

x_1 e x_4 : $\begin{cases} y = \frac{x}{2}+\frac{1}{4} \\ y = x^2-2x \end{cases}$

$$x^2-2x = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

$$4x^2 - 10x - 1 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+4}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{8} \qquad x_1 = \frac{5-\sqrt{29}}{8} \qquad x_4 = \frac{5+\sqrt{29}}{8}$$

x_2 e x_3 : $\begin{cases} y = \frac{x}{2}+\frac{1}{4} \\ y = -x^2+2x \end{cases}$

$$-x^2+2x = \frac{x}{2}+\frac{1}{4} \qquad -4x^2+8x-2x-1=0 \qquad 4x^2-6x+1=0$$

$$x = 3 \pm$$

x CASA

$||3x^2-2|-1|+2 = K$ Determinare, al variare di K, quante soluzioni ha l'equazione.

$||3x^2-2|-1| = K-2$ $\qquad y = ||3x^2-2|-1|$

Se $K-2<0 \Rightarrow 0$ sol.
$K<2$

Se $K-2=0 \Rightarrow 2$ sol.
$K=2$

Se $0<K-2<1 \Rightarrow 4$ sol. Se $K-2=1 \Rightarrow 3$ sol

Se $K-2>1 \Rightarrow K>3 \Rightarrow 2$ sol.

CALCOLO COMBINATORIO

DISPOSIZIONE SEMPLICE → gruppo ordinato di K degli n elementi → ha importanza l'ordine
di n elementi presi K a K
con K≤n

23 ≠ 32

Nelle disposizioni semplici, non posso ripetere gli elementi. Altrimenti sono le disposizioni con RIPETIZIONE.

$$D_{n,k} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$ ESEMPIO $$D_{10,4} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$$

oppure

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

DISPOSIZIONE CON RIPETIZIONE ⇒ gruppo ordinato di K degli n elementi potendo uno stesso elemento figurare nel gruppo fino a K volte.

$$D^{(r)}_{n,k} = n^k$$

PERMUTAZIONI SEMPLICI → disposizioni semplici degli n elementi presi a n a n.
di n elementi distinti

$$\boxed{0! = 1}$$

$$P_n = D_{n,n} = n!$$

COMBINAZIONE SEMPLICE → qualunque gruppo formato da K degli n elementi.
di n elementi presi a K a K

Due di tali combinazioni sono distinte quando differiscono fra loro per almeno un elemento. → non ha importanza l'ordine

(2,3)=(3,2)

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$$ n su K coefficiente binomiale

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}} \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-n+k)!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

FINE ESERCITAZIONE

Se esiste, $\max A = \sup A$

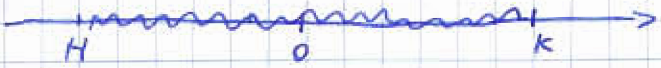
MINORANTE di $A \subset \mathbb{R}$ è $m \in \mathbb{R}$ tale che $\forall a \in A,\ a \geq m$

A è limitato inferiormente se ha dei minoranti

$\mathbb{Z}$ non è limitato inferiormente, $\mathbb{N}$ è limitato inferiormente

A è limitato se è limitato superiormente e inferiormente.

$\Leftrightarrow \exists H,K \in \mathbb{R} : \forall a \in A,\ H \leq a \leq K$



A è limitato $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall a \in A,\ -M \leq a \leq M \Leftrightarrow |a| \leq M$

La distanza tra 0 e K è K, quella tra 0 e H è $|H|$. Il massimo di questi due lo chiamo M.

Se $\exists\ m \in A$ che è anche minorante per A, $m = \text{MIN } A$

ESTREMO INFERIORE di A è il più grande tra i minoranti di A

$$l = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A,\ a \geq l & \to l \text{ è minorante} \\ \forall \lambda > l,\ \text{non}(\forall a \in A,\ a \geq l) & \to \text{se salgo un po', non trovo minor} \end{cases}$$

con ε

PROPRIETÀ

Se $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente, A ha estremo inferiore

$-A$ = opposto di $A = \{-a : a \in A\}$

PR: $\text{SUP}(-A) = -\text{INF } A$

$\text{INF}(-A) = -\text{SUP } A$

esempio: $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 2\}$

$-A = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 1\}$

$\text{SUP } A = 2 = -\text{INF}A = -(-2)$

...

Se esiste, $\text{MIN } A = \text{INF } A$.

RETTA REALE ESTESA

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

(1) $\forall x \in \bar{\mathbb{R}},\ -\infty \leq x \leq +\infty$

(2) $\forall x > -\infty,\ x + (+\infty) = +\infty$ [NON HA SENSO $+\infty - \infty$]

$\forall x < +\infty,\ x + (-\infty) = -\infty$

(3) $\forall x > 0,\ x \cdot (+\infty) = +\infty$ e $x \cdot (-\infty) = -\infty$ $[+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$ e $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty]$

$\forall x < 0,\ x \cdot (+\infty) = -\infty$ e $x \cdot (-\infty) = +\infty$ [NON HA SENSO $0 \cdot (+\infty)$ e $0 \cdot (-\infty)$]

Se A NON è limitato superiormente, $\text{SUP } A = +\infty$

Se A NON è limitato inferiormente, $\text{INF } A = -\infty$

PROPRIETÀ: Se $A \subset B \subset \mathbb{R}$ allora: (se $A \neq \emptyset$)

$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

INTERVALLI DI NUMERI REALI

$I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo se $\forall x, y \in I$, $x < y$, allora

$\forall z \in \mathbb{R},\ x \leq z \leq y \Longrightarrow z \in I$ tutti gli elementi compresi appartengon all'intervallo.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ a e b sono estremo inferiore e estremo superiore. Con la parentesi chius l'estremo è anche minimo o massimo

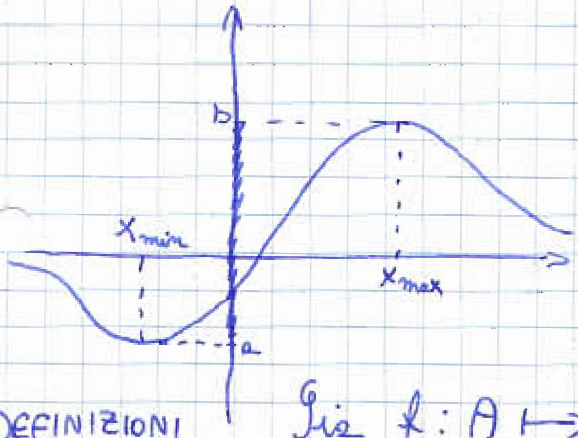
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$



L'immagine della funzione è un intervallo $[a, b]$. In questo caso, la funzione è limitata.

DEFINIZIONI Sia $f : A \longmapsto \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$

- Se $B \subset A$, $f(B) = \{f(x) : x \in B\}$ $f(A)$ = immagine di f

[$E \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(E) = \{x \in A : f(x) \in E\}$ → controimmagine]

1) f si dice LIMITATA SUPERIORMENTE [limitata inferiormente, limitata] se l'immagine $f(A)$ è limitata superiormente [limitata inferiormente, limitata]

2) estremo superiore [estremo inferiore, massimo, minimo] di f sono l'estremo superiore [estremo inferiore, massimo, minimo] dell'immagine $f(A$

Si denotano SUP f INF f MAX f MIN f.

$\text{SUP} f = +\infty$ f non è limitata superiormente

$\text{INF} f = -\infty$ f non è limitata inferiormente

3) se f ha massimo [minimo], un numero $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \max f$ $[f(x_0) = \min f]$ si chiama PUNTO DI MASSIMO [DI MINIMO].

max f = max dell'immagine (sono unici)

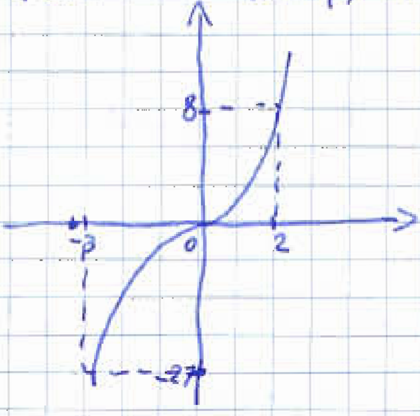
punto di massimo di f = punto/i nel quale la funzione assume valore massimo (possono essere più di uno)

Se $B \subset A$, le nozioni precedenti si estendono alla restrizione $f|B$ considerando $f(B)$ al posto di $f(A)$.

$\underset{B}{\text{INF}\, f}$ $\underset{B}{\text{SUP}\, f}$ $\underset{B}{\text{MAX}\, f}$ $\underset{B}{\text{MIN}\, f}$ considero un sottoinsieme del dominio, cioè una restrizione.

ESEMPIO:

$f(x) = x^3$ $\quad \text{SUP} f$, $\text{INF} f$, $\underset{[-3,2[}{\text{SUP}\, f}$, $\underset{[-3,2[}{\text{INF}\, f}$? e dire se sono MAX o MIN.



$\text{SUP} f = +\infty$

$\text{INF} f = -\infty$

$f([-3,2[) = [-27, 8[$

$\text{SUP} f = 8$ non è MAX perché l'8 non è incluso

$\text{INF} f = -27$ è anche MIN $x_{\text{MIN}} = -3$

f limitata $\iff \exists\, H, K \in \mathbb{R} : \forall x \in$ dominio di f, $\underset{\text{minorante}}{H} \leq f(x) \leq \underset{\text{maggiorante}}{K}$

$\iff \exists\, M \in \mathbb{R} : \forall x \in D, |f(x)| \leq M$

$$M = \max_B f \iff \begin{cases} \forall b \in B,\ M \geq f(b) \rightarrow \text{maggiorante} \\ \exists\, b \in B,\ f(b) = M \rightarrow \text{appartiene all'insieme} \end{cases}$$

$$L = \sup_B f \iff \begin{cases} \forall b \in B,\ L \geq f(b) \\ \forall \lambda < L,\ \text{non}(\forall b \in B,\ \lambda \geq f(b)) \end{cases} \iff \begin{cases} \forall b \in B,\ L \geq f(b) \\ \forall \lambda < L,\ \exists\, x \in B : f(x) > \lambda \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in B,\ f(x) \leq L \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in B : f(x) > L - \varepsilon \end{cases}$$

INSIEME DEI NUMERI NATURALI $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$

- PRINCIPIO DEL MINIMO INTERO: ogni $A\subset\mathbb{N}$ non vuoto ha primo elemento
  ↳ successivo di un naturale → primo elemento dell'insieme di naturali maggiori del naturale.
- PRINCIPIO DI INDUZIONE: se $S\subset\mathbb{N}$ è tale che:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 0\in S\\(2)\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\in S)\Longrightarrow(n+1\in S)\end{array}\right\}\overset{\text{TESI}}{\Longrightarrow} S=\mathbb{N}$$

FUNZIONE FATTORIALE

$f:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ tale che: $\begin{cases}f(0)=1\\f(n+1)=(n+1)\cdot f(n)\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$ valida grazie al principio d'induzione.

$3n!=3\cdot(n!)\neq(3n)!$

$P(n)$ predicato che dipende da n: $P(n)=\sum_{i=0}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}\quad n\in\mathbb{N}$

$S=\{n\in\mathbb{N}: P(n)\text{ è vero}\}$

PRINCIPIO DI INDUZIONE II FORMA:

Sia $P(n)$ famiglia di predicati dipendenti da $n\in\mathbb{N}$, se per ipotesi:

(1) $P(0)$ è vero

(2) $\forall n\in\mathbb{N}$, sapendo che $P(n)$ è vera, dimostro che $P(n+1)$ è vera

allora $P(n)$ è vera per ogni $n\in\mathbb{N}$.

ESEMPIO

(1) $P(0)$ è vera $\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{0} i=\frac{0(0+1)}{2}\Leftrightarrow 0=0$ vero

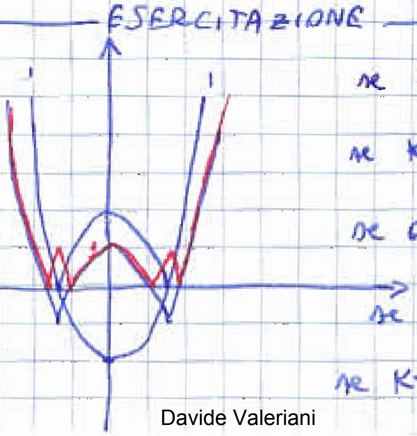
(2) $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n)\Longrightarrow P(n+1)$ $\quad$ Hp) $\sum_{i=0}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ IPOTESI INDUTTIVA $\quad$ Th) $\sum_{i=0}^{n+1} i=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$ sostituisco n+1 a n

$$\sum_{i=0}^{n+1} i=\sum_{i=0}^{n} i+(n+1)\underset{(Hp)}{=}\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\quad \text{C.V.D.}$$

ESERCITAZIONE

$||3x^2-2|-1|+2=k$

$||3x^2-2|-1|=k-2$



se $k-2>1 \Rightarrow k>3$ 2 soluzioni

se $k-2=1 \Rightarrow k=3$ 5 sol.

se $0<k-2<1 \Rightarrow 2<k<3$ 8 sol.

se $k=0 \Rightarrow k=2$ 4 sol.

se $k-2<0 \Rightarrow k<2$ 0 sol.

$D_{n,k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ $\quad D^{(r)}_{n,k} = n^k$ $\quad P_n = n!$ $\quad C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

$0! = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} \quad \ldots$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

ESERCIZIO

10 persone, 4 premi diversi, quante quaterne di vincitori se una persona può vincere un solo premio

$D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

Quanti sono i numeri di 3 cifre diverse tra loro

$D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 - D_{9,2} = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 648$

Data la parola UDINE, determina quanti anagrammi

$P_5 = 5! = 120$

Con la parola PARMA

$P^{(r)}_5 = \frac{5!}{2!} = 60$

Quanti tricolori si possono formare con 7 colori

$D_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

In quanti modi 7 persone possono disporsi su 7 sedie o in un tavolo rotondo?

-7 sedie: $P_7 = 7! = 5040$ - tavolo $\frac{P_7}{7} = \frac{7!}{7} = 6! = 720$

Quante quaterne si possono formare con i 90 numeri del Lotto.

$$C_{90,4} = \frac{90!}{4!\,86!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{24} = 2555190$$

Determinare quante diagonali ha un poligono di n lati

$$C_{n,2}-n=\frac{n!}{2!(n-2)!}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{tolgo i}\\ \text{lati}}}{-n}=\frac{n!-2!\,n(n-2)!}{2!(n-2)!}=\frac{\cancel{(n-2)!}\left[n\cdot(n-1)-2n\right]}{2!\cancel{(n-2)!}}=$$

$$=\frac{n^2-n-2n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$

Dato un insieme di n elementi, quanti sottoinsiemi posso costruire?

$$C=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=$$ se considero a e b uguale a 1, ottengo questo, per cui diventa

$$=(1+1)^n=2^n$$

Calcolare il quarto termine di $(2x-3y)^6$: il quarto termine è 3 $(\overset{I}{6},\overset{II}{5},\overset{III}{4},\overset{IV}{3})$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ k}}{(2x)^3}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ n-k}}{(-3y)^3}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ k-1}}{\binom{6}{3}}=\frac{6!}{3!3!}\cdot 8x^3\cdot(-27y^3)=-20\cdot 8\cdot 27\,x^3y^3=-4320x^3y^3$$

$n=6$
$k=3$

$$\binom{x}{x-3}+\binom{x}{x-2}=\binom{x+1}{x-1}\qquad\begin{cases}x-3\geq 0\\ x-2\geq 0\\ x-1\geq 0\end{cases}\quad x\geq 3$$

$$\frac{x!}{(x-3)!(\cancel{x}-\cancel{x}+3)!}+\frac{x!}{(x-2)!(\cancel{x}-\cancel{x}+2)!}=\frac{(x+1)!}{(x-1)!(\cancel{x}+1-\cancel{x}+1)!}\quad\frac{x!}{(x-3)!3!}+\frac{x!}{(x-2)!2!}=\frac{(x+1)!}{(x-1)!2!}$$

$$\frac{x!(x-1)(x-2)+3x!(x-1)}{\cancel{3!(x-1)!}}=\frac{3(x+1)x!}{\cancel{3!(x-1)!}}\qquad x!(x^2\cancel{-3x}+2+3x-3-3x-3)=0$$

$$\cancel{x!}(x^2-3x-4)=0\qquad(x-4)(x+1)=0\qquad\begin{matrix}x=-1 & \text{NON ACC.}\\ x=4 & \text{ACC.}\end{matrix}\qquad S=\{4\}$$

Quante sono le cinquine che nel lotto realizzano un ambo

$$C_{88,3}=\frac{88!}{3!85!}=\frac{\overset{44}{\cancel{88}}\cdot\overset{29}{\cancel{87}}\cdot 86}{\cancel{6}}=109736$$

In un ufficio ci sono 10 impiegati che vanno in ferie

3 → I° turno

4 → II° turno

$$C_{10,3}\cdot C_{7,4}\cdot C_{3,3}=\frac{10!}{3!\cancel{7!}}\cdot\frac{\cancel{7!}}{4!3!}\cdot 1=4200$$

Un'urna contiene 8 palline diverse, quante terne ordinate posso estrarre con reimbussolamento. $D^{(r)}_{8,3} = 8^3 = 512$

senza reimbussolamento $D_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Devo scegliere tra 6 primi, 7 secondi, 5 dessert. Quanti pranzi completi:

$$C = \binom{6}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{5}{1} = \frac{6!}{1!\cancel{5!}} \cdot \frac{7!}{1!\cancel{6!}} \cdot \frac{5!}{1!\cancel{4!}} = 210 \text{ menu diversi}$$

Uno studente deve rispondere ad almeno 8 domande su 10

1) Quante scelte ha

2) Quante se deve rispondere alle prime tre

3) Quante " " " ad almeno quattro delle prime cinque

$$1)\quad C_{10,8} = \frac{10!}{8!\,2!} = 5 \cdot 9 = 45 = \binom{10}{\underset{\substack{\uparrow \\ 8 \text{ a cui} \\ \text{risponde}}}{8}} = \binom{10}{\underset{\substack{\downarrow \\ 2 \text{ che lascia} \\ \text{indietro}}}{2}}$$

$$2)\quad C_{7,5} = \frac{7!}{5!\,2!} = 21$$

$$3)\quad \underbrace{C_{5,3}}_{\substack{\text{nel caso in} \\ \text{cui risponde} \\ \text{a tutte e 5 nelle} \\ \text{prime}}} + \underset{\substack{\hookrightarrow \text{nel caso} \\ \text{in cui} \\ \text{risponde} \\ \text{solo a 4} \\ \text{delle prime 5}}}{C_{5,4}} \cdot \overset{\substack{\text{domande} \\ \text{nella seconda} \\ \text{parte}}}{C_{5,4}} = \frac{5!}{\cancel{3!}\,2!} + \frac{5!}{\cancel{4!}\,1!} \cdot \frac{5!}{\cancel{4!}\,\cancel{1!}} = 10 + 25 = 35$$

$$P = \frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}} \qquad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{evento} \\ \text{impossibile}}}{0} \le P \le \underset{\substack{\downarrow \\ \text{evento} \\ \text{certo}}}{1}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

se $P(A \cap B) \neq 0$, A e B sono compatibili

se $P(A \cap B) = 0$, A e B sono incompatibili

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ PROBABILITÀ COMPOSTA → eventi indipendenti

Data una cassa di 120 mele di cui 11 bacate, probabilità che prendendo 20 mele, 2 bacate.

$$P = \frac{CF}{CP} \Rightarrow \quad CP = C_{120,20} = \frac{120!}{100!\,20!}$$

$$CF = C_{11,2} \cdot C_{109,18} = \frac{11!}{9!\,2!} \cdot \frac{109!}{18!\,91!}$$

$$P = \frac{\frac{110}{2} \cdot \frac{109!}{18!\,91!}}{\frac{120!}{100!\,20!}}$$

FINE ESERCITAZIONI

ESEMPIO

$$2^n \geq n^3$$

$n=0$ VERA FALSA PER $N = 2,3,4,5,6,7,8,9$
$n=1$ VERA
$n=2$ FALSA! VERA PER $N \geq 10$

PRINCIPIO DI INDUZIONE $\underline{\text{III}}$

Sia $P(n)$ un predicato dipendente da $n \in \mathbb{N}$. Sia $n_0 \in \mathbb{N}$. Se risulta che:

(1) $P(n_0)$ è vera

(2) per ogni $n \geq n_0$, supposta $P(n)$ vera, riusciamo a dimostrare che $P(n+1)$ è vera

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Questo principio non dice nulla su cosa succeda per $P(n)$ se $n < n_0$.

$P(n)$: $2^n \geq n^3$ e $n_0 = 10$ usiamo la terza forma del principio

① $P(10)$ è vera $\Longleftrightarrow$ $1024 \geq 1000$ sì

(2) fissato $n \geq 10$

uguale, quindi ok

(H_0) $2^n \geq n^3$ $\qquad 2^{n+1} \geq 2 \cdot 2^n \underset{(H_0)}{\geq} 2 \cdot n^3$

(th) $2^{n+1} \geq (n+1)^3$

con numeri grandi $3n \leq 3n^2$ e $1 \leq n^2$

$$(n+1)^3 = n^3 + (3n^2 + 3n + 1) \leq n^3 + 3n^2 + 3n^2 + n^2 \leq n^3 + 7n^2$$

dato che $n \geq 10$, $7 \leq n$, quindi $\leq n^3 + n \cdot n^2 = n^3 + n^3 = 2n^3$

Quindi $2^{n+1} \geq 2n^3$ (usando ipotesi induttiva)

$(n+1)^3 \leq 2n^3$ (usando $n \geq 10$)

$\Longrightarrow 2^{n+1} \geq 2n^3 \geq (n+1)^3 \Longrightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^3$ cioè $P(n+1)$ è vera per $n \geq 10$

OSSERVAZIONE SUGLI ESTREMI DI UNA FUNZIONE

I punti di minimo o massimo non è detto che esistano e non è detto che siano agli estremi dell'intervallo (lo sono solo per le funzioni monotone).

PROPRIETÀ

Se $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ è debolmente crescente allora $\min\limits_{[a,b]} f = f(a)$ e $\max\limits_{[a,b]} f = f(b)$

Se $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ è debolmente decrescente allora $\min\limits_{[a,b]} f = f(b)$ e $\max\limits_{[a,b]} f = f(a)$

NUMERI COMPLESSI

Nascono in risposta alle equazioni irrisolvibili nei reali:

$x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 = -1$

$i \to$ unità immaginaria $\boxed{i^2 = -1}$ $i^3 = i \cdot i^2 = -i$ $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

$\mathbb{C} = \{ z : z = a + bi,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \}$ $\underset{\text{è contenuto}}{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$ $b = 0$ $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$z = a + bi$ $a \to$ parte reale $a = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$

$b \to$ parte immaginaria $b = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$

$z = 2 + 3i$ $\operatorname{Re} z = 2$ $\operatorname{Im} z = 3$ reali.

I numeri reali sono numeri complessi con parte immaginaria uguale a 0.

Se la parte reale è uguale a 0, si ha un immaginario puro

OPERAZIONI SU $\mathbb{C}$

- $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ es. $(3 + 2i) + (5 + 4i) = 8 + 6i$
- 0 è l'unico numero z in $\mathbb{C}$: $\operatorname{Re} z = 0$ e $\operatorname{Im} z = 0$
- $a + ib = c + id \iff a = c$ e $b = d$
- $(a + ib) \cdot (c + id) = ac + ibc + iad + i^2 bd = (ac - bd) + i(bc + ad)$

es. $(3 + 2i)(2 - 4i) = 6 - 12i + 4i - 8i^2 = 6 - 8i + 8 = 14 - 8i$

- reciproco di $a + ib$ $(a + ib \neq 0)$ dobbiamo trovare $c + id$ tale che $(a + ib)(c + id) = 1$

$$\begin{cases} ac + bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases} \quad \cdots \quad \frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

- $$\frac{c + id}{a + ib} = (c + id) \cdot \frac{1}{a + ib} = (c + id) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

esempio

$$\frac{1}{3 + 2i} = \frac{3}{9 + 4} + i \frac{-2}{9 + 4} = \frac{3}{13} - i \frac{2}{13}$$

$$\frac{(5 + 4i)}{(3 + 2i)} = (5 + 4i) \cdot \left(\frac{3}{13} - \frac{2}{13} i \right) = \frac{15}{13} - \left(\frac{-8}{13} \right) + i \left(\frac{-10}{13} + \frac{12}{13} \right) = \frac{23}{13} + \frac{2}{13} i$$

Se introduco l'ordinamento nei numeri complessi, comunque non valgono le proprietà 10 e 11 (relative ai $\mathbb{R}$).

CONIUGATO di un numero $z = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z \cdot i \in \mathbb{C}$ è il numero complesso $\bar{z} = \mathrm{Re}\, z - \mathrm{Im}\, z \cdot i$

se $z = a + bi$ $\quad \bar{z} = a - bi$ COMPLESSO CONIUGATO

Se $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = z$ dato che $b = 0$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

PROPRIETÀ: per ogni $z, w \in \mathbb{C}$

(1) $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Re}\, w$, $\quad \mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}\, z + \mathrm{Im}\, w$

(2) $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$, $\quad \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$

(3) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(4) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(5) $\bar{\bar{z}} = z$

(6) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

PROPRIETÀ: $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ $\qquad \mathrm{Im}\, z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ $\qquad i^{27} = \underset{\substack{\downarrow \\ 1 \\ \text{xkè} \\ \text{multiplo} \\ \text{di } i^4 = 1}}{i^{24}} \cdot i^{3} = -i$

$\boxed{\dfrac{1}{i} = -i} \Rightarrow i \cdot (-i) = -(-1) = 1$

$\mathrm{Im}\, z = -\dfrac{i}{2}(z - \bar{z})$

es. $z = 3 - 4i$ $\qquad \bar{z} = 3 + 4i$

MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO $\rightarrow$ numero reale (non negativo) dato da:

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$z \rightarrow |z|$ è una funzione $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

Se z è reale, il modulo è il valore assoluto

es. $|-1| = 1$

$|3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ $\qquad$ COMPLESSO CONIUGATO $|3 - 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

NO

$|a + bi| \neq \sqrt{a^2 + (bi)^2}$ infatti

$|3 + 2i| \neq \sqrt{9 + 4i^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

OSSERVAZIONI

- $|z| \in \mathbb{R}$ e $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

PROPRIETÀ: Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha:

(1) $|\bar{z}| = |z|$

(2) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ e $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

(3) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(4) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(5) $|z + w| \leq |z| + |w|$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

(6) $|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$

DIM. (3) $z = a + ib \quad \bar{z} = a - ib$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + \cancel{abi} - \cancel{abi} - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$z \neq 0 \implies \bar{z} \neq 0 \qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2 \qquad \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = 1 \qquad \boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$

$|z|^2 > 0 \qquad \frac{1}{z} \neq 0$

ESEMPIO

$$\frac{1}{7 - 3i} = \frac{7 + 3i}{49 + 9} = \frac{7}{58} + \frac{3}{58} i$$

$$\frac{w}{z} \text{ con } z \neq 0 = w \cdot \frac{1}{z} = w \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2} \qquad \boxed{\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}}$$

ESEMPIO

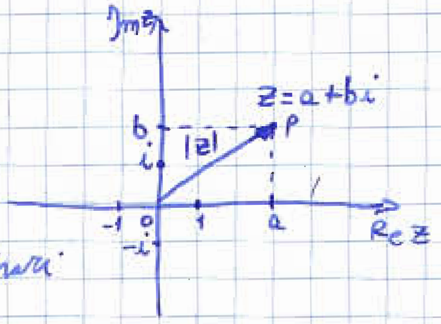
$$\frac{5 - 2i}{3 + 4i} = \frac{(5 - 2i)(3 - 4i)}{9 + 16} = \frac{15 - 20i - 6i + 8i^2}{25} = \frac{7}{25} - \frac{26}{25} i$$

PIANO DI GAUSS (π)

$z = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R} \qquad z \rightsquigarrow (a, b)$ coppia ordinata

Se $z \in \mathbb{R} \iff b = 0$ ordinata 0, sta sull'asse dei reali

Se $z = ib \iff a = 0$ ascissa 0, sta sull'asse degli immaginari



$\overline{OP} = |z|$

ESERCITAZIONI

Probabilità nel lancio di 1 dado a 6 facce esca un numero dispari.

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$CP = 6 \qquad CF = 3$

Prob. estrazione di 1 carta da un mazzo di 40 non esca un asso

$$P_{(\text{non asso})} = 1 - P_{(\text{asso})} = 1 - \frac{4}{40} = \frac{9}{10}$$

Lancio consecutivo di 2 dadi si verifichi "esca 1 sul rosso e un numero pari sul blu" (1 dado rosso e 1 blu)

eventi indipendenti $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6_2} \cdot \frac{B}{6} = \frac{1}{12}$

Da un'urna con 30 palline numerate viene estratta una pallina. Calcolare la probabilità di:

1) estrarre un numero pari $P = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

2) estrarre un multiplo di 3 $P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

3) estrarre un multiplo di 9 $P = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

4) " " numero maggiore di 25 $P = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

5) " " numero pari o multiplo di 3 $\Rightarrow P = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{8_1}{30_6} = \frac{4}{6}$

6) " " " dispari o >25 $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{2}{30} = \frac{15+5-2}{30} = \frac{3}{5}$

7) " " " multiplo di 3 o di 9 $P = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = \frac{1}{3}$

8) " " " pari o >25 $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{3}{30} = \frac{15+5-3}{30} = \frac{17}{30}$

Famigli 7 figli $P(\text{2 femmine, 5 maschi}) = \frac{C_{7,2}}{D^{(2)}_{7,2}} = \frac{C_{7,5}}{D^{(2)}_{7,2}} = \frac{\overset{7\cdot 6\,3}{7!}}{5!\,2!} \cdot \frac{1}{7^{*}} = \frac{3}{7}$

$P_{(\text{almeno } 2F)} = \frac{128 - C_{7,0} - C_{7,1}}{2^7} = \frac{128 - 1 - 7}{128} = \frac{120}{128} = \frac{15}{16}$

Urna con 10 palline. Estraggo 2 palline con reimbussolamento:

$P(2P) = \underset{\text{1° estrazione}}{\frac{5}{10}} \cdot \underset{\text{2ª estr.}}{\frac{5}{10}} = \frac{1}{4}$ $P_{(\text{2 multipli di 3})} = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$

Senza reimbussolamento

$P(2P) = \frac{5_1}{10_2} \cdot \frac{4_2}{9} = \frac{2}{9}$ $P(\text{2 volte 10}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{0}{9} = 0$ EVENTO IMPOSS.

$$P(\text{pari e dispari}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$$

Mazzo 40 carte ne estraggo una:

$$P(\text{nera}) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \qquad P(\text{figura}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} \qquad P(\text{non fante}) = 1 - P(\text{fante}) = 1 - \frac{4}{40} = \frac{9}{10}$$

$$P(\text{nera o figura}) = \frac{1}{2} + \frac{12}{40} - \underbrace{\frac{6}{40}}_{\text{figure nere}} = \frac{13}{20} \qquad P(\text{fig o asso}) = \frac{12}{40} + \frac{4}{40} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$$

$$P(\text{fig o non fante}) = \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{10}{\cancel{40}}} + \frac{9}{10} - \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{10}{\cancel{40}}} = \frac{10}{10} = 1 \text{ evento certo}$$

10 amici si trovano a cena in un tavolo rotondo.

$$P(\text{2 di essi vicini e un terzo lontano}) = \frac{2\cdot(8! - 2\cdot 7!)}{9!}$$

$2 \cdot 7!$ → eventi che non vogliamo

modi in cui si possono sedere t e c

$9!$ → CP tavolo rotondo

$\boxed{*}$

$B: x = 2 - \frac{1}{2^n}$ se $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$ $\quad \frac{1}{2^n} \leq 1 \quad$ $1 \leq x < 2$

$\inf B = 1$ perché 1 è minorante e $1 \in B$

$\sup B = 2$? $\quad 2 - \varepsilon < 2 - \frac{1}{2^n} \quad \varepsilon > \frac{1}{2^n} \quad 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \quad n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ ok

$\sup B = 2$.

ESERCIZI x CASA

- Urna con 30 palline (18 BIANCHE, 12 NERE) estratte a caso due palline una dopo l'altra:

$P(2B \text{ sapendo che la prima è bianca}) = \frac{\binom{18}{1}}{\binom{30}{1}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ con reimbussolamento

$P(2B/1B) = \frac{17}{29}$ senza

$P(2B \text{ la prima è messa da parte senza guardarne il colore}) = \frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{30}_{5}} \cdot \frac{17}{29} + \frac{12}{\cancel{30}_{5}} \cdot \frac{18}{29} = \frac{51}{145} + \frac{36}{145} = \frac{87}{145} = \frac{18}{30}$ senza

$P(1B) \hookleftarrow P\left(\frac{2B}{1B}\right) \hookleftarrow$

- Da un mazzo di 32 carte si estraggono 8 carte

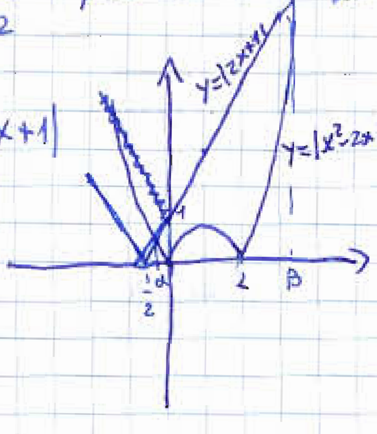
$P(5 \text{ picche}) = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{32}{8}} = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{8!\,24!}{3\cancel{8}!} =$

- Da un mazzo di 52 carte si estraggono 13 carte

$P(\text{almeno 1 asso}) = 1 - P(\text{non asso}) = 1 - \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} = \frac{69}{100}$

- $|\text{sen}\,x| \leq \frac{1}{2}$ qual è la soluzione A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{49}{100}\pi$ C) nessuna ~~D)~~ ~~$\frac{99}{100}\pi$~~

- $|x^2-2x| = |2x+1|$



$\alpha \rightarrow x^2-2x = 2x+1 \quad x^2-4x-1=0 \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+1}}{1} = 2 \pm \sqrt{5}$

$\beta \rightarrow x^2-2x = 2x+1$ ↗

$S = \{2-\sqrt{5},\ 2+\sqrt{5}\}$

- Trovare INF A, INF B, SUP A, SUP B di

$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n+1}{2n+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}$ $\quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : x = 2 - \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

A: $\frac{n+1}{2n+1} = \frac{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{\frac{1}{2}(2n+1)+\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n+2} > \frac{1}{2}$

$x_0 = 1$
$x_1 = 2/3$
$x_2 = 3/5$
$x_3 = 4/7$
$x_n = 1/2$

$\frac{1}{2} < \frac{n+1}{2n+1} \leq 1$

1 è maggiorante, appartiene all'insieme, quindi max A=1 $\boxed{*}$

$\frac{1}{2}$ è minorante, è INF A ? $\frac{1}{2} + \varepsilon > \frac{1}{2} + \frac{1}{4n+2} \quad 4n+2 > \frac{1}{\varepsilon} \quad 4n > \frac{1}{\varepsilon} - 2 \quad n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$ ✓

$A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \phi$ K maggiorante di A se $\forall a \in A, a \leq K$

$K = \text{SUP}A$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : K - \varepsilon < a$

se $K \in A$ e $K = \text{SUP}A \Rightarrow K = \max A$

K minorante di A $\iff \forall a \in A, K \leq a$

$K = \text{INF}A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : K + \varepsilon > a$ se $K \in A \iff K = \min A$

$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n+3}{5n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ $\frac{2n+3}{5n} = \frac{2n}{5n} + \frac{3}{5n} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5n}$

se $n = 1$, $x(1) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

se $n = 2$, $x_2 = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

$\frac{2}{5} < x \leq 1 \rightarrow$ se $n = \infty$, $\frac{3}{5n} = 0$ e x tende a $\frac{2}{3}$

1 è maggiorante di A,

ma è anche massimo perchè $1 \in A$ e estremo superiore

2/5 è minorante $\forall \varepsilon > 0$ $\cancel{\frac{2}{5}} + \varepsilon > \underbrace{\cancel{\frac{2}{5}} + \frac{3}{5n}}_{X,\ \text{numero di } A}$, $\varepsilon > \frac{3}{5n}$ $\frac{5n}{3} > \frac{1}{\varepsilon}$

2/5 = INF A   K = sospetto INF A $n > \frac{3}{5\varepsilon}$, quindi esiste

MINIMO?

$\cancel{\frac{2}{5}} = \underbrace{\cancel{\frac{2}{5}} + \frac{3}{5n}}_{a}$ $\frac{3}{5n} = 0$ MAI $\Rightarrow$ 2/5 non è minimo

$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ $x = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ $x_1 = 0$
$x_2 = 1/2$
$x_3 = 2/3$

$0 \leq x < 1$ 0 è minorante, ma anche estremo inferiore e minimo

1 è maggiorante, è estremo superiore?

$\forall \varepsilon > 0$ $1 - \varepsilon > 1 - \frac{1}{n}$ $n > +\frac{1}{\varepsilon}$ vero, quindi è estremo superiore

è max?

$1 = 1 - \frac{1}{n}$ $\frac{1}{n} = 0$ MAI 1 non è massimo

$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ $x_1 = 2$ $x_2 = \frac{5}{2}$ $x_3 = \frac{10}{3}$

2 è minimo? $n + \frac{1}{n} \geq 2$ $\frac{n^2 + 1 - 2n}{n} \geq 0$ $\frac{(n-1)^2}{n} \geq 0$ sempre, quindi 2 e minimo

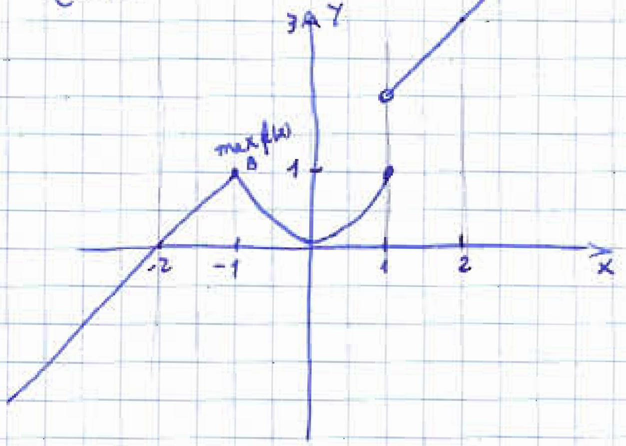
L'insie[illegible] limitato superiormente [illegible] $+\infty$

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & x \leq -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$$

studiare
INF A, INF B, INF C
SUP A, SUP B, SUP C

$A = [1,2[\quad B =]-2,0[\quad C =]1,+\infty[$

graficamente



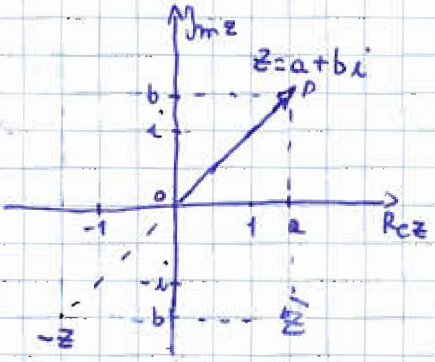
$1 = \min_{A} f(x)$ $\quad 2 = \inf_{C} f(x)$

$3 = \sup_{A} f(x)$ $\quad +\infty = \sup_{C} f(x)$

$0 = \inf_{B} f(x)$

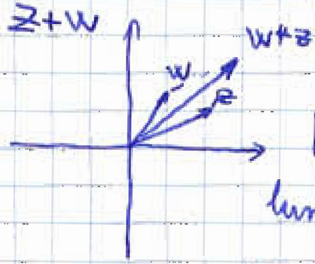
$\max_{B} f(x) = 1$

FINE ESERCITAZIONE



$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \overrightarrow{OP}$ modulo del numero complesso

$z+w$



somma di vettori

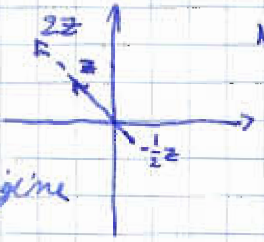
$|z+w| \leq |z| + |w|$

lunghezza del modulo della somma ≤ della somma delle lunghezze

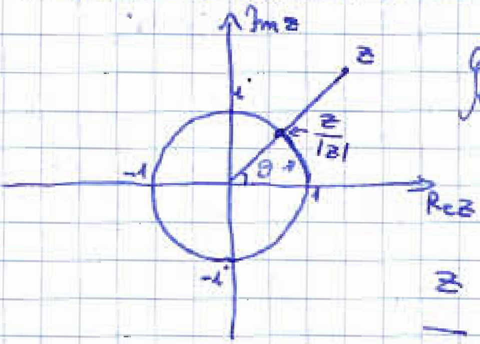
Se $\lambda > 0$, $\lambda z = \lambda a + \lambda b i$ x $z = a + bi$

Dilatazione di valore λ

Se $\lambda < 0$, $\lambda z =$ riflessione rispetto all'origine + una dilatazione di $|\lambda|$



FORMA TRIGONOMETRICA



Se $z \neq 0$, $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$ $\quad \frac{z}{|z|}$ si ottiene con una dilatazio

$|z|$ di $\frac{1}{|z|}$. I punti sono tutti allineati rispetto all'origine

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta i$$

$\rho =$ modulo $(\rho > 0)$

Se $\rho = |z| > 0$ $\quad \boxed{z = \rho \cdot (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta i)}$ $\quad \theta =$ argomento $(\theta \in \mathbb{R})$

Se $0 \leq \theta < 2\pi$, si chiama ARGOMENTO MINIMO, altrimenti $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$z = 2\left(\cos\frac{5}{2}\pi + \text{sen}\,\frac{5}{2}\pi i\right)$ $\rho = 2$ $\theta = \frac{5}{2}\pi$ θ minimo $= \frac{\pi}{2}$

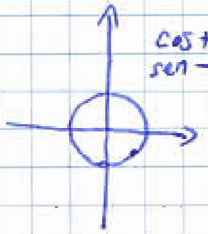
$z = 2(0 + 1\cdot i) = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,\frac{\pi}{2} i\right)$

Se $z = 3-3i$, la forma trigonometrica è:

$|z| = \sqrt{3^2+(3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = \rho$ $3-3i = 3\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{2}} - \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{2}} i\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

i $\theta \in \mathbb{R}$: $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i = \cos\theta + \text{sen}\,\theta i$

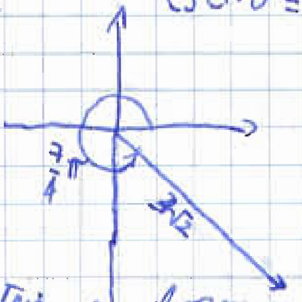
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



cos + sen − ⇒ 4° quadrante

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$3-3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right)$



Per passare da forma trigonometrica a forma algebrica

$z = 4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + \text{sen}\,\frac{2}{3}\pi i\right)$ $\rho = 4$ $\theta = \frac{2}{3}\pi$ $\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$ $\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$z = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -2 + 2\sqrt{3} i$

$$\begin{cases} \cos(\arg z) = \frac{\text{Re}\, z}{|z|} \\ \text{sen}(\arg z) = \frac{\text{Im}\, z}{|z|} \end{cases} \quad \text{con } z \neq 0$$

Se $z = \rho(\cos\theta + \text{sen}\,\theta\cdot i)$, $\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + \text{sen}(-\theta) i)$. Dato che $\cos(-\theta) = \cos\theta$ siccome cos è pari, e $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$ perché il seno è dispari,

$\bar{z} = \rho(\cos\theta - \text{sen}\,\theta i)$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \rho\cdot(\cos\theta - \text{sen}\,\theta i)\cdot\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}\cdot(\cos\theta - \text{sen}\,\theta i)$$

$z = \rho(\cos\theta + \text{sen}\,\theta i)$ $w = r(\cos\varphi + \text{sen}\,\varphi i)$

$$z\cdot w = \rho r(\cos\theta\cdot\cos\varphi + i^2\cdot\text{sen}\,\theta\cdot\text{sen}\,\varphi + \cos\theta\,\text{sen}\,\varphi i + \text{sen}\,\theta i\cdot\cos\varphi) =$$

$$= \rho r(\cos\theta\cdot\cos\varphi - \text{sen}\,\theta\cdot\text{sen}\,\varphi + i(\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi + \text{sen}\,\theta\cos\varphi) =$$

$$= \rho r(\cos(\theta+\varphi) + i\,\text{sen}(\theta+\varphi))$$ $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$ argomento = arg z + arg w

Se W reale positivo, $\varphi=0 \Rightarrow w=|W|\cdot(\cos 0+\operatorname{sen} 0\cdot i)=|W|$

Quindi $w\cdot z$ equivale a fare la dilatazione di valore $|W|$

Se w reale negativo, $\varphi=\pi \Rightarrow w=|w|(\cos\pi+\operatorname{sen}\pi\, i)=-|w|$

Scrivere i in forma trigonometrica

$i=1\cdot(\underset{0}{\underset{\Downarrow}{\cos\varphi}}+\underset{1}{\underset{\Downarrow}{\operatorname{sen}\varphi}}\cdot i)$ $\quad \varphi=\frac{\pi}{2}$ l'unità immaginaria i sul semiasse positivo vertical

$z\cdot i=\rho\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\rho(-\operatorname{sen}\theta+i\cos\theta)$ rotazione di $\frac{\pi}{2}$

$z\cdot w=\rho r(\cos(\theta+\varphi)+i\operatorname{sen}(\theta+\varphi))$ rotazione di φ e dilatazione di r.

$$\frac{z}{w}=z\cdot\frac{1}{w}=z\cdot\frac{1}{r}(\cos(-\varphi)+\operatorname{sen}(-\varphi)i)=\frac{\rho}{r}(\cos(\theta-\varphi)+\operatorname{sen}(\theta-\varphi)i)$$

$z^2=\rho^2(\cos(2\theta)+\operatorname{sen}(2\theta)i)$ $\quad \boxed{z^n=\rho^n(\cos(n\theta)+\operatorname{sen}(n\theta)i) \text{ con } n\in\mathbb{N}^+}$

FORMULA DI DE MOIVRE

ESEMPIO

$(1+i)^7$ scriviamo $1+i$ in F.T. $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$1+i=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \qquad \theta=\frac{\pi}{4}$$

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot i\right)$ $\quad (1+i)^7=\sqrt{2}^7\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\cdot i\right)=$

$=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi\right)$ tornando alla forma algebrica...

$8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=8-8i=(1+i)^7$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA ⊛

La radice quadrata di un numero reale non negativo $x\geq 0$ è quel numero reale $y\geq 0$ tale che $y^2=x$.

DEFINIZIONE: se $z\in\mathbb{C}$ e $n\in\mathbb{N}^+$, un numero $w\in\mathbb{C}$ è RADICE N-ESIMA di z se $w^n=z$

Se $z=0$, l'unico w tale che $w^n=0$ è 0.

Considero $z\neq 0$ $\quad z=\rho(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cdot i)$ dato

$w=r(\cos\phi+\operatorname{sen}\phi\cdot i)$ da trovare imponiamo $w^n = z$ $\quad w^n = r^n(\cos(n\phi) + \text{sen}(n\phi)\cdot i)$

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ \cos n\phi = \cos\theta \\ \text{sen}\, n\phi = \text{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{1/n} \\ \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

devo mettere $+2k\pi$

per $k=n$ ottengo lo stesso numero complesso di $k=0$, perchè diventa $\phi = \frac{\theta}{n} + 2\pi$

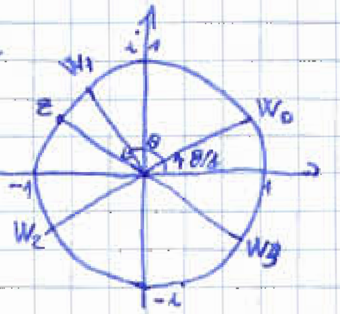
$$\boxed{k = 0, 1, \dots, n-1}$$

Le radici n-esime di $z = \rho(\cos\theta + \text{sen}\theta\, i)$ sono n, $w_k = \rho^{1/n}\cdot(\cos(\phi_k) + \text{sen}(\phi_k)\, i)$

$$\phi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Tutte le radici di w sono numeri complessi di modello $\rho^{1/n}$, cioè che stanno su una stessa circonferenza centrata nell'origine.

Se $|z| = 1$ e $n = 4$



$$\phi_0 = \frac{\theta}{4} \qquad \phi_1 = \frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{2} \qquad \phi_2 = \frac{\theta}{4} + \pi$$

$$\phi_3 = \frac{\theta}{4} + \frac{3}{2}\pi$$

Se $|z| \neq 1$, devo trovare la circonferenza di raggio $|z|$

Le radici n-esime sono i punti corrispondenti ai vertici di un poligono regolare di n lati.

⊛ → una qualsiasi equazione reale, in campo complesso ha soluzioni.

Se $z = \lambda > 0$, le radici quadrate complesse di λ sono z: $\lambda_0 = \frac{\theta}{1} + \frac{2\cdot 0\pi}{2} = 0$

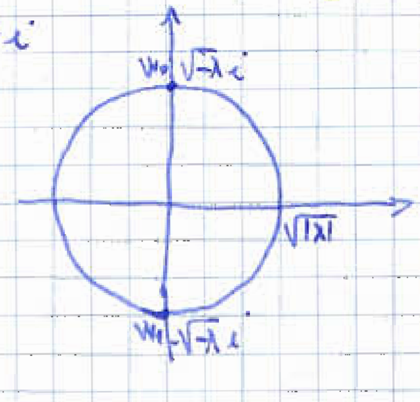
$$\lambda_1 = 0 + \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Se $z = \lambda < 0$, le radici quadrate complesse sono...

$z = |\lambda|\cdot(\cos\pi + \text{sen}\pi\, i)$ $\quad w^2 = \lambda$ $\quad w_0 = |\lambda|^{1/2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\frac{\pi}{2} i\right) = \sqrt{-\lambda}\cdot(0 + i) = \sqrt{-\lambda}\, i$

$|\lambda| = -\lambda$ perchè $\lambda < 0$

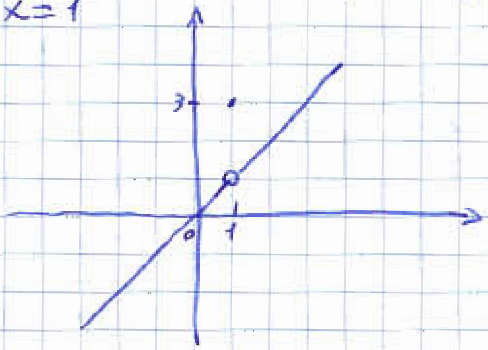
$w_1 = \sqrt{-\lambda}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + \text{sen}\frac{3}{2}\pi\, i\right) = -\sqrt{-\lambda}\cdot i$



ESERCIZIO

Radici cubiche complesse di $\sqrt{3} + 3i$

$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$ trovare INF f e SUP f negli intervalli $A = [0,1[$ $B = [0,1]$



$\underset{A}{\text{INF}} f = 0 = \underset{A}{\min} f$ $\underset{B}{\inf} f = 0 = \underset{B}{\min} f$

$\underset{A}{\text{SUP}} f = 1$ $\underset{B}{\sup} f = 3 = \underset{B}{\max} f$

DIMOSTRAZIONI X INDUZIONE

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad n=0 \quad \text{I m} \sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 \quad \text{II MEMBRO: } \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 0 \quad \text{VERO}$$

Hp: VERA X n

Th: $\sum_{x=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ DIMOSTRARE

$$\sum_{x=0}^{n+1} k^2 = \sum_{x=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6}{6}$$

$\Rightarrow$ scompongo $2n^2+7n+6$ $P(-2) = 8 - 14 + 6 = 0$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & 7 & 6 \\ -2 & & -4 & -6 \\ \hline & 2 & 3 & 0 \end{array} \quad (2n+3)(n+2)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \text{C.V.D.}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

1) verifico per $n=0$

2) suppongo vero per n

3) dimostro per $n+1$

1) $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$ $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = 0$ VERO 2) suppongo vera

3) $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$ $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + n + 1\right] =$

$$= (n+1)^2 \cdot \left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 \quad \text{VERIFICATO}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ con } q \neq 1 \quad \text{per } n=0 \quad \sum_{k=0}^{0} q^k = 1 \quad \frac{\cancel{1-q^1}}{\cancel{1-q}} = 1 \quad \text{VERO}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$ DA VERIFICARE

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-\cancel{q^{n+1}}\cancel{+q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$ C.V.D.

$$\sum_{k=3}^{6} 3^k = \sum_{k=0}^{6} 3^k - \sum_{k=0}^{2} 3^k = \frac{1-3^7}{1-3} - \frac{1-3^3}{1-3} = \frac{-3^7+3^3}{-2} = \frac{3^3(1-3^4)}{-2} = \frac{3^3(1-81)}{-2} =$$

$$= \frac{27(+\overset{40}{\cancel{80}})}{\cancel{+1}} = 1080$$

$$3^n + 4^n \leq 5^n \quad \forall n \geq 2$$ 1) è vero per $n=2$

$$x_2 \Rightarrow 3^2+4^2 \leq 5^2 \quad 9+16 \leq 25 \quad \text{SI} \quad 25 \leq 25$$

2) suppongo vera

3) dimostrare per $n+1$ $\quad 3^{n+1}+4^{n+1} \leq 5^{n+1}$

$$5^{n+1} = 5\cdot 5^n \underset{\text{x Hp}}{\geq} 5\cdot(3^n+4^n) \geq 4(3^n+4^n) = 4\cdot 3^n + 4\cdot 4^n \geq 3\cdot 3^n + 4\cdot 4^n = 3^{n+1}+4^{n+1}$$ C.V.D.

$$n^n > 2^n \cdot n! \quad \forall n \geq 6$$

$$x_6 \Rightarrow 6^6 > 2^6\cdot 6! \quad \cancel{2^6}\cdot 3^6 > \cancel{2}^4\cdot 6! \quad 3^{\cancel{6}4} > \cancel{6}^2\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot 2 \quad 3^4 > 2\cdot 5\cdot 4\cdot 2 \quad 81 > 80$$ vero

th) $(n+1)^{n+1} > 2^{n+1}\cdot(n+1)!$ $\quad (n+1)^{n+1} = (n+1)^n\cdot(n+1) = \left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n (n+1) =$

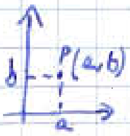
$$= n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1) > 2^n\cdot \underline{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underline{(n+1)} = 2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)!$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k \underset{\substack{\text{SCRIVO}\\ \text{I PRIMI}\\ \text{2 TERMINI}}}{\geq} \underset{1}{\cancel{\binom{n}{0}}}\cdot \underset{1}{\cancel{1^n}}\cdot \underset{1}{\cancel{\left(\frac{1}{n}\right)^0}} + \underset{n}{\cancel{\binom{n}{1}}}\underset{1}{\cancel{1^{n-1}}}\left(\frac{1}{n}\right)^1 = 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 1+1 = 2$$

$$2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)! \geq 2^n\cdot \underset{\substack{\downarrow\\ \text{SOMMA DEI}\\ \text{PRIMI 2}\\ \text{TERMINI}}}{2}\cdot(n+1)! = 2^{n+1}\cdot(n+1)!$$ C.V.D.

NUMERI COMPLESSI

$z = a+ib \quad a, b \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad a \rightarrow$ ascissa $\quad b \rightarrow$ ordinata



$$(3-4i)(2+i) = 6+3i-8i\underset{+4}{-4i^2} = 10-5i$$

$$\frac{2-3i}{3+4i} = \frac{2-3i}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6-8i-9i+12i^2}{9-16i^2} = \frac{-6-17i}{25} = -\frac{6}{25} - \frac{17}{25}i$$

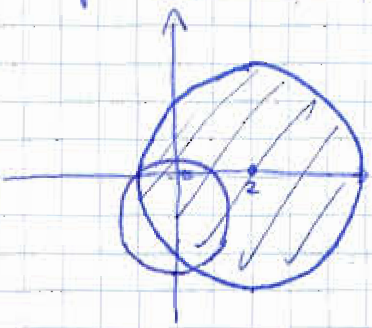
$$z = i(2i+3)+(i+2)(\overline{1-i}) = 2i^2+3i+(i+2)(1+i) = \cancel{-2}+3i+i+i^2\cancel{+2}+2i = -1+6i$$

$$z = \frac{10-5i}{3-i} - \frac{1+8i}{1+3i} = \frac{10-5i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} - \frac{1+8i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{30+10i-15i\overset{5}{-5i^2}}{9-i^2} - \frac{1-3i+8i\overset{4}{\cancel{-24i}}}{1-9i^2} =$$

$$= \frac{35-5i}{10} - \frac{25+5i}{10} = \frac{35-5i-25-5i}{10} = \frac{10-10i}{10} = 1-i$$

$A: |z-2|<3$ $z=x+iy$ $z-2=(x-2)+iy$ $|z-2| = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}<3$ $(x-2)^2+y^2<9$ circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio 3



/// punti che verificano questa

$B: |z-i|<2$

$z=x+iy$ $z-i = x+(y-1)i$

$|z-i| = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$ $\sqrt{x^2+(y-1)^2}<2$ $x^2+(y-1)^2<2$

cfr centro $(0,-1)$ e raggio $\sqrt{2}$

— FINE ESERCITAZIONE —

$z\in\mathbb{C}$, $w\in\mathbb{C}$: $w^n = z$ $(z\neq 0)$

$z = \rho(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\, i)$ $k = 0,\dots,n-1$ $w_k = \rho^{1/n}(\cos\phi_k+\operatorname{sen}\phi_k\, i)$

$\phi_k = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ <u>OSS</u> se $n=2$ $w_1 = -w_0$, $w_0 = \rho^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)i\right)$

RADICI CUBICHE DI $8i$

$8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\, i\right)$ $w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ $w_1 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right)$

$\hookrightarrow \frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi$

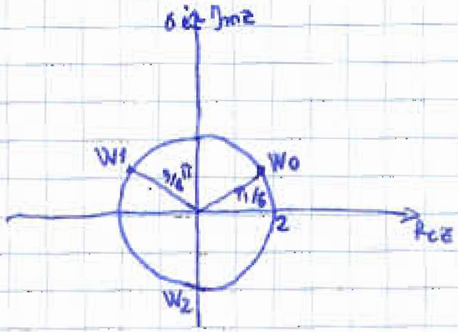
$w_2 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right)$

$\hookrightarrow \frac{\pi}{6}+2\frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi$

$w_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}+i$

$w_2 = 2\left(0+i(-1)\right) = -2i$

$w_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3}+i$



Radici n-esime di 1 $\quad \rho(1)=1 \quad \theta(1)=0$

La prima è $\phi_0 = \frac{0}{n} + 0\frac{2\pi}{n} = 0$. Se $n=6$, diventa $\phi_1 = 0 + 1 \cdot \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ e così vi

Se $n=2$, $z=a+bi$ con $a,b \in \mathbb{R}$ noti, trovare le radici

$w^2 = z \quad w = x+iy$ con $x,y \in \mathbb{R}$ incognite

$w^2 = x^2 + i^2y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

sommo 1° e 3° $\quad x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$

$|w^2| = |z|$

$|w|^{\overset{\downarrow}{2}} = |z| \rightarrow x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

sottraggo 1° e 3° $\quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{cases}$$

se $z=a \rightarrow$ reale $\rightarrow$ se $a \geq 0$, $w = \pm\sqrt{a}$

se $a<0$, $w = \pm\sqrt{-a} \cdot i$

se $z=a+ib$, guardo il segno di b

- se $b>0 \Rightarrow x$ e y concordi $\Rightarrow$ le due soluzioni sono ++ e -
- se $b<0 \Rightarrow x$ e y discordi $\Rightarrow$ le 2 soluzioni sono +- e -

$az^2+bz+c=0$, $a \neq 0$

$az^2+bz+c = a\left[\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ divido per a

$$z + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ESEMPIO

$z^2+z+\frac{2+\sqrt{3}i}{4} = 0 \qquad z = \frac{-1\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ con $\Delta = 1-4\cdot\frac{2+\sqrt{3}i}{4} = 1-2-\sqrt{3}i = -1-\sqrt{3}i$

calcolo le radici quadrate di $-1-\sqrt{3}i \rightarrow n=2$

$|-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \qquad -1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\theta = \frac{4}{3}\pi \qquad \Delta$ ha $\rho=2$ e $\theta = \frac{4}{3}\pi$

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\rho^{1/2}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right) = \pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{4}{\underset{\underset{\theta}{\uparrow}}{3}}\pi\cdot\frac{1}{\underset{\underset{n}{\uparrow}}{2}} + i\operatorname{sen}\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \pm\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

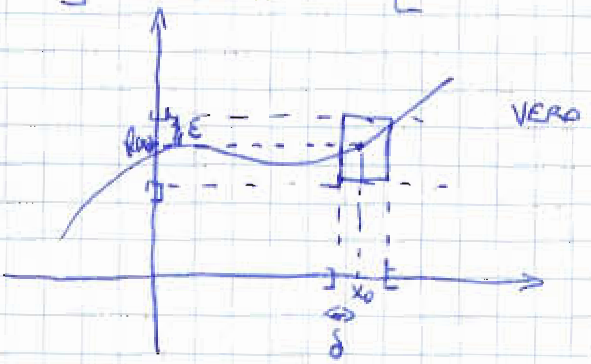
$$z_1 = \frac{-1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{2} = \frac{-2-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4} \qquad z_2 = \frac{-1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}-2}{4} - i\frac{\sqrt{6}}{4}$$

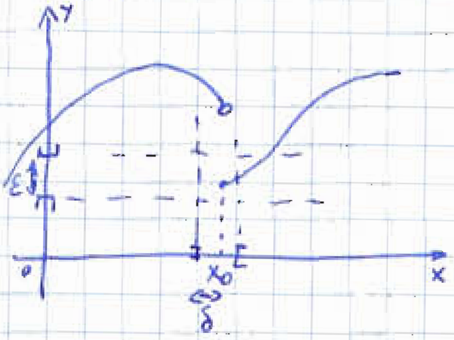
FUNZIONI CONTINUE

$f: A \to \mathbb{R}$, funzione; $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

DEF f è continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : [x \in A, |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$

$f(x) \in]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$ e $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$





- f è continua su B, dove $B \subset A$, se è continua in ogni punto di B
- f è continua se f è continua su A (dominio).

ESEMPIO

$x \longrightarrow f(x)$

x = lunghezza barra a $T = 27°C$

$f(x)$ = lunghezza barra a $T = 1000°C$

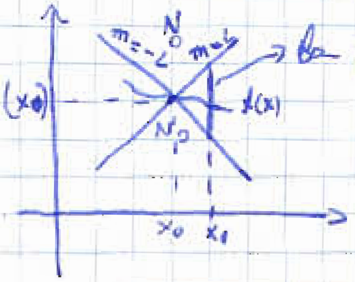
Se la funzione $f(x)$ non è continua e misuro una lunghezza x_0, se sbaglio a misurare per difetto, la funzione dà valori alti.

f si dice lipschitziana se $\exists L > 0$:

$\forall x_1, x_2 \in A$, $|f(x_1)-f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$

$L = |m|$ costante di lipschitz

$f(x) = mx + n$ (affine) è lipschitziana



Ogni funzione lipschitziana è continua

$$|f(x)-f(x_0)| = L \cdot |x-x_0| \underset{?}{<} \varepsilon \qquad |x-x_0| < \frac{\varepsilon}{L} = \delta$$

δ dipende da ε e dalla funzione, ma non da x_0.

TEOREMA DI HEINE CANTOR (UNIFORME CONTINUITÀ)

Sia $f:[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato, allora:

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \left[\forall x_1,x_2 \in A,\ |x_1-x_2|<\delta \Longmapsto |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\right]$$

δ non dipende da x_0 ↑

VERIFICA DI CONTINUITÀ

$f(x) = \frac{1}{x}$ è continua! Cioè è continua in tutti i punti del suo dominio naturale, cioè in $\mathbb{R}-\{0\}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\frac{1}{x}$ è continua in x_0 (da verificare). Supponiamo $x_0>0$

ES, $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \left[x \neq 0,\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon\right]$

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x-x_0| \text{ dovrò porlo } <\delta}{|x\cdot x_0| \text{ dipende da } x \text{ e } x_0}$$

se $\delta < \underset{>0}{\frac{x_0}{2}} \Longmapsto x \in \left]x_0-\delta, x_0+\delta\right[\Longmapsto x > x_0 - \underset{\uparrow}{\delta} > \frac{x_0}{2}$

$<\frac{x_0}{2}$ $\quad x-\frac{x_0}{2} > \frac{x}{2}$

$$= \frac{|x-x_0|}{x\cdot x_0} \leq \frac{2}{x_0^2}|x-x_0| \qquad x\cdot x_0 > \frac{x_0^2}{2} \qquad \frac{1}{x\cdot x_0} < \frac{2}{x_0^2}$$

perché entrambi positivi, visto che $\frac{x_0}{2}>0$

visto la catena di disuguaglianze $\frac{2}{x_0^2}|x-x_0|<\varepsilon \qquad \frac{2}{x_0^2}\delta<\varepsilon$ e $|x-x_0|<\delta$

$$\delta < \frac{x_0^2}{2}\varepsilon \qquad \delta = \min\left\{\underset{1^a \text{ cond.}}{\frac{x_0}{2}}, \underset{\hookrightarrow 2^a \text{ cond.}}{\frac{x_0^2}{2}\cdot\varepsilon}\right\}$$

δ dipende da ε, dalla funzione, ma anche da x_0.

$\Rightarrow \frac{1}{x}$ è continua nel suo dominio naturale

PROPRIETÀ

Se f e g sono continue in x_0, allora $f+g$ è continua in x_0

dim (Hp) $\forall \sigma>0, \exists \delta_1>0 : \left[x\in A, |x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\sigma\right]$ definizione di continuità con $\sigma=\varepsilon$ e $\delta_1=\delta$

$\forall \sigma>0, \exists \delta_2>0 : \left[x\in A, |x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(x_0)|<\sigma\right]$

(Th) $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \left[x\in A, |x-x_0|<\delta \Rightarrow |(f+g)(x)-(f+g)(x_0)|<\varepsilon\right]$

$$|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)| = |(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))| \leq |f(x)-f(x_0)| + |g(x)-g(x_0)| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$\sigma = \frac{\varepsilon}{2}$ e $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\Rightarrow |x - x_0| < \delta$ in quanto δ è il minimo tra i due;

$f(x) - f(x_0) < \sigma$ e $g(x) - g(x_0) < \sigma$ per ipotesi, m $\sigma = \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ c.v.d.

Se f e g sono continue

1. f+g è continua
2. f·g è continua
3. $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ è continua

Se f è continua $\Rightarrow |f|$ è continua

FUNZIONI ELEMENTARI CONTINUE

$f(x) = \text{cost}$ $\qquad f(x) = \text{sen}\,x$ $\qquad f(x) = P(x)$ polinomio perchè somme, prodotti di funzioni continue

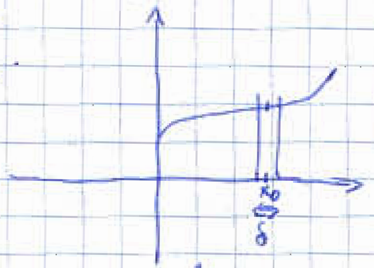
$f(x) = x$ $\qquad f(x) = \cos x$

$f(x) = |x|$ $\qquad f(x) = e^x$

per la 2ª dis. triangolare $||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2| \rightarrow$ proprietà di lipschiz con $L = 1$

TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO

Se f è continua in x_0 e $f(x_0) \neq 0$, esiste $\delta > 0$ tale che f ha segno costante nell'intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.



DIM.

suppongo $f(x_0) > 0$, $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$

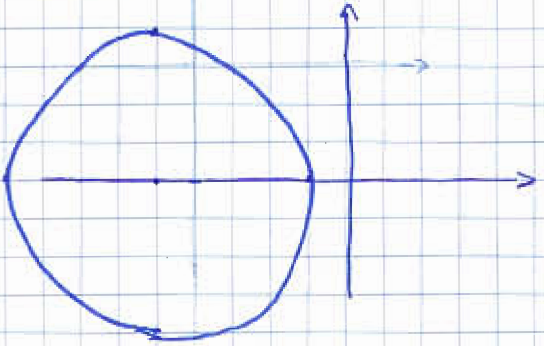
$\exists\, \delta > 0 : [x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) + \varepsilon > f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$

ESERCITAZIONE

$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \quad |z - 3| = 2|z+3|$ se $z = x + iy$

$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2} \quad x^2 + 9 - 6x + y^2 = 4x^2 + 36 + 24x + 4y^2$

$-3x^2 - 30x - 3y^2 - 27 = 0 \quad x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$ cfr $C(-5, 0)$ $r = \sqrt{25 - 9} = 4$



$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$$ calcoli come sopra

$\vdots$

$$-3x^2-3y^2-30x-27<0$$

$$x^2+y^2+10x+9>0$$ punti esterni

Calcolare $P(z) = \dfrac{i\bar{z}-2z}{i-z}$ essendo $z_0=3-i$ $\bar{z}=3+i$

$$P(z_0) = \frac{i(3+i)-2(3-i)}{1-3+i} = \frac{3i-1-6+2i}{-2+i} = \frac{-7+5i}{-2+i}\cdot\frac{-2-i}{-2-i} = \frac{14+7i-10i-5i^2}{4-i^2} = \frac{19-3i}{5} =$$

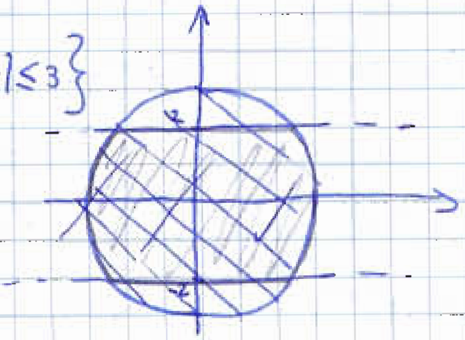
$$= \frac{19}{5} - \frac{3}{5}i$$

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq 2 \wedge |z| \leq 3 \right\}$$

$z = x+iy$ $\quad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\sqrt{x^2+y^2} \leq 3$ $\quad x^2+y^2 \leq 9$

$C(0,0)$ $\quad r=3$



Per quali valori di x è reale

$$\frac{x-1+3i}{x-2i}\cdot\frac{x+2i}{x+2i} = \frac{x^2+2ix-x-2i+3ix+6i^2}{x^2-4i^2} = \frac{x^2-x+5ix-2i-6}{x^2+4} =$$

$$= \frac{x^2-x-6}{x^2+4} + i\,\frac{5x-2}{x^2+4}$$ si deve annullare la parte immaginaria $\quad 5x-2=0 \quad x=\dfrac{2}{5}$

Rappresentare le soluzioni di

$z+\bar{z}-\dfrac{1}{\bar{z}}=0$ $\quad \bar{z}\neq 0$ $\quad z\neq 0$ $\quad z=x+iy$ $\quad \bar{z}=x-iy$

$$x+\cancel{iy}+x-\cancel{iy}-\frac{1}{x-iy}=0$$

$$2x-\frac{1}{x-iy}\cdot\frac{x+iy}{x+iy}=0 \qquad 2x-\frac{x+iy}{x^2+y^2}=0 \qquad \frac{2x^3+2xy^2-x-iy}{x^2+y^2}=0 \quad x-iy \qquad 2x^3+2xy^2-x-iy=0$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 2x^3+2xy^2-x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ 2x^3-x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x(2x^2-1)=0 \end{cases} < \begin{matrix} x=0 \\ 2x^2=1 \quad x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$

$z_1 = 0x+0y = 0$ NON ACC. $\qquad z_2 = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}+0z$

altro modo $z\bar{z} + \bar{z}^2 - 1 = 0$ −

$$\bar{z}z + z^2 - 1 = 0$$

// $\bar{z}^2 - z^2 = 0$ $(\bar{z}+z)(\bar{z}-z) = 0$ $\begin{cases} \bar{z} = -z \\ \bar{z} = z \text{ reale puro} \end{cases}$

① $z = \bar{z}$ sostituisco all'equazione

$z z + z^2 - 1 = 0$ $2z^2 - 1 = 0$ $z = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

② $\bar{z} = -z$

$-z^2 + z^2 - 1 = 0$ $-1 = 0$ $\emptyset$

$z^2 = \bar{z}$ $z = x + iy$ $(x+iy)^2 = x - iy$ $x^2 + 2ixy - y^2 - x + iy = 0$

$\bar{z} = x - iy$

$$x^2 - y^2 - x + i(2xy + y) = 0$$

$\begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ 2xy + y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y(2x+1) = 0 \\ x^2 - y^2 - x = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} y = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{matrix}$

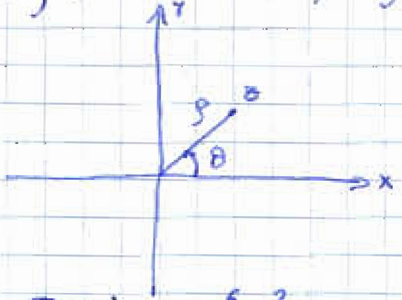
$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - y^2 - x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x(x-1) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x^2 - y^2 - x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$z_1 = 0$ $z_2 = 1$ $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ $\rho = |z|$ $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$ $\text{sen}\,\theta = \frac{y}{\rho}$ con $z = x + iy$



$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

$$Z_k = \sqrt[n]{\rho}\cdot\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$z = \sqrt{3} + i$ $z^6 = ?$

$|z| = \rho = \sqrt{3+1} = 2$ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$ $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$z^6 = 2^6\left(\cos 6\cdot\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,6\frac{\pi}{6}\right) = 64(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi) = 64(-1 + i\cdot 0) = -64$$

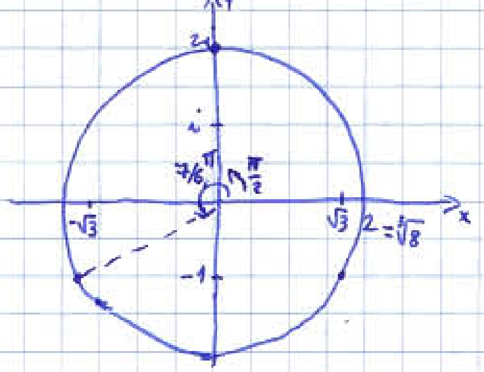
$z = -8i$ $\rho = \sqrt{64} = 8$ $z = 8\cdot(-i)$ $\cos\theta = 0$ $\text{sen}\,\theta = -1$ $\theta = \frac{3}{2}\pi$

$z = 8\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi\right)$ 3 radici cubiche $n = 3$

$Z_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}\right)$ $z_0 = 2\left(\cos\frac{1}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\right) = 2(0 + 1i) = 2i$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{6}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi+4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{11}{6}\pi\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$



$$z = \sqrt{3} + 3i \qquad \rho = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$z = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + i\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}}\right) \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

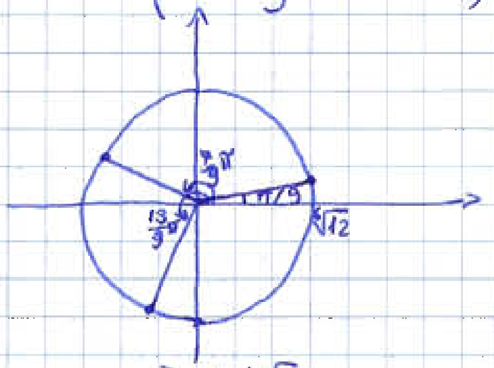
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z_k = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+k}{3} + \text{sen}\,\frac{\frac{\pi}{3}+k}{3}i\right)$$

$$z_0 = \sqrt[6]{12}\left(\cos\frac{\pi}{9} + \text{sen}\,\frac{\pi}{9}i\right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{12}\left(\cos\frac{7}{9}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{9}\pi\right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{12}\left(\cos\frac{13}{9}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{13}{9}\pi\right)$$



$$z^2 + z + \frac{3+2i\sqrt{3}}{4} = 0 \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-3-2i\sqrt{3}}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-2-2i\sqrt{3}}}{2}$$

$w = -2-2i\sqrt{3}$ calcolo radici quadrate di w

$$\rho = \sqrt{4+4\cdot 3} = 4 \qquad w = 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad w_0 = \sqrt{4}\left(\cos\frac{\frac{4}{3}\pi+0}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi\right) =$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \text{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta = \frac{4}{3}\pi$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$w_1 = -w_0 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$z = \frac{-1 \pm (-1+\sqrt{3}i)}{2} = \begin{cases} \frac{-1-1+\sqrt{3}i}{2} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \frac{-1+1-\sqrt{3}i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$2z^2 - 5(1+i)z + (5+i) = 0 \qquad z = \frac{5(1+i) \pm \sqrt{25(1+i)^2 - 8(5+i)}}{4} = \frac{5(1+i) \pm \sqrt{25-25+50i-40-8i}}{4} =$$

$$= \frac{5(1+i) \pm \sqrt{-40+42i}}{4}$$

radici quadrate di $w = -40+42i$ $\quad \rho = \sqrt{40^2+42^2} = 58$

$$\cos\theta = \frac{-40}{58} = -\frac{20}{29} \qquad \text{sen}\theta = \frac{42}{58} = \frac{21}{29} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{40}{58}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{58}} = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

$$w_0 = \sqrt{58}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right) = \qquad \text{sen}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{40}{58}}{2}} = \sqrt{\frac{49}{58}} = \frac{7}{\sqrt{58}}$$

$$= \sqrt{58}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{58}} + i\frac{7}{\sqrt{58}}\right) = 3 + 7i$$

$$z = \frac{5+5i \pm (3+7i)}{4} = \begin{cases} \frac{8+12i}{4} = 2+3i \\ \frac{2-2i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases}$$

Trovare i vertici di un esagono regolare sapendo che il primo è $(4,0)$

$n=6$ numero complesso 4^6, dato che $\varrho = 4^6$ la radice sesta del modulo deve dare 4

$z = 4^6$ cerco le radici seste $\varrho = \sqrt[6]{4^6} = 4$

$\cos\theta = 1$ $\quad \mathrm{sen}\,\theta = 0$ $\quad \theta = 0$ $\quad W_0 = 4\left(\cos\frac{0}{6} + i\,\mathrm{sen}\,0\right) = 4$

$W_1 = 4\left(\cos\frac{0+2\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\qquad W_2 = 4\left(\cos\frac{0+4\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{2}{3}\pi\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

FINE ESERCITAZIONE

Pr: se f è continua in x_0 e $f(x_0) \neq 0$, allora $\frac{1}{f}$ è continua in x_0

es: $\frac{1}{x}$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dato che x è continua DIM.

COROLLARIO: se f e g sono continue su A, allora $\frac{f}{g}$ è continua su $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$ (da vedere come $f \cdot \frac{1}{g}$)

es: $\tan x = \frac{\mathrm{sen}\,x \to \text{continua in } \mathbb{R}}{\cos x \to \text{continua in } \mathbb{R}}$ è continua quando $\cos x \neq 0$, cioè nel suo dominio naturale

$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ è continua (sul dominio naturale)

$\frac{3x+1}{x-2}$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

PROP: se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0. $\quad x \to f(x) = y \to g(y) = z \to z = g(f(x))$

es: $e^{\cos(x^2 + \mathrm{sen}\,x)}$ è continua su $\mathbb{R}$ perché composizione di funzioni

e^t è cont. $\quad t = \cos(x^2 + \mathrm{sen}\,x)$ il coseno è continua, così come x^2 e $\mathrm{sen}\,x$.

PROP: se f è continua su un intervallo I e $f: I \to \mathbb{R}$ è invertibile, allora l'inversa è continua.

Se I è un intervallo, se prendo due punti $\in I$, anche i punti compresi sono nell'intervallo.

es. arcsen x, arccos x e arctan x sono continue

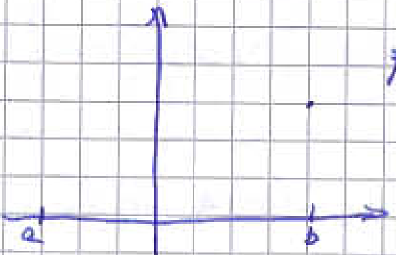
log x perché inversa dell'esponenziale.

$x^x = e^{\log x^x} = e^{x \log x}$ per $x>0$ è continua perché composizione di funzioni

PROP: se f è continua su [a, b], allora

$$\sup_{]a,b[} f = \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f \qquad \inf_{]a,b[} f = \inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f$$

FUNZIONI CONTINUE SU INTERVALLI

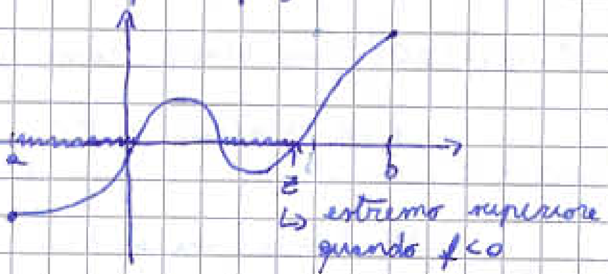


$f(x)=0$, se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, con $f(a)$ con segno opposto di $f(b)$, con $[a, b]$ intervallo di numeri reali

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia $f:[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua e tale che $f(a)\cdot f(b)<0$.

Allora $\exists\, z \in \,]a,b[$ tale che $f(z)=0$



DIM: supponiamo $f(a)<0$ e $f(b)>0$

Sia $A_- = \{x \in [a,b] : f(x)<0\}$

$A_- \neq 0$ perché $a \in A_-$

A_- è limitato superiormente dato che $A_- \subset [a,b]$ e $b \in$ maggioranti A_-

$\Rightarrow$ (teorema esistenza sup) $\exists\, z = \sup A_- \in \mathbb{R}$

TESI: $f(z)=0$ proviamo dicendo che non può essere né >0 né <0

per assurdo, se $f(z)<0$, (teorema permanenza segno), cioè esistono punti a destra di z in cui $f<0 \Rightarrow$ (punti di A_- dopo z) $\Rightarrow$ z non sarebbe maggiorante di A_-. ↯

Se $f(z)>0$, esistono punti a sinistra di z in cui $f>0 \Rightarrow$ z non sarebbe il più piccolo dei maggioranti di A_- ↯.

$\Rightarrow f(z)=0$ C.V.D.

METODO DI BISEZIONE

$x^3=3x-1$ trovare una soluzione con errore $\leq 0,25$

$f(x)=x^3-3x+1$ una soluzione dell'equazione è uno 0 di f

Scelgo due punti (es. 0 e 1)

$f(0)=1>0$ $f(1)=-1$ nell'intervallo $[0,1]$ c'è una soluzione.

0,5 è una soluzione con un errore di 0,5 al max → troppo → proseg

$f(0,5)=\frac{1}{8}-\frac{3}{2}+1=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}=-0,375<0$, quindi in $[0,\frac{1}{2}]$ c'è una soluzione. In 0.25 (valore medio dell'intervallo) c'è una soluzione con errore max 0.25.

In $f(x)-K$ posso riapplicare il teorema:

PROP: se f è continua su $[a,b]$ e $f(a)\leq K\leq f(b)$, allora $\exists z\in[a,b]$ tale che $f(z)=K$.

PROP: se f è continua su un intervallo I, allora l'immagine $f(I)$ è un intervallo.

DIM: $J=f(I)$, tesi: $\forall \alpha,\beta\in J$, $\alpha<\beta$, $[K\in]\alpha,\beta[\Rightarrow K\in J]$ def. di interv

$\exists a,b\in I: f(a)=\alpha$ e $f(b)=\beta$. Suppongo $a<b$ (con $a\neq b$).

Considero $\underset{\hookrightarrow \text{restrizione}}{f|[a,b]}:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ $[a,b]\in I$ (perché a e $b\in I$ e I è interv

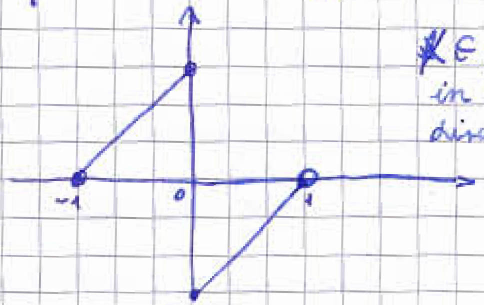
$\Rightarrow f$ è continua su $[a,b]\Rightarrow\forall K\in]\alpha,\beta[,\ \exists z\in[a,b]: f(z)=K$

$\Rightarrow K\in f(I)=J$

es: $im(e^x)=\mathbb{R}^+$ perché e^x sempre positivo

OSS: $f(I)$ è intervallo di estremi $\inf_I f$ e $\sup_I f$

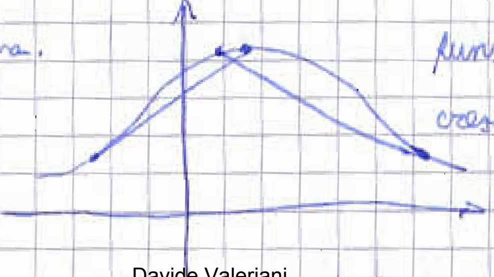
Se f è strettamente monotona (se $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ o $f(x_1)>f(x_2)$) $\Rightarrow f$ iniettiva.



$x\in[-1,1]$, ma in 0 $f(x)$ è discontinua, quindi non è monotona

$y=\frac{1}{x}$ è continua, ma il dominio non è un intervallo

PROP: sia f funzione continua su un intervallo I. Allora f è strettamen monotona $\Longleftrightarrow f$ è iniettiva.

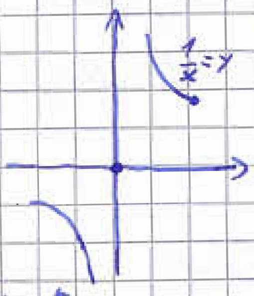


funzione non strettamente crescente ⇒ non è iniettiva.

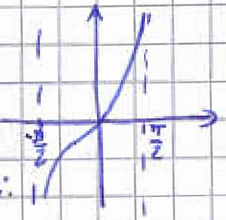
TEOREMA DI WEIERSTRASS:

Sia $f:[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato. Allora f è limitata e ha massimo e minimo.

$\exists \max\limits_{[a,b]} f$, $\exists \min\limits_{[a,b]} f$



Se f è discontinua La tesi non è vera



Se l'intervallo è aperto La tesi non è vera

Se non è limitato, non vale la tesi.

TOPOLOGIA

Intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ è un qualsiasi intervallo $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, $\delta>0$.

Intorno di $+\infty$ è una qualsiasi semiretta $]M,+\infty[$, $M\in\mathbb{R}$

Intorno di $-\infty$ è una qualsiasi semiretta $]-\infty,M[$, $M\in\mathbb{R}$

$x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, $\mathcal{I}_{x_0}$ famiglia intorni di x_0 $U, V \in \mathcal{I}_{x_0}$.

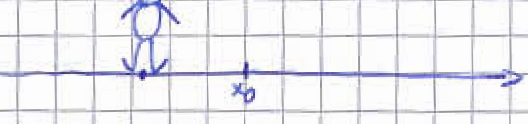
$\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, f è continua in x_0 se

$\forall V \in \mathcal{I}_{f(x_0)}, \exists U \in \mathcal{I}_{x_0} : [\forall x \in A \cap U, f(x) \in V]$

$V =]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$, $\varepsilon>0$ $U =]x_0-\delta, x_0+\delta[$, $\delta>0$

PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI $A\subset\mathbb{R}$.



Quali sono i punti $x_0\in\bar{\mathbb{R}}$ ai quali posso avvicinarmi di quanto voglio senza mai pestare x_0, camminando su A.

Se $A=[0,1[\cup \{2\}$

Da sinistra non posso avvicinarmi stando su A senza pestare 0. Quelli tra 0 e 1 sì, uno compreso perché mi posso avvicinare. 2 non è di accumulazione perché non posso avvicinarmi senza pestarlo $\text{Acc } A = [0,1]$.

DEF. Sia $A\subset\mathbb{R}$ e $x_0\in\bar{\mathbb{R}}$

x_0 è un punto di accumulazione per A se

$\forall U \in \mathcal{I}_{x_0}, (U\setminus\{x_0\})\cap A \neq \emptyset$

②

$\forall \delta>0, \left( ]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\} \right) \cap A \neq \emptyset$

↳ mi avvicino quanto voglio ↳ non tocco x_0 ↳ cammino su A

<u>OSS:</u> $+\infty$ è punto di accumulazione per A se

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A: a>M$ la semiretta $]M,+\infty[$ ha intersezioni con A.

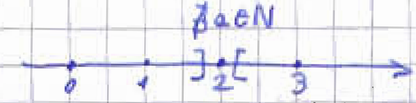
M non è quindi maggiorante di A $\Leftrightarrow$ A non ha maggioranti $\Leftrightarrow$ A non è limitato superiormente.

$-\infty$ è punto di accumulazione per A se

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A: a<M \Leftrightarrow$ A non è limitato inferiormente

<u>ESEMPIO</u>

$A=\mathbb{N}$ quali sono i punti di accumulazione?



$acc(\mathbb{N})=\{+\infty\}$

$A=\mathbb{Z} \rightarrow acc(\mathbb{Z})=\{-\infty,+\infty\}$ $\quad acc(\mathbb{Q})=\overline{\mathbb{R}}$ dato che $\mathbb{Q}$ è denso

$acc(]a,b[)=[a,b]$ $\quad acc(\mathbb{Q}\cap]0,1[)=[0,1]$

<u>DEF</u> Sia $f: A \mapsto \mathbb{R}$ funzione, $A \subset \mathbb{R}$, $A=\text{dom} f$

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $A=\text{dom} f$.

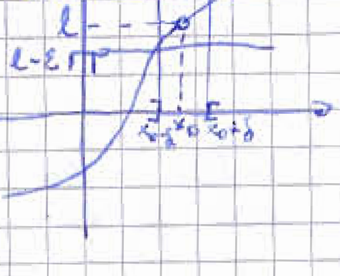
Diciamo che $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow x_0$, con $l \in \overline{\mathbb{R}}$, se

$\forall V \in \mathcal{J}_l, \exists U \in \mathcal{J}_{x_0}: \left[\forall x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A, f(x) \in V \right]$

CASO $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow x_0$ se

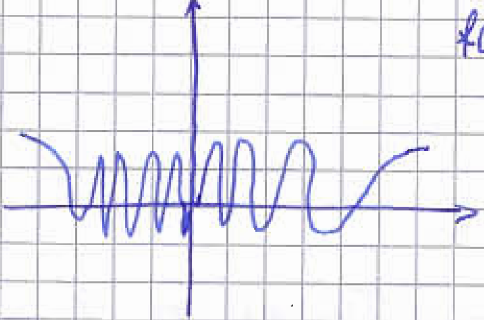
$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0: \left[\forall x \in A, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{condizione } x \neq x_0}}{0<|x-x_0|}<\delta, |f(x)-l|<\varepsilon \right]$

$\left[\forall x \in A, x \neq x_0, x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[, \Rightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon \right]$



Nel quadrato, la funzione esiste.

③

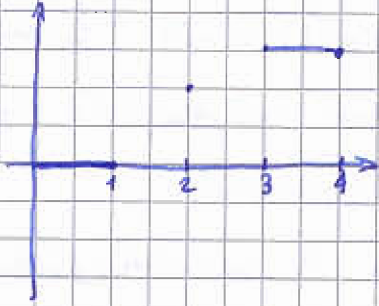


$f(x)=\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad x\to 0$

$A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Il limite può non esistere

Se il limite esiste, è UNICO



$A=[0,1]\cup\{2\}\cup[3,4$

In 2 la funzione è continua, ma non ha senso parlare di limite

PROP. Sia $f: A\mapsto\mathbb{R}$ e $x_0\in A$ che è anche punto di accumulazione per A. Allora f è continua in $x_0 \Leftrightarrow f(x)\to f(x_0)$ per $x\to x_0$

PROP: Sia $f: A\mapsto\mathbb{R}$, sia $x_0\in\mathbb{R}$ tale che x_0 è di accumulazione e $f(x)\mapsto l$ per $x\mapsto x_0$, con $l\in\mathbb{R}$. Allora, posto

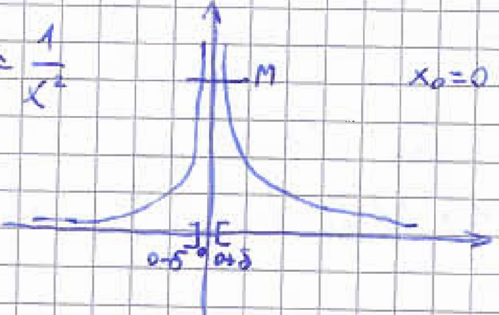
$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x\neq x_0 \\ l & \text{se } x=x_0 \end{cases} \quad \hat{f}$ è continua in x_0.

ESEMPIO $f(x)=3x+\text{sen}x \quad f(x)\mapsto 3\pi$ se $x\to\pi$

CASO $x_0\in\mathbb{R}$, $l=+\infty$, $f(x)\to+\infty$ se $x\to x_0$ se

$\forall M\in\mathbb{R}, \exists\delta>0: \left[\forall x\in A, 0<|x-x_0|<\delta \mapsto f(x)>M\right]$ cioè $f(x)$ sta nella semiretta $]M,+\infty[$

ESEMPIO: $f(x)=\frac{1}{x^2}$



$x_0=0$ Usando la definizione, verificare che $\frac{1}{x^2}\mapsto+\infty$ se $x\to 0$ cioè

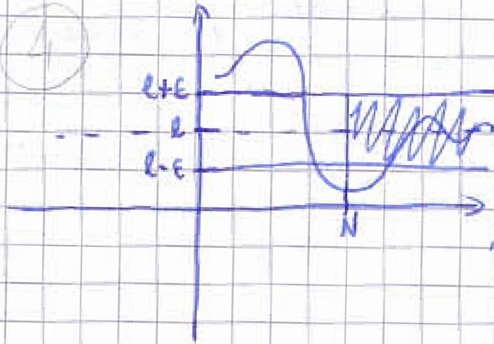
$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

TESI: $\forall M>0, \exists\delta>0: \left[0<|x|<\delta \mapsto \frac{1}{x^2}>M\right]$

$\frac{1}{x^2}>M \Leftrightarrow x^2\cdot M<1$, (suppongo $M>0$) sse $x^2<\frac{1}{M} \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt{M}} \quad \delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$

CASO $x_0=+\infty$, $l\in\mathbb{R}$ $f(x)\to l$ per $x\to+\infty$ se

$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{R}: \left[\forall x\in A, x>N \mapsto l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon\right]$ inutile mettere $x\neq x_0$, dato che $x\in\mathbb{R}$ e $x_0=+\infty$



ESEMPIO: verificare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

TESI: $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{R} : [\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, x>N \Rightarrow 0-\varepsilon<\frac{1}{x}<0+\varepsilon]$

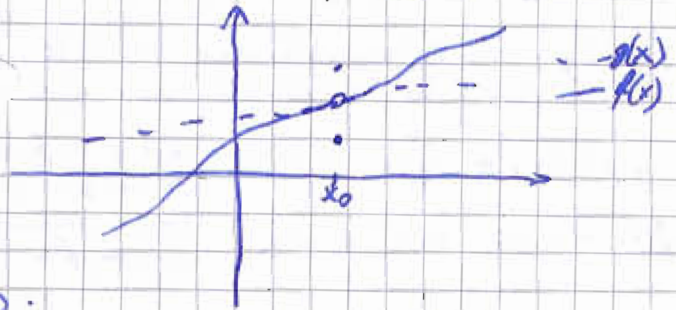
suppongo $N>0$, quindi $x>0$ dato che $x>N$.

Verifico solo $\frac{1}{x}<\varepsilon \Leftrightarrow 1<\varepsilon x \Leftrightarrow x>\frac{1}{\varepsilon}$ $\boxed{N=\frac{1}{\varepsilon}}$

CASO ...

LIMITE

- NON ESISTENZA → può non esistere
- UNICITÀ → se esiste, è unico
- LOCALITÀ → dipende solo dai valori della funzione vicino a x_0.



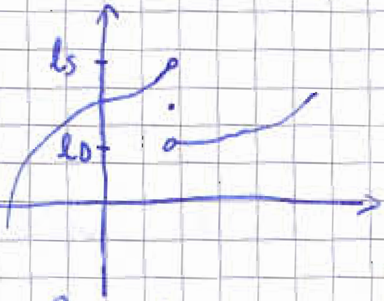
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$

PR:

Siano $f,g : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A e

$\boxed{\exists U \in I_{x_0} : \forall x \in (U\setminus\{x_0\})\cap A}$, $f(x)=g(x)$ $\qquad \boxed{}$ = sufficientemente vicino a x_0

allora $f(x)\to l$ per $x\to x_0 \Leftrightarrow g(x)\to l$ per $x\to x_0$



$l_S \to$ limite sinistro

$l_D \to$ limite destro

La funzione non ha limite, ma ha l_S e l_D.

DEF: Sia $f:]a,b[\longmapsto \mathbb{R}$ •) $f(x)\to l_D$ per $x\to a^+$ se

$\forall V\in I_{l_D}, \exists \delta>0$: se $a<x<a+\delta \Longrightarrow f(x)\in V$ $\qquad \delta$ dipende da V

••) $f(x)\to l_S$ per $x\to b^-$ se

$\forall V\in I_{l_S}, \exists \delta>0$: se $b-\delta<x<b \Longrightarrow f(x)\in V$

PR: Se $f(x)\to l_S$ per $x\to x_0^-$ e $f(x)\to l_D$ per $x\to x_0^+$,

allora: $(\exists \lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow l_S=l_D=l)$

Se $l_S = l_D$, la funzione ha limite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+|x|}{x} \qquad \frac{x^2+|x|}{x} = \begin{cases} x+1 & \text{se } x>0 \\ x-1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+|x|}{x} = 1$ considero $x+1$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+|x|}{x} = -1$ coincide con $x-1$

$\Rightarrow$ La funzione non ha limite

PRIME PROPRIETÀ DEI LIMITI

- PERMANENZA DEL SEGNO: se $f(x) \to l$ per $x \to x_0$ e $l \neq 0$, allora sufficiente vicino a x_0 $f(x)$ ha segno costante
- TEOREMA DI CONFRONTO: siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per A,

$H_p)$ "sufficientemente vicino a x_0" $f(x) \leq g(x)$

Allora: (a) se $f(x) \to l_f$ e $g(x) \to l_g$ per $x \to x_0$, allora $l_f \leq l_g$

Se $f(x) < g(x)$: suff. vicino a x_0 $\not\Rightarrow l_f < l_g$ le disuguaglianze strette, passando ai limiti diventa $\leq$

(b) Se $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$ allora $g(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$ non è richiesto $\exists \lim g(x)$

(c) Se $g(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$ allora $f(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$ non è richiesto $\exists \lim f(x)$

$\lim_{x\to +\infty} (x + \text{sen}\,x) = +\infty \qquad x + \text{sen}\,x \geq \underset{\substack{\downarrow \\ \text{valore inferiore di sen}\,x}}{x-1}$

$f(x) = x-1$
$g(x) = x + \text{sen}\,x$
$x_0 = +\infty$

$f(x) \to +\infty$
$\Downarrow$
$g(x) \to +\infty$

FUNZIONE CHE DIVERGE POSITIVAMENTE O NEGATIVAMENTE $\to$ il limite è $+\infty$ o $-\infty$

FUNZIONI INFINITESIME $\to$ il limite è 0.

- TEOREMA DEI CARABINIERI

Siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A. Inoltre:

a) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ suff. vicino a x_0

b) $f(x) \to l$ per $x \to x_0$ e $g(x) \to l$ per $x \to x_0$

Allora $h(x) \to l$ per $x \to x_0$

ESEMPIO

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+2\,\text{sen}\,x}{3x} =$$

$-1 \leq \text{sen}\,x \leq 1$
$-2 \leq 2\,\text{sen}\,x \leq 2$
$1-2 \leq 1+2\,\text{sen}\,x \leq 2+1$
$-1 \leq 1+2\,\text{sen}\,x \leq 3$

$$\forall x>0 \quad \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)\to 0 \\ \text{se } x\to+\infty}}{-\frac{1}{3x}} \leq \frac{1+2\,\text{sen}\,x}{3x} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ g(x)\to 0 \\ \text{se } x\to+\infty}}{\frac{\cancel{3}1}{\cancel{3}x}}$$

$= 0$ usando il teorema dei carabinieri

DIMOSTRAZIONE $x_0 \in \mathbb{R}$ $l \in \mathbb{R}$

$\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow l - \varepsilon \overset{\downarrow}{<} f(x) < l + \varepsilon$

$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow l - \varepsilon < g(x) \overset{\downarrow}{<} l + \varepsilon$ per ipotesi del teorema

$\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_0\} \rightarrow$ propr. (a)

se $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < l + \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$

$|f(x) - l| \leq g(x)$ suff. vicino a x_0 e $g(x) \to 0$ per $x \to x_0$

th carabinieri $|f(x) - l| \to 0 \Rightarrow f(x) \to l$ per $x \to x_0$

ESEMPIO:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \cos x}{x}$ per $x > 0$ dato che $x \to +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\cos x}{x}\right)$ $\cos x$ è limitato, quindi $\dfrac{\cos x}{x} = 0$ $\Rightarrow$ limite è 1

$\forall_{x>0}$ $\left|\dfrac{x + \cos x}{x} - 1\right| = \left|\dfrac{x + \cos x - x}{x}\right| = \left|\dfrac{\cos x}{x}\right| = \dfrac{|\cos x|}{|x|} \leq \dfrac{1}{x} \to 0$ dato che $x \to +\infty$

OPERAZIONI ALGEBRICHE CON I LIMITI

In $\overline{\mathbb{R}}$ non ha senso $+\infty - \infty$ e $0 \cdot (\pm\infty)$

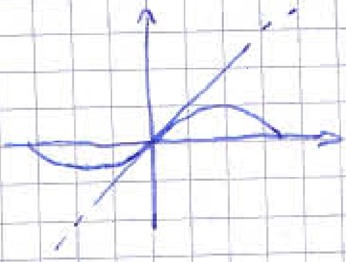
TEOREMA: Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A, e $f(x) \to l_f$ per $x \to x_0$ e $g(x) \to l_g$ per $x \to x_0$ $l_f, l_g \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora:

① se $l_f + l_g$ ha senso, allora $[f(x) + g(x)] \to l_f + l_g$ per $x \to x_0$

② se $l_f \cdot l_g$ ha senso, allora $[f(x) \cdot g(x)] \to l_f \cdot l_g$ per $x \to x_0$

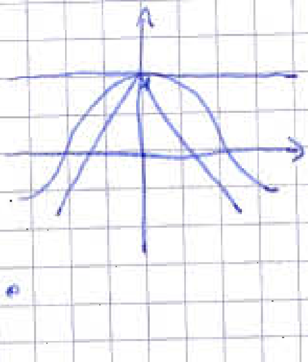
ESEMPIO: continuità di $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x in $\mathbb{R}$



- se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{sen} x < x$ e se $t = -x$

se $-\frac{\pi}{2} < t < 0$, $t < \operatorname{sen} t < 0$

$\operatorname{sen} x \to \underset{\text{limite}}{\underset{\downarrow}{0}} = \underset{f(x_0)}{\underset{\downarrow}{\operatorname{sen} 0}}$ per $x \to 0$



- $\forall x$, $\underbrace{1 - |x|}_{1 \text{ per } x \to 0} \leq \cos x \leq 1$ $1 = \cos 0$ per $x \to 0$

Per $x_0 \neq 0$ fissato $\begin{cases} x = x_0 + h & x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 0 \\ h = x - x_0 \end{cases}$

$sen\,x = sen(x_0+h) = sen\,x_0 \underset{\substack{se\ h\to 0\\ \cos h\to 1}}{\cos h} + \cos x_0 \underset{\substack{se\ h\to 0\\ sen\,h\to 0}}{sen\,h} \Rightarrow sen\,x_0 + 0 \Rightarrow sen\,x_0$ per $h\to 0$

Se $x_0 \neq 0$ fissato,

$x = x_0+h$ se $h\to 0 \Leftrightarrow x\to x_0$

$\cos(x_0+h) = [\cos x_0 \cdot \underset{1}{\cos h} - sen\,x_0 \cdot \underset{0}{sen\,h}] \Rightarrow \cos x_0$

$1+x \leq e^x \leq 1+xe^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ si dimostra...

Se $0<x<1$ $\quad \underbrace{1+x}_{\substack{1\\ se\ x\to 0}} \leq \underset{1}{e^x} \leq \underbrace{1+ex}_{\substack{1\\ se\ x\to 0}}$ se $x\to 0^+$

$e^x \leq e^1 = e$

$xe^x \leq ex$

Se $-1<x<0$ $\quad e^x > e^{-1}$, $xe^x < e^{-1}x$ dato che $x<0$, cambio verso

$\underset{\substack{1\\ se\ x\to 0}}{1+x} \leq e^x \leq \underbrace{1+e^{-1}x}_{\substack{1\ \ 0\\ se\ x\to 0}}$ $\quad l_D = l_S \Rightarrow$ verificata la continuità.

Se $x = x_0+h$ con x_0 fissato

$e^{x_0+h} = e^{x_0}\cdot e^h$ se $h\to 0$, $e^h\to 1$

$[e^{x_0}\cdot e^h] \to e^{x_0}\cdot 1 = e^{x_0}$ quindi e^x è continua su $\mathbb{R}$

ESERCITAZIONE

$\begin{cases} |w|^2 - i\bar{w} = 0 \\ z^2+w=0 \end{cases}$ $\quad |w|^2 = w\bar{w}$ $\quad \begin{cases} w\bar{w} - i\bar{w} = 0 \\ z^2+w=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \bar{w}(w-i) = 0 \\ z^2+w=0 \end{cases} <$ $\bar{w}=0$ Ⓐ, $w-i=0$ Ⓑ

Ⓐ $\begin{cases} \bar{w}=0 \\ z^2+w=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} w=0 \\ z^2=0 \end{cases}$ $\quad \boxed{1}\begin{cases} w=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\quad$ Ⓑ $\begin{cases} w=i \\ z^2+i=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} w=i \\ z^2=-i \end{cases}$ radici quadrate di $-i$

$-i \quad \rho=1 \quad \cos\theta=0 \quad sen\,\theta=-1 \quad \theta=\frac{3}{2}\pi \qquad z_0=\sqrt{1}\left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi}{2} + i\,sen\,\frac{3}{4}\pi\right) =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{2}\begin{cases} w=i \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\quad \boxed{3}\begin{cases} w=i \\ z=-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\quad$ 3 soluzioni

x_0 è isolato $\Leftrightarrow \exists\, I(x_0) \cap A = \{x_0\}$

x_0 è di accumulazione $\Leftrightarrow \forall I(x_0),\ [I(x_0)\setminus\{x_0\}] \cap A \neq \emptyset$

$A = \left\{ x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$

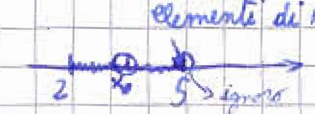
0 è di accumulazione, dimostro

$\forall \varepsilon > 0 \ ]-\varepsilon, +\varepsilon[\quad \exists ? \ \frac{1}{n} \in]-\varepsilon, +\varepsilon[\Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{n} < +\varepsilon$

$$\begin{cases} \overset{\text{positivo}}{\frac{1}{n}} > \overset{\text{negativo}}{-\varepsilon} & \text{vera } \forall x \\ \frac{1}{n} < \varepsilon \end{cases}$$

$\boxed{n > \frac{1}{\varepsilon}}$ 0 è di accumulazione

$A = [2; 5]$



Non ci sono punti isolati

Tutti i punti dell'intervallo sono di accumulazione

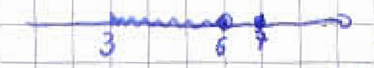
$B =]1; 7[$

Nessun punto isolato

Tutti i punti dell'intervallo sono di accumula

P.ACC. sono $x \in [1; 7]$ estremi compresi

$C = [3, 6[\cup \{7\}$



7 è un punto isolato

$x \in [3, 6]$ sono di acc.

$D = \left\{ x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \right\} \cup \left[\frac{1}{2}, 2 \right[\cup \{5\}$ P. acc. $x = 0$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$ o $x \in [0; 2]$

P. isolato $x = 5$

$\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$ verificare: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f \setminus \{3\}, \underbrace{|x - 3| < \delta}_{\text{intorno di 3}} ; |\underbrace{2x - 1}_{f(x)} - \underset{\text{lim}}{5}| < \varepsilon$

Quando la x si avvicina a 3, la funzione si avvicina a 5.

$|2x - 6| < \varepsilon \quad \begin{cases} 2x - 6 < \varepsilon \\ 2x - 6 > -\varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{6 + \varepsilon}{2} \\ x > \frac{6 - \varepsilon}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3 + \frac{\varepsilon}{2} \\ x > 3 - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ $3 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 3 + \frac{\varepsilon}{2}$ basta prend $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ e ottengo $|x - 3| < \delta$

$\lim_{x \to 4} \frac{x}{x - 2} = \frac{4}{4 - 2} = 2 \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f \setminus \{4\}, |x - 4| < \delta : \left| \frac{x}{x - 2} - 2 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{x - 2x + 4}{x - 2} \right| < \varepsilon \quad \left| \frac{-x + 4}{x - 2} \right| < \varepsilon \quad -\varepsilon < \frac{-x + 4}{x - 2} < \varepsilon$ $x - 2 > 0$ perchè $x \to 4$

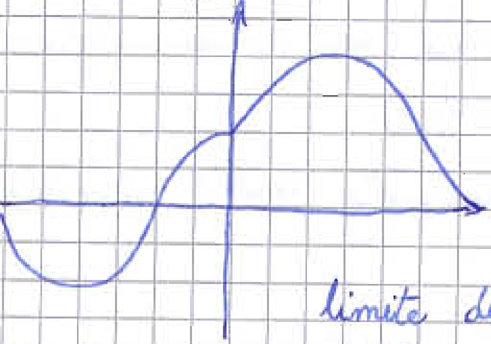
$-\varepsilon(x - 2) < -x + 4 < \varepsilon(x - 2) \quad \begin{cases} -\varepsilon x + 2\varepsilon < -x + 4 \\ -x + 4 < \varepsilon x - 2\varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} x(1 - \varepsilon) < 4 - 2\varepsilon \\ x(-1 - \varepsilon) < -4 - 2\varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{4 - 2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \\ x > \frac{-4 - 2\varepsilon}{-1 - \varepsilon} \end{cases}$ $-1 - \varepsilon < 0$

$\begin{cases} x < \frac{2\varepsilon - 4}{\varepsilon - 1} \\ x > \frac{2\varepsilon + 4}{} \end{cases}$

$$\begin{cases} x < \dfrac{2\varepsilon-4+2\varepsilon-2\varepsilon}{\varepsilon-1} \\ x > \dfrac{2\varepsilon+4+2\varepsilon-2\varepsilon}{\varepsilon+1} \end{cases} \quad \begin{cases} x < \dfrac{4(\varepsilon-1)-2\varepsilon}{\varepsilon-1} \\ x > \dfrac{4(\varepsilon+1)-2\varepsilon}{\varepsilon+1} \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4+\dfrac{2\varepsilon}{-\varepsilon+1} \\ x > 4-\dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \end{cases} \quad 4-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} < x < 4+\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$$\delta = \min\left\{\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right\}$$

$f(x)=\begin{cases} 1+\text{sen}x & \text{se } x \geq 0 \\ \cos x & \text{se } x<0 \end{cases}$ verificare che è continua   il dubbio è nel punto 0



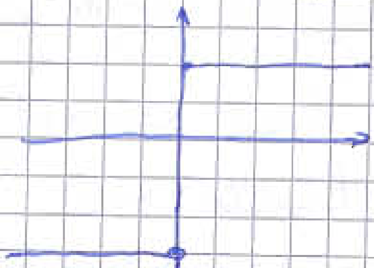
In $x=0$ vedo graficamente che è continua.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \underbrace{1+\text{sen}0}_{\substack{\downarrow \\ \text{uso } 1+\text{sen}x \\ \text{perchè } x\geq 0}} = 1$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \cos 0 = 1$ $f(0)=1+0=1$

limite destro e limite sinistro e funzione nel punto coincidono

$\Longrightarrow$ la funzione è continua

$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{se } x\geq 0 \\ -3 & \text{se } x<0 \end{cases}$



In 0 la funzione non è continua

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \underline{\underline{2}}$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \underline{\underline{-3}}$

valori diversi

$f(x)=\begin{cases} 1+x^2, & x>3 \\ 1, & x=3 \\ 7+x, & x<3 \end{cases}$ $D=\mathbb{R}$ Le singole funzioni sono continue

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 10$ $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 10$ ma $f(3)=1$, quindi non è continua in $x=3$

$f(x)=\begin{cases} 1+x^2, & x>3 \\ k, & x=3 \\ 7+x, & x<3 \end{cases}$ Determinare k affinchè $f(x)$ sia continua

lim dx = lim sx = 10 $f(3)=k=10$ Per $k=10$, $f(x)$ cont.

$f(x)=\begin{cases} 2\text{sen}x & x\leq -\frac{\pi}{2} \\ a\,\text{sen}x+b & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \cos x & x\geq\frac{\pi}{2} \end{cases}$ Cosa succede in $x=\pm\frac{\pi}{2}$?

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=0$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=a+b$ Perchè sia continua $a+b=0 \Rightarrow a=-b$

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -a+b \qquad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -2 \qquad -a+b=-2 \quad a = 2+b$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-b \\ b+b=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b=-2 \\ a=-b \end{cases} \quad \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x}{x-2} = \frac{4}{4-2} = 2 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} \text{ F.I. } \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+1+x)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{0}{0} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}+x}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+2x}{x^4-3x^2+1} = \frac{\infty}{\infty-\infty} \text{ F.I. } \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3(1+\frac{2}{x^2})}{x^4(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4})} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 5} 10^{\frac{1}{x-5}} = 10^{\lim_{x \to 5} \frac{1}{x-5}} \begin{cases} \lim_{x \to 5^+} \frac{1}{x-5} = \infty \\ \lim_{x \to 5^-} \frac{1}{x-5} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

FINE ESERCITAZIONE

FORME INDETERMINATE $+\infty - \infty$ e $0 \cdot (\pm\infty)$

$x_0 = +\infty$, $f(x) = x$, $g(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$

$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$\lim_{x \to +\infty} [f(x)+g(x)]$
$-\frac{x}{2}$	$x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$	$+\infty/2 = +\infty$
$-x+c$	$x-x+c = c$	c $c \to$ costante
$-2x$	$x-2x = -x$	$-\infty$
$-x+\text{sen}x$	$x-x+\text{sen}x = \text{sen}x$	non esiste

$0 \cdot (\pm\infty)$

$x_0 = +\infty$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $f(x) \to 0$ se $x \to +\infty$, $g(x) \to \pm\infty$ per $x \to +\infty$

$g(x)$	$f(x) \cdot g(x)$	$\lim_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)]$
$x = \pm\infty$	$\frac{1}{x}$	0
$cx^2 \; c \neq 0$	c	c
$\pm x^3 = \pm\infty$	$\pm x$	$\pm\infty$
$(2+\text{sen}x) \cdot x^2$	$2+\text{sen}x$	non esiste

$(2+\text{sen}x)x^2$ tende a $+\infty$ se $x \to +\infty$

perché $\text{sen}x$ oscilla tra -1 e $+1$

$\underbrace{(2+\text{sen}x)}_{\geq 1} x^2 \geq x^2 \quad \forall x$

x^2 diverge a $+\infty$

$(2+\text{sen}x)x^2$ diverge a $+\infty$

OSSERVAZIONI

(I) $f(x) \to 0$ e $g(x)$ è limitata $\Longmapsto f(x)\cdot g(x) \to 0$ per $x \to x_0$

$|f(x)\cdot g(x)| \leq m \cdot |f(x)| \to 0$

(II) $f(x) \to +\infty$ e $g(x)$ è limitata inferiormente $\Longmapsto f(x)+g(x) \to +\infty$

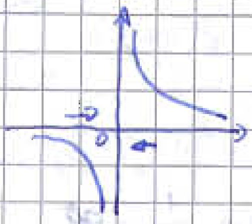
(III) $f(x) \to -\infty$ e $g(x)$ è limitata superiormente $\Longmapsto f(x)+g(x) \to -\infty$

(IV) $f(x) \to +\infty$ e $g(x)$ è $\geq c$ $\forall x$, con $c>0$ $\Longmapsto f(x)\cdot g(x) \to +\infty$

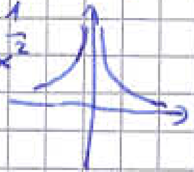
$g(x) \to l$ per $x \to x_0$ $\overset{?}{\Longmapsto} \frac{1}{g(x)}$ se $l = \pm\infty$, il reciproco tende a 0

$l \in \bar{\mathbb{R}}$

Se $l=0$? 1) $g(x)=x$ $x_0=0$ $\frac{1}{x}$



2) $g(x)=x^2$ $\frac{1}{x^2}$



Nel primo caso, perchè x, in un intorno di $x_0=0$ assume valori >0 da una parte e <0 dall'altra. Nel secondo caso, invece, assume valori >0

3) $g(x) = \frac{\cos x}{x}$ $x \to +\infty$ $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ $\forall x>0$ e $\frac{1}{x} \to 0$ se $x \to +\infty$

$\Rightarrow g(x) \to 0$

Dato che $\cos x$ può assumere valori positivi o negativi, il reciproco $\frac{1}{g(x)} = \frac{x}{\cos x}$ non ha limite per $x \to +\infty$ perchè al denominatore si ha $\cos x$ che cambia segno sempre, per cui non si sa se $\frac{1}{g(x)} = \pm\infty$.

DEFINIZIONE $\to$ • $g(x) \to l^+$ per $x \to x_0$ se $g(x) \to l$ per $x \to x_0$ e $\exists U \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap \text{dom}\, g,\ g(x) > l$

esempio! $x^2 \to 0^+$ per $x \to 0$ x^2 sempre >0 per $x \neq 0$

$g(x) \to l^-$ per $x \to x_0$ se $g(x) \to l$ per $x \to x_0$ e $\exists U \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap \text{dom}\, g,\ g(x) < l$

$\boxed{\text{con } l \in \mathbb{R}}$

TEOREMA SUL LIMITE DEL RECIPROCO

$g(x) : A \to \mathbb{R}$ e x_0 pto acc. per A Hp) $g(x) \to l \in \bar{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0$.

Allora:

1) se $l = +\infty \Longmapsto \frac{1}{g(x)} \to 0^+$ per $x \to x_0$

2) se $l = -\infty \Longmapsto \frac{1}{g(x)} \to 0^-$ per $x \to x_0$

3) se $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Longmapsto \frac{1}{g(x)} \to \frac{1}{l}$ per $x \to x_0$

4) se $l = 0^+ \Longmapsto \frac{1}{g(x)} \to +\infty$ per $x \to x_0$ es: x^2 $x_0 = 0$

5) se $l = 0^- \Rightarrow \frac{1}{g(x)} \to -\infty$ per $x \to x_0$ es: $-x^4$ $x_0 = 0$

6) se $l = 0$ e $g(x)$ non ha segno costante in ogni intorno di x_0, allora $\frac{1}{g(x)}$ NON HA LIMITE per $x \to x_0$

$$\boxed{\text{QUOZIENTE} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}}$$

TEOREMA SUL LIMITE DEL QUOZIENTE

$f(x) \to l_f$ e $g(x) \to l_g$ (per $x \to x_0$)

1) $l_f \in \mathbb{R}$ e $l_g \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g}$

2) $l_f \in \mathbb{R}$ e $l_g = \pm\infty \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to 0$

3) $l_f \in \mathbb{R}^+ \; [\mathbb{R}^-]$ e $l_g = 0^\pm \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty \; [\mp\infty]$

4) $l_f = \pm\infty$ e $l_g \in \mathbb{R}^+ \cup \{0^+\} \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$

4bis) $l_f = \pm\infty$ e $l_g \in \mathbb{R}^- \cup \{0^-\} \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to \mp\infty$

FORME INDETERMINATE

$\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$

COMPOSIZIONE DI LIMITI

$x \to f(x) = y \to g(y) = z$ $\qquad z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \to y_0 \text{ per } x \to x_0 \\ g(y) \to l \text{ per } y \to y_0 \end{array}\right\} \cancel{\Longrightarrow} (g \circ f)(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$$

Se $f(x) = y_0$ e $g(y) = \begin{cases} l & \text{se } y \neq y_0 \\ l+1 & \text{se } y = y_0 \end{cases}$ $\quad g(f(x)) = l + 1$ che non è l.

Questo perché $g(y)$ salta in y_0.

TEOREMA COMPOSIZIONE DEI LIMITI

Se $f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$ (x_0 pto acc. per dom f)

$g(y) \to l$ per $y \to y_0$ (y_0 pto acc. per dom g)

x_0 pto acc. per dom$(g \circ f)$, e vale almeno una delle due ipotesi seguen

① g è continua in y_0 ($y_0 \in \text{dom}\, g$ e $l = g(y_0)$)

② $\exists U \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap \text{dom}\, f,\ f(x) \neq y_0$

TESI: allora $(g \circ f)(x) \to l$ per $x \to x_0$

- $\lim_{x \to 1} e^{\frac{x^2-1}{x-1}} = e^{\frac{0}{0}}$ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$ $g(x) = e^x =$ continua

$\lim_{x \to 1} e^{\frac{x^2-1}{x-1}} = e^2$

LIMITE NOTEVOLE $\rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$ $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, 2x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, 2x}{\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, 2x}{2x} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

$y = 2x = f(x)$

$g(y) = \frac{\text{sen}\, y}{y}$ $g(f(x)) = \frac{\text{sen}(2x)}{2x}$ ma g non è continua in 0 (non vale ①).

Se $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $l = 1$ $2x \neq 0$ $\forall x \neq 0$ (vale la ②).

$\lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x^2-1} = \frac{0}{0}$ $\lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} \cdot \boxed{\frac{1}{x+1}} \to \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $\left[\begin{array}{l} y = x-1 \quad y \to 0 \text{ se } x \to 1 \\ \lim_{y \to 0} \frac{\text{sen}\, y}{y} = 1 \end{array}\right]$

$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \text{sen}\, \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen}\, \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ $y = \frac{1}{x}$

se $x \to \infty$, $y \to 0$ $\lim_{y \to 0} \frac{\text{sen}\, y}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x \cdot \text{sen}\, \frac{1}{x} = 1$.

LIMITI FONDAMENTALI DI FORME INDETERMINATE

① $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$ ② $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ③ $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$

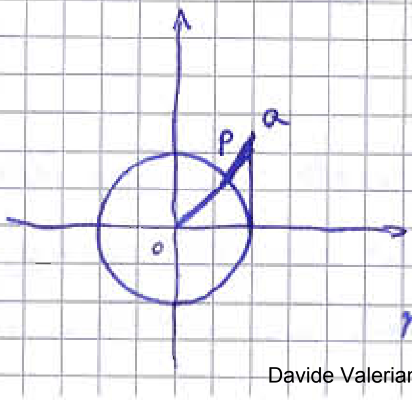
④ $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ ⑤ $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

⑥ $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$ $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$ ⑦ $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

⑧ $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

DIMOSTRAZIONE ①

se $0 < x < \frac{\pi}{2}$



$\text{sen}\, x < x < \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

$\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\cos x} < \frac{\text{sen}\, x}{\underset{\underset{1}{\downarrow}}{x}} < 1$ se $|x| > 0$ e $|x| < \frac{\pi}{2}$

per $x \to 0$

DIMOSTRAZIONE ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad \text{se } x\neq 0 \quad \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}= \text{ con } |x|<\frac{\pi}{2}$$

$$=\underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}_{\downarrow\, 1}\cdot\underset{\downarrow\,1}{\frac{1}{1+\cos x}}=1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

DIMOSTRAZIONE ③

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad 1+x\leq e^x\leq 1+xe^x \quad \forall x$$

$$x\leq e^x-1\leq xe^x \quad \text{se } x>0,\ 1\leq\frac{e^x-1}{x}\leq \underset{\downarrow\,1}{e^x} \quad \text{per } x\to 0 \text{ limite destro} =1$$

$$\text{se } x<0,\ 1\geq\frac{e^x-1}{x}\geq e^x \quad \underset{\downarrow\,1}{e^x}\leq\frac{e^x-1}{x}\leq 1 \quad \text{limite sinistro} =1$$

$\hookrightarrow$ 1 per teorema carab

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} \qquad D:\begin{cases}1+x>0\\ x\neq 0\end{cases}\Rightarrow x>-1 \cup x\neq 0$$

$]-1,0[\cup]0,+\infty[$ 0 è punto di accumulazion

$$\log(1+x)=y \Leftrightarrow 1+x=e^y \quad \forall x>-1$$

$$x=e^y-1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=1$$

perchè è il reciproco del limi fondamentale; il reciproco di 1 è 1

DIMOSTRAZIONE ④

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \quad \text{dato che } \underbrace{1+x}_{+\infty}\leq e^x \Rightarrow \text{teorema confronto, } e^x=+\infty$$

DIMOSTRAZIONE ⑤

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+ \quad \text{pongo } y=-x \quad e^x=e^{-y}=\frac{1}{e^y} \quad \text{se } x\to-\infty,\ y\to+\infty$$

$$\lim_{y\to+\infty}=\frac{1}{e^y}=0^+$$ perchè per il teorema del reciproco, e^y a $+\infty$ tende a $+\infty$, il reciproco di $+\infty$ è 0^+.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\log x=-\infty}$$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}= \quad \text{con } x>-1 \text{ e } x\neq 0$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\log\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\log(1+x)}{x}}=e \text{ dato che } \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1 \text{ (visto prima)}$$

DIMOSTRAZIONE ⑦

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ se $y = \frac{1}{x}$, con $x \neq 0$, se $x \to \pm\infty$ $\underset{y=\frac{1}{x} \to 0}{}$ $\lim\limits_{y \to 0} \left(1+y\right)^{\frac{1}{y}} = e$ come visto prima

$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left[f(x)^{g(x)}\right]} = e^{g(x) \cdot \log f(x)}$ con $x \in D_f$ e $x \in D_g$

$f(x) > 0$

(1) se $g(x) \to 0$, $\log[f(x)] \to \pm\infty$

che significa $\overset{\rightarrow}{\text{che}}$ $f(x)$ vada a 0^+ o a $+\infty$

(a) $g(x) \to 0$, $f(x) \to +\infty$

(b) $g(x) \to 0$, $f(x) \to 0^+$

(2) se $g(x) \to \pm\infty$, $\log[f(x)] \to 0$

$g(x) \to \pm\infty$, $f(x) \to 1$

FORME INDETERMINATE

$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, 0^0, 1^∞

ES.

$\lim\limits_{x \to 0} (2+\cos x)^{(3+\operatorname{sen} x)} = 3^3 = 27 \iff \lim\limits_{x \to 0} e^{\log (2+\cos x)^{(3+\operatorname{sen} x)}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{(3+\operatorname{sen} x) \log (2+\cos x)} =$

$= e^{3 \log 3} = e^{\log 27} = 27$

$\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} = 1^\infty$ F. IND. $= \lim\limits_{x \to 0} e^{\log (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\log \cos x}{x^2}}$ devo risolvere il limite dell'esponente

$\forall x \neq 0$ e $|x| < \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log (\cos x)}{x^2}$ so che $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\log (1+y)}{y} = 1$ $\quad \underset{1}{\cos x} = \underset{y}{1+y} \iff \cos x - 1 = y$ se $x, y \to 0$

Se $x \to 0$, $y \to 0$ $\quad \lim\limits_{y \to 0} \frac{\log (1+y)}{y} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\log (\cos x)}{\cos x - 1} = 1$

$\frac{\log (\cos x)}{x^2} = \frac{\log (\cos x)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{\log (\cos x)}{\cos x - 1}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\overset{\text{raccolgo } -1}{-}(1-\cos x)}{x^2}}_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\log \cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

FARE

$\lim\limits_{x \to 0^+} (\cos x)^{x^\alpha}$

LIMITI DI ESPONENZIALI E POTENZE

$q^x = e^{x\log q}$ $\forall q>0$ ⑧ se $q>0$, $\lim_{x\to+\infty} q^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ 0^+ & \text{se } 0<q<1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to-\infty} q^x = \begin{cases} 0^+ & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ +\infty & \text{se } 0<q<1 \end{cases}$$

⑨ $\lim_{x\to0}\frac{q^x-1}{x} = \log q$ con $q>0$ e $q\neq1$ $\lim_{x\to0}\frac{e^{x\log q}-1}{x} = \lim_{x\to0}\underbrace{\left(\frac{e^{x\log q}-1}{x\cdot\log q}\right)}_{1}\cdot\log q = \log q$

ponendo $y = x\log q$ $y\to0$ $\frac{e^y-1}{y}=1$

⑩ $x^\beta = e^{\beta\cdot\log x}$ se $x>0$ e $\beta\in\mathbb{R}$ $\lim_{x\to+\infty} x^\beta = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta>0 \\ 0^+ & \text{se } \beta<0 \\ 1 & \text{se } \beta=0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\beta = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta>0 \\ 1 & \text{se } \beta=0 \\ 0^+ & \text{se } \beta<0 \end{cases}$$

⑪ se $q>0$, $q\neq1$ e $\forall\beta\in\mathbb{R}$ si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{q^x}{x^\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 0 & \text{se } 0<q<1 \end{cases}$

ESEMPIO

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^{1000}} = +\infty$ q^x è di ordine superiore a x^β

(11bis) $\lim_{x\to-\infty}\frac{q^x}{|x|^\beta} = \begin{cases} 0 & \text{se } q>1 \\ +\infty & \text{se } 0<q<1 \end{cases}$ l'esponenziale domina sempre sulle potenze

$\lim_{x\to0^+} x\log x = \text{F.IND. } 0\cdot(-\infty)$ $y=\log x \iff x=e^y$ $\forall x>0, \forall y\in\mathbb{R}$ se $x\to0^+$, $y\to-\infty$

$\lim_{y\to-\infty} e^y\cdot y = \lim_{y\to-\infty}\frac{e^y}{y^{-1}} = 0^-$ perchè l'esponenziale è di ordine superi

La potenza è di ordine superiore del logaritmo

⑫ $\forall\beta>0$, $\lim_{x\to0^+} x^\beta\cdot\log x = 0^-$

ESEMPIO

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{\log x} = +\infty$

$\forall\beta>0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\beta} = 0^+$

La funzione esponenziale è più veloce del logaritmo.

$\forall\beta>0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{\log x} = +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x} = e^0 = 1$$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

Se $f, g, h \to 0$ per $x \to x_0$ e $\frac{f}{g} \to 0$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{h(x)} = \lim \frac{g(x)}{h(x)} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{0} + 1\right)}_{\to 1} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$$

Se so a quanto tende $\frac{f}{g}$, posso sostituire a $\frac{f+g}{h}$, $\frac{g}{h}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{2x - 3x^2}$$ se $\frac{f}{g} \to 0 \Rightarrow g$ è la potenza di grado più basso

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{x(2-3x)}$$ dato che suppongo $x \neq 0$ $= \frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} = -\frac{1}{2}$

-1 → coefficiente infinitesimo di ordine inferiore del numeratore

2 → coefficiente di ordine inferiore del denominatore

Se $f, g, h \to +\infty$ per $x \to x_0$ e $\frac{f}{} \to 0$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} \left(\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 0} + 1\right)^{g}$$

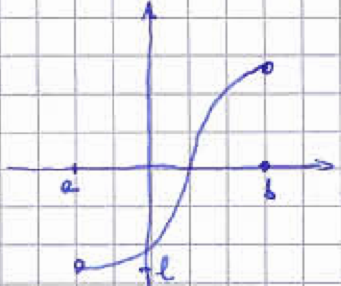
ESEMPIO

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x}{2x - 3x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\frac{2}{x} - 3\right)} = -\frac{1}{3}$$

g è la potenza di grado più alto.

APPELLI
14-15 GENNAIO
4-5 FEBBRAIO

LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE



PROPOSIZIONE

Se $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ è debolmente crescente

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{]a,b[} f$$

$$\exists \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{]a,b[} f$$

Se $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ è debolmente decrescente

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \sup_{]a,b[} f \qquad \exists \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf_{]a,b[} f$$

$l = \inf f$, $l \in \mathbb{R}$

① $\forall x \in]a,b[$, $f(x) \geq l$ $\Longleftarrow$ l è minorante

② $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in]a,b[: f(\bar{x}) < l+\varepsilon$ $\Leftarrow$ l è il più grande minorante

TESI: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

se $a < x < a+\delta$, $l-\varepsilon < f(x) < f+\varepsilon$

$f(x) > l-\varepsilon$ verificata perchè l è minorante ①

se $\delta = \bar{x} - a$ e poichè $f(x)$ è debolmente crescente, se $a < x < a+\delta = \bar{x}$

$\Longrightarrow f(x) \leq f(\bar{x}) < l+\varepsilon$ per ②

COROLLARIO

Se f è debolmente crescente su $]a,b[$ e $c \in]a,b[$ allora

$$\sup_{]a,c[} f = \lim_{x \to c^-} f(x) < f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x) = \inf_{]c,b[} f$$

Se f è debolmente decrescente su $]a,b[$ e $c \in]a,b[$ allora

$$\inf_{]a,c[} f = \lim_{x \to c^-} f(x) \geq f(c) \geq \lim_{x \to c^+} f(x) = \sup_{]c,b[} f$$

SUCCESSIONI

Sono funzioni definite sui natur

$2, 4, 6, 8, \dots$ $f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ $f(n) = 2n$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots$ $f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ $f(n) = \frac{1}{n}$

$f(n) = \frac{1}{n-3}$ non ha senso per $n=3$ o per $n<3$ nei naturali, ma per il resto ha senso

DEF: Una semiretta di naturali è

$S = \{ n \in \mathbb{N} : n > n_0 \}$ $n_0 \in \mathbb{N}$ fissato $f: \begin{array}{l} S \to \mathbb{R} \\ n \to f(n) \end{array}$

DEF: Una successione di numeri reali è una funzione $f: S \to \mathbb{R}$, dove S è semiretta di naturali.

$f(n) = a_n$ la successione si denota con $\{a_n\}_n$ $n \to a_n \in \mathbb{R}$

$a_n = (-1)^n$ è una successione

$a_n = \frac{1}{1+(-1)^n}$ NON è una successione perchè non ha senso per n dispari.

$n \to$ variabile indipendente (x)

SOTTOSUCCESSIONE, o successione estratta, di $\{a_n\}_n$ è data da $a_{f(k)}$ dove $f: S \to \mathbb{N}$ che è strettamente crescente. $k \to f(k)$

$a_{f(k)} = (a \circ f)(k)$, $k \in S$

es. successione estratta di termini di posto pari

$f(k) = 2k$ considero solo gli elementi $2k$ al variare di $k \in \mathbb{N}$

$a_n = (-1)^n$ $\quad a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$ SERVE PER DEFINIRE I DUE COMPORTAMENTI DIVERSI!

$a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \ \forall k \in \mathbb{N}$

$f_k = n_k \quad a_{f(k)} = \{a_{n_k}\}_k \leftarrow$ SOTTOSUCCESSIONE

S ha come punto di accumulazione $+\infty$. Ha senso parlare solo di limite per $n \to +\infty$

DEF: una successione tende a $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (per $n \to +\infty$) se

$\forall V \in I_l, \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n}, \ a_n \in V$

Se $l \in \mathbb{R}$, $V =]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ e $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n}, \ l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

PROPRIETÀ DELLE SUCCESSIONI

$l = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n} a_n$ oppure $a_n \to l$

- Una successione può non avere limite (es. $(-1)^n$).
- Se il limite esiste, è unico.

$a_n \to l_1$ e $b_n \to l_2$

- Se $l_1 + l_2$ ha senso $\Rightarrow a_n + b_n \to l_1 + l_2$
- Se $l_1 \cdot l_2$ ha senso $\Rightarrow a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$

Valgono anche le proprietà del reciproco e del quoziente.

COMPOSIZIONE

$S \mapsto \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $\quad$ es: $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad f(x) = \text{sen}\, x$

$n \mapsto a_n = x \mapsto f(x)$

$f(a_n)$ $\quad \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\cos\left(\frac{n+2}{n+3}\right) \to ?$ calcolo $\frac{n+2}{n+3} \underset{n \to \infty}{=} 1$ $\quad \cos\left(\frac{n+2}{n+3}\right) \to \cos 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \infty \cdot 0$ considero come composizione $n \to \frac{1}{n} = x \to 0$

$= 1$ $\quad x \to \log(1+x)$ non è continua

PR: se $a_n \to x_0$ per $n \to +\infty$,

$f(x) \to l$ per $x \to x_0$ e vale ① o ②:

① f è continua in x_0

② $a_n \neq x_0$ $\forall n \geq \bar{n}$

$\Rightarrow f(a_n) \to l$ per $n \to +\infty$ $\quad n \to a_n = x \to f(x)$

es. $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad x_0 = 0$, vale ② $\quad f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$ $\quad l = 1$

ex: $\lim_{n \to +\infty} n^2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad a_n = \frac{1}{n} = x$ $\quad f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$

SUCCESSIONI MONOTONE

$\{a_n\}_n$ è debolmente crescente se $\forall n$, $a_n \leq a_{n+1}$

$\{a_n\}_n$ è strettamente crescente se $\forall n$, $a_n < a_{n+1}$

$\{a_n\}_n$ è debolmente decrescente se $\forall n$, $a_n \geq a_{n+1}$

$\{a_n\}_n$ è strettamente decrescente se $\forall n$, $a_n > a_{n+1}$

Hanno sempre limite per $n \to +\infty$

es. $n \to n^2 - 2n$

- $a_n = n^2 - 2n$, $\quad a_0 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$ $\quad$ non è né deb. crescente né deb. decre
  $\Rightarrow$ non è monotona

- $n \to \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ è monotona perché composizione di funzioni monotone

$n \to \frac{1}{n}$ è strettamente decrescente

$x \to \text{sen}\,x$ non è monotona, ma l'immagine di $\frac{1}{n}$ è contenuta in $[0,1]$ e

$\text{sen}\,x$ è strettamente crescente.

Allora, $\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ è strettamente decrescente.

$n \mapsto \left(n - \frac{1}{n}\right)$ monotona? $\quad a_n = n - \frac{1}{n}$, $\quad a_{n+1} = (n+1) - \frac{1}{(n+1)}$

$\forall n \geq 1$, $a_{n+1} \overset{?}{\geq} a_n$ $\quad (n+1) - \frac{1}{n+1} \geq n - \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \geq -\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq 1$

$\Leftrightarrow \frac{n-n-1}{n(n+1)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{n(n+1)} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq n(n+1) \Leftrightarrow n^2+n+1 \geq 0$ SEMPRE VERO

È strettamente crescente

$P(n)$ predicati definiti su $n \in \mathbb{R}$

$P(n)$ è definitivamente vera se $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}$

[$P(n)$ è frequentemente vera se $\forall \bar{n} \in \mathbb{N}, \exists n > \bar{n} : P(n)$ è vera]

TEOREMI DI CONFRONTO: se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora:

(1) $a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$

(2) $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$

TEOREMA CARABINIERI: $\{a_n\}_n$ $\{b_n\}_n$ $\{c_n\}_n$ tali che:

① $a_n \leq c_n \leq b_n$ definitivamente

② $a_n \to l$ e $b_n \to l$

Allora $c_n \to l$.

$\{a_n\}_n$ è limitata se $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n, |a_n| \leq M$

$\{a_n\}_n$ è limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n, a_n \leq M$

$\{a_n\}_n$ è limitata inferiormente se $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n, a_n \geq M$

Se $a_n \to 0$ e $\{b_n\}$ è limitata $\Rightarrow a_n \cdot b_n \to 0$

Se $a_n \to +\infty$ e $\{b_n\}$ è lim. inf. $\Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$

Se $a_n \to -\infty$ e $\{b_n\}$ è lim. sup. $\Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$

$|a_n - l| \leq b_n \quad \forall n \geq \bar{n}$ e $b_n \to 0 \Rightarrow a_n \to l \quad l \in \mathbb{R}$

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A e $f(x) \to l$ per $x \to x_0$

Allora, per ogni successione $\{a_n\}_n$ tale che $a_n \to x_0$ e $a_n \in A \setminus \{x_0\}$ $\forall n$, risulta $f(a_n) \to l$ per $n \to +\infty$

es. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \qquad a_n = 2n\pi \qquad b_n = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad a_n \to +\infty \qquad b_n \to +\infty$

$f(a_n) = \operatorname{sen}(2n\pi) = 0 \qquad f(b_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ quindi non sono uguali $\Rightarrow \nexists \lim$

TEOREMA: Sia $f : A \to \mathbb{R}$ x_0 punto di accumulazione per A, $l \in \bar{\mathbb{R}}$

Allora (1) $f(x) \to l$ per $x \to x_0$ se e solo se

(2) $\forall \{a_n\}_n : a_n \in A \setminus \{x_0\}, a_n \to x_0$ risulta $(a_n) \to l$

PROPRIETÀ SUCCESSIONE FATTORIALE

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^\beta} = +\infty$ $\forall \beta>0$ il fattoriale è un infinito più veloce di n^β

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{q^n} = +\infty$ $\forall q>0$ il fattoriale è un infinito di ordine superiore degli esponenziali.

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log q} = e^0 = 1$ $\forall q>0$

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log n} = e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log n} = e^0 = 1$ perché $\frac{1}{n} = n^{-1}$ è di ordine superiore di $\log n$

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ponendo $x = \frac{1}{n}$ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Ma $e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$ perché è come dire $e^{\underset{\downarrow 1}{\frac{n+1}{n}}\cdot\underbrace{n\cdot\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{1}} = e^{1\cdot 1} = e$

$\{a_n\}_n$ crescente e $\{b_n\}_n$ decrescente $\forall n$, $a_n \leq e \leq b_n$

FORMULA DI STIRLING (ridotta)

$\forall n \geq 1$, $\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq n\cdot e\cdot\frac{n^n}{e^n}$

$x \to \sqrt[n]{x}$ è crescente su R^+ $\sqrt[n]{\frac{n^n}{e^n}} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n\cdot e\cdot\frac{n^n}{e^n}}$

$\frac{n}{e} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n\cdot e}\cdot\frac{n}{e}$ $\frac{n}{e} \to +\infty$ quando $n\to+\infty$, perciò, per il teorema del confronto, $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ $\frac{n}{e} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n\cdot e}\cdot\frac{n}{e}$ divido per n

$\frac{1}{e} \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{\sqrt[n]{n\cdot e}}{e}$ applico il teorema dei carabinieri: $\frac{1}{e}$ ha limite $\frac{1}{e}$.

Controllo che $\sqrt[n]{n\cdot e}\cdot\frac{1}{e}$ tende a $\frac{1}{e}$, cioè che $\sqrt[n]{n\cdot e} \to 1$

$\sqrt[n]{n\cdot e} = e^{\frac{1}{n}\log n e} = e^0 = 1$ perché $\frac{1}{n}$ è + veloce.

$\Rightarrow \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$ per il teorema dei carabinieri.

Questo significa che $\sqrt[n]{n!}$ è un infinito dello stesso ordine di n.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad C_0 = 1 \qquad C_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$C_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2 \qquad C_3 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \ldots$$

Successione crescente $C_{n+1} > C_n \quad \forall n$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n!} \frac{1}{k!} = e$$ approssima molto più velocemente e.

INFINITESIMI

$\cdot\ \alpha \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^\alpha}$ Se $\alpha = 0$, il limite è 0

Se $\alpha < 0$, il limite è 0

Dovrei raccogliere l'infinitesimo di ordine inferiore, ma x e $\operatorname{sen} x$ hanno la stessa velocità

$$\frac{x\left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^\alpha} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{x^{\alpha - 1}}$$ se $\alpha - 1 \leq 0$, limite è 0 cioè se $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \leq 0 \\ 0 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ ? & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

DEF: se f è infinitesimo per $x \to 0$, ($f(x) \to 0$ per $x \to 0$)

$f(x) = o(1)$ "o piccolo"

Se f è infinitesimo, $\alpha > 0$ e $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} = 0$, scriviamo $f(x) = o(x^\alpha)$

ESEMPIO:

$$x^2 = o(x) \qquad \frac{x^2}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\operatorname{sen} x^2 = o(x) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{\operatorname{sen} x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x) + x}{o(x) + x} = 1$$ $o(x)$ = infinitesimo di ordine superiore

$$\searrow \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\left(1 + \frac{o(x)}{x} \to 0\right)}{\cancel{x}\left(1 + \frac{o(x)}{x} \to 0\right)} = 1$$

$o(x^\alpha)$ è un insieme di funzioni! $\qquad f(x) \in o(x^\alpha)$ ma si usa l'uguale

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} x - x = o(x) \Longrightarrow \operatorname{sen} x = o(x) + x$$

$$\hookrightarrow e^x = 1 + \underbrace{x + o(x)}_{o(1)} \Rightarrow e^x = 1 + o(1) \text{ ordine } 0$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}} \qquad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

- $$\text{sen}\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$ ORDINE PARI $2n+2$ GRADO DISPARI $2n+1$

Il grado 0 non c'è perchè il seno in 0 vale 0. I termini che compaiono sono tutti di grado dispari perchè il seno è una funzione dispari.

$$\text{sen}\,x = x - \underbrace{\frac{x^3}{6}}_{o(x^2)} + o(x^4) \text{ ord. } 4 \Longrightarrow \underset{\text{ord } 3}{\text{sen}\,x} = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \underset{\text{ord } 2}{\text{sen}\,x} = x + o(x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\text{ord } 1}{\text{sen}\,x} = x + o(x) \Rightarrow \text{sen}\,x = o(1) \text{ ord. } 0$$

$$\left(1 - \frac{\text{sen}\,x}{x}\right) = \underbrace{Lx^n}_{\text{parte principale dell'infinitesimo}} + o(x^n) \text{ con } L \neq 0 \quad \text{Trovare } L$$

Parto, ad esempio, dallo sviluppo di T. di 3° ordine e divido per x

$$\frac{\text{sen}\,x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \quad \left(1 - \frac{\text{sen}\,x}{x}\right) = \frac{x^2}{6} + o(x^2) \Rightarrow L = \frac{1}{6}$$

- $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$ ORDINE DISPARI $2n+1$ GRADO DISPARI $2n$

Formula ricorsiva, segni alterni. I coefficienti non nulli sono di grado pari perchè il coseno è una funzione pari.

ordine 5: $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \overset{4}{\Longrightarrow} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\overset{3}{\Rightarrow} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \overset{2}{\Rightarrow} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \overset{1}{\Rightarrow} \cos x = 1 + o(x) \overset{0}{\Rightarrow} \cos x = 1 + o(1)$$

- $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

- $$\text{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

- $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+o(x^n)$

- $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$ 4° ordine, non è ricorsiva

- $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ 2° ordine non è ricorsiva

$(1-x^{n+1}) = (1-x)\cdot P_n(x)$ con $P_n(x) = (1+x+x^2+\dots+x^n)$ $n=2 \Rightarrow$ formula di differenza tra cubi

suppongo $x \neq 1$ $\dfrac{1}{1-x} = P_n(x) \cdot \dfrac{1}{1-x^{n+1}}$ $\dfrac{1}{1-x^{n+1}} = \dfrac{1-x^{n+1}+x^{n+1}}{1-x^{n+1}} = 1 + \underbrace{\dfrac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}}_{o(x^n)} = 1+o(x^n)$

perché se divido per x^n $\dfrac{\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}}{x^n} = \dfrac{1}{1-x^{n+1}} \cdot x \to 0$

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{P_n(x)\,(1+o(x^n))}_{P_n(x) \qquad o(x^n)+x\cdot \underset{o(x^n)}{o(x^n)} \to o(x^n)} = P_n(x)+o(x^n)$$

ESERCIZIO

$\cos(\operatorname{sen} x)$ ord. 2 $\operatorname{sen} x = x+o(x^2)$ $\cos t = 1-\dfrac{t^2}{2}+o(t^3)$ con $t = \operatorname{sen} x$ $x\to 0$ $t \to 0$

$t = x+o(x^2)$

$$\cos(\operatorname{sen} x) = 1-\frac{1}{2}(x+o(x^2))^2+o((x+o(x^2))^2) =$$

$$= 1-\frac{1}{2}\left(x^2+2x\,o(x^2)+\underbrace{o(x^2)\cdot o(x^2)}_{o(x^4)}\right)+o\left(x^2+2x\,o(x^2)+o(x^2)\cdot o(x^2)\right) =$$

$$= 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)+o(x^4)+\underset{\text{PROP. 6}}{o(x^2)} = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

ESERCIZIO

$f(x) = \log(1-x)\cdot\cos(x^2-2x)$ $\log(1+t) = t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^4}{4}+o(t^4)$ $t=-x$ $x\to 0$ $t\to 0$

$$\log(1-x) = -x-\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{3}(-x)^3-\frac{1}{4}(-x)^4+o((-x)^4) = -\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)+o(x^4)$$

$\cos t$ con $t = x^2-2x$ $\cos t = 1-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^4}{24}+o(t^4)$ ma $x\cdot o(x^3) = o(x^4)$ altro fattore

Quindi mi basta ord. 3 $\cos t = 1-\dfrac{t^2}{2}+o(t^3)$

DEF: se f è infinitesimo (per $x \to 0$), $\alpha > 0$, $L \neq 0$ e $f(x) = L \cdot x^\alpha + o(x^\alpha)$ diciamo che f è infinitesimo di ORDINE α (rispetto a x) con PARTE PRINCIPALE di infinitesimo $L \cdot x^\alpha$

sen x è infinitesimo di ordine 1 e parte principale x.

$$\left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$ ordine 2, parte principale $\frac{x^2}{6}$ → infinitesimo più lento

$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}\left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \frac{1}{x^{\alpha-1}} \cdot \left(\frac{x^2}{6} + \underbrace{o(x^2)}_{\text{conta nel principio di sostituzione}}\right) = \frac{x^2}{x^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^{\alpha-3}}\left(\frac{1}{6} + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{0 \text{ per definizione}}\right) = \begin{cases} 0 & \alpha - 3 < 0 \\ \frac{1}{6} & \alpha = 3 \\ +\infty & \alpha > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ \frac{1}{6} & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

PROPRIETÀ DEGLI "O PICCOLI"

$\alpha, \beta > 0$ e $K \in \mathbb{R}$

① $K \cdot o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$ $\left[\frac{f}{x^\alpha} \to 0 \Rightarrow \frac{K \cdot f}{x^\alpha} \to 0\right]$

② $o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$ $\left[\frac{f}{x^\alpha} \to 0 \text{ e } \frac{g}{x^\alpha} \to 0 \Rightarrow \frac{f+g}{x^\alpha} \to 0\right]$

③ $x^{\alpha+\beta} = o(x^\alpha)$ $\left[\frac{x^{\alpha+\beta}}{x^\alpha} = x^\beta \to 0\right]$

④ $o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$ $\left[\frac{f}{x^\alpha} \to 0 \text{ e } \frac{g}{x^{\alpha+\beta}} \to 0 \Rightarrow \frac{f+g}{x^\alpha} \to 0\right]$

⑤ Se $f = o(1)$, $g = o(1)$ e $\frac{f}{g} \to 0$ scrivo $f = o(g)$

$o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$ $\left[\frac{g}{x^\alpha} \to 0 \text{ e } \frac{f}{g} \to 0 \Rightarrow \frac{f}{x^\alpha} = \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{x^\alpha} \to 0\right]$

⑥ $o(x^\alpha + o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$ conta l'infinitesimo di ordine più basso, cioè x^α

⑦ $o(x^\alpha + x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$

⑧ $x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$

⑨ $o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$

⑩ $\frac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^\beta} = o(x^\alpha)$

$$\frac{\operatorname{sen}x}{x} \to 1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}x - x}{x} \to 0 \Rightarrow \operatorname{sen}x = x + o(x)$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\cos x - \frac{x^2}{2}}{x^2} \to 0 \Rightarrow \frac{1-\cos x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{o(x^2)}{x^2}$$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} - o(x^2)$ ma per la 1ª proprietà $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$o(x^\alpha) - o(x^\alpha) = 0$ $\boxed{\text{NO}}$ perché è come dire $o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$

$\operatorname{sen}x^2 = o(x)$ $\quad x^2 = o(x)$ $\quad \operatorname{sen}x^2 - x^2 \neq 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \frac{e^x - 1 - x}{x} \to 0 \quad e^x - 1 - x = o(x) \quad e^x = 1 + x + o(x)$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \frac{\log(1+x) - x}{x} \to 0 \quad \log(1+x) - x = o(x) \quad \log(1+x) = o(x) + x$

$$\operatorname{sen}x\,(1-\cos x) = (x+o(x))\cdot\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^3}{2} + x\cdot o(x^2) + \frac{x^2}{2}\cdot o(x) + o(x)\cdot o(x^2) =$$

$$= \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \underset{\underset{\frac{1}{2}\cdot o(x^3) = o(x^3)}{\Downarrow}}{o(x^3)} + o(x^3) = \frac{x^3}{2} + 3o(x^3) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$ infinitesimo di 3° ordine

$P_n(x) \to$ polinomio di ordine n se $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad a_k \in \mathbb{R}$

$\operatorname{gr}(P(x)) \le n$

Un POLINOMIO DI TAYLOR di ordine n di $f(x)$, centrato in $x_0 = 0$, è un polinomio di ordine n tale che $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

UNICITÀ: suppongo per assurdo $f(x) = Q_n(x) + o(x^n) \Rightarrow P_n(x) - Q_n(x) = o(x^n)$

facendo la differenza membro a membro $\Rightarrow P_n(x) - Q_n(x) = 0 \Rightarrow P_n(x) = Q_n(x)$

SVILUPPI DI TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

sviluppo di ordine 3: $e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2}}_{2^\circ \text{ ordine}} + \underbrace{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}_{o(x^2)}$

$$\cos(x^2-2x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2-2x)^2 + \underset{\substack{\downarrow\\ o(x^3)}}{o\left((x^2-2x)^3\right)} = 1 - \frac{1}{2}\left(x^4-4x^3+4x^2\right) + o(x^3) =$$

mi interessano solo i termini di grado ≤ 3 → ordine

conta il grado + basso

$$= 1 + 2x^3 - 2x^2 + o(x^3)$$

$$\log(1-x)\cdot\cos(x^2-2x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\cdot\left(1 - 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= -\Big[x - 2x^3 + 2x^4 + \underbrace{x\cdot o(x^3)}_{o(x^4)} + \frac{x^2}{2} - x^4 + \underset{\substack{\downarrow\\ o(x^4)}}{x^5} + \underset{\substack{\downarrow\\ o(x^4)}}{o(x^5)} + \frac{x^3}{3} - \underbrace{\frac{2}{3}x^5}_{o(x^4)} + \underbrace{\frac{2}{3}x^6}_{o(x^4)} + \underbrace{o(x^6)}_{o(x^4)} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) + o(x^4)\Big] =$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \left(-2 + \frac{1}{3}\right)x^3 - \left(2 - 1 + \frac{1}{4}\right)x^4 + o(x^4) =$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^4 + o(x^4)$$

$f(x) = (e^{x^2} - \cos x)\cdot\log(1-2x)$ trovare parte principale infinitesimo e l'ordine

$e^t = 1 + t + o(t)$ 1° ord. esponenziale $t = x^2 \rightsquigarrow e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$ 2° ordine

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ 2° ord. coseno $-\cos x = -1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ SOMMO MEMBRO A MEMBRO

$e^{x^2} - \cos x = \cancel{1} + x^2 + o(x^2) \cancel{-1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ ORD 2 PARTE PRINC. $\frac{3}{2}x^2$

$\log(1+t) = t + o(t)$ $t = -2x$ $\log(1-2x) = -2x + o(x)$ ORD 1 PARTE PRINC. $-2x$

PRODOTTO MEMBRO A MEMBRO

$$f(x) = \left[\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right]\cdot\left[-2x + o(x)\right] = -3x^3 + \frac{3}{2}x^2\cdot o(x^2) - 2x\cdot o(x^2) - \frac{3}{2}x^2\cdot o(x) =$$

$= -3x^3 + o(x^4) - o(x^3) - o(x^3) = -3x^3 + o(x^3)$ 3° ordine e parte principale $-3x^3$

ESERCIZIO

Trovare ordine e parte principale di $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^2 - 1$ per $x \to 0$, $f(x) \to 0$ infinitesimo

$\frac{1}{1-t} = 1 + t + o(t)$ se $t = -x^2$

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(-x^2)$ Parto dal secondo ordine $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2)$

↳ $f(x) = o(x^2)$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + x^2 + (-x^2)^2 + o\left((-x^2)^2\right) = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

$f(x) = x^4 + o(x^4)$

ORD. INF. = 4

PARTE PRINC. = x^4

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x(1-\cos x)}{e^{x^2-x}-\cos x+\log\left(1+x-\frac{3}{2}x^2\right)} \quad \begin{matrix} N(x) \\ D(x) \end{matrix}$$

(a) controllare che è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$

(b) controllare che non si risolva con i limiti fondamentali

1) calcolare ordine infinitesimo e parte principale del denominatore

$D(x) = L x^n + o(x^n) \qquad L \neq 0$

2) sviluppo di Taylor del numeratore all'ordine n

3) applico il principio di sostituzione e calcolo il limite

$D(x) \neq o(x) \qquad D(x) = o(x^2)$

$e^{x^2-x} = 3°$ ordine $\qquad e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3) \qquad t = x^2-x$ se $x\to 0,\ t\to 0$

$e^{x^2-x} = 1+x^2-x+\frac{1}{2}(x^2-x)^2+\frac{1}{6}(x^2-x)^3+o\left[(x^2-x)^3\right]$ i monomi di grado > 3 rientrano in $o(x^2-x)^3$, cioè $o(x^3)$

$e^{x^2-x} = 1+x^2-x+\frac{1}{2}(x^4+x^2-2x^3)+\frac{1}{6}(x^6-x^3-2x^5+2x^4)+o(x^3)$

$= 1+x^2-x+\frac{1}{2}x^2-x^3-\frac{1}{6}x^3+o(x^3) = 1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3) \quad \rightsquigarrow \quad -\cos x = -1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$

$\log\left(1+x-\frac{3}{2}x^2\right) \qquad \log(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3) \qquad t = x-\frac{3}{2}x^2$ se $\begin{matrix} x\to 0 \\ t\to 0 \end{matrix}$

$\log\left(1+x-\frac{3}{2}x^2\right) = x-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}x^2\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}x^2\right)^3+o\left[\left(x-\frac{3}{2}x^2\right)^3\right] =$

$= x-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{9}{4}x^4-3x^3\right)+\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{27}{8}x^6-3x^4+3x^5\right)+o(x^3) =$ scarto i monomi di grado > 3

$= x-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{3}x^3+o(x^3) = x-2x^2+\frac{11}{6}x^3+o(x^3)$

$$D(x) = \underbrace{\cancel{1}\cancel{-x}+\cancel{\frac{3}{2}x^2}-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)}_{\text{esponenziale}}\ \underbrace{\cancel{-1}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+o(x^3)}_{\text{coseno}}\ \underbrace{\cancel{+x}\cancel{-2x^2}+\frac{11}{6}x^3+o(x^3)}_{\text{log}} = \frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

(2) sviluppo di Taylor di $N(x)$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ 3° ordine, ma dato che ho $x\cdot$, calcolo il secondo ordine

$N(x) = 2x(1-\cos x) = 2x\left(1-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = x^3+o(x^3)$

$$(3) \lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^3}\left(1+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{2}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)} = \frac{3}{2}$$

ERRORI TIPICI

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \neq \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x} = 0 \quad \boxed{NO} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} \neq \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \quad \boxed{NO}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x+2x^3}{x^3} = \left[\frac{13}{6}\right]$$

1) non posso mettere 0 al posto di sen x

2) non posso raccogliere x e sostituire a $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

3) sviluppo $N(x)$ al 2° ordine $\operatorname{sen} x = x + o(x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)+2x^3}{x^3} \quad \boxed{NO}$$

SI

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$N(x) = \frac{x^3}{6} + 2x^3 + o(x^3)$

$$\lim_{x\to 0} f(x)\cdot\cos x \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

DERIVATE

DIFFERENZIABILITÀ

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ sia anche punto di acc. per A

f è differenziabile in x_0 se $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-[f(x_0)+\alpha(x-x_0)]}{|x-x_0|} = 0$$

se pongo $x = x_0+h$ $\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-[f(x_0)+\alpha h]}{|h|}$ $\iff f(x_0+h) = f(x_0)+\alpha h + o(h)$ per $h\to 0$

sviluppo di Taylor al primo ordine

α = DIFFERENZIALE DI f IN x_0 $\qquad \alpha = (df)(x_0)$

$(de^x)(0) = 1$ coefficiente di $f(x)$ dello sviluppo di Taylor

$(d\operatorname{sen} x)(0) = 1 \qquad (d\cos x)(0) = 0$ $\qquad$ se $f(x)$ è un polinomio, il differenziale è il coeff. d

grado più piccolo

$R_{x_0}: A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

RAPPORTO INCREMENTALE
(o quoziente differenziale)
DI f CENTRATO IN x_0

DEF: DERIVATA di f in x_0 è, se esiste, il limite del rapporto incremen

$$\lim \frac{f(x)-f(x_0)}{} = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

DEF: f si dice DERIVABILE in x_0 se esiste la derivata di f in x_0 ed è finita : $l \in \mathbb{R}$

Esistono funzioni con derivata, ma NON derivabili, ad esempio

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases} \qquad f'(0)=+\infty$$

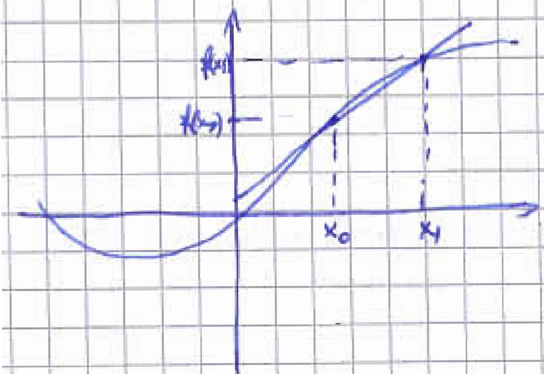
$l=f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$ derivata prima di f in x_0

Se f è derivabile in x_0, allora

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in\mathbb{R} \qquad x=x_0+h$$

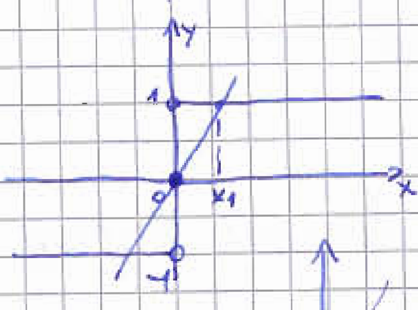
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-[f(x_0)-f'(x_0)\cdot h]}{|h|}=0$$

f è derivabile in x_0 $\Longleftrightarrow$ f è differenziabile in x_0 e in tal caso $(df)(x_0)=f'(x_0)$

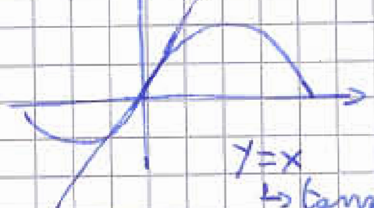


$$R_{x_0}(x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \text{coefficiente angolare della secante}$$

RETTA SECANTE: $y=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\cdot(x-x_0)$

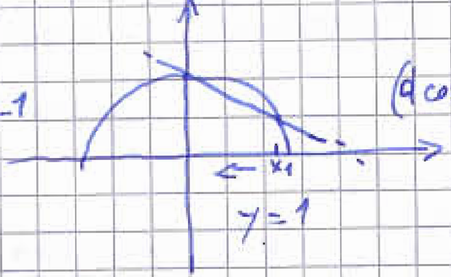


se $x_1 \to x_0$, la pendenza della retta secante diventa sempre più alta, quindi $f'(x_0)=+\infty$



$(d\,\mathrm{sen}x)(0)=1$

$y=x$
↳ tangente



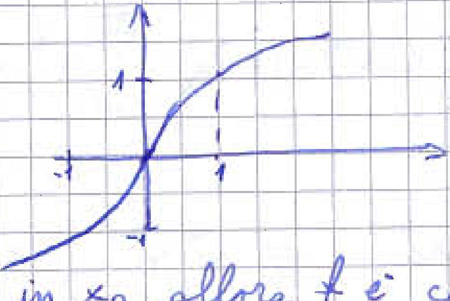
$(d\cos x)(0)=0$

Se $\exists\, f'(x_0)=\pm\infty$, $x=x_0$ è l'equazione della retta tangente

Se $\exists\, f'(x_0)\in\mathbb{R}$, $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ è l'equazione della retta tangente

ESEMPIO

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ $f'(0) = +\infty$



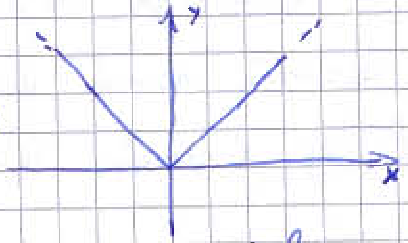
$\lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 0^{\frac{1}{3}}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{-\frac{2}{3}} = +\infty$

PROP. se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0

OSS. il viceversa è falso

ESEMPIO

$f(x) = |x|$ e $x_0 = 0$



le secanti a destra hanno tutte $m=1$
quelle a sinistra $m=-1$

Derivata destra e sinistra di f in x_0, se esistono, sono i limiti:

$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $f_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se $f_+(x_0) = f_-(x_0)$ $\Rightarrow f(x)$ è derivabile in x_0

ESEMPIO

$f(x) = |x|$ $R_0(x) = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x|$ non derivabile

DEF: f è derivabile su B, con $B \subset A$, se f è derivabile in ogni punto di B; ~~f~~ è derivabile se è derivabile su A. $A \rightarrow$ dominio naturale

$D \operatorname{sen} x = \cos x$ $\forall x$ $f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$ con $h \to 0$ $\alpha = f'(x_0)$ $f(x_0) = \operatorname{sen} x_0$

$\operatorname{sen}(x_0 + h) = \operatorname{sen} x_0 \cos h + \cos x_0 \cdot \operatorname{sen} h$ $\begin{cases} \operatorname{sen} h = h + o(h) \\ \cos h = 1 + o(h) \end{cases}$ sviluppo al primo ordine

$\operatorname{sen}(x_0 + h) = \operatorname{sen} x_0 (1 + o(h)) + \cos x_0 (h + o(h)) = \operatorname{sen} x_0 + \underbrace{\cos x_0}_{\alpha = f'(x_0)} \cdot h + \underbrace{(\operatorname{sen} x_0 + \cos x_0) o(h)}_{o(h)}$

$D \cos x = -\operatorname{sen} x$ $\cos(x_0 + h) = \cos x_0 \cdot \cosh - \operatorname{sen} x_0 \cdot \operatorname{sen} h =$

$\begin{cases} \operatorname{sen} h = h + o(h) \\ \cos h = 1 + o(h) \end{cases}$ $= \cos x_0 (1 + o(h)) - \operatorname{sen} x_0 (h + o(h)) = \cos x_0 \underbrace{- \operatorname{sen} x_0}_{\alpha} h + o(h)$

$D e^x = e^x$ $e^{(x_0 + h)} = e^{x_0} \cdot e^h$ $e^h = 1 + h + o(h)$ se $h \to 0$

$e^{(x_0 + h)} = e^{x_0} \cdot (1 + h + o(h)) = e^{x_0} + \underbrace{e^{x_0}}_{\alpha} \cdot h + o(h)$

$D x^n = n x^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $D c = 0$ c=costante

x_0 fissato $$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \quad (x^n - x_0^n) = (x - x_0) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k \cdot x_0^{n-k-1}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \Big[\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x^k \cdot x_0^{n-k-1}}_{\to n \text{ termini}} \Big] = n \cdot x_0^{n-1} \quad \Rightarrow x_0^k \cdot x_0^{n-k-1} = x_0^{n-k+k-1} = x_0^{n-1}$$

Se f è derivabile su A, $f' : A \to \mathbb{R}$ $x \to f'(x)$ derivata prima

Se f' è derivabile su A, $(f')'(x) = f''$ derivata seconda di f ...

Se $f^{(n-1)}$ è derivabile su A, $(f^{(n-1)})'(x) = f^{(n)}(x)$ derivata n-esima

OPERAZIONI CON LE DERIVATE

TEOREMA: siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ punto di accumulazione per A, f e g entrambe derivabili in x_0, allora:

(1) $f+g$ è derivabile in x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf è derivabile in x_0 e $(\lambda f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$

(3) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(4) se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{1}{g}$ è derivabile in x_0 e $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

(5) se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

DIMOSTRAZIONE

hp) $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$ DERIVABILITÀ = DIFFERENZIABILITÀ

$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$

(1) $(f+g)(x_0+h) = (f+g)(x_0) + [\underline{f'(x_0) + g'(x_0)}] \cdot h + o(h)$

(2) $(\lambda \cdot f)(x_0+h) = \lambda f(x_0) + [\underline{\lambda \cdot f'(x_0)}] \cdot h + o(h)$

$h^2 = o(h)$ $h \cdot o(h) = o(h)$

(3) $(f \cdot g)(x_0+h) = (f \cdot g)(x_0) + [\underline{f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}] h + o(h)$

(4) $$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = \frac{-1}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad \text{se } x \neq x_0$$

$$D(x^3-3x^2+4x+5) = D(x^3)+D(-3x^2)+D(4x)+D(5) = 3x^2-6x+4$$

$x \to \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ derivabile in ogni punto del suo dominio

$$D\left(\frac{x^2+3}{x+2}\right) = \frac{2x\cdot(x+2)-(x^2+3)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2-3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-3}{(x+2)^2}$$

$\boxed{x \neq -2}$

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\boxed{\cos x \neq 0}$ derivabile in ogni punto del suo dominio

$$D(\tan x) = \frac{\cos x\cdot\cos x-\operatorname{sen} x\cdot(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}$$

$\to = 1+tg^2 x$

$$D(x\cdot\operatorname{sen} x\cdot\cos x) = Dx\cdot(\operatorname{sen} x\cos x)+x\cdot D(\operatorname{sen} x\cos x) = \operatorname{sen} x\cos x+x(\cos^2 x+(-\operatorname{sen} x)\cdot\operatorname{sen} x) =$$

$$= \operatorname{sen} x\cos x+x(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)$$

DERIVATA COMPOSIZIONE

$x \to f(x)=y \to g(y)=z \qquad z=(g\circ f)(x)=g(f(x))$

PROP: se f è derivabile in x_0, g è derivabile in $f(x_0)$ e x_0 è un punto di accumulazione per dominio di $g\circ f$, allora $g\circ f$ è derivabile in x_0 e vale la FORMULA DELLA CATENA:

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}(x) \xrightarrow{} d(f(x)) \qquad g'(y) = \frac{dz}{dy}(y) \xrightarrow{} d(g(y)) \qquad (g\circ f)'(x) = \frac{dz}{dx}(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \text{con } y=f(x)$$

ESEMPIO

$$D(\operatorname{sen}(x^2)) = \qquad y=f(x)=x^2 \quad \frac{dy}{dx}=2x \qquad z=g(y)=\operatorname{sen} y \quad \frac{dz}{dy}=\cos y$$

$$= 2x\cdot\cos y = 2x\cdot\cos x^2$$

$$D(\operatorname{sen} x)^2 \quad x \to \operatorname{sen} x=f(x)=y \to y^2=g(y)=z \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d\operatorname{sen} x}{x} = \cos x$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dy^2}{y} = 2y \qquad \frac{dz}{dx} = 2y\cdot\cos x = 2\operatorname{sen} x\cos x$$

$D e^{\cos(x^3+x)}$ = derivabile $\quad x \to x^3+x = f(x) = y \to \cos y = g(y) = z \to e^z = h(z) = w$

$w = (h \circ g \circ f)(x)$

$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ con $z = g(y)$ e $y = f(x)$ $\quad \frac{dw}{dz} = \frac{de^z}{dz} = e^z$

$z = \cos y \Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{d\cos y}{dy} = -\text{sen}\, y \quad y = x^3+x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2+1$

$D e^{\cos(x^3+x)} = e^z \cdot (-\text{sen}\, y) \cdot (3x^2+1) = e^{\cos(x^3+x)} \cdot (-\text{sen}(x^3+x)) \cdot (3x^2+1)$

DERIVATA DELL' INVERSA

se $m = f'(x_0) \rightsquigarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{m}$ se $y_0 = f(x_0) \quad m \neq 0$

es. $f(x) = x^3$ se $x_0 = 0$, $f'(x_0) = 0 \Rightarrow \nexists (f^{-1})'(y_0)$

TEOREMA

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona. Sia $x_0 \in]a,b[$ tale che f sia derivabile e $f'(x_0) \neq 0$,

allora f^{-1}, funzione inversa, è derivabile in x_0 e

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\log x$ è derivabile su $\mathbb{R}^+$ e $D \log x = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$

$y = \log x \iff x = e^y, \forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}$

$\forall x > 0, D \log x = \frac{1}{De^y}$ con $y = \log x \quad \log x = \frac{1}{\underset{\to = x}{e^y}} = \frac{1}{x}$

$\arctan x$ è derivabile su $\mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

$y = \arctan x \iff x = \tan y \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$D \tan y = 1 + \tan^2 y \neq 0 \quad \forall y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ l'$\arctan x$ è derivabile $\quad D \arctan x = \frac{1}{D \tan y} \overset{y = \arctan x}{=}$

$= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$

arcsen x è derivabile in $]-1,1[$

$$D\,\text{arcsen}\,x = \frac{1}{D\,\text{sen}\,y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad y=\text{arcsen}\,x \quad \forall x \in]-1,1[$$

arccos x è derivabile in $]-1,1[$

$$D\arccos x = \frac{1}{D\cos y} = \frac{1}{-\text{sen}\,y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} \qquad y=\arccos x \quad \forall x \in]-1,1[$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x>0$$

$$x^\alpha = e^{\log x^\alpha} = e^{\alpha \log x} \qquad Dx^\alpha = De^{\alpha\log x} = e^{\alpha \log x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = x^\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-}$$

$$Dq^x \quad q>0,\ x\in\mathbb{R} \qquad Dq^x = De^{\log q^x} = De^{x\underset{\text{cost.}}{\underset{\downarrow}{\log q}}} = e^{x\log q}\cdot\log q = q^x\cdot\log q$$

$$D\left[f(x)^{g(x)}\right] \quad f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\log f(x)} =$$

$D\log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ Hp: $f(x)>0$ e $x\in D_f$ e $x\in$ f e g derivabili.

$$= e^{g(x)\cdot \log f(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot\log f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x}\right]$$

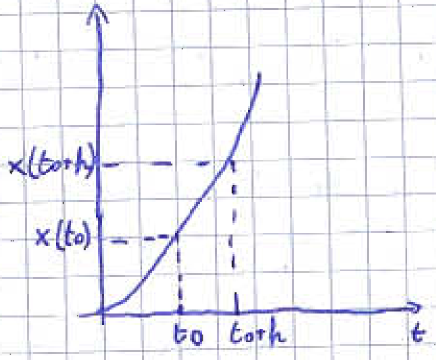
ES.

$$D(x+1)^x \Rightarrow x+1>0 \quad x>-1 \Rightarrow D(x+1)^x = De^{x\log(x+1)} = e^{x\log(x+1)}\cdot D(x\log(x+1)) =$$

$$= e^{x\log(x+1)}\cdot\left\{1\cdot\log(x+1) + x\cdot\frac{1}{x+1}\right\} = (x+1)^x\cdot\left\{\log(x+1)+\frac{x}{x+1}\right\}$$

MOTO RETTILINEO DI PARTICELLA

t = tempo $\quad t \mapsto x(t)$ posizione al tempo t



$$\text{velocità media} = \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$$

Se $h\to 0$ e $x(t)$ è derivabile,

$x'(t_0) = v(t_0)$ velocità istantanea

Se $x(t)$ derivabile due volte

$x''(t_0) = (x')'(t_0) = a(t_0)$ accelerazione

PROP: Sia f una funzione monotona debolmente crescente [decrescente] e derivabile in x_0. Allora $f'(x_0) \geq 0$ [$f'(x_0) \leq 0$]

DIM: $R_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se f debl. cresc. $\Rightarrow R_{x_0}(x) \geq 0 \ \forall x \neq x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

f debl. decres. $\Rightarrow R_{x_0}(x) \leq 0 \ \forall x \neq x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

OSS: se f è strettamente crescente, è falso in generale che $f'(x_0) > 0$

esempio: $f(x) = x^3$ strettamente crescente, ma in $x_0 = 0$ vale 0 la derivata.

Vicino a z1, la funzione assume minimo in z1

$z_1 \Rightarrow$ minimo locale

$z_2 \Rightarrow$ la funzione non è derivabile

ESTREMI LOCALI

Un punto $x_0 \in \text{dom} f$ è detto PUNTO DI MASSIMO LOCALE per f se

$\exists U \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in U \cap \text{dom} f, x \neq x_0, f(x) \leq f(x_0)$

x_0 è punto di MINIMO LOCALE per f se

$\exists U \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in U \cap \text{dom} f, x \neq x_0, f(x) \geq f(x_0)$

In particolare, x_0 è punto di massimo [minimo] locale STRETTO se $\exists U$ per il quale vale "<" [">"]

Se in particolare x_0 è interno al dominio di f, si parla di punti di massimo [minimo] locale INTERNI.

PROP: se x_0 è punto di massimo o minimo locale interno per f e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$

OSS: se $f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ è un punto di max/min locale

es: $f(x) = x^3$ $x_0 = 0$ $f'(x_0) = 0$ ma 0 non è né di max né di min.

Sia $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua, $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato.

I punti di massimo e minimo si cercano tra questi:

(1) gli estremi a, b

② i punti di $]a,b[$ in cui f NON è derivabile

③ i punti $x_0 \in]a,b[$ in cui $f'(x_0)=0$

esempio:

$f:[-2,4]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{|x|}{1+x^2}$ trovare max e/o min

① $f(-2)=\dfrac{2}{1+4}=\dfrac{2}{5}$ $f(4)=\dfrac{4}{1+16}=\dfrac{4}{17}$

② 0 è l'unico punto in cui non è derivabile per colpa di $|x|$

$f(0)=0$

③ $x\neq 0$ $D|x|=\dfrac{x}{|x|}$ $Df=\dfrac{\frac{x}{|x|}\cdot(1+x^2)-2x|x|}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1}{(1+x^2)^2\cdot|x|}\cdot\left[x\cdot(1+x^2)-\underbrace{2x|x}_{2x3}\right.$

$=\dfrac{1}{(1+x^2)\cdot|x|}\cdot x\left(1-x^2\right)$ $f'(x)=0$ $x(1-x^2)=0 \begin{cases} x=0 \ \underline{\text{NO}} \text{ per Hp} \\ 1-x^2=0 \quad x=\pm 1 \end{cases}$ PUNTI STAZIONARI E APPARTENENTI ALL' INTERVALLO

$f(\pm 1)=\dfrac{1}{2}$ $\Longrightarrow$ 0 è il minimo di f, $\min\limits_{[-2,4]} f=0$

$\frac{1}{2}$ è il massimo di f, $\max\limits_{[-2,4]} f=\dfrac{1}{2}=f(\pm 1)$

Trovo sempre un punto in cui la tangente è orizzontale

TEOREMA DI ROLLE: Sia $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ una funzione tale che:

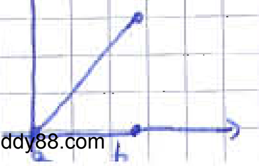
① f è continua su tutto $[a,b]$

② f è derivabile almeno su $]a,b[$

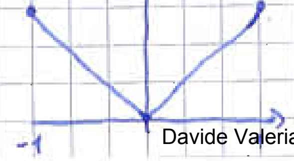
③ $f(a)=f(b)$

allora, esiste $z\in]a,b[$ tale che $f'(z)=0$

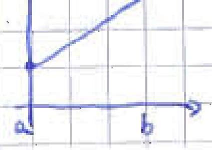
Se ignoro (1)



Se ignoro (2)



Se ignoro (3)



DIM: Per il teorema di Weierstrass, f ha max e min su $[a,b]$

$M=\max\limits_{[a,b]} f \qquad m=\min\limits_{[a,b]} f \qquad m\leq M$

Se $m=M$ f è costante e la tesi è vera perché $f(x)=0$ $\forall x\in \text{dom} f$

Se $m<M$, almeno un punto di max o di minimo si trova all'interno di $]a,b[$ per le 3 e $m<M$.

$\Rightarrow \exists z\in]a,b[: f(z)=M$ (oppure $=m$ in modo analogo)

) se $a<x<z \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(z) \rightarrow \text{negativo perché } f(x)<f(z) \text{ se } z \text{ è max}}{\underbrace{x-z}_{\hookrightarrow x<z \Rightarrow x-z \text{ negativo}}} \Rightarrow$ è positiva

) se $z<x<b \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(z) \rightarrow \text{negativo}}{x-z \rightarrow \text{positivo}} \Rightarrow$ è negativa

(2) $\rightarrow \exists f'(z)$ perché z è interno $=f'_+(z)=f'_-(z)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Se } x\rightarrow z^- \Rightarrow A) \text{ dice che } f'_-(z)\geq 0\\ \text{Se } x\rightarrow z^+ \Rightarrow B) \text{ dice che } f'_+(z)\leq 0\end{array}\right\} \Rightarrow f'(z)=0 \text{ dato che } f'_+(z)=f'_-(z)$$

CVD. ▨

TEOREMA DI LAGRANGE

Sia $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che:

(1) f è continua su tutto $[a,b]$

(2) f è derivabile almeno su $]a,b[$

Allora esiste $z\in]a,b[$ tale che $f'(z)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, cioè la tangente nel punto è parallela alla secante.

DIM: $r(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$

$r(a)=f(a) \qquad r(b)=f(b) \qquad r'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$g(x)=f(x)-r(x)$ verifica Hp teorema di Rolle

$g(a)=f(a)-r(a)=f(b)-r(b)=g(b) \underset{\text{Rolle}}{\rightsquigarrow} \exists z\in]a,b[: g'(z)=0$

ma $g'(z)=f'(z)-r'(z)$ e $g'(z)=0$ perché z è max o min

$f'(z)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

OSS: dalla tesi di Lagrange

$\exists z \in]a,b[\ : \ \boxed{f(b) - f(a) = f'(z) \cdot (b-a)}$ TEOREMA DEL VALOR MEDIO

APPLICAZIONE:

PROP: se f è derivabile su un intervallo I e $f'(x)=0 \ \forall x \in I$, allora f è costante su I.

DIM: $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$f([x_1,x_2])$ verifica le ipotesi del teorema del valor medio, dato che $[x_1,x_2] \subset I$

$\Rightarrow \exists z \in]x_1, x_2[\subset I$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(z) \cdot (x_2 - x_1)$ ma per ipotesi $f'(z) = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$ ▨

PROP: se f è derivabile su un intervallo I e $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$ $[f'(x) \leq 0]$ allora f è monotona debolmente crescente. [debolmente decrescente]

DIM: $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ come prima

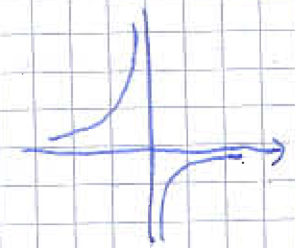
$$f(x_2) - f(x_1) = \underset{\geq 0}{f'(z)} \cdot \underset{\geq 0}{(x_2 - x_1)} \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad f(x_2) \geq f(x_1)$$ ▨

COR: se $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente crescente su I
$[f(x) < 0]$ [decrescente]

Dimostrazione analoga con $f'(z) > 0$

esempio

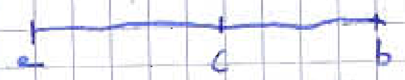
$f(x) = -\frac{1}{x}$



$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \ \forall x \neq 0$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ NON è un intervallo

$\Rightarrow f(x)$ non è crescente né decrescente.



se è continua su ab e monotona su ac e cb
$\Rightarrow$ monotona su ab

COR: se f è continua su I e derivabile con derivata $f'(x) \geq 0$ dappertutto tranne in al più un numero finito di punti di I, allora f è debolmente decrescente su I

ESEMPIO

$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x>0$ $\mathbb{R}^+$ è un intervallo

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow \text{è costante}$$

Per trovare la costante, calcolo $f(1) = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ▨

$f(x) = x^3 - 3x^2 \quad f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) > 0$ se $x<0$ o $x>2$

$f'(x) < 0$ se $0<x<2$

$\Rightarrow$ f è strettamente decrescente su $[0,2]$

f è strettamente crescente su $]-\infty,0]$ e su $[2,+\infty[$

$f(x) = x + e^x$ mostrate che esiste f^{-1} e che f^{-1} è derivabile

è biunivoca $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ perché è somma di funzioni str. crescenti (iniettiva)

e $\inf f = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\sup f = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e f è continua (suriettiva)

$\exists f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua perché f è definita su un intervallo (teorema cont. inv

f^{-1} è derivabile su $\mathbb{R}$ per il teorema della derivabilità dell'inversa. Le x per cui è verificato il teorema... $f'(x) = 1 + e^x \geq 1 \neq 0$

Trovare la retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(1, f^{-1}(1))$

$y = f^{-1}(x_0) + (f^{-1})'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad x_0 = 1$ $\quad f^{-1}(1) \Rightarrow x + e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \quad f^{-1}(1) = 0$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{\underbrace{f'(0)}_{\to f^{-1}(1)}} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2} \qquad y = 0 + \frac{1}{2}\cdot(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

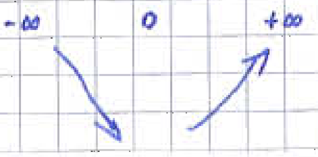
$e^x - x = k$ con $k \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{cases} y = k \\ y = e^x - x \end{cases}$ $\quad f(x) = e^x - x$ continua e derivabile su $\mathbb{R}$

$f(x) \to +\infty$ se $x \to +\infty$

$f(x) \to +\infty$ se $x \to -\infty$

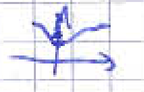
$f'(x) > 0 \quad f'(x) = e^x - 1$

$e^x - 1 > 0 \quad e^x > 1 \quad x > 0 \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$



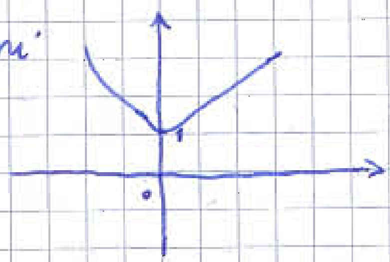
f è strettamente decrescente su $[-\infty, 0]$

$f(0) = 1$



f è strettamente crescente su $[0, +\infty[$

immagine di $f = [1, +\infty[$ dato che in 0 f vale 1 e prima è decrescente



Se $K<1$, non ci sono soluzioni

Se $K=1$, 1 soluzione

Se $K>1$, 2 soluzioni

PROPOSIZIONE

Sia $f:]-a, 0[\cup]0, a[\rightarrow \mathbb{R}$, $a>0$ e f è pari [f è dispari] e f è derivabile su $]0, a[$

TESI: allora f è derivabile anche su $]-a, 0[$ e f' è dispari [f' è pari].

DIM: f pari significa $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in]-a, a[$

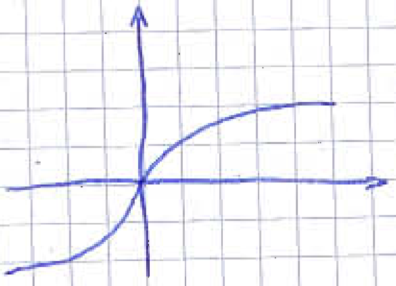
$f'(x) = D[f(-x)] = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x)$ $\Rightarrow$ f' è dispari

Se f è dispari, $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in]-a, a[$

$f'(x) = f'(-x)$ $\Rightarrow$ f' è pari

ESEMPIO

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$



$$D x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$D|f(x)|$ $\quad x \longrightarrow f(x) = y \longrightarrow |y|$ $\quad y \neq 0$

Se f è derivabile in x e $f(x) \neq 0$, $D|f(x)| = \frac{f(x)}{|f(x)|} \cdot f'(x)$ e $|f(x)|$ è deriva

$|x^2| = x^2 \Rightarrow$ derivabile anche in $x=0$.

COROLLARIO.

Se f è derivabile in un intervallo I, x_0 punto interno ad I e $f'(x_0) = 0$

(1) se $f'>0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'<0$ in un intorno destro di x_0, allora x_0 è punto di massimo locale stretto per

(2) se $f'<0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'>0$ in un intorno destro di x, allora x_0 è punto di minimo locale stretto per f.

(3) se f' non cambia segno in un intorno di x_0, allora x_0 non è né di massimo né di minimo locale, perchè f è strettamente monotona in tale intorno di x_0 (è un PUNTO DI SELLA).

COROLLARIO 2:

Se f è derivabile in un intervallo I, x_0 è un punto interno ad I in cui $f'(x_0)=0$ ed esiste $f''(x_0)$, allora:

(1) se x_0 è punto di massimo locale per $f \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

(2) se x_0 è punto di minimo locale per $f \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

(3) se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è punto di minimo locale stretto per f.

(4) se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è punto di massimo locale stretto per f.

Il problema è se $f''(x_0)=0$ perchè il corollario non dice nulla.

esempio

$f(x) = x^4$ $f''(x) = 12x^2$ $f''(0) = 0$  MINIMO

$f_2(x) = -x^4$ $f''(x) = -12x^2$ $f''(0) = 0$  MASSIMO

$f_3(x) = x^3$ $f''(x) = 6x$ $f''(0) = 0$  SELLA

f è Lipschitziana se $\exists L>0$:

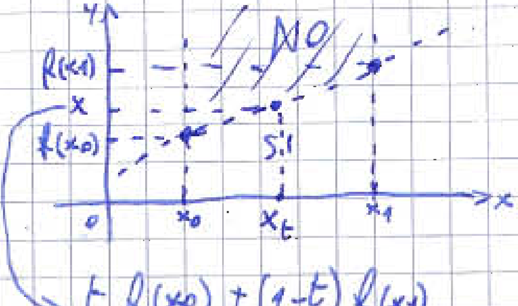
$\forall x_1, x_2 \in D$, $|f(x_2) - f(x_1)| \leq L \cdot |x_2 - x_1|$ $\Rightarrow \dfrac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq L$ controllo sul valore assoluto del rapporto incrementale

PROP: se f è derivabile su un intervallo I, allora:

(1) f è lipschitziana con costante L

(2) $|f'(x)| \leq L$ $\forall x \in I$

FUNZIONI CONVESSE



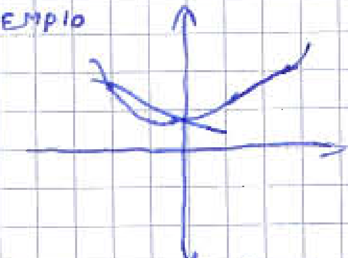
$t\, f(x_0) + (1-t)\, f(x_1)$

si → il grafico della funzione è lì.

$x_t = t x_0 + (1-t) x_1$ $t \in]0,1[$ punto qualsiasi tra 0 e 1.

DEF: sia f una funzione definita su un intervallo I.
f si dice CONVESSA se $\forall x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$ risulta
$f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \quad \forall t \in]0,1[$
Se vale la disuguaglianza stretta, la funzione è strettamente convessa.

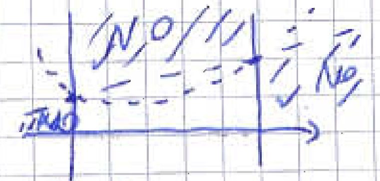
ESEMPIO



convessa, ma non strettamente

Le funzioni convesse sono continue, ma non è detto che siano derivabili.

OSS: se f è convessa su I e $x_0 < x_1$



DEF: f è CONCAVA [strettamente concava] su I se
$-f$ è CONVESSA [strettamente convessa]

PROPRIETÀ: Se f è strettamente convessa [concava] e r è una retta del piano (x,y), allora r interseca il grafico di f in al massimo due punti.

Se f è definita su un intervallo I ed è derivabile due volte su I, allora:

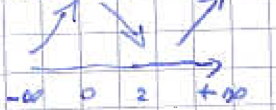
① f è convessa su I;	f è strettamente convessa su I
② f' è debolmente crescente su I	f' è strettamente crescente su I
③ $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$	$f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$

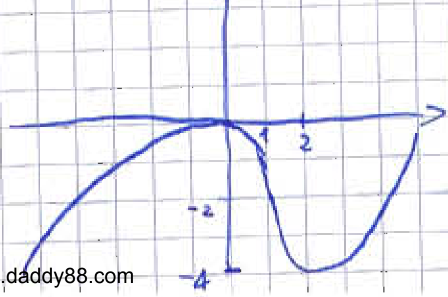
esempio:

$f(x) = x^3 - 3x^2 \quad f'(x) = 3x^2 - 6x \quad f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) > 0 \quad 6x > 6 \quad x > 1$ convessa dopo 1

$f'(x) > 0 \quad 3x(x-2) > 0 \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = 2 \end{matrix}$





In (1,2) c'è un punto di flesso perché cambia la concavità.

PRIMITIVE

DEF: Se $f\ A \to \mathbb{R}$, PRIMITIVA di f è una funzione $F: A \to \mathbb{R}$ derivabile su A e tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in A$$

ESEMPIO: $f(x) = x^n$ $\quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ è primitiva di f

$f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad F(x) = -\cos x$ è primitiva di f

$f(x) = \cos x$ $\quad F(x) = \operatorname{sen} x$

$f(x) = e^x$ $\quad F(x) = e^x$

Ci sono infinite primitive: tutte quelle ottenute aggiungendo una costante.

$f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad F(x) = -\cos x + c$ con $c \in \mathbb{R}$

PROBLEMA: se F e G sono primitive di f su A,

$\underset{?}{\Longrightarrow}$ $G(x) = F(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$

$F'(x) = f(x) = G'(x)$ $\forall x \in A$ $\quad D(G-F)(x) = 0$ $\forall x \in A$

$\Longleftrightarrow$ A è un intervallo

PROP: se $f: I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, ha una primitiva $F(x)$ su I, allora ogni altra primitiva di f è del tipo

$$F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad A: \mathbb{R} \setminus \{0\}$

se $x \neq 0$, $D \log|x| = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|} = \frac{x}{|x|^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ $\quad F(x) = \log|x|$

A non è un intervallo

$$G(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x > 0 \quad \text{la costante è } 0 \\ \log(-x) + 1 & \text{se } x < 0 \quad \text{la costante è } 1 \end{cases}$$

INTEGRALI

Se $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, INTEGRALE INDEFINITO di f è la famiglia di tutte le primitive di f e si denota: $\int f(x)\,dx$

OSS. se f ha una primitiva F su I, allora:

$$\int f(x)\,dx = \{F(x)+c : c \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$$

esempio

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Siano $f,g :]a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili e tali che:

(1) il limite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

(2) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

(3) $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora esiste il limite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

PROPOSIZIONE

Il teorema vale ancora con b al posto di a $(x \to b)$ oppure per $x \to x$

con $x_0 \in]a,b[$, e anche per $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$.

esempio

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\operatorname{sen} x}{x} = +\infty \quad \Bigg| \quad \frac{D(1+\operatorname{sen} x)}{D(x)} = \frac{\cos x}{1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$ perchè non vale (1).

Controllare sempre le ipotesi!

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} \cdot \cos(x^2+2x) \cdot \operatorname{sen} x}{\log(e+x^2) \cdot \underset{\downarrow 1}{x} \cdot \arctan(x+1)} = \frac{1 \cdot 1}{\underset{\downarrow 1}{\log e} \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

non sempre è la strada buona usare de l'Hôpit

È una condizione sufficiente, cioè se $\frac{f'}{g'}$ non ha limite, non è detto c $\frac{f}{g}$ non abbia limite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = 0$$ se applico Hop. $$\lim_{x\to 0} \frac{2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)}{1} = \lim_{x\to 0}\left(2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\right.$$

$\nexists \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ma $\frac{f(x)}{g(x)}$ ha limite 0, quindi esiste.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\text{sen}x}{x^3}=\frac{0}{0}\qquad\frac{D(x-\text{sen}x)}{D(x^3)}>\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$

$f(x)=Lx^n+o(x^n)$ con $x\to0$ con $L\neq0$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=L$$

COROLLARIO

Sia $f:\,]a,b[\,\to\mathbb{R}$ una funzione continua su $]a,b[$ e derivabile su $]a,b[\,\setminus\{x_0\}$, dove $x_0\in\,]a,b[$. Se esiste $\lim_{x\to x_0}f'(x)=l\in\mathbb{R}$, allora f è derivabile anche in x_0 e $f'(x_0)=l$.

DIMOST.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{0}{0}$$ perchè f è continua. Applico de l'Hopital $$\frac{D[f(x)-\overset{\text{cost}}{f(x_0)})}{D(x-x_0)}=\frac{f'(x)}{1}$$ per $x\to x_0$ $\lim_{x\to x_0}f'(x)=l$

esempio

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x=0\\ x^2\,\text{sen}\frac{1}{x} & \text{se } x\neq0\end{cases}$$ verificare che f è der. su $\mathbb{R}$

f è continua anche in $x=0$. Applico il corollario

$$f'(x)=\begin{cases}2x\,\text{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{se } x\neq0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$ ma qui non è derivabile in x_0 perchè $\cos\frac{1}{x}$ è illimitato.

Uso la definizione di derivata

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\,\text{sen}\frac{1}{h}-0}{h-0}=0.$$

COROLLARIO II

Se $f:\,]a,b[\,\to\mathbb{R}$ è continua su $]a,b[$ e derivabile su $]a,b[\,\setminus\{x_0\}$, con $x_0\in\,]a,b[$

(1) se $\exists\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=l_+\in\bar{\mathbb{R}}\Rightarrow\exists f'_+(x_0)=l_+$

(2) se $\exists\lim_{x\to x_0^-}f'(x)=l_-\in\bar{\mathbb{R}}\Rightarrow\exists f'_-(x_0)=l_-$

esempio

$f(x)=\sqrt{|x|}$ con $x_0=0$ se $x>0$ $f'(x)=Dx^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \qquad f'_+(0) = +\infty$$

$$\text{se } x<0, \quad f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{|x|}} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty \qquad f'_-(0) = -\infty$$

→ CUSPIDE

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x & \text{se } x>0 \\ b & \text{se } x=0 \\ ce^x & \text{se } x<0 \end{cases}$$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$ trovare a,b,c in modo che f sia derivabile

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ $\quad \lim_{x\to 0^-} ce^x = b = \lim_{x\to 0^+} a\cos x$ $\quad c = b = a$ continuità

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} D(a\cos x) = \lim_{x\to 0^+} (-a\,\text{sen}x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} D(ce^x) = \lim_{x\to 0^-} (ce^x) = c \qquad f'_+(0) = 0 \qquad f'_-(0) = c$$

$\begin{cases} a=b=c \\ c=0 \end{cases}$ allora la funzione è continua e derivabile $\quad a=b=c=0$

$$f'_+(0) = f'_-(0) \in \mathbb{R}$$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$ applico n volte de l'Hopital

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

TEOREMA (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO)

Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte. Sia $x_0 \in]a,b[$, e definiamo:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

allora il $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ e cioè $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$

Se $x_0 = 0$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$

$f(x) = e^x \qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$

$\forall k \; f^{(k)}(x) = e^x$

$f^{(k)}(0) = 1$

$f(x) = \text{sen}x \quad f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\text{sen}x \quad f'''(x) = -\cos x \quad f^{IV}(x) = \text{sen}x$

$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -1 \quad f^{IV}(0) = 0$

$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$f(x) = f(x_0) + f'(z_x)\cdot(x - x_0)$ con z_x compreso tra x_0 e x

↑ teorema di Lagrange.

TEOREMA (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE)

Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $n+1$ volte. Sia $x_0 \in]a,b[$ e $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Allora esiste z_x compreso tra x_0 e x tale che:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

$f(x) = e^x \quad x_0 = 0 \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{z_x}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$ z_x compreso tra 0 e x.

Prendo $x = 1$ $\quad e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{z_x}}{(n+1)!}\cdot 1 \quad \left|e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right| \leq \frac{e^{z_x}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$ positivo

$0 < z_x < 1 \quad 0 \leq e^{z_x} \leq e^1$ Se n grande, l'errore è basso.

PRIMITIVE DI FUNZIONI CONTINUE su un intervallo I

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che $\exists\, F$ derivabile su I : $F' = f$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

LINEARITÀ:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad \int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\cdot dx$$

$g: I \to \mathbb{R}$ derivabile con g' continua su I. F primitiva di f su I

$$D(F(x)\,g(x)) = F'(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x) = f(x)\,g(x) + F(x)\cdot g'(x)$$

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$ FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

dove F è primitiva di f.

ESEMPIO

$$\int \underset{g(x)}{x}\,\underset{f(x)}{e^x}\,dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1\,dx = e^x \cdot x - e^x + c = e^x(x-1)+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

$P(x)\cdot \underset{f}{e^x}$, $P(x)\cdot \underset{f}{\text{sen}\,x}$, $P(x)\cdot \underset{f}{\cos x}$ la formula funziona

$$\int \underset{g}{x^2}\,\underset{f}{\cos x}\,dx = \text{sen}\,x\cdot x^2 - \int \text{sen}\,x\cdot 2x\,dx = \text{sen}\,x\cdot x^2 - \left(-\cos x\cdot 2x - \int -\cos x\cdot 2\,dx\right) =$$

$$= x^2\,\text{sen}\,x + 2x\cos x - 2\,\text{sen}\,x + c,\quad c\in\mathbb{R}$$

$$= (x^2-2)\,\text{sen}\,x + 2x\cos x + c$$

$\varphi: J \to I$ derivabile con derivata φ' continua

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, $x\in J$, $t\in I$

$t=\varphi(x)$, $y=f(t)$

Sia $F: I\to\mathbb{R}$ primitiva di f $\quad F'=f$

$F\circ\varphi: J\to\mathbb{R} \qquad x\to\varphi(x)=t\to F(t)=y$

$$D(F\circ\varphi)(x) = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = (F\circ\varphi)(x) + C = \qquad F(t)+c = \int f(t)\,dt \quad \text{se } t=\varphi(x)$$

$$= \int f(t)\,dt\,\Big|_{t=\varphi(x)}$$ FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int \underbrace{f(\varphi(x))}_{f(t)}\cdot\underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{dt} \underset{t=\varphi(x)}{=} \int f(t)\,dt \qquad \frac{dt}{dx}=\varphi'(x) \qquad dt=\varphi'(x)\cdot dx$$

$\int e^{x^2}dx$ pongo $x^2=t$ $\quad\varphi(x)=x^2\quad \frac{dt}{dx}=\varphi'(x)=2x \quad dt=2x\,dx$

$\int e^t dt \underset{t=x^2}{=} \int e^{x^2}\cdot 2x\,dx$ che non è quello che volevo calcolare, $\Rightarrow$ non serve la formula..

$$\int e^x\cdot\cos(e^x)\,dx = \text{sen}(e^x)+c \qquad t=e^x \quad \varphi(x)=e^x \quad \frac{dt}{dx}=e^x \quad dt=e^x dx$$

$$\int e^x\cdot\cos(e^x)\,dx \underset{t=e^x}{=} \int \cos t\cdot dt = \text{sen}\,t + c = \text{sen}(e^x)+c$$

$$D\log|\varphi(x)| = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \qquad \int\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2)+c \qquad t=1+x^2 \quad dt=2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log t + c = \frac{1}{2}\log(1+x^2)+c.$$

$$\int f(x)\,dx \underset{x=\psi(t)}{\overset{\uparrow}{=}} \int f(\psi(t))\cdot\psi'(t)\,dt$$

esempio

$$\int e^{\sqrt{x}} = \int e^{t}\cdot 2t\,dt = e^{t}\cdot 2t - \int e^{t}\cdot 2\,dt = e^{t}2t - 2e^{t} = e^{\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x} - 2e^{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$$

$t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2=\psi(t)$ $\quad x=t^2 \quad \frac{dx}{dt}=2t \quad dx=2t\,dt=\psi'(t)\,dt$

Se ho:

$P(x)\log x \qquad P(x)\cdot\arctan x \qquad P(x)\cdot \text{arcsen}\,x$ si integrano per parti

$$\int \underset{f'}{1}\cdot\underset{g}{\log x}\,dx = x\log x - \int \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = x\log x - x + c = x(\log x - 1) + c$$

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

$$\int \text{arcsen}\,x\cdot dx = x\,\text{arcsen}\,x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\text{arcsen}\,x + \sqrt{1-x^2} + c$$

Se ho:

$\text{sen}^2 x$, $\cos^2 x$, $\text{sen}^n x\cos^m x$ con n, m pari $\quad e^x\text{sen}^2 x$, $e^x\cdot\cos^2 x$ ...

$$\int \text{sen}^3 x\,dx = \int \text{sen}^2 x\,\text{sen}\,x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\,\text{sen}\,x\,dx = \int (\cos^2 x - 1)\cdot(-\text{sen}\,x)\,dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-\text{sen}\,x\,dx}}{=} \int (t^2-1)\,dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + c = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c$$

ESERCIZI

$\int \cos^3 x\,dx \qquad \int \text{sen}^2 x\cos x\,dx \qquad \int e^x\cdot\text{sen}^2 x\,dx$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \underset{f'}{\cos x}\cdot\underset{g}{\cos x}\,dx = \text{sen}\,x\cos x - \int \text{sen}\,x\cdot(-\text{sen}\,x)\,dx = \text{sen}\,x\cos x + \int \text{sen}^2 x\,dx =$$

$$= \text{sen}\,x\cos x + \int (1-\cos^2 x)\,dx = \text{sen}\,x\cos x + x - \int \cos^2 x\,dx$$

$2\int \cos^2 x\,dx = \text{sen}\,x\cos x + x + c \qquad \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\text{sen}\,x\cos x + \frac{1}{2}x + c$

Deve ricomparire l'integrale da cui si è partiti

$$\int \text{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \text{sen}\,x\cos x) + c$$

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad -1\le x\le 1 \quad x=\text{sen}\,t \quad 1-x^2=\cos^2 t \quad \sqrt{1-x^2}=|\cos t| \quad dx=\cos t\,dt$

$t=\text{arcsen}\,x \quad x\in\,]-1,1[\,,\ t\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ x=\operatorname{sen}t}}{=} \int |\cos t|\cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}t\cos t + t) + c = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\operatorname{arcsen}x \cdot \sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen}x) + c =$$

perchè $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\cos t > 0$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen}x\right) + c$$

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ con $Q \leq 2°$ grado e $P(x)$ grado qualsiasi

$$\int \frac{1}{t} dt = \log|t| + c, \quad \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + c, \quad \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t + c$$

$$\int \frac{a}{bx+d} dx = \frac{a}{b} \cdot \int \frac{b}{bx+d} dx = \frac{a}{b} \cdot \log|bx+d| + c$$

$$\int \frac{2}{3x-4} dx = 2\int \frac{3}{3x-4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \log|3x-4| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3} dx \quad x^2-2x-3=0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \quad x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$$

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax-3A+Bx+B}{(x+1)(x-3)} = \frac{x(A+B)+B-3A}{(x+1)(x-3)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B-3A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ -A-4A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=\frac{1}{4} \end{cases} \quad \int \frac{1}{x^2-2x-3} dx = \int \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{4} \log|x-3| - \frac{1}{4} \log|x+1| + c = \frac{1}{4} \log\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{4x^2-4x+1} dx = \int \frac{1}{(2x-1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{(2x-1)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} + c$$

$4x^2-4x+1 = (2x-1)^2$

$$\underset{\substack{t=2x-1\\ dt=2dx}}{=} \int \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) + c = -\frac{1}{2(2x-1)} + c$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx \quad \Delta<0 \qquad \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t + c$

$x^2-2x+5 = x^2-2x+1+4 = (x-1)^2+4 = 4\left[\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1\right]$

$D\left(\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{1+\frac{x^2+1-2x}{4}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{x^2-2x+5}{\cancel{4}2}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{2}{x^2-2x+5}$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

- $\displaystyle\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+5}\,dx$ il numeratore è la derivata del derivatore $= \log|2x^2+3x+5| + c$

- $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2-x-12}\,dx = \int \frac{3x+2}{(x-4)(x+3)}\,dx$ cerco due numeri A e B tali che $\displaystyle\frac{3x+2}{(x-4)(x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+(3A-4B)}{(x-4)(x+3)}$

$\begin{cases} A+B=3 \\ 3A-4B=2 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases}$

$$\int\left(\frac{1}{x-4}+\frac{2}{x+3}\right)dx = \log|x-4| + 2\log|x+3|\,dx$$

- $\displaystyle\int \frac{3x^4-2x^3+1}{x^2+2}\,dx =$ divisione tra polinomi

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & -2x^3 & & & +1 & x^2+2 \\ \cline{6-6} -3x^4 & & -6x^2 & & & 3x^2-2x-6 \\ \hline // & -2x^3 & -6x^2 & & +1 & \\ & 2x^3 & & +4x & & \\ \hline & // & -6x^2 & +4x & +1 & \\ & & 6x^2 & & +12 & \\ \hline & & // & 4x & +13 & \end{array}$$

$= \displaystyle\int(3x^2-2x-6)\,dx + \int\frac{4x+13}{x^2+2}\,dx =$

$x^2+2 = 2\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]$

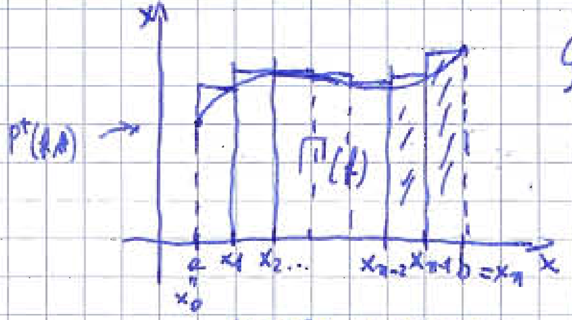
$D\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{}}{(x^2}$

$= x^3-x^2-6x + \displaystyle\int\left(2\frac{2x}{x^2+2}+\frac{13}{x^2+2}\right)dx =$

$= x^3-x^2-6x+2\log(x^2+2)+13\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$

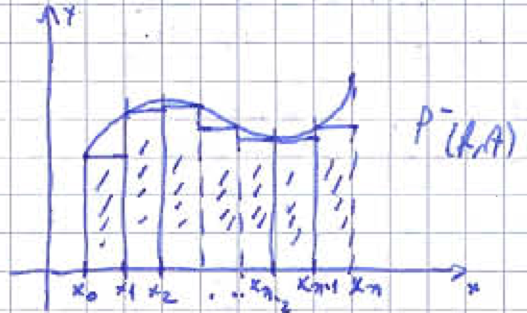
AREE

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ non negativa, $\Gamma(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$



MISURA X ECCESSO

Suddivido $[a,b]$ in un numero finito di intervalli



MISURA X DIFETTO

$f:[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua, una SUDDIVISIONE di $[a,b]$ è:

$A = \{x_i : i = 0,\dots,n,\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ $\quad I_i = [x_{i-1}, x_i]$ $i = 1,\dots,n$

$(\delta x)_i = (x - x_i - 1)$ LUNGHEZZA DELLA SUDDIVISIONE

$$S^-(f,A) = \sum_{i=1}^{n} (\delta x)_i \cdot \inf_{I_i} f$$ $(\delta x)_i \to$ base $\quad S^+$ e $S^- \to$ somme integrali

$$S^+(f,f) = \sum_{i=1}^{n} (\delta x)_i \cdot \sup_{I_i} f$$ $\inf f / \sup f \to$ altezza

$P^-(f,A) \subset \Gamma(f) \subset P^+(f,A)$ $\quad$ area$(P^-(f,A)) = S^-(f,A) \le$ area $\Gamma(f) \le S^+(f,A) =$ area$(P^+($

$S^-(f) = \text{SUP}\{S^-(f,A) : A$ suddivisione di $[a,b]\}$ miglior somma da dentro

$S^+(f) = \text{INF}\{S^+(f,A) : A$ suddivisione di $[a,b]\}$ " " da fuori

$\forall A \ S^-(f,A) \le S^+(f,A)$

$$S^-(f) \le S^+(f)$$

$\Rightarrow S^-(f) \le$ "area $\Gamma(f)$" $\le S^+(f)$ $\quad$ se esiste l'area $\Gamma(f)$, la misura da sotto coincide con quella da sopra, cioè $S^-(f) = S^+(f)$

Un punto di discontinuità o l'intervallo aperto $]a,b[$ non creano problemi alla considerazione $S^+ = S^-$ perché il Δarea è trascurabile.

$f\,[a,b] \to \mathbb{R}$ è una FUNZIONE GENERALMENTE CONTINUA se f è limitata ed è continua dappertutto tranne in un numero finito di punti.

Se f è generalmente continua, allora $S^-(f) = S^+(f)$ e tale numero si denota.

$\int_a^b f(x)\,dx$, ovvero l'area del sottografico di f.

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

Siano $f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ generalmente continue, allora:

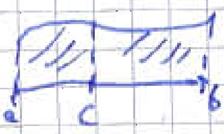
(1) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$] linearità

(2) se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ MONOTONIA
con $a < b$

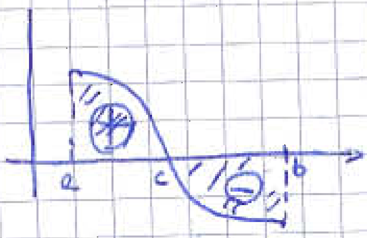
(3) se $a<b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ CONTINUITÀ

(4) se $c \in]a,b[\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



SPEZZAMENTO

(5)



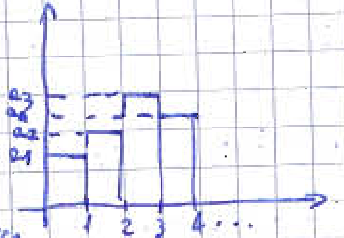
$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ generalmente continua, la MEDIA INTEGRALE

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$f : [0, n[\to \mathbb{R} \quad f(x) = a_i \quad \forall x \in [i-1, i[\quad \forall i = 1, \dots, n$

$\int_0^n f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n a_i \qquad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ è la media integrale $= \frac{1}{n} \int_0^n f(x)\,dx \to$ MEDIA ARITMETICA



Se non c'è continuità

TEOREMA MEDIA INTEGRALE

Se f è generalmente continua su $[a,b]$,

$\inf f \leq \frac{1}{} \int^b f(x)\,dx \leq \sup f$

In particolare, se f è continua su $[a,b]$, esiste $z \in [a,b]$ tale che

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

DIM.

$$\int_a^b \inf_{[a,b]} f \,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \sup_{[a,b]} f \,dx$$

$\inf_{[a,b} f \cdot \underbrace{(b-a)}_{\int_a^b 1\,dx} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)$ moltiplico per $\frac{1}{b-a}$ e ottengo f(media)

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ è generalmente , e $a,b,c \in I$ si definisce INTEGRALE SU INTERVALLI ORIENTATI

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{se } a \neq b$$

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0$$

Vale ancora la proprietà di linearità, monotonia $(a<b)$, continuità e <u>spezzamento</u>. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \forall a,b,c \in I$

Vale ancora la media integrale $\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx}$

FUNZIONE INTEGRALE

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione generalmente continua sull'intervallo I, $a \in I$ fiss

$F: I \to \mathbb{R} \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

PROPRIETÀ: $\forall x_0, x_1 \in I$,

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt$$

$L = \sup_{x \in I} |f(x)| \in \mathbb{R}$ perché f è limitata

PR: F è lipschitziana di costante L

$x_0 < x_1 \Rightarrow |F(x_1) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt\right| \leq \int_{x_0}^{x_1} |f(t)|\,dt \leq \int_{x_0}^{x_1} L\,dt = L\int_{x_0}^{x_1} dt = L\cdot(x_1 - x_0)$

$= L|x_1 - x_0| \rightsquigarrow_{(*)} |F(x_1) - F(x_0)| \leq L|x_1 - x_0|$ è lipschitziana $\Rightarrow$ è continua

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo I, sia $a \in I$ e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

TESI: allora F è primitiva di f su I, cioè $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

DIM. $x_0 \in I$ fissato, $x \neq x_0$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \overset{(*)}{=} \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt =$$

il rapporto incrementale è la media integrale.

$= f(z_x)$

$z_x \in]x_0, x[$ per il teorema della media integrale e f è continua

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(z_x)$$

$x \to x_0$ per il teorema dei carabinieri $z_x \to x_0$

$$\underset{x_0 \quad z_x \quad x}{\vdash\!\!-\!\!\!+\!\!\!-\!\!\dashv}$$

f è continua in $x_0 \Rightarrow x \to x_0 \Rightarrow f(z_x) \to f(x_0)$

$\exists F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(z_x) = f(x_0)$ ▨

$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$ è una primitiva di e^{x^2}

TEOREMA DI TORRICELLI

Se $f: I \to \mathbb{R}$ è continua, $G: I \to \mathbb{R}$ è primitiva di f, allora

$$\forall \alpha, \beta \in I, \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha) = \left[G(x)\right]_\alpha^\beta$$

DIM:

$\exists\, c \in \mathbb{R}: G(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)\,dt \pm c$

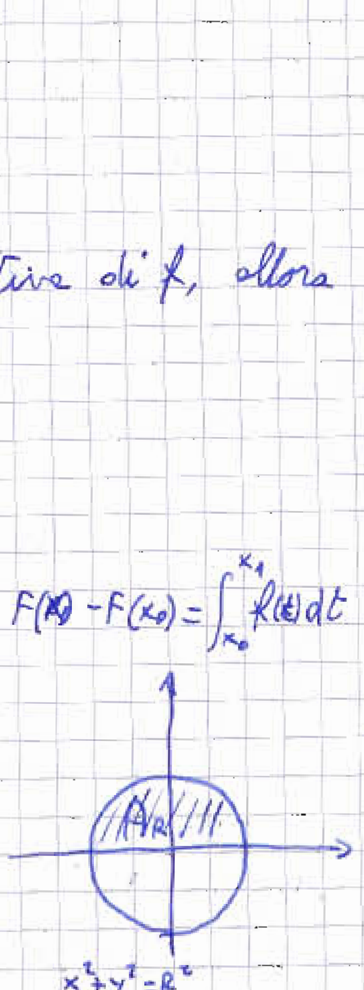
$G(\beta) - G(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha) + \cancel{c} - \cancel{c} = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ perchè $F(x_1) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt$ ▨

$B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ area $(B_R) = ?\ [\pi R^2]$

area $(B_R) = 2 \cdot$ area (A_R)

$A_R = \Gamma(f) \quad f: [-R, R] \to \mathbb{R}^+$

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$



$x^2 + y^2 = R^2$

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$

area $(B_R) = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx$, sapendo $\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\text{arcsen}\,t + t\sqrt{1-t^2}\right) + c$ $\boxed{*}$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g(x)\,dx = \Big[F(x)\,g(x)\Big]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} F(x)\cdot g'(x)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \Big[F\circ\varphi(x)\Big]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt$$

$\boxed{*}$ scrivo $(R^2-x^2)^{1/2} = R\left(1-\left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{1/2}$ $t = \frac{x}{R} = \varphi(x)$ $\sqrt{R^2-x^2} = R\cdot\sqrt{1-t^2}$

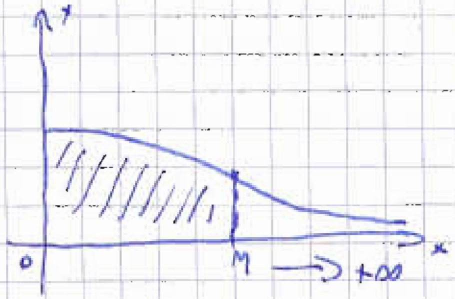
$x = RT$ $dx = R\cdot dt$ se $x=-R$, $t=-1$ e se $x=R$, $t=1$

e l'integrale diventa

$$\text{area}(B_R) = 2\int_{-1}^{1} R\sqrt{1-t^2}\cdot R\cdot dt = 2R^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt = 2R^2\left[\frac{1}{2}\left(\text{arcsen}\,t + t\sqrt{1-t^2}\right)\right]_{t=-1}^{t=1} =$$

$$= 2R^2\cdot\left[\frac{1}{2}(\text{arcsen}\,1 + 0) - \frac{1}{2}(\text{arcsen}(-1)+0)\right] = 2R^2\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2R^2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi R^2$$ ▨

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ continua $\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\,dx$

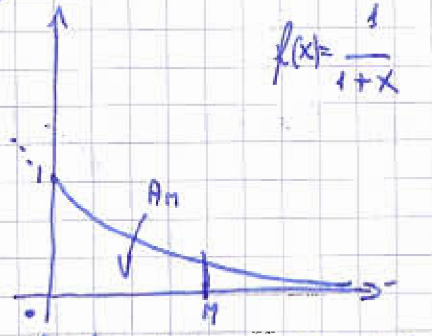


Se mando M a $+\infty$, trovo l'area della parte di piano tra l'asse y, l'asse x e $f(x)$.

$$\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\text{arctg}\,x\Big]_0^M = \text{arctg}(M) - \text{arctg}(0) = \text{arctg}(M). \text{ Per } M\to+\infty,$$

$\text{arctg}\,M \Rightarrow \frac{\pi}{2}$ $\lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ L'INTEGRALE GENERALIZZATO CONVERGE

esempio



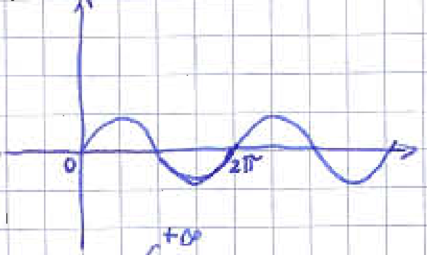
$$\text{area}(A_M) = \int_0^M \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\log(1+x)\Big]_0^M = \log(M+1) - \underbrace{\log(1+0)}_{0} =$$

$= \log(1+M)$ Se però $M\to+\infty$, $\log(1+M)\to+\infty$

Esiste il limite, però è infinito $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}\,dx = +\infty$ L'INTEGRALE GENERALIZZATO DIVERGE POSITIVAMENTE

Dipende dalla velocità ad andare a 0 dell'infinitesimo.

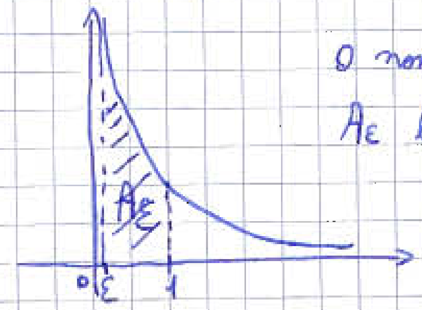
$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x \, dx$?



$\int_0^{M} \operatorname{sen} x \, dx$ se prendo $M = 2k\pi$ è 0.

$\nexists \lim_{M\to+\infty} \int_0^{M} \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x \, dx$ NON HA SENSO!

$f(x) = \frac{1}{x}$



0 non è nel dominio, ma se gli sto vicino, A_ε la so calcolare.

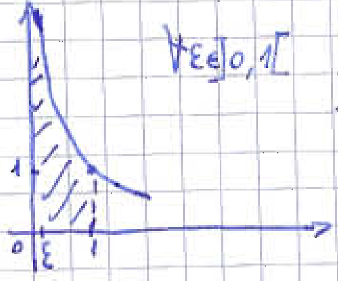
$\forall \varepsilon \in]0,1[$

$$\text{area}(A_\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = \left[\log x\right]_\varepsilon^1 = \log 1 - \log \varepsilon =$$

$$= -\log \varepsilon = \log \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{} +\infty$$

$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$ DIVERGE POSITIVAMENTE

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$



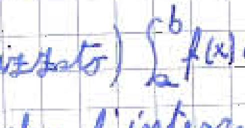
$\forall \varepsilon \in]0,1[\quad \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{} 2$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$ CONVERGE

$\frac{1}{x} \to +\infty$ più velocemente di $\frac{1}{\sqrt{x}}$, perchè $x \to 0$ più velocemente di $\sqrt{x}$. Per questo $\frac{1}{x}$ è una striscia che rimane "aperta", mentre $\frac{1}{\sqrt{x}}$ si chiude e l'integrale converge.

__DEF__: Sia $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continua, con b anche uguale a $+\infty$ e f non necessariamente limitata "vicino" a b.

Se esiste $\lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x) dx = l \in \mathbb{R}$



si dice che l'integrale improprio (o generalizzato) $\int_a^b f(x) dx = l$ CONVERGE.

Se il limite esiste ed è $l = \underset{[-]}{+}\infty$, si dice che l'integrale DIVERGE POSITIVAMENTE [NEGATIVAMENTE] $\int_a^b f(x) dx = \underset{[-]}{+}\infty$

Se il limite NON esiste, si dice che $\int_a^b f(x) dx$ NON ha senso.

$\int^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$, $\int^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx = +\infty$, $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x \, dx$ non ha senso.

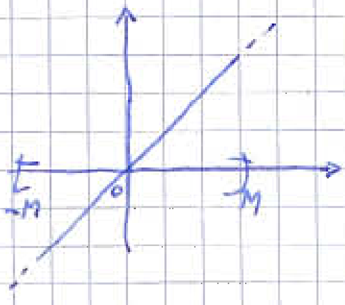
DEF 2: se $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ continua (a anche $-\infty$, f non limitata vicino ad a)

se esiste $\lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)\,dx = l \in \overline{\mathbb{R}}$

- se $l\in\mathbb{R} \to \int_a^b f(x)\,dx = l$ CONVERGE
- se $l=\pm\infty \to \int_a^b f(x)\,dx = \pm\infty$ DIVERGE POSITIVAMENTE O NEGATIVAMENTE

se non esiste, l'integrale NON HA SENSO.

$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_0^{+\infty} x\,dx + \int_{-\infty}^0 x\,dx = +\infty - \infty$ F.I.



$\int_{-M}^{M} x\,dx = 0$ NON È VERO

Se ho l'improprietà in entrambi gli estremi, non posso trattarlo assieme.

DEF3: Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continua ($a=-\infty$ o $b=+\infty$), fissato $c\in]a,b[$, se esistono $\int_a^c f(x)\,dx = l_1$ e $\int_c^b f(x)\,dx = l_2$ e l_1+l_2 ha senso, allora $\int_a^b f(x)\,dx = l_1+l_2$

Se $l_1, l_2 \in\mathbb{R} \to \int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE

Se $l_1+l_2 = +\infty \to \int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ DIVERGE POSITIVAMENTE

Se $l_1+l_2 = -\infty \to \int_a^b f(x)\,dx = -\infty$ DIVERGE NEGATIVAMENTE

Se l_1+l_2 non ha senso $(+\infty-\infty) \to \int_a^b f(x)\,dx$ NON HA SENSO

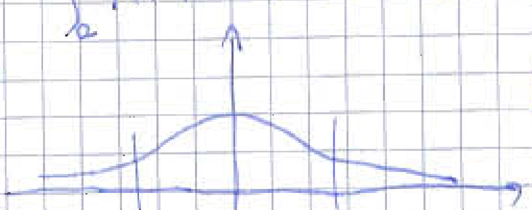
esempio

$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ non ha senso

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,dx = [\text{arctg}(+\infty)] + [\text{arctg}\,0 - \text{arctg}(-\infty)] =$

$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ CONVERGE

OSS: se $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ è continua e non negativa, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ o CONVERGE o DIVERGE POSITIVAMENTE



Per funzioni di segno costante, l'integrale esiste sempre.

TEOREMA CONFRONTO

Siano $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue e tali che $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b[$.

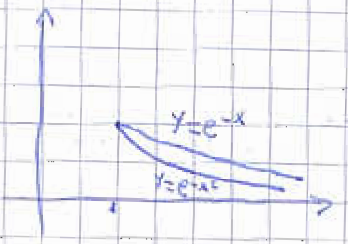
Allora:

① se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge

② se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge posit. $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ diverge positiv.

ESEMPIO

$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge xké $\forall x \geq 1,\ 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$



$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M e^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-e^{-M}} - (-e^{-1})\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$0 \leq \underset{\substack{\Downarrow \\ \text{converge}}}{f(x)} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{e}}}{g(x)}$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \qquad l \in]0,+\infty[$ stessa velocità di f e g

$$l - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + \varepsilon \qquad g(x)\cdot(l-\varepsilon) \leq f(x) \leq g(x)(l+\varepsilon) \quad \forall x \geq \bar{x}$$

$\Rightarrow f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso carattere (o convergono o divergono).

TEOREMA DEL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue e positive. Se esiste $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in]0,+\infty[$ ($f(x) \sim l\cdot g(x)$ per $x \to b^-$), allora gli integrali $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE, cioè o entrambi convergono o entrambi divergono positivamente.

<u>esempio</u>

$$\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-x}+x^2}{x^2+x^3}}_{f(x)}\,dx$$

dire se converge, diverge o non ha senso

al numeratore domina x^2, al denom domina x^3, quindi la funzione ha la stessa velocità di $1/x$

$\dfrac{f(x)}{1/x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \qquad x\cdot f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty \qquad f(x) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

Diverge positivamente anche $f(x)$.

- $b = +\infty \quad \alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^M = \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\right] = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1 \\ +\infty & \text{se } \alpha\leq 1 \end{cases}$$

es

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^3}\,dx < +\infty \text{ converge} \quad f(x) \underset{\arctan\to}{\sim} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^{\textcircled{3}}} \to \alpha = 3 > 1 \; = \frac{\pi}{4}$$

$$\to \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

- $a = 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha<1 \\ +\infty & \text{se } \alpha\geq 1 \end{cases}$$

es.

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2\log(1+x)}\,dx \text{ diverge pos.} \quad \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}\to g(x)} \xrightarrow[x\to0^+]{} 1 \quad f(x) \sim \frac{1}{x^2} \to +\infty \text{ per } x\to 0^+$$

PROPRIETÀ

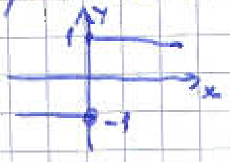
Se $\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$ (converge), allora $\int_a^b f(x)\cdot dx$ converge. In tal caso, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|$

$f = f^+ - f^- \quad |f| = f^+ + f^- \quad 0 \leq f^+ \leq |f| \quad 0 \leq f^- \leq |f|.$

Se f è continua su I, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad F' = f$ (TFCI). Se f non è continua

può non avere primitive.

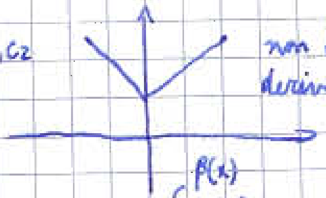
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ -1 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$



Se G è primitiva, $G(x) = \begin{cases} x + c_1 & \forall x > 0 \\ x + c_2 & \forall x < 0 \end{cases}$

$\forall c_1, c_2$

NON HA
PRIMITIVE.



non ha
derivata in 0.

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int^{\beta} f(t)\,dt \qquad F(\beta(x)) - F(\alpha(x)) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt \quad \text{se } \alpha, \beta \text{ derivabile}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt\right] = \underset{\text{DERIVATA}}{\frac{d}{dx}}\left[F(\beta(x)) - F(\alpha(x))\right] = F'(\beta(x))\cdot\beta'(x) \underset{\text{LINEARITÀ}}{-} F'(\alpha(x))\cdot\alpha'(x) = \text{ma } F' = f$$

$$= f(\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$

esempio

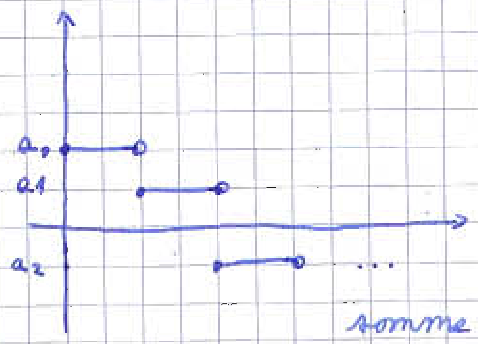
$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt = e^{x^4}\cdot 2x - e^{x^2}\cdot 1$$

SERIE NUMERICHE

Come calcolare la somma di infiniti elementi?

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ $\qquad$ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

$\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ $\quad a_n\in\mathbb{R}$ $\quad f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ $\quad \underset{\text{FUNZ. A GRADINI}}{f(x)}=a_n$ se $x\in[n,n+1[\ \forall n\in\mathbb{N}$



$$\int_0^N f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{N-1}a_n \qquad \boxed{\int_0^{N+1} f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{N}a_n} \qquad a_n=\frac{1}{2^n} \text{ ad es.}$$

Mando l'estremo N a $+\infty$ per calcolare la somma di infiniti termini.

DEF: sia $\{a_i\}_i$ una successione di numeri reali.

Sia $S_n=\sum_{i=0}^{n}a_i$ detta SOMMA PARZIALE N-ESIMA. $\{S_n\}_n$ successione.

Se esiste $\lim_{n\to+\infty}S_n=S$ reale, diciamo che la serie di termine generale a_n CONVERGE e scriviamo $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=S$

Se $\lim_{n\to+\infty}S_n=\pm\infty$, la serie DIVERGE positivamente o negativamente e scrivo $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=\pm\infty$

Se NON esiste $\lim_{n\to+\infty}S_n$, la serie si dice INDETERMINATA.

SERIE GEOMETRICHE: $a_n=q^n$ con q fissato $\in\mathbb{R}$

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}q^i=\begin{cases}n+1 & \text{se } q=1\\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q\neq 1\end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty}q^{n+1}=\begin{cases}0 & \text{se } |q|<1\\ +\infty & \text{se } q>1\\ \text{non esiste} & \text{se } q\leq -1\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=\begin{cases}\dfrac{1}{1-q} & \text{se } -1<q<1\\ +\infty & \text{se } q\geq 1\\ \text{indeterminata} & \text{se } q\leq -1\end{cases} \qquad q^{n+1}\to 0$$

ESEMPI:

$$a_n=\frac{1}{2^n} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\underset{q=\frac{1}{2}}{\overset{\downarrow}{=}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$0,\bar{9}=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\ldots=\frac{9}{10}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^n}\underset{\downarrow}{=}\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\cancel{9}}{\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{10}}{\cancel{9}}=1$$

$\sum_n a_n$ si usa se siamo interessati al carattere

$\sum_n \frac{1}{n} = +\infty \quad \left(a_n = \frac{1}{n}\right)$

$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$, diverge positivamente se $\alpha \leq 1$ $\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge pos se } \alpha \leq 1 \end{cases}$

$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge $\forall \alpha > 0$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ SERIE ESPONENZIALE $\quad a_n = \frac{x^n}{n!}$, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}}$

OSS: Se $a_n \geq 0 \ \forall n$, allora $\sum_n a_n <$ converge / diverge posit.

DIM: $\{S_n\}_n$ è debolmente crescente: $S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n \ \forall n$

PROP: se la serie $\sum_n a_n$ converge, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

DIM: $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} (\underbrace{S_{n+1} - S_n}_{a_{n+1}}) = l - l = 0$

È SOLO UNA CONDIZIONE NECESSARIA.

Se $a_n \to 0$, non è detto che la serie $\sum_n a_n$ converge!

es. $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$ ma $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

OSS

Se $a_n \geq 0 \ \forall n$, e non$(a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0)$, cioè la successione $\{a_n\}_n$ NON è infinitesima, allora $\sum_n a_n = +\infty$

es: $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n = +\infty$ perché $2^{+\infty} = +\infty \neq 0$ $\quad \sum_n \left(2^n + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$ perché $2^{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty \neq$

OSS. (su somma e prodotto di serie)

se $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ convergono, allora:

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_n \lambda \cdot a_n$ converge
- $\sum_n (a_n + b_n)$ converge; $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$

¿ $\sum a_n \cdot b_n$ es: $a_n = \left(1 + (-1)^n\right)$ 2 per n pari, 0 per n dispari $\quad b_n = \left(1 + (-1)^{n+1}\right)$ 2 per n dispari per n pari

$a_n \cdot b_n = 0 \Rightarrow$ non c'è nessun legame

CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

- **CONFRONTO**: siano $\{a_n\}_n$ $\{b_n\}_n$ successioni tali che: $0 \le a_n \le b_n$ $\forall n$. Allora:

(1) se $\sum_n \underset{\text{converge}}{b_n} < +\infty \Rightarrow \sum_n \underset{\text{converge}}{a_n} < +\infty$

(2) se $\sum_n a_n = +\infty \Rightarrow \sum_n b_n = +\infty$

Se anziché $\forall n$, $0 \le a_n \le b_n$ vale per ogni $n \ge \bar{n}$, il criterio è ancora valido perché le serie non dipendono dai primi valori

Se $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in]0,+\infty[$ $\quad a_n \sim l \cdot b_n \quad 0 < l-\varepsilon \le \frac{a_n}{b_n} \le l+\varepsilon$

$0 < (l-\varepsilon)\cdot b_n \le a_n \le (l+\varepsilon)\cdot b_n$

- **CONFRONTO ASINTOTICO**: se $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n$ sono tali che $a_n > 0$ e $b_n > 0$ $\forall n$, inoltre $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in]0,+\infty[$:

Allora $\sum_n a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_n b_n$ converge e
$\sum_n a_n$ diverge positivamente $\Leftrightarrow \sum_n b_n$ diverge positivamente

esempio:

$\sum_n (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^\alpha$ confronto con $\sum_n \frac{1}{n^\beta}$ che converge se $\beta > 1$ e diverg posit. se $\beta \le 1$

$$\underset{a_n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \underset{\text{razionalizzo}}{=} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \underset{b_n}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} \quad \text{dato che } \frac{a_n}{b_n} \to 1$$

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^\alpha \simeq \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2} \to \beta}}$$

$\Rightarrow$ la serie converge se $\frac{\alpha}{2} > 1$, cioè $\alpha > 2$
la serie diverge pos. se $\frac{\alpha}{2} \le 1$, cioè $\alpha \le 2$

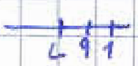
- **CRITERIO DELLA RADICE N-ESIMA**

Sia $\{a_n\}_n$ tale che $a_n \ge 0$ $\forall n$ e $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0,+\infty]$.

Se $l < 1 \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$ CONVERGE

Se $l > 1 \Rightarrow \sum_n a_n = +\infty$ DIV. POS.

Se $l=1$ non posso concludere nulla. Infatti, se $a_n=\frac{1}{n}$ e $b_n=\frac{1}{n^2}$
$\sum_n \frac{1}{n}=+\infty$ e $\sum_n \frac{1}{n^2}<+\infty$ $\sqrt[n]{a_n}\to 1$ $\sqrt[n]{b_n}\to 1$, ma in un caso la serie vale $+\infty$ e nell'altro converge.

<u>DIM.</u> · $0\leq L<1$, $q=\frac{L+1}{2}\in\,]L,1[$ 

$\Leftrightarrow -1<q<1$ $\sqrt[n]{a_n}\Rightarrow L \Rightarrow \exists\bar{n}:\forall n\geq\bar{n},\ \sqrt[n]{a_n}\leq q$. Con $0\leq q<1$,
$0\leq a_n\leq q^n$ $\sum_n q^n$ converge $\underset{\text{confronto}}{\Rightarrow}$ $\sum_n a_n$ converge

· $L>1$, $\sqrt[n]{a_n}\to L$
$\exists\bar{n}:\forall n\geq\bar{n}$ $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$ $a_n\geq 1 \Rightarrow$ non $(a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0)$, $\sum a_n$ non converge
$\Rightarrow \sum_n a_n=+\infty$ ▨

<u>esempi</u>:

$\sum_n \frac{n^4}{2^n}<+\infty$ perché $a_n=\frac{n^4}{2^n}$, $\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt[n]{n^4}}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}<1\to a_n$ converge

· <u>CRITERIO DEL RAPPORTO</u>

Se $\{a_n\}_n$ tale che $a_n>0$ $\forall n$ e $\exists\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L\in[0,+\infty]$
Allora:
- se $L<1 \Rightarrow \sum_n a_n<+\infty$
- se $L>1 \Rightarrow \sum_n a_n=+\infty$
- se $L=1$ non possiamo dire nulla.

Se $L=1$, $a_n=\frac{1}{n}$ $b_n=\frac{1}{n^2}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{(n+1)^2}\to 1$ Per $L=1$, non dice nulla.

<u>DIM</u>:
· se $L>1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L \Rightarrow \exists\bar{n}:\forall n\geq\bar{n},\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$ 
$\Rightarrow a_{n+1}\geq a_n \Leftrightarrow \{a_n\}_{n\geq\bar{n}}$ è deb. crescente e positiva $\Leftrightarrow$ non $(a_n\to 0)$
$\Rightarrow \sum_n a_n=+\infty$.

· se $0\leq L<1$  con $q=\frac{L+1}{2}$. $\exists n_0:\forall n\geq n_0,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q$ cioè $a_{n+1}\leq q\cdot a_n$
$a_{n_0+1}\leq q\cdot a_{n_0}$ $a_{n_0+2}\leq q\cdot a_{n_0+1}\leq q^2\cdot a_{n_0}$
$\boxed{\forall m,\ a_{n_0+m}\leq q^m\cdot a_{n_0}}$ $n=n_0+n \Leftrightarrow m=n-n_0$

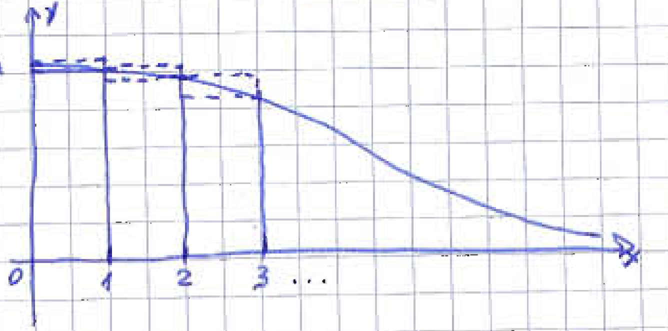
$\forall n \geq n_0, \; a_n \leq q^{n-n_0} \cdot a_{n_0}$, cioè $a_n \leq \underbrace{\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}}_{\text{costante } \times\, q^{-n_0} \text{ converge}} \cdot \underbrace{q^n}_{\text{converge}} \Rightarrow \sum a_n$ converge ▨

esempio:

$\forall x \in \mathbb{R} \; \sum_n \frac{|x|^n}{n!}$ converge $\quad a_n = \frac{|x|^n}{n!} \quad a_{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \quad x \neq 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{n+1}}{n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = L \quad L < 1 \to \text{converge}$$

- CRITERIO DELL'INTEGRALE



Se f è debolmente decrescente, $\forall n$ $\forall x \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$, se $a_n = f(n)$

$\forall x \in [n, n+1[, \; a_{n+1} \leq f(x) \leq a_n$

$\forall N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \int_0^N f(x)\,dx \leq \sum_{n=0}^{N-1} a_n$$

$\sum_{n=1}^{N} a_n \to$ area dei rettangoli piccoli

$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \to$ area dei rettangoli grandi

Sia $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua, deb. decrescente e $f(x) \geq 0 \; \forall x$.

Sia $a_n = f(n) \geq 0$. Allora $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se e solo se $\sum_n a_n$ converge.

esempio.

$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1 \quad a_n = \frac{1}{n^\alpha} = f(n)$ con $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \alpha > 0$

$$\forall \alpha > 1, \; \underset{\underset{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}}{\leq}}{\frac{1}{\alpha - 1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \underset{\text{DIVERGE}}{=} +\infty \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x}\,dx = \lim_{n \to +\infty} \Big[\log(\log x)\Big]_2^n = \lim_{n \to +\infty} \Big[\log(\log n) - \log(\log$$

$= +\infty$

SERIE CON SEGNO QUALUNQUE

- ASSOLUTA CONVERGENZA

$f: [a, b[\to \mathbb{R}$ continua, $\; f = f^+ - f^- \quad f^+ = \sup[f, 0] \quad f^- = (-f) \vee 0$

$|f| = f^+ + f^- \qquad 0 \leq f^+ \leq |f|$

$0 \leq f^- \leq |f|$

$0 \le f^+(x) \le |f(x)|$ e $0 \le f^-(x) \le |f(x)|$.

$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

Se $\int_a^b |f(x)|dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge

$\{a_n\}_n$, $a_n = a_n^+ - a_n^-$ $\quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$ $\quad 0 \le a_n^+ \le |a_n|$ $\quad 0 \le a_n^- \le |a_n|$

Se $\sum_n |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

DEF. La serie $\sum_n a_n$ si dice ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum_n |a_n|$ converge

OSS: Il viceversa è falso, cioè una serie può convergere ma non convergere assolutamente

ESEMPIO

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad \sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge per il criterio di Leibniz.

Ma $|a_n| = \frac{1}{n}$ e $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$ (div. pos).

$\boxed{\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n\right| \le \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|}$ ① Guardare cosa succede alla serie se applico il valore assoluto.

esempio

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$ e e^x $\quad a_n = \frac{x^n}{n!}$, $|a_n| = \frac{|x|^n}{n!}$ e $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SOMMO} \\ \text{TUTTI I} \\ \text{TERMINI}}}{e^3} - \underset{\substack{\uparrow \\ a_0}}{1} - \underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{3} = e^3 - 4$$

CRITERIO DI LEIBNIZ

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad S_1 = -1$ $\quad S_2 = -1 + \frac{1}{2}$ $\quad S_3 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ $\quad S_4 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Sia $\{a_n\}_n$ tale che $a_n \ge 0$ $\forall n$, $\{a_n\}_n$ è debolmente decrescente e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. Allora $\sum_n (-1)^n \cdot a_n$ converge.

Serie di segno alternato e decrescente.

$\forall \alpha > 0$, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge perché $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

esempio

$\sum_n \frac{(-1)^n}{2n + \text{sen}\, n}$ $a_n = \frac{1}{2n + \text{sen}\, n}$ $f(x) = \frac{1}{2x + \text{sen}\, x}$ $f(n) = a_n$ verifico Hp su f
tra 1 e $+\infty$

$f(x) \geq 0$ perché $2x \geq 2$ per $x \geq 1$ e $|\text{sen}\, x| \leq 1 \leq 2x$

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x+2} \longrightarrow 0$

$f'(x) = \frac{-1}{\underbrace{(2x + \text{sen}\, x)}_{\leq 0}} \cdot \underbrace{(2 + \cos x)}_{\geq 0}$ $\forall x \geq 1$ $f'(x) < 0$ $\forall x \geq 1 \Rightarrow f(x)$ decrescente

$\Rightarrow \sum_n \frac{(-1)^n}{2n + \text{sen}\, n}$ converge