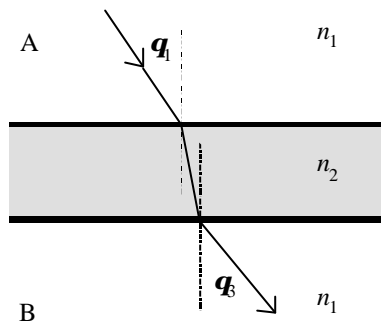


Esercizi svolti

Esercizio 13.1

Un fascio di luce passa dalla regione A alla regione B di un mezzo con indice di rifrazione n_1 attraverso una spessa lastra di materiale il cui indice di rifrazione è n_2 . Di quale angolo viene deviato il fascio emergente rispetto al fascio incidente?



Soluzione:

Utilizzando la legge di Snell per l'interfaccia superiore si ha

$$\sin \mathbf{q}_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \mathbf{q}_1 ,$$

mentre per l'interfaccia inferiore si ha

$$\sin \mathbf{q}_3 = \frac{n_2}{n_1} \sin \mathbf{q}_2 .$$

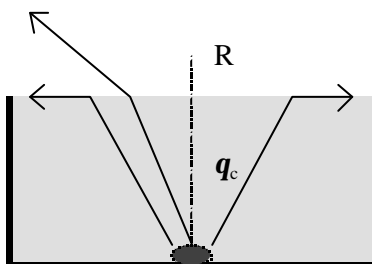
Sostituendo la prima espressione nella seconda, si ottiene dunque

$$\sin \mathbf{q}_3 = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \mathbf{q}_1 \right) = \sin \mathbf{q}_1 ,$$

cioè $\theta_3 = \theta_1$ e lo strato non altera la direzione del fascio.

Esercizio 13.2

Un piccolo corpo luminoso posto sul fondo di un largo recipiente colmo d'acqua ($n_{\text{acqua}} \approx 4/3$) e profondo 100cm emette raggi di luce verso l'alto in tutte le direzioni (vedi figura). Sulla superficie dell'acqua si forma un cerchio di luce causato dai raggi che vengono rifratti passando nell'aria ($n_{\text{aria}} \approx 1$). All'esterno del cerchio i raggi vengono totalmente riflessi e rimangono nell'acqua. Determinare il raggio R di questo cerchio.



Soluzione:

La riflessione totale ha luogo quando l'angolo di incidenza è maggiore dell'angolo critico q_c , che si può ricavare facilmente dalla legge di Snell, imponendo che l'angolo formato dal raggio con la normale in aria sia retto:

$$n_{\text{acqua}} \sin q_c = n_{\text{aria}} \sin 90^\circ \Rightarrow$$

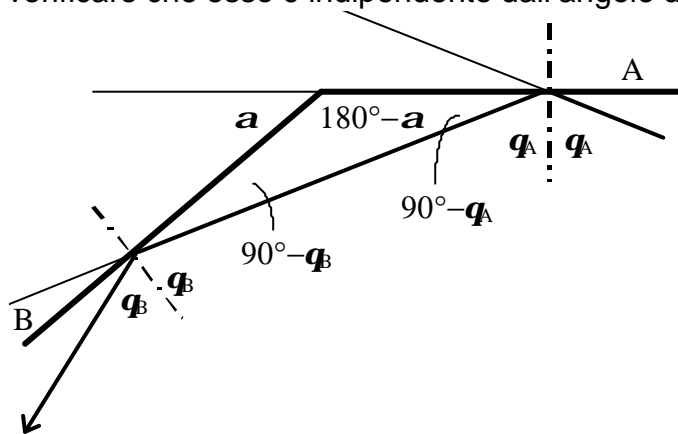
$$\Rightarrow \sin q_c = \frac{n_{\text{aria}}}{n_{\text{acqua}}} \approx 0.75.$$

Si ricava quindi facilmente $q_c \approx 48.6^\circ$. Per ragioni geometriche il valore R del raggio del cerchio è infine dato da

$$R = 100\text{cm} \times \tan q_c \approx 100\text{cm} \times 1.13 = 113\text{cm}.$$

Esercizio 13.3

Due specchi (A e B) formano un angolo a . Un raggio di luce viene riflesso da A e successivamente da B. Determinare l'angolo g di deflessione del raggio in funzione di a e verificare che esso è indipendente dall'angolo di incidenza del raggio su A. Determinare



poi l'angolo α in modo che il raggio incidente venga deflesso, dal sistema formato dai due specchi, di $g = 180^\circ$.

Soluzione:

Supponiamo che il raggio incidente giunga sul primo specchio A secondo un angolo di incidenza q_A . La direzione del raggio riflesso sarà ruotata, rispetto alla direzione del raggio incidente, di un angolo $g_A = 180^\circ - 2q_A$ (il che è evidente dalla figura considerando il

prolungamento del raggio oltre lo specchio). Analogamente la seconda riflessione apporterà una ulteriore rotazione antioraria di un angolo $g_B = 180^\circ - 2q_B$, dove q_B è l'angolo di incidenza sullo specchio B. L'angolo di rotazione totale si può scrivere dunque come

$$\gamma = \gamma_A + \gamma_B = 360^\circ - 2(q_A + q_B).$$

L'angolo q_B può poi essere determinato con considerazioni geometriche sul triangolo formato dai due specchi e dal raggio intermedio. Imponendo infatti che la somma degli

angoli interni di tale triangolo valga 180° si ottiene facilmente

$$q_A + q_B = 180^\circ - a,$$

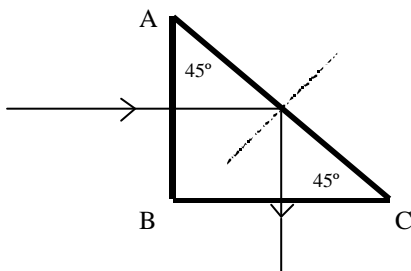
da cui

$$g = 2a.$$

Si osserva cioè che la deviazione totale è sempre doppia dell'angolo a ed è indipendente dall'angolo di incidenza q_A . A questo punto, se si vuole una deflessione totale $g = 180^\circ$ basta porre $a = 90^\circ$. Osserviamo che in questo modo si costruisce un sistema che riflette i raggi luminosi in direzione uguale a quella di partenza indipendentemente da quale sia questa direzione e su un principio simile si basano i catarifrangenti delle autovetture.

Esercizio 13.4

Qual è il minimo valore dell'indice di rifrazione di un prisma di 45° impiegato per deviare un fascio di luce ad angolo retto mediante riflessione totale?



Soluzione:

Il raggio entra nel prisma perpendicolarmente alla faccia AB e quindi non subisce deviazioni. Forma poi un angolo di incidenza di 45° con la normale alla faccia AC. Perché il fascio venga riflesso totalmente da AC occorre che l'angolo critico sia $q_c < 90^\circ$. Dopo questa riflessione totale il fascio luminoso attraversa la faccia BC senza ulteriori deformazioni ed emerge dal prisma deviato ad angolo retto rispetto al raggio incidente. Pertanto il valore minimo dell'indice di rifrazione è dato dalla condizione di riflessione totale sulla faccia AC

$$n_{\text{prisma}} \sin 45^\circ = n_{\text{aria}} \sin 90^\circ.$$

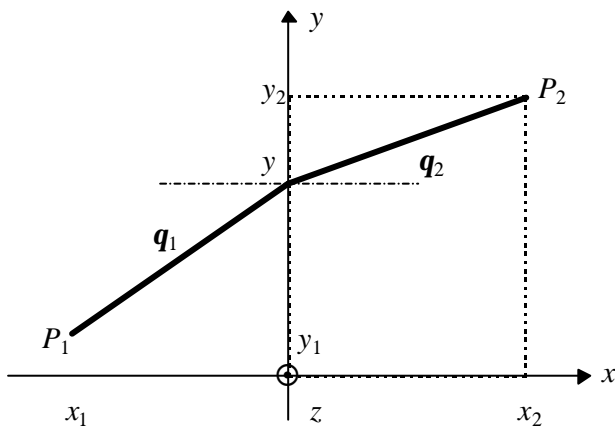
Tenendo conto che $n_{\text{aria}} \approx 1$ abbiamo dunque

$$n_{\text{prisma}} \approx \frac{1}{\sin 45^\circ} \approx 1.414.$$

Esercizio 13.5

Si definisce cammino ottico di un raggio luminoso il prodotto della lunghezza del cammino geometrico l percorso dal raggio per l'indice di rifrazione n del mezzo (è un oggetto proporzionale al tempo che la luce impiega a fare il percorso). Si dimostra che le leggi dell'ottica geometrica si possono ricavare imponendo che il cammino ottico di un raggio per andare da un punto P_1 a un punto P_2 fissati sia stazionario, ovvero minimo o massimo (principio di Fermat). Da questo principio deriva in particolare il fatto che in un mezzo con indice di rifrazione uniforme il percorso dei raggi luminosi sia rettilineo (minimo).

Derivare la legge della rifrazione di Snell a partire dal principio di Fermat, ipotizzando che il punto P_1 si trovi in un mezzo con indice di rifrazione n_1 e che il punto P_2 si trovi in un mezzo con indice di rifrazione n_2 .

**Soluzione:**

Dallo schema di figura si vede che il piano $y-z$ (asse z supposto uscente dalla pagina) viene assunto come separatore dei due mezzi omogenei con indici di rifrazione n_1 e n_2 rispettivamente. Fissati il punto di partenza P_1 nel mezzo 1, con coordinate $(x_1, y_1, 0)$, e il punto di arrivo P_2 nel mezzo 2, con coordinate $(x_2, y_2, 0)$, per quanto detto nel testo, il percorso del raggio nei mezzi omogenei deve essere rettilineo e quindi le uniche due variabili rispetto a cui si può rendere stazionario il cammino ottico sono l'ordinata y e la quota z del raggio alla separazione dei due mezzi. Calcolando le lunghezze l_1 e l_2 del raggio nei due mezzi, il cammino ottico si può scrivere come

$$f(y, z) = n_1 l_1 + n_2 l_2 = n_1 \sqrt{x_1^2 + (y - y_1)^2 + z^2} + n_2 \sqrt{x_2^2 + (y - y_2)^2 + z^2}.$$

Per cercare il punto stazionario calcoliamo poi le derivate rispetto a y e z e imponiamo che siano uguali a zero:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y, z) = n_1 \frac{y - y_1}{\sqrt{x_1^2 + (y - y_1)^2 + z^2}} + n_2 \frac{y - y_2}{\sqrt{x_2^2 + (y - y_2)^2 + z^2}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(y, z) = n_1 \frac{z}{\sqrt{x_1^2 + (y - y_1)^2 + z^2}} + n_2 \frac{z}{\sqrt{x_2^2 + (y - y_2)^2 + z^2}} = 0$$

La seconda condizione implica che sia $z = 0$, ovvero che il punto di intersezione del raggio con il piano di separazione dei due mezzi sia complanare con P_1 e P_2 . Inoltre è facile vedere dalla figura che nella prima equazione le quantità che moltiplicano gli indici di rifrazione corrispondono rispettivamente ai seni degli angoli \mathbf{q}_1 e $-\mathbf{q}_2$, da cui

$$n_1 \sin \mathbf{q}_1 - n_2 \sin \mathbf{q}_2 = 0,$$

che è proprio la legge di Snell della rifrazione.

Esercizi proposti

Esercizio 13.6

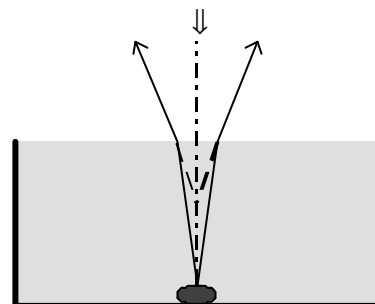
Si consideri il sistema descritto nell'esercizio 13.1. Si è dimostrato che il raggio entrante e il raggio uscente dalla lastra di indice di rifrazione n_2 sono paralleli. Determinarne la distanza d in funzione dello spessore t della lastra e dell'angolo di incidenza \mathbf{q}_1 , nell'ipotesi che quest'ultimo sia piccolo.

Risultato:

$$d \approx t \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) \mathbf{q}_1$$

Esercizio 13.7

Si consideri il sistema descritto nell'esercizio 13.2 e riportato qui a fianco, con un osservatore posto nel punto indicato dal simbolo \Downarrow . A causa della rifrazione l'osservatore vede il corpo luminoso a una profondità inferiore a quella reale. Determinare tale profondità nelle stesse ipotesi dell'esercizio 13.2 (profondità del recipiente = 100cm, $n_{\text{acqua}} \approx 4/3$, $n_{\text{aria}} \approx 1$).



Suggerimento: l'immagine apparente (virtuale) dell'oggetto luminoso si deve trovare nel punto di incontro dei prolungamenti in acqua (tratteggiati in figura) dei due raggi uscenti in aria. Infatti l'osservatore percepisce la profondità di un punto tramite l'angolo formato dai due raggi provenienti dal punto e incidenti sui suoi occhi e tale angolo deve

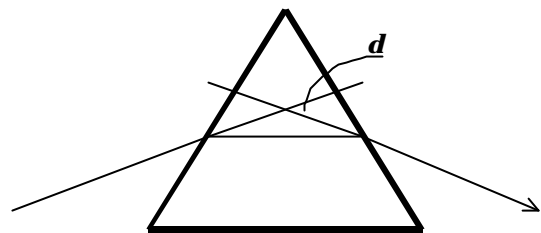
essere piccolo. Verificare che se l'angolo è piccolo la profondità apparente non dipende dall'angolo stesso.

Risultato:

$$h_{\text{apparente}} = h_{\text{reale}} \frac{n_{\text{aria}}}{n_{\text{acqua}}} \approx 100\text{cm} \times 0.75 = 75\text{cm} .$$

Esercizio 13.8

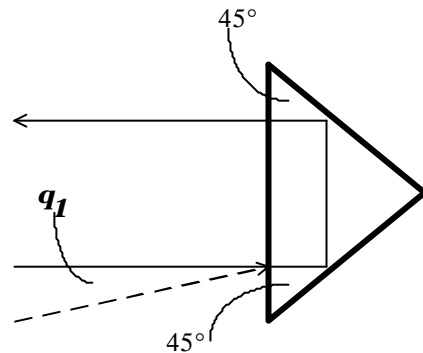
Si consideri un raggio luminoso che attraversa un prisma triangolare equilatero, di indice di rifrazione $n = 1.5$, parallelamente a una faccia, così come indicato nella figura qui a fianco. Determinare l'angolo di deflessione d tra il raggio entrante e il raggio uscente dal prisma.



Risultato: $d \approx 37.18^\circ$

Esercizio 13.9

Si consideri un prisma a 45° di indice di rifrazione $n = 1.5$ e utilizzato in riflessione totale, come indicato nello schema qui a fianco. Determinare l'angolo critico q_c e verificare che la condizione di riflessione totale è verificata per il raggio disegnato in figura come linea intera. Se ora si fa incidere un raggio non perpendicolare ma con un angolo di incidenza q_1 (linea tratteggiata), determinare l'angolo di incidenza massimo $q_{1\text{max}}$ per cui si ha ancora riflessione totale e verificare che quando questa è soddisfatta il raggio uscente è sempre parallelo a quello entrante.



Risultato:

$$q_c = \arcsen \frac{1}{n} \approx 41.81^\circ$$

$$q_{1\text{max}} = \arcsen \frac{\text{sen}(45^\circ - q_c)}{\text{sen} q_c} \approx 4.79^\circ$$

Esercizio 13.10

Utilizzando il principio di Fermat, introdotto nell'esercizio 13.5, derivare la legge della riflessione, ipotizzando che un raggio luminoso parta da un punto P_1 e arrivi a un punto P_1' , entrambi nel mezzo con indice di rifrazione n_1 , passando per un punto della superficie riflettente di coordinate da determinarsi.