Esercizi svolti

Esercizio 14.1

La lunghezza d'onda in aria della luce gialla del sodio è $l_0 = 589$nm. Determinare:
a) la sua frequenza *f*;
b) la sua lunghezza d'onda l in un vetro il cui indice di rifrazione è $n = 1.52$;
c) la sua velocità *v* in questo vetro.

Soluzione:

a) La frequenza è data dall'espressione

$$f = \frac{c}{l_0} = \frac{3 \cdot 10^8 \,\mathrm{ms}^{-1}}{5.89 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} \approx 5.09 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz}\,.$$

b) La lunghezza d'onda in un mezzo è legata all'indice di rifrazione del mezzo stesso dalla relazione

$$l = \frac{l_0}{n} = \frac{589\,\mathrm{nm}}{1.52} = 387.5\,\mathrm{nm}\,.$$

c) La velocità nel vetro si ricava infine utilizzando la definizione di indice di rifrazione

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}}{1.52} \approx 1.97 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}\,.$$

Osserviamo che sia la lunghezza d'onda che la velocità sono riscalate dello stesso fattore, che è l'indice di rifrazione. I valori di entrambe queste grandezze sono inferiori ai corrispondenti valori nel vuoto.

Esercizio 14.2

Uno schermo dista $D = 1.20$m da una sorgente a doppia fenditura. La distanza tra le due fenditure è di $d = 0.03$mm. La frangia chiara del secondo ordine si trova a $y_2 = 4.5$cm dalla linea centrale. Determinare:
a) la lunghezza d'onda della luce;
b) la distanza tra frange chiare adiacenti.

Soluzione:

a) Poiché la distanza del massimo di ordine *m* dalla linea centrale è data, nell'ipotesi $D >> y_m$ (che risulta verificata), dalla relazione

$$y_m = m\, l \frac{D}{d}\,,$$

si ottiene, per la lunghezza d'onda, nel caso $m = 2$

$$l = \frac{y_m d}{mD} = \frac{y_2 d}{2D} = \frac{3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}\ 4.5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{2 \cdot 1.2\,\mathrm{m}} = 562.5\,\mathrm{nm}\,.$$

b) Secondo la relazione introdotta al punto (a) le frange risultano equispaziate, per cui è facile vedere che la distanza tra frange adiacenti deve essere

$$\Delta y = \frac{y_m}{m} = \frac{y_2}{2} = 2.25\text{cm} .$$

Esercizio 14.3

Una sorgente emette luce di due lunghezze d'onda nella regione del visibile, date da $\lambda = 430\text{nm}$ e $\lambda' = 510\text{nm}$. La sorgente è usata in un esperimento di interferenza da doppia fenditura in cui le fenditure distano $d = 0.025\text{mm}$ e lo schermo è posto a $D = 1.50\text{m}$. Trovare la separazione tra le frange chiare del terzo ordine corrispondenti alle due lunghezze d'onda.

Soluzione:

I valori delle posizioni delle frange chiare del terzo ordine per le due lunghezze d'onda sono dati da

$$y_3 = 3\lambda \frac{D}{d} = 7.74\text{cm}$$

$$y_3' = 3\lambda' \frac{D}{d} = 9.18\text{cm} .$$

Quindi la separazione tra le frange risulta essere

$$\Delta y = y_3' - y_3 = 3(\lambda' - \lambda)\frac{D}{d} = 1.44\text{cm} .$$

Esercizio 14.4

Calcolare lo spessore minimo della pellicola di una bolla di sapone ($n = 1.46$) tale che si abbia interferenza costruttiva nella luce riflessa quando la pellicola è illuminata con luce di lunghezza d'onda nel vuoto pari a $\lambda_0 = 600\text{nm}$.

Soluzione:

La condizione di intereferenza costruttiva è data dalla relazione

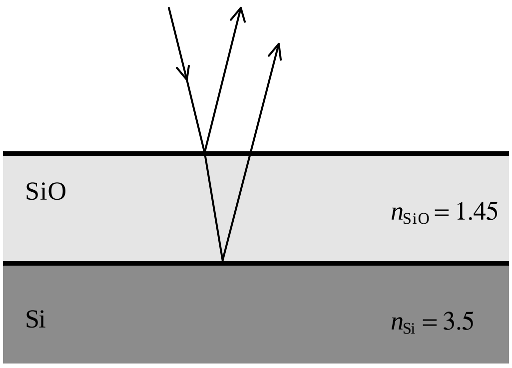
$$2ns = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda_0 ,$$

dove s è lo spessore della pellicola e m un numero naturale qualsiasi. Lo spessore minimo si ha ovviamente per m = 0, quindi

$$s = \frac{\lambda_0}{4n} = \frac{600\text{nm}}{4 \cdot 1.46} \approx 102.7\text{nm} .$$

Esercizio 14.5

Una cella solare di silicio ($n_{Si} = 3.5$) è ricoperta da un sottile strato di monossido di silicio ($n_{SiO} = 1.45$). Determinare lo spessore minimo dello strato in grado di produrre riflessione minima ad una lunghezza d'onda di $\lambda_0 = 550$nm, cioè al centro dello spettro solare.



Soluzione:
La luce riflessa è minima quando i due raggi soddisfano la condizione di interferenza distruttiva. Occorre però notare che la situazione è differente rispetto al caso di una lamina immersa in aria. Infatti entrambi i raggi subiscono uno sfasamento di π, in quanto vengono riflessi da un mezzo con indice di rifrazione maggiore di quello del mezzo in cui si propagano. In questo caso la condizione di interferenza distruttiva è dunque

$$2s = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda \,,$$

dove s è lo spessore dello strato, m un generico numero naturale e λ la lunghezza d'onda della luce nell'ossido. Il minimo spessore si ha per $m = 0$, da cui

$$s = \frac{\lambda}{4}$$

(si parla tecnicamente di strati antiriflesso a lambda-quarti). Conoscendo la lunghezza d'onda λ_0 nel vuoto e l'indice di rifrazione dell'ossido possiamo infine scrivere

$$s = \frac{\lambda_0}{4n_{SiO}} = \frac{550\,\text{nm}}{4 \cdot 1.45} \approx 94.8\,\text{nm}$$

Esercizio 14.6

Una fenditura di larghezza $b = 0.1$mm viene illuminata da raggi paralleli di lunghezza d'onda $\lambda = 600$nm e si osservano le bande di diffrazione prodotte su uno schermo distante $D = 40$cm dalla fenditura. Quanto dista la terza banda scura dalla banda luminosa centrale?

Soluzione:
Per una fenditura singola la m-esima banda scura viene individuata dalla relazione $b\,\text{sen}\theta = m\lambda$, per cui

$$\text{sen}\,\theta = \frac{m\lambda}{b} = \frac{3 \cdot 6 \times 10^{-7}\,\text{m}}{10^{-4}\,\text{m}} = 0.018\,.$$

Poichè θ è piccolo è possibile approssimare la funzione senθ con tg$\theta = y_m/D$, dove y_m è la distanza tra il la m-esima banda scura ed il centro dello schermo e D è la distanza tra la fenditura e lo schermo. Si ottiene:

$$y_3 = D\,tg\theta \approx 40\,\text{cm} \cdot 0.018 = 0.72\,\text{cm}$$

Esercizio 14.7

In una figura di diffrazione la distanza fra il primo minimo di destra e il primo minimo di sinistra è di 5.2mm. Lo schermo sul quale si forma la figura dista $D = 80\text{cm}$ dalla fenditura e la lunghezza d'onda della luce è $\lambda = 546\text{nm}$. Calcolare la larghezza della fenditura.

Soluzione:

La distanza della prima banda scura dal centro dello schermo è

$$y_1 = \frac{5.2\,\text{mm}}{2} = 2.6\text{mm}$$

(i minimi laterali sono simmetrici).

Poiché $y_1 << D$ si considerano angoli piccoli ed è quindi possibile scrivere

$$\text{sen}\,\theta \approx \tan\theta = \frac{y_1}{D} = \frac{2.6\times 10^{-3}\,\text{m}}{80\times 10^{-2}\,\text{m}} = 3.25\times 10^{-3},$$

dove θ è come al solito l'angolo formato dai raggi interferenti con la normale allo schermo.

Dalla legge della diffrazione è ora possibile ricavare la larghezza b della fenditura nel seguente modo:

$$b = \frac{\lambda}{\text{sen}\,\theta} = \frac{546\times 10^{-9}\,\text{m}}{3.25\times 10^{-3}} = 0.168\text{mm}\,.$$

Esercizi proposti

Esercizio 14.8

L'esperimento di Young (interferenza da due fenditure) viene compiuto con la luce verde di lunghezza d'onda $\lambda = 514.5\text{nm}$ fornita da un laser ad argon. Se la distanza tra le due fenditure è $d = 1\text{mm}$, determinare la separazione Δy tra due frange successive su uno schermo posto a distanza $D = 3\text{m}$ dalle fenditure. Questa separazione dipende dal numero d'ordine delle frange?

Risultato:

$\Delta y \approx 1.54\text{mm}$

La spaziatura dipende a rigore dal numero d'ordine della frangia, ma è circa costante per le frange più vicine al centro dello schermo.

Esercizio 14.9

Un fascio di luce monocromatica con lunghezza d'onda (nel vuoto) $\lambda_0 = 500\text{nm}$ incide normalmente sopra una pellicola di spessore $d = 1\mu\text{m}$ ed indice di rifrazione $n = 1.4$. Una parte della luce che entra nella pellicola viene poi riflessa dalla seconda superficie. Si calcoli:

a) il numero N di lunghezze d'onda contenute nel cammino percorso dalla luce nella pellicola, dal punto di incidenza al punto di uscita;

b) lo sfasamento φ tra le onde che entrano e quelle che escono.

Risultato:
a) $N = 5.6$
b) $\varphi = 1.2\pi$

Esercizio 14.10

La superficie di una lastra di vetro è resa invisibile per la luce gialla del mercurio (lunghezza d'onda nel vuoto $\lambda_0 = 578$nm) in condizioni di incidenza normale, facendo depositare sulla superficie stessa una sottile pellicola avente indice di rifrazione $n = 1.55$. L'indice di rifrazione del vetro vale circa 1.5. Si calcoli il minimo spessore s che deve avere la pellicola.

Risultato:
$s \approx 0.186\mu$m

Esercizio 14.11

Si consideri un esperimento di diffrazione da una fenditura investita da luce bianca incidente normalmente. Si determini la lunghezza d'onda λ' della componente il cui terzo minimo di intensità coincide con il secondo minimo della luce rossa di lunghezza d'onda $\lambda = 650$nm.

Risultato:
$\lambda' \approx 433$nm