Appunti su matrici e autovalori

Scienze Naturali 2004-05

1 Le matrici

Chiamiamo **matrici** delle tabelle finite di elementi di un insieme $\mathcal{N}$ (in genere, ma non sempre, un insieme di numeri) posti su "'righe e colonne"'. Nel seguito, fino a diverso avviso $\mathcal{N} = \mathbf{R}$ sarà sottinteso.

Esempio 1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & \pi & 5 \end{pmatrix}$ *è una matrice 2 righe e 3 colonne, brevemente* 2×3 *ad elementi in* $\mathbf{R}$.

$\mathcal{M}_{m,n}$ è l'insieme di tutte le matrici $m \times n$ ad elementi in $\mathcal{N}$. Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ si può scrivere come $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e a_{ij} è l'elemto che si trova all'incrocio della riga i e della colonna j.

Esempio 2. *Per* $m = 3$ *e* $n = 4$ *si ha* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Due matrici $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}$ e $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m'n'}$ coincidono se hanno le stesse dimensioni $m = m'$ e $n = n'$ e gli elementi di posto corrispondente sono uguali ossia se $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni coppia i, j.

Esempio 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *sono diverse.*

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sono diverse.*

Le matrici di $\mathcal{M}_{nn}$ si dicono **matrici quadrate**. Se $A = (a_{ij})$ è una matrice quadrata, gli elementi a_{ii} che si trovano su righe e colonne con indice uguale formano la **diagonale principale** di A.

2 Operazioni tra matrici

Somma di matrici

La somma è definita solo tra matrici aventi le stesse dimensioni e si esegue "'posto per posto"'.

In simboli, se $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}$, la loro somma è data da:

$$A + B = C \quad \text{dove} \quad c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

La somma di matrici gode delle seguenti proprietà:

1. **Associativa e commutativa.**
2. **Esiste l'elemento neutro** rispetto alla somma ossia la matrice nulla $\mathbf{0}$ di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ che ha 0 in ogni posto ed è tale che $A + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
3. **Esiste l'opposto** di ogni matrice $A = (a_{ij})$ ossia una matrice $-A$ tale che $A + (-A) = \mathbf{0}$ che è $-A = (-a_{ij})$.

Nota bene: il simbolo $\mathbf{0}$ può indicare tante matrici di dimensioni diverse, tutte fatte da soli zeri. Non usiamo simboli diversi per distinguerle perchè di volta in volta sarà chiaro dal contesto quale stiamo considerando.

Prodotto per uno scalare

Siano A una matrice e λ un numero reale. Col simbolo λA indicheremo la matrice B, con le stesse dimensioni di A, ottenuta moltiplicando per λ ogni elemento di A:

$$\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

Diremo che due matrici non nulle con le stesse dimensioni A e B sono **proporzionali** se $B = \lambda A$ per un qualche $\lambda \in \mathbf{R}$.

Prodotto righe per colonne

Consideriamo innanzi tutto una "'matrice riga"' e una "'matrice colonna"' della stessa lunghezza:

$R = (a_1\, a_2\, \dots\, a_n)$ e $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$. Il loro prodotto RC è il numero $a_1b_1 + a_2b_2 \dots a_nb_n$.

Se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}$ e $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{m',n'}$ sono due matrici di dimensioni tali che $n = m'$, definiamo il loro prodotto $A \cdot B$ come la matrice P di dimensioni $m \times n'$ in cui l'elemento di posto ik è il prodotto della riga i-esima di A e della colonna k-esima di B ossia

$$p_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots a_{im}b_{mk}.$$

Esempio 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot\pi + 2\cdot(-3) + 3\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ -1\cdot\pi + 0\cdot(-3) + 5\cdot 1 & -1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 5\cdot 1 & -1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 5\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi - 3 & 5 & 4 \\ -\pi + 5 & 5 & -12 \end{pmatrix}$$

Nota bene: La somma è definita solo tra matrici con le stese dimensioni, mentre il prodotto è definito solo se le righe della prima matrice sono lunghe come le colonne della seconda.

Il prodotto righe per colonne **non è commutativo**. Infatti:

- può darsi che $A \cdot B$ sia definito, ma $B \cdot A$ no;
- se anche $A \cdot B$ e $B \cdot A$ sono entrambe definite, possono avere dimensioni diverse;
- se anche $A \cdot B$ e $B \cdot A$ sono entrambi definite e hanno le stesse dimensioni (questo accade se A, B sono matrici quadrate con le stesse dimensioni), i due prodotti possono comunque essere matrici diverse.

Esempio 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ *mentre* $B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Nel seguito ometteremo il simbolo $\cdot$ per il prodotto.

Anche se non è commutativo, valgono comunque le seguenti proprietà del prodotto:

1. **Proprietà associativa:** se A, B, C sono matrici tali che AB e BC sono definite, allora si può fare il prodotto delle tre e vale l'uguaglianza $A\,(BC) = (AB)\,C$.

2. **Proprietà distributive:** se A, B, C sono matrici tali che $A\,(B+C)$ è definito, allora si ha $A\,(B+C) = AB + AC$ (e analogamente, $(B+C)\,A = BA + CA$ ogni volta che le operazioni sono definite).

3. **Esistenza dell'identità moltiplicativa:** se $\mathcal{I}_n$ è la matrice che ha elementi tutti nulli, tranne quelli sulla diagonale principale che valgono 1, allora ogni volta che il prodotto è possibile si ha $A\mathcal{I}_n = A$ e $\mathcal{I}_n B = B$.

Esempio 6. *Le matrici identità* 2×2 *e* 3×3 *sono:* $\mathcal{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nel seguito scriveremo semplicemente $\mathcal{I}$ omettendo l'indece n quando la dimesnione sarà chiara dal contesto.

Esempio 7. *Consideriamo le matrici* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Se eseguiamo i prodotti nei due modi possibili troviamo* $AB = BA = \mathcal{I}$.

Se A e B sono matrici quadrate $n \times n$ e soddisfano le condizioni $AB = \mathcal{I}$ e $BA = \mathcal{I}$, diciamo che B è **l'inversa** di A (e A è l'inversa di B): in tal caso si scrive $B = A^{-1}$.

Importanti differenze rispetto alle operazioni tra numeri sono mostrate dagli esempi seguenti.

Esempio 8. *Consideriamo le due matrici* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, *che sono entrambe diverse dalla matrice nulla* $\mathbf{0}$. *Eseguendo il prodotto si ottiene:* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

Diciamo quindi che **tra le matrici non vale la legge di annullamento del prodotto.**

Esempio 9. *Consideriamo le matrici* A *e* B *dell'esempio precedente e la matrice* $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, *che sono tutte diverse da* $\mathbf{0}$. *Eseguendo i prodotti si ottiene:* $AB = AC$ *(perchè in entrambi i casi si trova* $\mathbf{0}$*), anche se* $B \neq C$.

Diciamo quindi che **tra le matrici non vale la legge di cancellazione.**

Esempio 10. *Consideriamo la matrice* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(che è diversa da* $\mathbf{0}$*) e un'altra matrice qualsiasi* $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Il prodotto delle due è:* $DX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ *che non può in ogni caso essere la matrice identità.*

Quindi non tutte le matrici hanno l'inversa. In generale soltanto le matrici quadrate **possono** avere l'inversa ed in tal caso ne hanno una sola.

Esempio 11. *La matrice* 2×2 *generica del tipo* $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *ha inversa se e soltanto se il numero* $\Delta = ad - bc$ *non è nullo. Si può infatti verificare con calcoli diretti che se* $\Delta \neq 0$*, allora la matrice* $Y = \begin{pmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{pmatrix}$ *è l'inversa di* X*.*

3 Il determinante di una matrice quadrata

Il numero Δ che abbiamo introdotto alla fine del paragrafo precedente si chiama determinante della matrice X. Più in generale, ad ogni matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ si può associare un numero che indicheremo con $det(A)$, il suo **determinante**, con la proprietà:

la matrice A ha inversa se e soltanto se $det(A) \neq 0$.

Il determinante può essere definito in modo intrinseco; noi ci limiteremo però a dire come può essere calcolato. Vedremo alcuni modi diversi per calcolare $det(A)$ e quindi è importante sottolineare il fatto, tutt'altro che evidente, che tutti questi modi diversi portano allo stesso risultato.

Sviluppo del determinante rispetto a una riga

Sia $A = (a_{ij})$. Fissiamo una riga qualsiasi di A: sia la riga $i = k$. Allora:

$$det(A) = (-1)^{k+1} \left[a_{k1} det(A_{k1}) - a_{k2} det(A_{k2}) + \cdots + (-1)^{n-1} a_{kn} det(A_{kn}) \right]$$

dove la somma è a segni alterni e A_{kj} è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene da A "'cancellando"' la riga k-esima e la colonna j-esima.

Si ripete quindi il procedimento con le sottomatrici ottenute, fino ad arrivare a sottomatrici 2×2 il cui determinante si calcola direttamente con la formula vista.

Esempio 12. *Sviluppiamo il seguente determinante rispetto alla terza riga:*

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{3+1} \left[1 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= (-2 - 0) - (-1 - 3) + 2(0 - 6) = -10$$

Sviluppo del determinante rispetto a una colonna

Sia $A = (a_{ij})$. Fissiamo una colonna qualsiasi di A: sia la colonna $j = h$. Allora:

$$det(A) = (-1)^{1+h} \left[a_{1h} det(A_{1h}) - a_{2h} det(A_{2h}) + \cdots + (-1)^{n-1} a_{nh} det(A_{nh}) \right]$$

dove la somma è a segni alterni e A_{ih} è, come prima, la matrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene da A "'cancellando"' la riga i-esima e la colonna h-esima.

Si ripete quindi il procedimento con le sottomatrici ottenute, fino ad arrivare a sottomatrici 2×2.

Esempio 13. *Sviluppiamo il determinante della matrice A dell'esempio precedente rispetto alla seconda colonna:*

$$det(A) = (-1)^{1+2}\left[2\cdot det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 0\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 1\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= -2(6+1) + 0 - 1(-1-3) = -10.$$

Come si può osservare dal confronto di questi due metodi, il determinante non cambia se si scambiano ordinatamente le righe di una matrice con le sue colonne, ottenendo la cosiddetta **matrice trasposta** ${}^tA$:

Esempio 14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Proprietà del determinante

Il determinante di una matrice gode di molte importanti proprietà. Ne elenchiamo alcune. Su di esse si basa il metodo migliore per calcolare i determinanti, conveniente soprattutto quando le dimensioni sono grandi, che sarà spiegato nel prossimo paragrafo.

1. **Se una matrice ha una riga oppure una colonna tutta di zeri, il suo determinante è** 0. (Basta sviluppare rispetto alla riga o alla colonna tutta nulla).

2. **Se si moltiplicano per una stessa costante λ tutti gli elementi di una riga o di una colonna, il determinante risulta moltiplicato per λ.**

3. **Se si scambiano tra loro due righe (oppure due colonne) il determinante cambia segno.**

4. **Se una matrice ha due righe oppure due colonne uguali (o proporzionali), allora il determinante è** 0. Infatti scambiando tra loro le righe (o le colonne) uguali, il determinante deve cambiare segno (per il punto 3)) ma anche rimanere invariato (perchè la matrice rimane invariata). L'unico numero uguale al suo opposto è 0.

Osserviamo che nel calcolo di un determinante conviene sempre scegliere lo sviluppo rispetto ad una riga o ad una colonna che contengano tanti zeri, così da ridurre al minimo il numero di determinanti di sottomatrici che si devono calcolare.

Per questo motivo è utile trasformare la matrice iniziale in un'altra che abbia lo stesso determinante, ma che contenga molti più elementi nulli. Le proprietà precedenti permettono appunto di operare trasformazioni su una matrice senza alterare il suo determinante o almeno con alterazioni conosciute a priori. Questo metodo va sotto il nome di **riduzione** della matrice.

4 Riduzione di una matrice.

Questo metodo può essere adoperato sempre, anche nel caso di matrici non quadrate, poichè ha molteplici applicazioni oltre a quella del calcolo dei deteminanti.

Consideriamo una generica matrice A anche non quadrata. Operiamo su di essa mediante le seguenti trasformazioni sulle righe:

i) moltiplicare tutti gli elementi di una riga per una stessa costante λ;

ii) scambiare tra loro due righe;

iii) sommare ad ogni elemento di una riga il corrispondente elemento di un'altra fissata riga moltiplicato per una costante λ.

Una opportuna sequenza di queste trasformazione sulle righe di una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ permette di ottenere una matrice $A' \in \mathcal{M}_{m,n}$ **ridotta** ossia una matrice A' tale che:

in ogni riga che non sia tutta nulla vi è un elemento non nullo al di sotto del quale vi sono solo zeri.

Si parla di **matrice ridotta a scalini** se la matrice è ridotta e gli elementi speciali di ciascuna riga si incontrano procedendo da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso.

Esempio 15. *Esempio di matrice ridotta con elementi speciali evidenziati:* $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -\mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esempio di matrice ridotta a scalini: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Algoritmo per trasformare una matrice in una a scalini

- Si cerca la prima colonna non tutta nulla.
- Si scambiano se necessario le righe in modo che in quella colonna l'elemento più in alto sia non nullo.
- Si aggiunge ad ogni riga successiva un opportuno multiplo della prima in modo da ottenere zeri al di sotto di quell'elemento.
- Si procede allo stesso modo sulle righe e colonne successive, senza più alterare o usare le righe sovrastanti.

Quando il procedimento termina si ottiene una matrice a scalini.
Applicazioni:

1. Il determinante di una matrice quadrata a scalini è il prodotto degli elementi della diagonale principale.
2. Per calcolare il determinante di una matrice si procede alla sua riduzione, tenendo conto di un cambio di segno ogni volta che due righe vengono scambiate tra loro.
3. Per calcolare l'inversa di una matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ (con determinante non nullo) si affianca alla matrice A la matrice $\mathcal{I}_n$ e si opera sulle righe con le trasformazioni i), ii) e iii) in modo che al posto di A si ottenga $\mathcal{I}_n$. La matrice $n \times n$ che si trova dove prima c'era $\mathcal{I}_n$ è l'inversa di A.
4. Per risolvere i sistemi lineari o i sistemi di equazioni differenziali lineari, si riduce la matrice dei coefficienti.

5 Sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \quad\quad \ldots\ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

può essere pensato in modo matriciale come $AX = B$ dove $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ è la matrice dei coefficienti, $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ è la colonna delle incognite e $B \in \mathcal{M}_{m,1}$ è la colonna dei termini noti:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sia $\overline{A}$ la matrice $A|B$ ottenuta affiancando ad A una ulteriore colonna data da B. Le operazioni di riduzione su $\overline{A}$ non alterano le soluzioni del sistema.

Notiamo che se A è una matrice invertibile, il sistema $AX = B$ avrà una sola soluzione data da:

$$X = A^{-1}B.$$

Se in particolare il sistema lineare è omogeneo, ossia la matrice dei termini noti B è tutta nulla, allora $AX = \mathbf{0}$ avrà la sola soluzione nulla $X = \mathbf{0}$ quando A ha inversa e quindi quando $det(A) \neq 0$, mentre avrà anche soluzioni non nulle quando $det(A) = 0$.

6 Autovalori e autovettori di una matrice quadrata

Da ora in poi chiameremo vettore colonna o brevemente **vettore** una matrice con una sola colonna.

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e sia $\mathbf{v}$ un vettore $n \times 1$. Diciamo che $\mathbf{v}$ è un **autovettore** della matrice A se il prodotto $A\mathbf{v}$ è un vettore proporzionale a $\mathbf{v}$. In formule: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Se esiste un tale vettore non nullo, diremo che λ è un **autovalore** di A.

In altri termini un autovettore è una soluzione del sistema lineare $AX = \lambda X$. Portando tutte le indeterminate a primo membro, otteniamo un sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti $A' = A - \lambda\mathcal{I}_n$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè λ sia autovalore di A è allora:

$$det(A - \lambda\mathcal{I}_n) \neq 0.$$

Le soluzioni dell'equazione $det(A - t\mathcal{I}_n) = 0$ nell'incognita t sono quindi gli autovalori di A; se λ è una di tali soluzioni, gli autovettori relativi si determinano risolvendo il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda\mathcal{I}_n)X = \mathbf{0}$.

Esempio 16. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. *Allora*

$$det(A - t\mathcal{I}_2) = det \begin{pmatrix} 1-t & -5 \\ -3 & 3-t \end{pmatrix} = t^2 - 4t - 12.$$

Le soluzioni di $det(A - t\mathcal{I}_2) = 0$ *sono* $\lambda_1 = -2$ *e* $\lambda_2 = 6$. *Gli autovettori relativi all'autovalore* -2*, ossia le soluzioni* X *di* $(A + 2\mathcal{I}_2)X = \mathbf{0}$*, sono* $k\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$*; gli autovettori relativi a* 6 *ossia le soluzioni di* $(A - 6\mathcal{I}_2)X = \mathbf{0}$ *sono* $h\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Talvolta il polinomio $det(A - t\mathcal{I}_n) = 0$ non ha soluzioni in $\mathbf{R}$. Conviene allora calcolare le sue soluzioni **complesse** ossia nell'insieme dei numeri complessi $\mathbf{C}$.

Potenze di una matrice

Nelle applicazioni può essere necessario calcolare potenze A^n di una matrice quadrata A con un esponente n molto alto. Non conviene eseguire gli n prodotti successivi AA, A^2A, ..., $A^{n-1}A$, ma il calcolo può essere notevolmente più breve se si ricorre a uno dei seguenti risultati.

TEOREMA *(***Cayley-Hamilton***) Se* $F(t)$ *è il* ***polinomio caratteristico*** *della matrice quadrata* A*, ossia il polinomio* $det(A - t\mathcal{I}_n)$*, allora* $F(A) = \mathbf{0}$.

Per calcolare A^n si divide il polinomio t^n per $F(t)$ ottenendo $t^n = F(t)Q(t) + R(t)$ dove il polinomio resto $R(t)$ ha grado $\leq n - 1$. Quindi $A^n = R(A)$.

TEOREMA *Se* $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ *possiede* n *autovalori diversi (reali oppure complessi), allora esiste una matrice* P *tale che* $A = PDP^{-1}$*, dove* D *è una matrice* ***diagonale*** *ossia ha tutti elementi nulli tranne quelli sulla diagonale principale.*

La matrice D ha sulla diagonale principale gli n autovalori distinti di A; la matrice P ha come colonne un autovettore per ognuno degli n autovalori di A nello stesso ordine con cui compaiono in D.

Si ha quindi $A^n = PD^nP^{-1}$ dove D^n si ottiene semplicemente elevando alla potenza n-esima gli elementi della diagonale di D.

7 Applicazioni alla dinamica delle popolazioni

Esempio 17. *Una certa popolazione animale ha un ciclo vitale che in condizioni ottimali dura circa 15 anni.*

Suddividiamo la popolazioni (considerando solo le femmine) in tre periodi: da 0 a 5, da 5 a 10 e da 10 a 15. Indichiamo con $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ *la consistenza numerica delle tre fasce d'età nell'istante* t*. Sia* $t = 0$ *l'istante iniziale di osservazione e* $t = 1$ *indichi un periodo di 5 anni.*

Indichiamo poi con a_i *la percentuale di femmine nella fascia di età* $i = 1, 2, 3$ *che ragiungono la fascia di età sucessiva (ovviamente* $a_3 = 0$*) e con* b_i *il numero medio di figlie nate durante un periodo da ogni femmina nella* $i - esima$ *fascia d'età.*

Le consistenze numeriche dei tre gruppi nel momento $t = n$ *sono legate a quelle nel momento* $t = n + 1$ *dalle relazioni:*

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= b_1x_1(n) + b_2x_2(n) + b_3x_3(n) \\ x_2(n+1) &= a_1x_1(n) \\ x_3(n+1) &= a_2x_2(n) \end{cases}$$

Possiamo esprimere sinteticamente questa relazione mediante la notazione matriciale $\mathbf{X}(n+1) = A\mathbf{X}(n)$ *dove* $\mathbf{X}(t)$ *è il vettore colonna con le tre componenti* $x_i(t)$ *e*

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che i dati della amtrice A *siano costanti nel tempo; allora gli autovettori con autovalore 1 (se a componenti tutte positive!) sono le distribuzioni per fasce d'età che permettono alla popolazione di rimanere invariata.*

Gli autovettori con autovalore $\lambda > 0$ *(se a componenti tutte positive!) sono le distribuzioni per fasce d'età che, pur modificandosi numericamente, mantengono inalterate le distribuzioni percentuali per fascia d'età.*

Calcolare l'evoluzione di una popolazione con $x_1 = x_2 = x_3 = 1000$ *con matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cosa succede dopo 50 anni? e dopo 500?

Vi sono distribuzioni che si mantengano costanti nel tempo?

Vi sono distribuzioni che si mantengano percentualmente costanti nel tempo?

Rispondere alle stesse domande nel caso la matrice A *sia:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizi sulle matrici

1. Siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Eseguire tutte le possibili operazioni tra le matrici $A, \ldots, F$.

ii) Calcolare il determinante delle matrici A, B e D sviluppando rispetto a righe e colonne e mediante la riduzione.

iii) Dire quali delle precedenti matrici hanno inversa e calcolare tali inverse quandoi esistono.

iv) Calcolare autovalori e autovettori reali delle matrici A, B e D.

2. Ridurre la matrice:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x - 3y - z = -2 \\ 2x + y + +3z = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y + z - t = 0 \\ y - z + 2t = 1 \\ 2x + y + 3z - 5t = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

8 I numeri complessi

Introduciamo un "numero nuovo", che chiameremo i che sia una soluzione dell'equazione $X^2 + 1 = 0$, ossia che abbia la proprietà che il suo quadrato fa -1:

$$i^2 = -1.$$

Affinchè questa costruzione abbia un senso, non possiamo limitarci ad ampliare i numeri reali mediante la sola aggiunta del nuovo numero i, ma dobbiamo far sì che si possano eseguire anche somme e prodotti. Dovremo quindi introdurre anche tutti i numeri del tipo $2i$, $3 + i$, $(i^2 + 5)(\sqrt{2}i - \pi)$ e così via.

Definizione 18. *Chiamiamo* **numeri complessi** *tutte le espressioni della forma $a + ib$ dove a e b sono numeri reali.*

Il numero complesso i si dice **unità immaginaria**.

Se $z = a + ib$, a si dice **parte reale** *di z, denotata* $\mathrm{Re}(z)$*, e b si dice* **coefficiente dell'immaginario** *di z, denotato* $\mathrm{Im}(z)$*.*

Due numeri complessi sono uguali se e solo se coincidono sia la parte reale sia quella immaginaria.

Definiamo quindi le operazioni di somma e prodotto in $\mathbf{C}$ *a partire dalle operazioni di* $\mathbf{R}$ *secondo le regole del calcolo algebrico nel modo seguente:*

$$\begin{array}{rcccll} (a+ib)+(c+id) & = & a+ib+c+id & = & (a+c)+i(b+d) & \\ (a+ib)\cdot(c+id) & = & ac+iad+ibc+i^2bd & = & ac+iad+ibc-bd & =(ac-bd)+i(ad+bc) \end{array}$$

Per come sono state definite le operazioni, possiamo pensare ogni numero reale a come un particolare numero complesso che ha parte immaginaria nulla, ossia a **è** anche il numero complesso $a + i0$.

In $\mathbf{C}$ valgono tante delle proprietà delle operazioni che conosciamo in $\mathbf{R}$. Eccone alcune:

1) la somma e il prodotto sono associative e commutative e vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma;

2) c'è l'elemento neutro rispetto alla somma $0 = 0 + i0$, infatti $0 + (a + ib) = a + ib$;

3) c'è l'opposto di ogni elemento $-(a + ib) = (-a) + i(-b)$;

4) c'è l'elemento neutro rispetto al prodotto $1 = 1 + i0$, infatti $1 \cdot (a + ib) = a + ib$;

5) ogni numero complesso, tranne 0, ha un inverso $(a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$.

Dalla validità di 1), 2) 3), 4), 5) segue che $\mathbf{C}$ è un **campo**.

Ritorniamo ora sull'equazione $x^2 + 1 = 0$ per osservare che in $\mathbf{C}$ risulta avere, oltre alla soluzione $x = i$, anche la soluzione $x = -i$, come si può verificare immediatamente tramite sostituzione.

Il numero complesso $-i$ ha in realtà le stesse proprietà di i e risulta essere perfettamente interscambiabile con i.
Se $z = a + ib$ è un qualsiasi numero complesso, scambiando in esso i con $-i$ otteniamo il numero complesso $\overline{z} = a - ib$, che si dice **coniugato** di z.

Valgono le seguenti proprietà relative al coniugato di un numero complesso:

- la somma di un numero e del suo coniugato: $z + \overline{z}$ è sempre un numero reale;

- i numeri reali sono gli unici numeri complessi che coincidono col loro coniugato

$$z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbf{R};$$

- il prodotto di un numero diverso da 0 e del suo coniugato $z \cdot \overline{z}$ è sempre un numero reale strettamente positivo.

- il coniugato di una somma coincide con la somma dei coniugati, ossia

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

- il coniugato di un prodotto coincide col prodotto dei coniugati, ossia

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Si dice **modulo** del numero complesso $z = a + ib$ il numero reale positivo o nullo

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Da quanto sopra risulta $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$.

Possiamo allora rivedere in altro modo la formula dell'inverso di un numero complesso:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}.$$

In $\mathbf{C}$ tutte le equazioni di grado 2 a coefficienti reali $x^2 + px + q = 0$ hanno due soluzioni complesse, eventualmente coincidenti.

Se infatti il discriminante $\Delta = p^2 - 4q$ è positivo o nullo, ci sono le due radici reali $-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ e $-\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, mentre se Δ è negativo (**e quindi $-\Delta$ è un numero reale positivo!**), ci sono le due radici complesse (non reali) $-\frac{p}{2} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ e $-\frac{p}{2} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.
Si noti che queste ultime sono due numeri **complessi coniugati** ossia ottenibili uno dall'altro scambiando i con $-i$ ossia passando ai coniugati!

Introducendo semplicemente il nuovo numero i siamo così si possono dunque a risolvere tutte le equazioni di secondo grado. Non facile da provare, ma ugualmente vero è il seguente, più generale, risultato.

Teorema fondamentale dell'algebra: *Ogni equazione polinomiale di grado positivo n a coefficienti reali o complessi*

$$x^n + a_1 x^{n-l} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

ha sempre n soluzioni complesse (eventualmente coincidenti) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, e quindi il polinomio

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-l} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

si decompone nel prodotto di polinomi di grado 1:

$$F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

Se l'equazione ha coefficienti reali e se α è una sua soluzione, allora anche il coniugato $\overline{\alpha}$ è soluzione e il polinomi si decompone nel prodotto di fattori di grado 1 corrsipondenti alle soluzioni reali e di fattori di grado due corrispondenti alle coppie di soluzioni complesse coniugate.

Esercizi sui complessi

1. *Ridurre le espressioni alla forma $a+ib$ specificando qual la parte reale e quale immaginaria*

1. $(3 + 4i) + (2 + 5i)$;
2. $(3 + 4i)(4 + 5i)$;
3. $(1 + 3i)(6 - 6i)$;
4. $(2 + 3i)(2 - 3i)$;
5. $3i(4 + i)^2$

2. *Calcolare tutte le soluzioni delle equazioni:*

1. $(x - 3)(4 - 5x)(\sqrt{3} - \sqrt{5}x)(\sqrt{3} + \sqrt{5}x) = 0$
2. $(x - \sqrt{2})^4 = 0$
3. $(x^2 - 3x - 5)(3x - 2x^2 + 1) = 0$
4. $x^2 - 5x + 7 = 0$

3. *Verificare che i numeri complessi $(1 + i\sqrt{3})$ e $(1 - i\sqrt{3})$ (oltre che naturalmente 2) sono radici del polinomio $x^3 + 8$. Eseguire la verifica sia mediante sostituzione, sia applicando il teorema di Ruffini.*

4. *Calcolare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:*

$$(1 + i)(2i - 3), \quad (2 - i)^2, \quad (1 - 3i)^3, \quad \frac{6 + 5i}{3 - i}, \quad \frac{3 - 2i}{1 + 5i} + \frac{2 - 3i}{2 - i}.$$

5. *Dire se il numero complesso* $-1+i$ *è oppure no una soluzione dell'equazione* $x^3 - 2x^2 + 5x - 2 = 0$.

6. *Verificare che il coniugato di una somma è la somma dei coniugati e che il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati.*

7. *Sia* z *un qualsiasi numero complesso. Verificare che* $z + \overline{z}$ *e* $z \cdot \overline{z}$ *sono numeri reali e che* $z - \overline{z}$ *è immaginario puro.*

8. *Sia* z *un numero complesso. Verificare che* $z = \overline{z}$ *se e solo se* $z \in \mathbf{R}$.

9. *Cosideriamo il polinomio* $F(X) = 2X^5 - 13X^4 + 37X^3 - 57X^2 + 48X - 18$.

Verificare che $1 - i$ *è radice di* $F(X)$.

Trovare tutte le radici razionali di $F(X)$.

Determinare la fattorizzazione di $F(X)$ *in fattori irriducibili in* $\mathbf{R}[X]$.

10. *Calcolare a mano (se possibile) le soluzioni delle seguenti equazioni e poi risolverle mediante Derive:*

a. $x^3 - 1 = 0$ **b.** $x^4 - 1 = 0$ **c.** $x^4 + 1 = 0$ **d.** $x^3 - 3x + 1 = 0$
e. $x^5 - 3x + 1 = 0$.

11. *Una certa popolazione umana è suddivisa in* ***rurale*** *e* ***urbana****: indichiamo con* R_t *e* U_t *la consistenza numerica dei due gruppi all'istante* t *(in milioni di individui). Supponiamo di esaminare la popolazioni in istanti successivi discreti, ad esempio sia* $t = 0$ *il momento iniziale dell'osservazione e sia poi* $t = 1$ *un anno.*

Le consistenze numeriche dei due gruppi nell'istante $t = n$ *sono legate a quelle nell'istante* $t = n + 1$ *dalle relazioni:*

$$\begin{cases} R_{n+1} = (a - b(1-c))R_n + bcU_n \\ U_{n+1} = b(1-c)R_n + (a - bc)U_n \end{cases}$$

Il significato delle costanti a, b, c *è il seguente:*

- a = *fattore di crescita di entrambe le popolazioni;*
- c = *rapporto ottimale tra la popolazione rurale e quella totale ai fini dell'approvvigionamento alimentare;*
- b = *tasso di migrazione dalla campagna verso la città relativo all'eccesso di popolazione rurale rispetto a quella ottimale.*

Supposto che i valori delle costanti non varino nel tempo e che siano $a = 1.2$, $b = 1.1$ *e* $c = 1/3$ *studiare l'evoluzione delle due popolazioni nei tre casi seguenti:*

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} R_0 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 30 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} R_0 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$