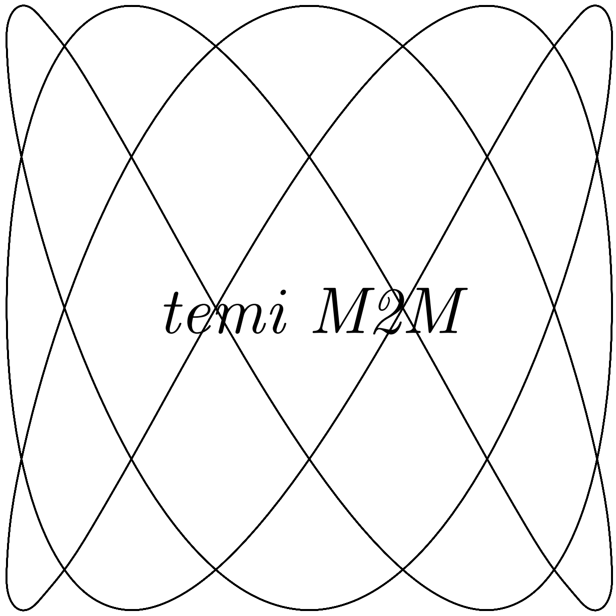
Raccolta esami a.a. 2002/3/4/5/6/7/8 Mat.2 (Algebra Lineare e Geometria)



Sono raccolti gli esami dei corsi di Matematica 2 (poi diviso in due moduli, dopo aver integrato una parte di Matematica di Base) del Corso di Laurea Triennale in Matematica dell'Università di Padova negli anni accademici della riforma secondo il D.M. 509/1999. I contenuti dei corsi riguardavano l'algebra lineare e la geometria (affine ed euclidea).

Docenti di quei corsi sono stati: Valentino Cristante, Maurizio Candilera, Maurizio Cailotto, Alessandra Bertapelle.

 marzo 2009

Università di Padova **Dip.Matem.P. & A.**

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} X_2 + X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + nX_2 = 0 \end{cases}$$

ove n è l'ultima cifra del proprio numero di matricola.

(a) Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W.

(b) Trovare equazioni, base e dimensione per il sottospazio $U \cap W$.

(c) Trovare equazioni, base e dimensione per il sottospazio $U + W$.

(d) Che cosa cambierebbe nei punti precedenti se invece di $\mathbb{R}$ usassimo un corpo K di caratteristica 2?

Soluzione.

(a) Con la tecnica di eliminazione dei parametri possiamo trovare delle equazioni cartesiane per U della forma $X_1 - 2X_4 = 0$ e $X_2 + X_3 - X_4 = 0$ (giustamente due equazioni indipendenti trattandosi di un sottospazio di dimensione 2 in uno spazio di dimensione 4). Scrivendo le soluzioni per il sistema che definisce W possiamo trovare due generatori indipendenti della forma $\begin{pmatrix} -n\\1\\0\\1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}$.

(b) Per trovare un sistema di equazioni cartesiane per $U \cap W$ basta mettere insieme i sistemi di equazioni per U e per W; delle quattro equazioni ne restano tre indipendenti e sono $\begin{cases} X_1 - 2X_4 = 0 \\ X_1 + nX_2 = 0 \\ X_2 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$. Quindi $U \cap W$ è uno spazio di dimensione 1 e un generatore per esempio è $\begin{pmatrix} 2n\\-2\\n+2\\n \end{pmatrix}$.

(c) Lo spazio somma $U + W$ di conseguenza, per la formula di Grassmann, ha dimensione tre; come generatori possiamo usare tre vettori indipendenti scelti tra i generatori di U e di W; per esempio possiamo usare $\begin{pmatrix} 2\\1\\0\\1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2\\0\\1\\1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}$ (in particolare $U + W$ non dipende da n), e una sua equazione si ricava eliminando i parametri, ottenendo $X_2 + X_3 - X_4 = 0$.

(d) In ogni corpo di caratteristica 2 abbiamo $2 = 0$, dunque i generatori di U hanno prima coordinata nulla, e allora le equazioni per U si possono scrivere $X_1 = 0$ e $X_2 + X_3 + X_4 = 0$. D'altra parte per W bisogna distinguere i casi in cui n sia pari o dispari. Se n è pari abbiamo che le equazioni per W sono $X_2 + X_3 + X_4 = 0$ e $X_1 = 0$, da cui concludiamo che $U = W$ e dunque $U \cap W = U = W = U + W$. Se invece n è dispari, le equazioni per W sono $X_2 + X_3 + X_4 = 0$ e $X_1 + X_2 = 0$, da cui concludiamo che $U \cap W$ ha dimensione uno, generato da $\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}$, e quindi $U + W$ ha dimensione 3, ed equazione $X_2 + X_3 + X_4 = 0$ □

Esercizio 2. Sia data la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} \ell & 1 & -\ell \\ \ell & 1 & -\ell \\ \ell & 1 & -\ell \end{pmatrix}$$

ove ℓ è la terzultima cifra del proprio numero di matricola, e sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare di matrice A nella base canonica.
(a) Calcolare A^2. Cosa si può dire dell'applicazione π? Calcolare $U = \ker \pi$ e $W = \mathrm{im}\pi$.
(b) Trovare la matrice B della proiezione su U di direzione W (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$).
(c) Trovare la matrice C della simmetria di asse U e di direzione W (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$).
(d) È vero o falso che la matrice C commuta con le matrici A e B (cioè che $AC = CA$ e $BC = CB$)?

Soluzione.
(a) Il prodotto righe per colonne mostra che $A^2 = A$, da cui possiamo dedurre che π è una proiezione di schermo $W = \mathrm{im}\pi$ e di direzione $U = \ker \pi$. Si vede immediatamente che la matrice A ha rango uno, dunque la dimensione di W è uno, e W è generato dal vettore $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Di conseguenza, dalla formula delle dimensioni per l'applicazione lineare π, abbiamo che U ha dimensione due, e risolvendo il sistema omogeneo di matrice A (unica equazione $\ell X_1 + X_2 - \ell X_3 = 0$) troviamo che esso è generato dai vettori $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -\ell \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \ell \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
(b) Detta $\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione richiesta, osserviamo che $\pi + \eta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$; quindi la matrice di η nella base canonica è semplicemente la matrice differenza $\mathbb{I}_3 - A$, ovvero $B = \left(\begin{smallmatrix} 1-\ell & -1 & \ell \\ -\ell & 0 & \ell \\ -\ell & -1 & 1+\ell \end{smallmatrix}\right)$.
(c) Detta $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la simmetria richiesta, osserviamo che $\sigma = \eta - \pi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - 2\pi$; quindi la matrice di σ nella base canonica è semplicemente la matrice differenza $\mathbb{I}_3 - 2A$, ovvero $C = \left(\begin{smallmatrix} 1-2\ell & -2 & 2\ell \\ -2\ell & -1 & 2\ell \\ -2\ell & -2 & 1+2\ell \end{smallmatrix}\right)$.
(d) Sì, la matrice C commuta sia con A che con B, come si può osservare facilmente dal fatto che $C = \mathbb{I}_3 - 2A$ e $B = \mathbb{I}_3 - A$, tenendo conto che ogni matrice A commuta con sé stessa e con la matrice identica. Per esempio $AC = A(\mathbb{I}_3 - 2A) = A - 2A^2 = (\mathbb{I}_3 - 2A)A = CA$ (e in effetti il prodotto è $A - 2A^2 = A - 2A = -A$), e similmente per B. Si tratta in effetti di "polinomi calcolati nella matrice A", e le matrici di questa forma commutano sempre tra di loro.
In alternativa si poteva dedurre il risultato ragionando sulle applicazioni lineari: simmetrie e proiezioni legate alla stessa decomposizione $U \oplus W$ commutano sempre tra di loro, come si nota subito dalla definizione. Per esempio, se $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$ abbiamo $\sigma\eta(v) = \sigma(u) = u$ e $\eta\sigma(v) = \eta(u - w) = u$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, da cui $\sigma\eta = \eta\sigma = \eta$, e dunque $CB = BC = B$. $\square$

Esercizio 3. Consideriamo la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m-5 & m-6 \\ 2 & 0 & -2 \\ m-4 & m & 4 \end{pmatrix}$$

ove m è la penultima cifra del proprio numero di matricola.

(a) Calcolare il rango di A.

(b) Trovare $X \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che il prodotto AX abbia l'ultima colonna nulla.

(c) Trovare $Y \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che il prodotto YA abbia l'ultima riga nulla.

(d) Trovare $Y, X \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tali che $YAX = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$.

Soluzione.

(a) Si vede quasi immediatamente che la somma con segni alternati delle tre colonne di A dà zero; poiché le prime due colonne sono linearmente indipendenti, ne segue che il rango di A è sempre due.

(b) Considerando la matrice A come la matrice rispetto alla base canonica di un endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^3$, l'operazione richiesta è un cambiamento di base nel dominio della funzione; la matrice prodotto AX inoltre è la matrice della stessa applicazione ϕ usando la nuova base nel dominio e la base canonica nel codominio. Quindi per ottemperare alla richiesta, basterà scegliere una base di $\mathbb{R}^3$ in modo tale che il terzo vettore appartenga al nucleo di ϕ. Dall'osservazione del punto (a) sappiamo che il nucleo ha dimensione uno, generato dal vettore $e_1 - e_2 + e_3$. Scegliendo allora la base $\mathcal{V} = (e_1, e_2, e_1 - e_2 + e_3)$ abbiamo la matrice di cambiamento di base $X = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&-1 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$ che risolve il quesito.

(c) Ragionando come nel punto precedente, si tratta stavolta di operare un cambiamento di base nel codominio, e per ottemperare alla richiesta, basta trovare una base di $\mathbb{R}^3$ in modo tale che i primi due vettori generino l'immagine di ϕ; possiamo allora scegliere $\mathcal{W} = (e_1 + 2e_2 + (m-4)e_3, (m-5)e_1 + me_3, e_2)$ e la matrice Y richiesta è l'inversa della matrice di cambiamento di base $Z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & m-5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ m-4 & m & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (che è sempre invertibile, poiché m è un intero).

(d) In quest'ultimo caso, analogamente ai punti precedenti, operiamo dei cambiamenti di base sia sul dominio che sul codominio; nel dominio usiamo una base tale che il primo vettore appartenga al nucleo di ϕ (vogliamo ora che sia nulla la prima colonna della matrice prodotto), nel codominio usiamo una base tale che il secondo ed il terzo vettore siamo immagine del secondo e del terzo vettore risp. della base scelta nel dominio (come ci è imposto dalla seconda e terza colonna della matrice prodotto richiesta). Poniamo allora $\mathcal{V}' = (e_1 - e_2 + e_3, e_1, e_2)$ nel dominio, $\mathcal{W}' = (e_2, e_1 + 2e_2 + (m-4)e_3, (m-5)e_1 + me_3)$ nel codominio, e le matrici richieste ora sono $X = \left(\begin{smallmatrix} 1&1&0 \\ -1&0&1 \\ 1&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ mentre Y sarà l'inversa della matrice $Z = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & m-5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & m-4 & -m \end{smallmatrix}\right)$ □

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Sia n l'ultima cifra del proprio numero di matricola, e si ponga $\alpha = 9 - n$, $\beta = -n - 2$. Si consideri ora l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 & -1 \\ \beta-\alpha+1 & \beta & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 1 & \beta+1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A, gli autovalori, e le rispettive molteplicità e nullità.

(b) Si determinino gli autospazi di A, si dica se A è o meno diagonalizzabile, e si trovi il polinomio minimo di A.

(c) Esiste una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale l'endomorfismo in questione abbia matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$?

(d) Cosa cambia nei punti precedenti se invece di $\mathbb{R}$ si usasse un corpo di caratteristica 3? e 11?

Soluzione.

(a) Il polinomio caratteristico è

$$\det(X\mathbb{I}_4 - A) = \begin{vmatrix} X-(\alpha-1) & 0 & 1 & 1 \\ \alpha-\beta-1 & X-\beta & -1 & -1 \\ -1 & 0 & X-\alpha & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & -1 & X-(\beta+1) \end{vmatrix} = (X-\beta) \begin{vmatrix} (X-\alpha)+1 & 1 & 1 \\ -1 & X-\alpha & \beta-\alpha \\ 0 & -1 & (X-\beta)-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-\beta) \begin{vmatrix} (X-\alpha)+1 & 1 & 0 \\ -1 & X-\alpha & -(X-\beta) \\ 0 & -1 & (X-\beta) \end{vmatrix} = (X-\beta)^2 \begin{vmatrix} (X-\alpha)+1 & 1 & 0 \\ -1 & X-\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (X-\alpha)^2(X-\beta)^2$$

(nella prima linea abbiamo sviluppato rispetto alla seconda colonna, nella seconda linea abbiamo sottratto la seconda alla terza colonna, e poi raccolto il fattore $X-\beta$) da cui si deducono i due autovalori α e β entrambi di molteplicità 2.

Poiché $A-\alpha\mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ \beta-\alpha+1 & \beta-\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 1 & \beta-\alpha+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & -11 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$ ha rango 3, l'autospazio di α ha dimensione 1 (nullità di α). Poiché $A-\beta\mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} \alpha-\beta-1 & 0 & -1 & -1 \\ \beta-\alpha+1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha-\beta & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2, l'autospazio di β ha dimensione 2 (nullità di β).

(b) Risolvendo il sistema omogeneo di matrice $A-\alpha\mathbb{I}_4$ troviamo che l'autospazio di α è generato dal vettore $\begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$; analogamente con $A-\beta\mathbb{I}_4$ troviamo che l'autospazio di β è generato dai vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
La matrice A non è diagonalizzabile a causa di α (la nullità è 1, mentre la molteplicità è 2). Il polinomio minimo è $(X-\alpha)^2(X-\beta)$, poiché β ha molteplicità e nullità uguali (e non può essere $(X-\alpha)(X-\beta)$ visto che A non è diagonalizzabile).

(c) Per cercare una tale base v_1, v_2, v_3, v_4, certamente i vettori v_3 e v_4 devono appartenere all'autospazio di β; dunque possiamo scegliere i due generatori prima trovati. Anche v_1 dev'essere autovettore, di autovalore α; dunque possiamo scegliere il generatore prima trovato dell'autospazio di α. Ora si tratta di vedere se esiste un vettore v_2 tale che $\phi(v_2) = v_1+\alpha v_2$ (come chiede la seconda colonna della matrice richiesta), ovvero tale che $(A - \alpha\mathbb{I}_4)v_2 = v_1$; scrivendo il sistema (non omogeneo) troviamo la soluzione $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$. I quattro vettori sono chiaramente indipendenti, quindi abbiamo trovato la base richiesta.

(d) Niente nel caso 3: due autovettori sono comunque diversi ($\alpha - \beta = 11$ che è $-1 \neq 0$) e nello svolgimento non abbiamo mai "diviso per 3". Se invece fossimo in caratteristica 11, allora i due autovalori sarebbero uguali e la nullità solo 2; quindi la matrice non sarebbe diagonalizzabile, ma anche alla domanda (c) la risposta sarebbe negativa (non ci sarebbero tre autovettori indipendenti)

$\square$

Esercizio 2. Sia m la penultima cifra del proprio numero di matricola diminuita di 5. Si considerino le tre famiglie di piani dello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

$$\alpha_\lambda : X + mZ = \lambda, \qquad \beta_\lambda : X + \lambda Y + (m+1)Z = \lambda + (m-1), \qquad \gamma_\lambda : -X + \lambda Y + (\lambda^2-m)Z = m$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

(*a*) Si dica per quali valori di λ i tre piani si intersecano in un solo punto. In questi casi determinare le coordinate di tale punto al variare di λ.

(*b*) Si dica per quali valori di λ i tre piani si intersecano in una retta. È vero in tali casi che due dei tre piani coincidono?

(*c*) Si dica per quali valori di λ i tre piani hanno intersezione vuota. È vero in tali casi che due dei tre piani sono paralleli?

(*d*) Esiste un valore di λ per cui i tre piani si intersecano in un punto dell'asse Z?

Soluzione. Cominciamo riducendo in forma di Gauss la matrice completa del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & m & \lambda \\ 1 & \lambda & m+1 & \lambda+(m-1) \\ -1 & \lambda & \lambda^2-m & m \end{pmatrix} \xrightarrow[III+I]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 & m-1 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 & \lambda+m \end{pmatrix} \xrightarrow[III-II]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 & m-1 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che la matrice incompleta ha rango 3 (e dunque vi è un unico punto di intersezione dei tre piani) se il parametro λ è diverso dai valori 0, 1, -1.

(*a*) Dunque per $\lambda \neq 0, 1, -1$ dalla riduzione di Gauss troviamo $Z = \frac{1}{\lambda-1}$, $Y = \frac{1}{\lambda}(m-1-\frac{1}{\lambda-1})$ e $X = \lambda - m\frac{1}{\lambda-1}$. Dunque il punto al variare di λ si scrive come

$$P_\lambda = \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda^2-m\lambda \\ (m-1)\lambda-m \\ \lambda \end{pmatrix} .$$

(*b*) Se $\lambda = -1$ dalla matrice ridotta con Gauss vediamo che il sistema è compatibile, di rango 2 (sia la matrice completa che l'incompleta), e l'intersezione è la retta di equazioni $X + mZ = -1$ e $-Y + Z = m-1$. osservando la matrice originale $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & m+1 & m-2 \\ -1 & -1 & 1-m & m \end{smallmatrix}\right)$ vediamo che si tratta di tre piani distinti di un fascio (basta osservare i minori delle prime due colonne per vedere che a due a due i piani non sono paralleli). Se $\lambda = 0$ ed $m = 0$ allora abbiamo un secondo caso in cui il sistema di piani si interseca in una retta (matrice completa ed incompleta hanno entrambe rango 2); la matrice originale essendo $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ si vede che due piani (il primo e il terzo) in effetti coincidono. La retta ha equazioni $X = 0$ e $Z = -1$.

(*c*) Se $\lambda = 1$ la matrice ridotta con Gauss dice che il sistema è incompatibile (rango della matrice incompleta è 2 e della completa è 3); osservando la matrice iniziale del sistema vediamo che diventa $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & m & 1 \\ 1 & 1 & m+1 & m \\ -1 & 1 & 1-m & m \end{smallmatrix}\right)$ da cui si vede che che non ci sono piani paralleli (basta osservare i minori delle prime due colonne). Se $\lambda = 0$ ed $m \neq 0$ allora abbiamo un secondo caso in cui il sistema di piani ha intersezione vuota (matrice completa ed incompleta hanno rango 3 e 2 rispettivamente); la matrice originale essendo $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & m & 0 \\ 1 & 0 & m+1 & m-1 \\ -1 & 0 & -m & m \end{smallmatrix}\right)$ si vede che due piani (il primo e il terzo) sono paralleli e disgiunti.

(*d*) Sostituendo $X = 0$ e $Y = 0$ nelle equazioni dei piani troviamo le condizioni $mZ = \lambda$, $(m+1)Z = \lambda + (m-1)$, $(\lambda^2-m)Z = m$; sostituendo $\lambda = mZ$ nella seconda si trova $Z = m-1$; dunque $\lambda = m(m-1)$ e la terza equazione diventa $m^2(m-1)^3 = m^2$. Vi sono soluzioni solo se $m = 0$ (e allora $\lambda = 0$ e $Z = -1$) oppure $m = 2$ (e allora $\lambda = 2$ e $Z = 1$).

□

Esercizio 3. Sia l la terzultima cifra del proprio numero di matricola e sia $\alpha = l - 6$. Si considerino le due rette

$$r_1 : \begin{cases} X - Y + (\alpha-1) = 0 \\ X - Z - 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X - \alpha Z + \alpha^2 = 0 \\ Y - 1 = 0 \end{cases}$$

nello spazio euclideo reale di dimensione 3.

(*a*) Mostrare che le due rette sono sghembe e calcolarne la distanza reciproca.

(*b*) Trovare l'unica retta n incidente sia r_1 che r_2 ed ortogonale ad entrambe. Trovare i punti $P_1 = r_1 \cap n$ e $P_2 = r_2 \cap n$.

(*c*) Trovare l'unica retta t passante per il punto Q di coordinate $(\alpha/2, \alpha/2, \alpha/2)$ ed incidente sia r_1 che r_2. Trovare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.

(*d*) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 (può essere zero?) e l'area del triangolo di vertici P_1, Q_1, Q_2 (può essere zero?).

Soluzione.

(*a*) Sia risolvendo direttamente il sistema, sia tramite la seguente riduzione di Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \alpha-1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-I]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & -1 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\alpha & \alpha^2-\alpha+1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-II]{III-II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1-\alpha & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III+(\alpha-1)IV]{IV} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2(\alpha^2-\alpha+1) \end{pmatrix}$$

(matrice incompleta di rango 3, completa di rango 4) si deduce che le due rette sono sghembe. Dalle equazioni cartesiane ricaviamo le equazioni parametriche: $r_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha-1 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ ed $r_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ e calcoliamo la distanza tra le rette: $d(r,s) = \frac{|\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ \alpha-2 & 1 & 0 \\ -1-\alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}|}{\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \|} = \frac{|2\alpha^2-2\alpha+2|}{\| \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha-1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \|} = \frac{|2\alpha^2-2\alpha+2|}{\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+2}} = \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha + 2}.$

(*b*) Per trovare la retta n procediamo imponendo al vettore congiungente un punto generico di r_1 ad un punto generico di r_2 d'essere ortogonale ai vettori direttori di entrambe le rette. Dalle equazioni parametriche ricaviamo i punti generici $R_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha-1+\lambda \\ -1+\lambda \end{pmatrix} \in r_1$ e $R_2 = \begin{pmatrix} \mu\alpha \\ 1 \\ \alpha+\mu \end{pmatrix} \in r_2$. Imponendo al vettore $R_2 - R_1 = \begin{pmatrix} \lambda-\mu\alpha \\ \alpha-2+\lambda \\ -1+\lambda-\alpha-\mu \end{pmatrix}$ d'essere ortogonale sia a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ che a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ otteniamo due equazioni dalle quali si ricava $\lambda = 1$ e $\mu = 0$. Dunque abbiamo $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. La retta n ha allora equazioni date da $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X & 1 & 0 \\ Y & \alpha & 1 \\ Z & 0 & \alpha \end{pmatrix} \leq 2$ e dunque $\begin{cases} (\alpha-1)X - Y + 1 = 0 \\ \alpha X + Z - \alpha = 0. \end{cases}$

Possiamo anche (ri)calcolare la distanza $d(r_1, r_2) = d(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\| = \sqrt{2}\sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}$, essendo P_1 e P_2 i punti di minima distanza (poiché $P_2 - P_1$ è vettore ortogonale sia a r_1 sia a r_2).

(*c*) La retta cercata è l'intersezione del piano π_1 contenente r_1 e Q con il piano π_2 contenente r_2 e Q (infatti Q non appartiene ad alcuna delle due rette date). Poi sarà $Q_1 = r_1 \cap \pi_2$ e $Q_2 = r_2 \cap \pi_1$.

Per trovare π_1 scriviamo il fascio di piani di asse r_1: $\lambda(X - Y + (\alpha-1)) + \mu(X - Z - 1) = 0$ ed imponiamo il passaggio per Q. Otteniamo la relazione $\lambda(\alpha-1) - \mu = 0$ da cui possiamo scegliere $\lambda = 1$ e $\mu = \alpha-1$, e infine ricavare il piano $\pi_1 : \alpha X - Y - (\alpha-1)Z = 0$. Intersecando con r_2 troviamo $Q_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix}$.

Per trovare π_2 scriviamo il fascio di piani di asse r_2: $\lambda(X - \alpha Z + \alpha^2) + \mu(Y - 1) = 0$ ed imponiamo il passaggio per Q. Otteniamo la relazione $\lambda\alpha(\alpha+1) + \mu(\alpha-2) = 0$ da cui possiamo scegliere $\lambda = 2-\alpha$ e $\mu = \alpha(\alpha+1)$, e infine ricavare il piano $\pi_2 : (2-\alpha)X + \alpha(\alpha+1)Y - \alpha(2-\alpha)Z - \alpha(\alpha^2-\alpha+1) = 0$. Intersecando con r_1 troviamo $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha-1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(*d*) Calcoliamo i vettori differenza: $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, Q_1 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, Q_2 - P_1 = \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 1-\alpha \\ \alpha+1 \end{pmatrix}$, e di conseguenza il volume richiesto è $\frac{1}{6}|\det \begin{pmatrix} -1 & -1 & \alpha-1 \\ 1-\alpha & -1 & 1-\alpha \\ \alpha & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}| = \frac{1}{3}(\alpha^2-\alpha+1)$ (non poteva essere 0 perché le rette sono sghembe, quindi i quattro punti non sono complanari) mentre l'area richiesta è $\frac{1}{2}\|(Q_1-P_1) \wedge (Q_2-P_1)\| = \| \begin{pmatrix} -\alpha+1 \\ -1 \\ \alpha-1 \end{pmatrix} \| = \sqrt{2(\alpha-1)^2 + 1}$ (non poteva essere zero perché i tre punti non sono allineati).

$\square$

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_4 = 0 \\ 4X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W.
(b) Trovare equazioni, base e dimensione per i sottospazi $U \cap W$ e $U + W$.
(c) Che cosa cambierebbe nei punti precedenti se invece di $\mathbb{R}$ usassimo un corpo K di caratteristica 2?

Soluzione.
(a) Le equazioni per U si ottengono imponendo la condizione di rango

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 \\ X_2 & 0 & 1 \\ X_3 & 2 & 2 \\ X_4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leq 2 \quad \text{dunque} \quad \begin{cases} -2X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 \\ -X_1 - X_2 + X_4 = 0 \end{cases} \quad \text{o meglio} \quad \begin{cases} X_3 - 2X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$$

(abbiamo annullato i minori d'ordine 3 contenenti le prime due righe).
Scrivendo le soluzioni per il sistema che definisce W possiamo trovare due generatori indipendenti della forma $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Per trovare un sistema di equazioni cartesiane per $U \cap W$ basta mettere insieme i sistemi di equazioni per U e per W; delle quattro equazioni ne restano tre indipendenti e sono $\begin{cases} X_3 - 2X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_4 = 0 \\ 4X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$. Quindi $U \cap W$ è uno spazio di dimensione 1 e un generatore per esempio è $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lo spazio somma $U+W$ di conseguenza, per la formula di Grassmann, ha dimensione tre; come generatori possiamo usare tre vettori indipendenti scelti tra i generatori di U e di W; per esempio possiamo usare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e una sua equazione si ricava dalla condizione

$$\det\begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 & 1 \\ X_2 & 0 & 1 & 0 \\ X_3 & 2 & 2 & 0 \\ X_4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ovvero} \quad -2X_1 - 2X_2 + 2X_4 = 0$$

e dunque $X_1 + X_2 - X_4 = 0$.

(c) In ogni corpo di caratteristica 2 abbiamo $2 = 0$, dunque i generatori di U hanno terza coordinata nulla, e allora le equazioni per U si possono scrivere $X_3 = 0$ e $X_1 + X_2 - X_4 = 0$. D'altra parte abbiamo che le equazioni per W sono $X_1 + X_2 - X_4 = 0$ e $X_3 = 0$, da cui concludiamo che $U = W$ e dunque $U \cap W = U = W = U + W$. Si tratta comunque di sottospazi di dimensione 2. $\square$

Esercizio 2. Si consideri ora l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A, gli autovalori, e le rispettive molteplicità e nullità.

(b) Si determinino gli autospazi di A, si dica se A è o meno diagonalizzabile, e si trovi il polinomio minimo di A.

(c) Sia ora $B = A + \mathbb{I}_4$. Esistono due matrici invertibili P e Q tali che $PBQ = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$?

Soluzione.

(a) Il polinomio caratteristico è

$$\det(X\mathbb{I}_4 - A) = \begin{vmatrix} X-3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & X+2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & X-1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-3 & 2 \\ -2 & X+2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -1 & X \end{vmatrix} =$$
$$= (X^2 - X - 2)^2 = (X-2)^2(X+1)^2$$

(determinante di matrice a blocchi) da cui si deducono i due autovalori 2 e -1 entrambi di molteplicità 2.

Poiché $A-2\mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} 1&-2&0&0 \\ 2&-4&0&0 \\ 1&-2&-1&2 \\ 1&-2&1&-2 \end{pmatrix}$ ha rango 2, l'autospazio di 2 ha dimensione 2 (nullità di 2). Poiché $A-(-1)\mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} 4&-2&0&0 \\ 2&-1&0&0 \\ 1&-2&2&2 \\ 1&-2&1&1 \end{pmatrix}$ ha rango 3, l'autospazio di -1 ha dimensione 1 (nullità di 1).

(b) Risolvendo il sistema omogeneo di matrice $A-2\mathbb{I}_4$ troviamo che l'autospazio di 2 è generato dai vettori $\begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\0\\2\\1 \end{pmatrix}$; analogamente con $A+\mathbb{I}_4$ troviamo che l'autospazio di -1 è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\-1 \end{pmatrix}$. La matrice A non è diagonalizzabile a causa di -1 (la nullità è 1, mentre la molteplicità è 2). Il polinomio minimo è $(X-2)(X+1)^2$, poiché 2 ha molteplicità e nullità uguali (e non può essere $(X-2)(X+1)$ visto che A non è diagonalizzabile). Un calcolo diretto mostra che $(A-2\mathbb{I}_4)(A+\mathbb{I}_4)^2 = \mathbb{O}_4$.

(c) Sì. Detta ψ l'applicazione lineare $\phi + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$, abbiamo che B è la matrice di ψ in base canonica, ed avendo rango 3 (vedi punto (a)) possiamo scegliere una base $\mathcal{V}$ del dominio ed una base $\mathcal{W}$ del codominio tali che la matrice di ψ in quelle basi sia quella richiesta. Basterà scegliere $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ con $v_4 \in \ker\psi$ (questo per rendere nulla l'ultima colonna della matrice di ψ), per esempio $v_4 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\-1 \end{pmatrix}$, e possiamo usare $v_i = e_i$ ($i = 1,2,3$) per avere una base. Nel codominio dobbiamo scegliere $\mathcal{W} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ con $w_1 = \psi(v_1) = \begin{pmatrix} 4\\2\\1\\1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \psi(v_2) = \begin{pmatrix} -2\\-1\\-2\\-2 \end{pmatrix}$, $w_3 = \psi(v_3) = \begin{pmatrix} 0\\0\\2\\1 \end{pmatrix}$, e per completare la base possiamo scegliere $w_4 = e_4$.

Le matrici richieste sono allora le matrici di cambiamento di base $Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$ e $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^{-1} = \begin{pmatrix} 4&-2&0&0 \\ 2&-1&0&0 \\ 1&-2&2&0 \\ 1&-2&1&1 \end{pmatrix}^{-1}$ che si può calcolare con il metodo di riduzione di Gauss.

□

Esercizio 3. Si considerino le tre famiglie di piani dello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

$$\alpha_\lambda : X + 4Y = \lambda, \qquad \beta_\lambda : X + (\lambda{+}3)Y + 2Z = 3, \qquad \gamma_\lambda : -X + (\lambda{+}3)Y + (\lambda^2{-}2\lambda{+}2)Z = \lambda + 1$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Si dica per quali valori di λ i tre piani si intersecano in un solo punto. In questi casi determinare le coordinate di tale punto al variare di λ.

(b) Si dica per quali valori di λ i tre piani si intersecano in una retta. È vero in tali casi che due dei tre piani coincidono?

(c) Si dica per quali valori di λ i tre piani hanno intersezione vuota. È vero in tali casi che due dei tre piani sono paralleli?

Soluzione. Cominciamo riducendo in forma di Gauss la matrice completa del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda{+}3 & 2 & 3 \\ 1 & \lambda{+}3 & \lambda^2{-}2\lambda{+}2 & \lambda{+}1 \end{pmatrix} \xRightarrow[III-I]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda{-}1 & 2 & 3{-}\lambda \\ 0 & \lambda{-}1 & \lambda^2{-}2\lambda{+}2 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow[III-II]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda{-}1 & 2 & 3{-}\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2{-}2\lambda & \lambda{-}2 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che la matrice incompleta ha determinante $\lambda(\lambda{-}1)(\lambda{-}2)$, e dunque ha rango 3 (e vi è un unico punto di intersezione dei tre piani) se il parametro λ è diverso dai valori 0, 1, 2.

(a) Dunque per $\lambda \neq 0, 1, 2$ dalla riduzione di Gauss troviamo $Z = \frac{1}{\lambda}$, $Y = \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}(-\lambda^2{+}3\lambda{-}2)$ e $X = \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}(5\lambda^2{-}13\lambda{+}2)$. Dunque il punto al variare di λ si scrive come

$$P_\lambda = \frac{1}{\lambda(\lambda{-}1)} \begin{pmatrix} 5\lambda^2{-}13\lambda{+}2 \\ -\lambda^2{+}3\lambda{-}2 \\ \lambda{-}2 \end{pmatrix} .$$

(b) Se $\lambda = 1$ dalla matrice ridotta con Gauss vediamo che il sistema è compatibile, di rango 2 (sia la matrice completa che l'incompleta), e l'intersezione è la retta di equazioni $X + 4Y = 1$ e $Z = 1$. osservando la matrice originale $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ vediamo che si tratta di tre piani distinti di un fascio (basta osservare i minori delle colonne seconda e terza per vedere che a due a due i piani non sono paralleli).

Se $\lambda = 2$ allora abbiamo un secondo caso in cui il sistema di piani si interseca in una retta (matrice completa ed incompleta hanno entrambe rango 2); la matrice originale essendo $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ si vede che due piani (il secondo ed il terzo) in effetti coincidono. La retta ha equazioni $X + 4Y = 2$ e $Y{+}2Z = 1$.

(c) Se $\lambda = 0$ la matrice ridotta con Gauss dice che il sistema è incompatibile (rango della matrice incompleta è 2 e della completa è 3); osservando la matrice iniziale del sistema vediamo che diventa $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ da cui si vede che che il secondo ed il terzo sono piani paralleli e disgiunti. $\square$

Errata Corrige. Purtroppo nel testo dell'esercizio vi era un errore di stampa. Riportiamo dunque anche la discussione dell'esercizio "errato" (per certi aspetti più facile). La riduzione di Gauss diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda{+}3 & 2 & 3 \\ -1 & \lambda{+}3 & \lambda^2{-}2\lambda{+}2 & \lambda{+}1 \end{pmatrix} \xRightarrow[III+I]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda{-}1 & 2 & 3{-}\lambda \\ 0 & \lambda{+}7 & \lambda^2{-}2\lambda{+}2 & 2\lambda{+}1 \end{pmatrix} \xRightarrow[(\lambda-1)III-(\lambda+7)II]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda{-}1 & 2 & 3{-}\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3{-}3\lambda^2{+}2\lambda{-}16 & 3\lambda^2{+}3\lambda{-}22 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che i valori del parametro da controllare sono $\lambda = 1$ (in cui però la matrice incompleta di partenza ha rango 3, dunque rientra nel caso in cui l'intersezione è un punto) e gli zeri del polinomio di terzo grado $\lambda^3{-}3\lambda^2{+}2\lambda{-}16$; anche senza esplicitarli con le formule di Cardano (in effetti ce n'è solo uno reale, e si può capire studiando quel polinomio come funzione reale e tracciandone il grafico...), si può controllare che non coincidono con gli zeri di $3\lambda^2{+}3\lambda - 22$ (facili da calcolare, essendo polinomio di secondo grado). Conclusioni: per gli zeri di $\lambda^3{-}3\lambda^2{+}2\lambda{-}16$ il sistema è incompatibile (punto (c)), non ci sono valori di λ per cui l'intersezione è una retta (punto (b)), e per tutti gli altri valori l'intersezione è un punto esplicitabile a partire dalla matrice ridotta. $\square$

Esercizio 4. Si considerino le due rette

$$r_1 : \begin{cases} X - Z + 3 = 0 \\ X - Y - 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X - 4Y + 16 = 0 \\ Z - 1 = 0 \end{cases}$$

nello spazio euclideo reale di dimensione 3.

(a) Trovare l'unica retta n incidente sia r che s ed ortogonale ad entrambe. Trovare i punti $P_1 = r_1 \cap n$ e $P_2 = r_2 \cap n$.

(b) Trovare l'unica retta t passante per il punto Q di coordinate $(2, 2, 2)$ ed incidente sia r che s. Trovare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.

(c) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 (può essere zero?) e l'area del triangolo di vertici P_1, Q_1, Q_2 (può essere zero?).

Soluzione.

(a) Risolvendo direttamente il sistema, si deduce che le due rette non sono incidenti. Dalle equazioni cartesiane ricaviamo un punto di passaggio ed un vettore direttore per le due rette. Per r_1 possiamo usare il punto $R_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e il vettore direzione $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (abbiamo fatto il prodotto vettore tra due vettori ortogonali alla retta, letti direttamente dalle equazioni omogenee). Per r_2 possiamo usare il punto $R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il vettore direzione $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le equazioni parametriche sono allora: $r_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ ed $r_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Per trovare la retta n procediamo imponendo al vettore congiungente un punto generico $\begin{pmatrix} \lambda \\ -1+\lambda \\ 3+\lambda \end{pmatrix} \in r_1$ di r_1 ad un punto generico $\begin{pmatrix} 4\mu \\ 4+\mu \\ 1 \end{pmatrix} \in r_2$ di r_2 d'essere ortogonale ai vettori direttori di entrambe le rette. Otteniamo due equazioni dalle quali si ricava $\lambda = 1$ e $\mu = 0$. Dunque abbiamo $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. La retta n è allora la retta passante per P_1 e P_2 (potevamo anche calcolare subito un vettore direttore, visto che doveva essere ortogonale a v_1 e v_2 bastava fare il prodotto vettore di questi due).

(b) La retta cercata è l'intersezione del piano π_1 contenente r_1 e Q con il piano π_2 contenente r_2 e Q (infatti Q non appartiene ad alcuna delle due rette date). Poi sarà $Q_1 = r_1 \cap \pi_2$ e $Q_2 = r_2 \cap \pi_1$.

Per trovare π_1 scriviamo il fascio di piani di asse r_1: $\lambda(X - Z + 3) + \mu(X - Y - 1) = 0$ ed imponiamo il passaggio per Q. Otteniamo la relazione $3\lambda - \mu = 0$ da cui possiamo scegliere $\lambda = 1$ e $\mu = 3$, e infine ricavare il piano $\pi_1 : 4X - 3Y - Z = 0$. Intersecando con r_2 troviamo $Q_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per trovare π_2 scriviamo il fascio di piani di asse r_2: $\lambda(X - 4Y + 16) + \mu(Z - 1) = 0$ ed imponiamo il passaggio per Q. Otteniamo la relazione $10\lambda + \mu = 0$ da cui possiamo scegliere $\lambda = -1$ e $\mu = 10$, e infine ricavare il piano $\pi_2 : -X + 4Y + 10Z - 26 = 0$. Intersecando con r_1 troviamo $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) Calcoliamo i vettori differenza: $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, Q_1 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, Q_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, e di conseguenza il volume richiesto è $\frac{1}{6} |\det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}| = \frac{13}{3}$ (non poteva essere 0 perché le rette sono sghembe, quindi i quattro punti non sono complanari) mentre l'area richiesta è $\frac{1}{2} \|(Q_1 - P_1) \wedge (Q_2 - P_1)\| = \frac{1}{2} \| \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{26}$ (non poteva essere zero perché i tre punti non sono allineati). $\square$

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_3 + 3X_4 = 0 \\ X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W.
(b) Mostrare che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
(c) Scrivere la matrice della proiezione su U e di direzione W, e la matrice della simmetria di asse U e direzione W (entrambe con riferimento alla base canonica).

Soluzione.
(a) Le equazioni per U si ottengono imponendo dalla condizione

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 & 0 \\ X_2 & -1 & 1 & 1 \\ X_3 & 0 & 0 & 1 \\ X_4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{dunque} \quad X_1 + X_2 - X_4 = 0 \ .$$

Scrivendo le soluzioni per il sistema che definisce W possiamo trovare un generatore della forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Per mostrare che U e W sono in somma diretta, basta mostrare che l'insieme di quattro vettori formati dai generatori dei due sottospazi è una base di $\mathbb{R}^4$, ovvero che sono linearmente indipendenti; per questo basta controllare che il determinante $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$ sia diverso da zero.

(c) L'applicazione richiesta è la proiezione $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che manda un vettore $v = u+w$ (con $u \in U$ e $w \in W$) nel vettore u. Quindi dato un generico vettore v di coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, la sua immagine sarà il vettore $\pi(v)$ di coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, ove α è determinato dalla richiesta che $\pi(v) \in U$. Imponendo dunque di soddisfare alle equazioni del sottospazio U abbiamo la condizione $x_1 + (x_2+\alpha) - (x_4-\alpha) = 0$ che dà $\alpha = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_4)$. Dunque $\pi(v)$ ha coordinate

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_4) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ x_1 + x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

e la matrice richiesta è proprio $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nelle stesse notazioni, la simmetria richiesta $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ manda v in

$$\sigma(v) = u - w = u - (v - u) = 2u - v = 2\pi(v) - v$$

da cui si deduce cha la matrice cercata è $B = 2A - \mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Esercizio 2. Si consideri ora l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A, gli autovalori, e le rispettive molteplicità e nullità.

(b) Si determinino gli autospazi di A, si dica se A è o meno diagonalizzabile, e si trovi il polinomio minimo di A.

(c) Esistono due matrici invertibili P e Q tali che $PAQ = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$?

Soluzione.

(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ è

$$\begin{vmatrix} X-6 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & X+2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & X+2 \end{vmatrix} = (X-6)\begin{vmatrix} X-2 & 0 & 2 \\ 0 & X+2 & 0 \\ -2 & 0 & X+2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ X-2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & X+2 \end{vmatrix} =$$
$$= ((X-6)(X+2)+15)((X-2)(X+2)+4) = X^2(X-1)(X-3)$$

(nel primo passaggio abbiamo sviluppato rispetto alla prima riga) da cui si deducono i tre autovalori 0, 1 e 3 di molteplicità rispettivamente 2, 1 e 1.
Poiché $A - 0\mathbb{I}_4 = A$ ha rango 3, l'autospazio di 0 ha dimensione 1 (nullità di 0). Gli altri due autovalori hanno necessariamente nullità 1, poiché la loro molteplicità è 1.

(b) Siccome l'autovalore 0 ha molteplicità e nullità diverse, possiamo già dire che la matrice non sarà diagonalizzabile. Risolvendo il sistema omogeneo di matrice A, troviamo che l'autospazio di 0 è generato da $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Risolvendo il sistema omogeneo di matrice $A - 1\mathbb{I}_4 = \left(\begin{smallmatrix} 5&0&5&0 \\ 0&1&0&-2 \\ -3&0&-3&0 \\ 0&2&0&-3 \end{smallmatrix}\right)$ troviamo che l'autospazio di 1 è generato dal vettore $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; analogamente con $A - 3\mathbb{I}_4 = \left(\begin{smallmatrix} 3&0&5&0 \\ 0&-1&0&-2 \\ -3&0&-5&0 \\ 0&2&0&-5 \end{smallmatrix}\right)$ troviamo che l'autospazio di 3 è generato dal vettore $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Il polinomio minimo è uguale al polinomio caratteristico, poiché la matrice non è diagonalizzabile (e quindi non può essere $X(X-1)(X-3)$).

(c) Sì. Poiché A ha rango 3 (vedi punto (a)) possiamo scegliere una base $\mathcal{V}$ del dominio ed una base $\mathcal{W}$ del codominio tali che la matrice di ψ in quelle basi sia quella richiesta. Basterà scegliere $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ con $v_1 \in \ker\phi$ (questo per rendere nulla la prima colonna della matrice di ϕ nelle basi scelte), per esempio $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, e possiamo usare $v_i = e_{i-1}$ ($i = 2, 3, 4$) per avere una base. Nel codominio dobbiamo scegliere $\mathcal{W} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ con $w_2 = \phi(v_2) = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $w_3 = \phi(v_3) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $w_4 = \phi(v_4) = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, e per completare la base possiamo scegliere $w_1 = e_4$.
Le matrici richieste sono allora le matrici di cambiamento di base $Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ e $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0&6&0&5 \\ 0&0&2&0 \\ 0&-3&0&-2 \\ 1&0&2&0 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$ che si può calcolare con il metodo di riduzione di Gauss. $\square$

Esercizio 3. Si considerino le tre famiglie di piani dello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

$$\alpha_\lambda : X + Y + \lambda Z = \lambda, \qquad \beta_\lambda : X + \lambda Y + (\lambda{+}1)Z = 2\lambda{+}1, \qquad \gamma_\lambda : X + Y + 2\lambda^2 Z = 2\lambda$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Si dica per quali valori di λ i tre piani si intersecano in un solo punto. In questi casi determinare le coordinate di tale punto al variare di λ.

(b) Si dica per quali valori di λ i tre piani si intersecano in una retta. È vero in tali casi che due dei tre piani coincidono?

(c) Si dica per quali valori di λ i tre piani hanno intersezione vuota. È vero in tali casi che due dei tre piani sono paralleli?

Soluzione. Cominciamo riducendo in forma di Gauss la matrice completa del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda{+}1 & 2\lambda{+}1 \\ 1 & 1 & 2\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[III-I]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda{-}1 & 1 & \lambda{+}1 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2{-}\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

da cui si vede che la matrice incompleta ha determinante $\lambda(\lambda{-}1)(2\lambda{-}1)$, e dunque ha rango 3 (e vi è un unico punto di intersezione dei tre piani) se il parametro λ è diverso dai valori 0, 1, 1/2.

(a) Dunque per $\lambda \neq 0, 1, 1/2$ dalla riduzione di Gauss troviamo $Z = \frac{1}{2\lambda-1}$, $Y = \frac{1}{(\lambda-1)(2\lambda-1)}(2\lambda^2{+}\lambda{-}2)$ e $X = \frac{1}{(\lambda-1)(2\lambda-1)}(2\lambda^3{-}6\lambda^2{+}\lambda{+}2)$. Dunque il punto al variare di λ si scrive come

$$P_\lambda = \frac{1}{(\lambda{-}1)(2\lambda{-}1)} \begin{pmatrix} 2\lambda^3{-}6\lambda^2{+}\lambda{+}2 \\ 2\lambda^2{+}\lambda{-}2 \\ \lambda{-}1 \end{pmatrix} .$$

(b) Se $\lambda = 0$ dalla matrice ridotta con Gauss vediamo che il sistema è compatibile, di rango 2 (sia la matrice completa che l'incompleta), e l'intersezione è la retta di equazioni $X + Y = 0$ e $X + Z = 1$. osservando la matrice originale $\left(\begin{smallmatrix} 1&1&0&0 \\ 1&0&1&1 \\ 1&1&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ vediamo che due piani in effetti coincidono (il primo e l'ultimo).

(c) Se $\lambda = 1$ la matrice ridotta con Gauss dice che il sistema è incompatibile (rango della matrice incompleta è 2 e della completa è 3); osservando la matrice iniziale del sistema vediamo che diventa $\left(\begin{smallmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&1&2&3 \\ 1&1&2&2 \end{smallmatrix}\right)$ da cui si vede che che il secondo ed il terzo sono piani paralleli e disgiunti. Anche se $\lambda = 1/2$ vediamo dalla matrice ridotta con Gauss dice che il sistema è incompatibile (rango della matrice incompleta è 2 e della completa è 3); osservando la matrice iniziale del sistema vediamo che diventa $\left(\begin{smallmatrix} 1&1&1/2&1/2 \\ 1&1/2&3/2&2 \\ 1&1&1/2&1 \end{smallmatrix}\right)$ da cui si vede che che il primo ed il terzo sono piani paralleli e disgiunti. $\square$

Esercizio 4. Si considerino le due rette

$$r_1 : \begin{cases} X - Y = 1 \\ 2Y - Z = -1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X - Y = -1 \\ X - Y + Z = 0 \end{cases}$$

nello spazio euclideo reale di dimensione 3.

(a) Trovare l'unica retta n incidente sia r_1 che r_2 ed ortogonale ad entrambe. Trovare i punti $P_1 = r_1 \cap n$ e $P_2 = r_2 \cap n$.

(b) Trovare l'unica retta t passante per il punto Q di coordinate $(0, 3, -1)$ ed incidente sia r_1 che r_2. Trovare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.

(c) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 (può essere zero?) e l'area del triangolo di vertici P_1, Q_1, Q_2 (può essere zero?).

Soluzione.

(a) Dalle prime equazioni di ciascuna retta si nota che esse giacciono in due piani paralleli e disgiunti. Sia β il piano (per l'origine) parallelo ad entrambe le rette; qui si vede facilmente essere di equazione $X - Y = 0$, ma se non fosse evidente si può facilmente calcolare un vettore ortogonale a tale piano tramite il prodotto vettore $v_1 \wedge v_2$ ove v_1 e v_2 sono vettori direttori di r_1 ed r_2 rispettivamente.
La retta n cercata si può calcolare come intersezione $\alpha_1 \cap \alpha_2$ di due piani, ove α_1 è il piano contenente r_1 ed ortogonale al piano β ed α_2 è il piano contenente r_2 ed ortogonale al piano β. Per trovare α_1 imponiamo al generico piano $\lambda(X - Y - 1) + \mu(2Y - Z + 1) = 0$ (ovvero $\lambda X + (-\lambda + 2\mu)Y - \mu Z + (-\lambda + \mu) = 0$) del fascio di asse r_1 d'essere ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, da cui la condizione $\begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda+2\mu \\ -\lambda+\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed infine $\lambda = \mu = 1$; quindi α_1 ha equazione $X + Y - Z = 0$.
Analogamente per trovare α_2 imponiamo al generico piano $\lambda(X - Y + 1) + \mu(X - Y + Z) = 0$ (ovvero $(\lambda+\mu)X + (-\lambda-\mu)Y + \mu Z + \lambda = 0$) del fascio di asse r_1 d'essere ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, da cui la condizione $\begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ -\lambda-\mu \\ \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed infine $\lambda = -\mu = -1$; quindi α_2 ha equazione $Z = 1$.
La retta n è allora la retta di equazioni cartesiane $X + Y = 1$ e $Z = 1$. Intersecando con r_1 troviamo il punto $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ed intersecando con r_2 troviamo il punto $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) La retta cercata è l'intersezione del piano π_1 contenente r_1 e Q con il piano π_2 contenente r_2 e Q (infatti Q non appartiene ad alcuna delle due rette date). Poi sarà $Q_1 = r_1 \cap \pi_2$ e $Q_2 = r_2 \cap \pi_1$.
Per trovare π_1 scriviamo il fascio di piani di asse r_1: $\lambda(X - Y - 1) + \mu(2Y - Z + 1) = 0$ ed imponiamo il passaggio per Q. Otteniamo la relazione $-4\lambda + 8\mu = 0$ da cui possiamo scegliere $\lambda = 2$ e $\mu = 1$, e infine ricavare il piano $\pi_1 : 2X - Z - 1 = 0$. Intersecando con r_2 troviamo $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Per trovare π_2 scriviamo il fascio di piani di asse r_2: $\lambda(X - Y + 1) + \mu(X - Y + Z) = 0$ ed imponiamo il passaggio per Q. Otteniamo la relazione $-2\lambda - 4\mu = 0$ da cui possiamo scegliere $\lambda = 2$, $\mu = -1$, e infine ricavare il piano $\pi_2 : X - Y - Z + 2 = 0$. Intersecando con r_1 troviamo $Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) Calcoliamo i vettori differenza: $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q_1 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, e di conseguenza il volume richiesto è $\frac{1}{6}|\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}| = \frac{2}{3}$ (non poteva essere 0 perché le rette sono sghembe, quindi i quattro punti non sono complanari) mentre l'area richiesta è $\frac{1}{2}\|(Q_1 - P_1) \wedge (Q_2 - P_1)\| = \frac{1}{2}\| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{5}$ (non poteva essere zero perché i tre punti non sono allineati). $\square$

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

(*a*) Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W.
(*b*) Mostrare che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
(*c*) Scrivere la matrice della proiezione su U e di direzione W, e la matrice della simmetria di asse U e direzione W (entrambe con riferimento alla base canonica).

Soluzione.
(*a*) Le equazioni per U si ottengono imponendo la condizione

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 \\ X_2 & 1 & 1 \\ X_3 & 0 & 1 \\ X_4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leq 2, \quad \text{dunque} \quad \begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ -2X_1 + X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

(abbiamo annullato i minori contenenti le prime due righe).
Scrivendo le soluzioni per il sistema che definisce W possiamo trovare una base data dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\0 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} -1\\0\\1\\1 \end{pmatrix}$.
(*b*) Per mostrare che U e W sono in somma diretta, basta mostrare che l'insieme di quattro vettori formati dai generatori dei due sottospazi è una base di $\mathbb{R}^4$, ovvero che sono linearmente indipendenti; per questo basta controllare che il determinante $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 9$ sia diverso da zero.
(*c*) L'applicazione richiesta è la proiezione $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che manda un vettore $v = u+w$ (con $u \in U$ e $w \in W$) nel vettore u. Quindi dato un generico vettore v di coordinate $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix}$, la sua immagine sarà il vettore $\pi(v)$ di coordinate $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \begin{pmatrix} x_1+\alpha_1-\alpha_2 \\ x_2-\alpha_1 \\ x_3+\alpha_1+\alpha_2 \\ x_4+\alpha_2 \end{pmatrix}$, ove α_1 ed α_2 sono determinati dalla richiesta che $\pi(v) \in U$. Imponendo dunque di soddisfare alle equazioni del sottospazio U abbiamo due condizioni che danno $\alpha_1 = \frac{1}{3}(-x_1 + x_2 - x_3)$ e $\alpha_2 = \frac{1}{3}(x_1 - x_3 - x_4)$. Dunque $\pi(v)$ ha coordinate

$$\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix}$$

e la matrice richiesta è proprio $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Nelle stesse notazioni, la simmetria richiesta $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ manda v in $\sigma(v) = u - w = u - (v-u) = 2u - v = 2\pi(v) - v$ da cui si deduce cha la matrice cercata è $B = 2A - \mathbb{I}_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 2. Si consideri ora l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A, gli autovalori, e le rispettive molteplicità e nullità.

(b) Si determinino gli autospazi di A, si dica se A è o meno diagonalizzabile, e si trovi il polinomio minimo di A.

(c) Esistono due matrici invertibili P e Q tali che $PAQ = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$? e $\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$?

Soluzione.

(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ è

$$\begin{vmatrix} X+1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & X-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X+1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & X-1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= X(X-2)(X^2-1+1) + (X^2-1+1) = X^2(X^2-2X+1) = X^2(X-1)^2$$

(nel primo passaggio abbiamo sviluppato rispetto all'ultima riga) da cui si deducono i due autovalori 0 e 1 di molteplicità 2 entrambi.

Poiché $A - 0\mathbb{I}_4 = A$ ha rango 3 (basta osservare il minore che si ottiene cancellando prima riga e prima colonna), l'autospazio di 0 ha dimensione 1 (nullità di 0). Allo stesso modo, poiché $A - 1\mathbb{I}_4 = A - \mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} -2&0&1&0 \\ 0&1&0&-1 \\ -1&0&-3&0 \\ 0&1&0&-1 \end{pmatrix}$ ha rango 3 (basta osservare il minore che si ottiene cancellando ultima riga e ultima colonna), l'autospazio di 1 ha dimensione 1 (nullità di 1).

(b) Siccome molteplicità e nullità degli autovalori sono diverse, possiamo già dire che la matrice non sarà diagonalizzabile. Risolvendo il sistema omogeneo di matrice A, troviamo che l'autospazio di 0 è generato da $\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$. Risolvendo il sistema omogeneo di matrice $A - 1\mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} -2&0&1&0 \\ 0&1&0&-1 \\ -1&0&-3&0 \\ 0&1&0&-1 \end{pmatrix}$ troviamo che l'autospazio di 1 è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1 \end{pmatrix}$. Il polinomio minimo è uguale al polinomio caratteristico, poiché entrambi gli autospazi hanno dimensione 1.

(c) No, bisognerebbe che $\dim\ker\phi = 2$.

Sì. Poiché A ha rango 3 (vedi punto (a)) possiamo scegliere una base $\mathcal{V}$ del dominio ed una base $\mathcal{W}$ del codominio tali che la matrice di ψ in quelle basi sia quella richiesta. Basterà scegliere $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ con $v_1 \in \ker\phi$ (questo per rendere nulla la prima colonna della matrice di ϕ nelle basi scelte), el codominio dobbiamo scegliere $\mathcal{W} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ con $w_i = \phi(v_i)$ per $i = 2, 3, 4$, e per completare la base possiamo scegliere w_1 qualsiasi indipendente dai precedenti. Le matrici richieste sono allora le matrici di cambiamento di base $Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ e $P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ ove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. $\square$

Esercizio 3. Si considerino le tre famiglie di piani dello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

$$\alpha_\lambda : X+\lambda Y+\lambda Z=1, \qquad \beta_\lambda : X-Y=2-\lambda, \qquad \gamma_\lambda : (1-\lambda)X-(1+\lambda^2)Y-Z=3-\lambda$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Si dica per quali valori di λ i tre piani si intersecano in un solo punto. In questi casi determinare le coordinate di tale punto al variare di λ.

(b) Si dica per quali valori di λ i tre piani si intersecano in una retta. È vero in tali casi che due dei tre piani coincidono?

(c) Si dica per quali valori di λ i tre piani hanno intersezione vuota. È vero in tali casi che due dei tre piani sono paralleli?

Soluzione. Cominciamo riducendo in forma di Gauss la matrice completa del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2-\lambda \\ 1-\lambda & -1-\lambda^2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[III-(1-\lambda)I]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda+\lambda^2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-II]{} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -1+\lambda^2 & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

da cui si vede che la matrice incompleta ha determinante $(\lambda+1)(\lambda^2-1)$, e dunque ha rango 3 (e vi è un unico punto di intersezione dei tre piani) se il parametro λ è diverso dai valori 1 e -1.

(a) Dunque per $\lambda \neq \pm 1$ dalla riduzione di Gauss troviamo che il punto al variare di λ si scrive come

$$P_\lambda = \frac{1}{\lambda^2-1} \begin{pmatrix} -\lambda^3+2\lambda^2-3\lambda-1 \\ \lambda^2-2\lambda+2 \\ -\lambda-1 \end{pmatrix} .$$

(b) Se $\lambda=-1$ dalla matrice ridotta con Gauss vediamo che il sistema è compatibile, di rango 2 (sia la matrice completa che l'incompleta), e l'intersezione è la retta di equazioni $X-Y=3$ e $Z=2$. osservando la matrice originale $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ vediamo che si tratta di tre piani distinti d'un fascio.

(c) Se $\lambda=1$ la matrice ridotta con Gauss dice che il sistema è incompatibile (rango della matrice incompleta è 2 e della completa è 3); osservando la matrice iniziale del sistema vediamo che diventa $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ da cui si vede che che i tre piani sono a due a due non paralleli (nessuna riga della matrice incompleta è proporzionale ad un'altra). $\square$

Esercizio 4. Si considerino le due rette

$$r_1 : \begin{cases} X + Y = 1 \\ Z = 2 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X = -1 \\ 2Y - Z = -7 \end{cases}$$

nello spazio euclideo reale di dimensione 3.

(*a*) Trovare l'unica retta n incidente sia r_1 che r_2 ed ortogonale ad entrambe. Trovare i punti $P_1 = r_1 \cap n$ e $P_2 = r_2 \cap n$.

(*b*) Trovare l'unica retta t passante per il punto Q di coordinate $(-2, -3, 8)$ ed incidente sia r_1 che r_2. Trovare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.

(*c*) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 (può essere zero?) e l'area del triangolo di vertici P_1, Q_1, Q_2 (può essere zero?).

Risultati.

(*a*) La retta n è la retta di equazioni cartesiane $X - Y = 1$ e $Y + 2Z = 4$. I punti sono $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $P_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

(*b*) La retta a è la retta di equazioni cartesiane $2X - Y = -1$ e $3X + Z = 2$. I punti sono $Q_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $Q_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$.

(*c*) Il volume richiesto è $\frac{3}{2}$ mentre l'area richiesta è $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. $\square$

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} X_1 - X_2 = 0 \\ 3X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W.
(b) Determinare basi, equazioni e dimensioni per $U \cap W$ e $U + W$.
(c) Determinare tutti i possibili complementari di $U + W$.

Soluzione.
(a) Le equazioni per U si ottengono imponendo la condizione

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ X_2 & 2 \\ X_3 & -1 \\ X_4 & 2 \end{pmatrix} \leq 1, \quad \text{dunque} \quad \begin{cases} 2X_1 - X_2 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \\ 2X_1 - X_4 = 0 \end{cases}$$

(abbiamo annullato i minori contenenti la prima riga).
Scrivendo le soluzioni per il sistema che definisce W possiamo trovare una base data dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(b) Formando il sistema delle cinque equazioni (tre per U e due per W) troviamo unica soluzione il vettore nullo, dunque $U \cap W = 0$, la cui base è l'insieme vuoto, e la cui dimensione è zero. Allo stesso risultato si arrivava più semplicemente osservando che il generatore di U non soddisfa alle equazioni di W.
Dalla formula di Grassmann abbiamo allora $\dim U + W = 3$, una cui base è data da $u = (1, 2, -1, 2)$, w_1 e w_2 (che sono linearmente indipendenti come si può facilmente mostrare); una equazione per $U + W$ si trova dalla condizione

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 & 1 \\ X_2 & 2 & 0 & 1 \\ X_3 & -1 & 1 & 0 \\ X_4 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 0,$$

e dunque $8X_1 - 5X_2 + X_4 = 0$.

(c) Un complementare di $U + W$, ancora per la formula di grassmann deve avere dimensione 1, e basta scegliere un generatore che insieme a u, w_1 e w_2 dìa una base di $\mathbb{R}^4$; per esempio possiamo scegliere $\langle e_1 \rangle$.
Per classificare tutti i possibili complementari di $U+W$ possiamo considerare l'insieme dei vettori $v \in \mathbb{R}^4$ non appartenenti a $U+W$ (cioè tali che $8X_1+5X_2-9X_4 \neq 0$, quindi necessariamente non nulli), modulo la relazione di equivalenza per cui due vettori sono in relazione se uno è multiplo dell'altro (in tal caso infatti determinano lo stesso complementare, altrimenti determinano complementari diversi). $\square$

Esercizio 2. Si consideri ora l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.
(a) Determinare il polinomio caratteristico di A, gli autovalori, e le rispettive molteplicità e nullità.
(b) Si determinino gli autospazi di A, si dica se A è o meno diagonalizzabile, e in tal caso si determini una matrice invertibile U tale che $U^{-1}AU$ sia diagonale; si trovi il polinomio minimo di A.
(c) Esistono due matrici invertibili P e Q tali che $PAQ = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$? e $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$?

Soluzione.
(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ è

$$\begin{vmatrix} X-2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & X+1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -2 \\ 0 & X+1 & 0 \\ -2 & 0 & X+1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ X-2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & X+1 \end{vmatrix} =$$
$$= (X-2)(X+1)[(X-2)(X+1)-4] - 4[(X-2)(X+1)-4] = [(X-2)(X+1)-4]^2 =$$
$$= (X^2 - X - 6)^2 = (X+2)^2(X-3)^2$$

(nel primo passaggio abbiamo sviluppato rispetto alla prima colonna) da cui si deducono i due autovalori -2 e 4 di molteplicità 2 entrambi.
Poiché $A{+}2\mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} 4&0&2&0\\0&4&0&2\\2&0&1&0\\0&2&0&1 \end{pmatrix}$ ha rango 2, l'autospazio di -2 ha dimensione 2 (nullità di -2). Allo stesso modo, poiché $A{-}3\mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} -2&0&2&0\\0&-2&0&2\\2&0&-4&0\\0&2&0&-4 \end{pmatrix}$ ha rango 2, l'autospazio di 3 ha dimensione 2 (nullità di 3).
(b) Siccome molteplicità e nullità degli autovalori sono uguali per ogni autovalore, possiamo già dire che la matrice è diagonalizzabile. Risolvendo il sistema omogeneo di matrice $A{+}2\mathbb{I}_4$, troviamo che l'autospazio di -2 è generato da $\begin{pmatrix} 1\\0\\-2\\0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-2 \end{pmatrix}$. Risolvendo il sistema omogeneo di matrice $A{-}3\mathbb{I}_4$ troviamo che l'autospazio di 3 è generato da $\begin{pmatrix} 2\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\2\\0\\1 \end{pmatrix}$. Il polinomio minimo è uguale a $(X+2)(X-3)$ poiché la matrice è diagonalizzabile, e quindi deve essere prodotto di fattori lineari distinti.
Una matrice U come richiesto si può ottenere usando come colonne una base di autovettori; per esempio $U = \begin{pmatrix} 1&0&2&0\\0&1&0&2\\-2&0&1&0\\0&-2&0&1 \end{pmatrix}$ è invertibile e risulta $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3 \end{pmatrix}$.
(c) No, bisognerebbe che $\dim\ker\phi = 2$, mentre qui $\ker\phi = 0$.
Sì. Poiché A ha rango 4 (tutti i suoi autovalori sono non nulli) possiamo ottenere il risultato richiesto banalmente scegliendo per esempio $P = A^{-1}$ e $Q = \mathbb{I}_4$. □

Esercizio 3. Si considerino le due famiglie di rette dello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

$$r_\lambda : \begin{cases} X + Y + \lambda Z = 2\lambda \\ Y + \lambda Z = \lambda \end{cases} \qquad s_\lambda : \begin{cases} X + \lambda Z = 1 \\ \lambda X + Y + \lambda^2 Z = 2\lambda \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Si dica per quali valori di λ le due rette sono complanari, e in questi casi determinare l'equazione del piano che le contiene.

(b) Si dica per quali valori di λ le due rette sono incidenti, e in questi casi determinare le coordinate del punto di intersezione.

(c) Si dica per quali valori di λ le due rette sono sghembe.

(d) È vero che in ciascuna delle due famiglie le rette sono a due a due sghembe?

Soluzione. Possiamo semplificare le equazione delle due rette:

$$r_\lambda : \begin{cases} X = \lambda & (I - II) \\ Y + \lambda Z = \lambda \end{cases} \qquad s_\lambda : \begin{cases} X + \lambda Z = 1 \\ Y = \lambda & (II - \lambda I) \end{cases}$$

Cominciamo riducendo in forma di Gauss la matrice completa del sistema semplificato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-II]{III-I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+III]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

da cui si vede che la matrice completa ha determinante $\lambda(1-\lambda)$, e dunque ha rango 4 se il parametro λ è diverso dai valori 0 e 1: in tal caso la matrice incompleta ha necessariamente rango 3, e le due rette sono sghembe. Se invece $\lambda = 0$ si vede subito che la matrice incompleta ha rango 2, e quella completa 3: le due rette r_0 ed s_0 sono allora parallele e distinte. Se $\lambda = 1$ le matrici competa ed incompleta hanno rango 3 entrambe, quindi le due rette sono incidenti (e distinte).

(a) Dunque per $\lambda = 0, 1$ le due rette sono complanari. Nel caso $\lambda = 0$ le equazioni sono $X + Y = 0 = Y$ per r_0 e $X - 1 = 0 = Y$ per s_0, quindi il piano che le contiene ha equazione $Y = 0$. Nel caso $\lambda = 1$ le equazioni sono $X - 1 = 0 = Y + Z - 1$ per r_1 e $X + Z - 1 = 0 = Y - 1$ per s_1, quindi il piano che le contiene ha equazione $X + Y + Z = 2$ (se non fosse evidente basterebbe cercare l'unico piano in comune ai due fasci di assi le rette r_1 ed s_1).

(b) Se $\lambda = 1$ abbiamo già visto che le rette sono incidenti, e dalle equazioni vediamo che il punto di incidenza ha coordinate $(1, 1, 0)$.

(c) Le due rette r_λ ed s_λ sono sghembe se $\lambda \neq 0, 1$.

(d) Considerando due rette r_λ ed r_μ abbiamo un sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & \mu & \mu \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-II]{III-I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \mu-\lambda \\ 0 & 0 & \mu-\lambda & \mu-\lambda \end{pmatrix}$$

dalla cui riduzione di Gauss vediamo che ha determinante $-(\mu-\lambda)^2$ che è diverso da zero (e dunque le due rette sono sghembe) se $\lambda \neq \mu$ (le due rette sono distinte). Un analogo calcolo funziona per l'altra famiglia. □

Esercizio 4. Si considerino le due rette

$$r_1 : \begin{cases} X - 2Y = -1 \\ Z = 2 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X = 0 \\ Y + Z = 7 \end{cases}$$

nello spazio euclideo reale di dimensione 3.

(*a*) Trovare l'unica retta n incidente sia r_1 che r_2 ed ortogonale ad entrambe. Trovare i punti $P_1 = r_1 \cap n$ e $P_2 = r_2 \cap n$.

(*b*) Trovare l'unica retta t parallela al vettore w di coordinate $(1, 4, 1)$ ed incidente sia r_1 che r_2. Trovare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.

(*c*) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 e l'area del triangolo di vertici P_1, Q_1, Q_2.

Risultati.

(*a*) La retta n è la retta di equazioni cartesiane $2X + Y = 3$ e $2X + Z = 4$. I punti sono $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(*b*) La retta t è la retta di equazioni cartesiane $4X - Y = -4$ e $X - Z = -3$. I punti sono $Q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(*c*) Il volume richiesto è $\frac{3}{2}$ mentre l'area richiesta è $3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$\square$

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\2\\1 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad W : X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 0$$

(a) Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W.
(b) Determinare basi, equazioni e dimensioni per $U \cap W$ e $U + W$.
(c) Determinare un complementare di $U \cap W$. È vero che tutti i possibili complementari di $U \cap W$ intersecano sia U che W in un sottospazio non nullo?

Soluzione.
(a) Le equazioni per U si ottengono imponendo la condizione

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 & 2 \\ X_2 & 2 & 0 & 1 \\ X_3 & 0 & 1 & 2 \\ X_4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

da cui otteniamo $2X_1 - X_2 - 2X_3 + X_4 = 0$.
Scrivendo le soluzioni per il sistema che definisce W possiamo trovare una base data dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}$ e $w_3 = \begin{pmatrix} 4\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}$.
(b) L'intersezione $U \cap W$ si ottiene dal sistema delle due equazioni per U e per W, che è di rango 2, e dunque $\dim U \cap W = 2$; per trovare una base possiamo esplicitare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_2 - 2X_3 + X_4 = 0 \end{cases} \quad \text{che si riduce a} \quad \begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 0 \\ 5X_2 + 8X_3 + 7X_4 = 0 \end{cases}$$

da cui troviamo per esempio $v_1 = \begin{pmatrix} 1\\-8\\5\\0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -6\\-7\\0\\5 \end{pmatrix}$.
Per la formula di grassmann allora abbiamo che $\dim U + W = 4$, e dunque $U + W = \mathbb{R}^4$, una cui base è per esempio la base canonica.
(c) Un complementare di $U \cap W$ ha necessariamente dimensione 2 e si può ottenere a partire da due generatori che insieme a v_1 e v_2 formino una base di $\mathbb{R}^4$; per esempio $\langle e_3, e_4 \rangle$.
D'altra parte, sia V un complementare qualsiasi di $U \cap W$; come già detto abbiamo $\dim V = 2$, e d'altra parte $V + U = \mathbb{R}^4$ (perché $V + U \supseteq V + (U \cap W) = \mathbb{R}^4$); allora la formula di grassmann dà $\dim V \cap U = \dim V + \dim U - \dim(V + U) = 2 + 3 - 4 = 1$, da cui vediamo che $V \cap U$ non può essere nullo. Stesso discorso per W, e quindi la risposta alla domanda è affermativa. $\square$

Esercizio 2. Si consideri ora l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(*a*) Determinare il polinomio caratteristico di A, gli autovalori, e le rispettive molteplicità e nullità.

(*b*) Si determinino gli autospazi di A, si dica se A è o meno diagonalizzabile, e in tal caso si determini una matrice invertibile U tale che $U^{-1}AU$ sia diagonale; si trovi il polinomio minimo di A.

(*c*) Esistono due matrici invertibili P e Q tali che $PAQ = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$? e $\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$?

Soluzione.

(*a*) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ è

$$\begin{vmatrix} X-1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & X+2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2)^2 \begin{vmatrix} X-1 & 3 \\ 3 & X-1 \end{vmatrix} = (X+2)^2((X-1)^2-9) =$$
$$= (X+2)^2(X^2-2X-8) = (X+2)^3(X-4)$$

(nel primo passaggio abbiamo sviluppato rispetto all'ultima e alla seconda colonna) da cui si deducono i due autovalori -2 e 4 di molteplicità 3 e 1 rispettivamente.

Poiché $A+2\mathbb{I}_4 = \left(\begin{smallmatrix} 3&0&-3&0 \\ 1&0&-1&0 \\ -3&0&3&0 \\ 1&0&-1&0 \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 1, l'autospazio di -2 ha dimensione 3 (nullità di -2). Allo stesso modo, poiché $A-4\mathbb{I}_4 = A-\mathbb{I}_4 = \left(\begin{smallmatrix} -3&0&-3&0 \\ 1&-6&-1&0 \\ -3&0&-3&0 \\ 1&0&-1&-6 \end{smallmatrix}\right)$ ha rango 3 (era ovvio, vista la molteplicità di valore 1), l'autospazio di 4 ha dimensione 1 (nullità di 4).

(*b*) Siccome molteplicità e nullità degli autovalori sono uguali per ogni autovalore, la matrice è diagonalizzabile. Risolvendo il sistema omogeneo di matrice $A+2\mathbb{I}_4$, troviamo che l'autospazio di -2 è generato da $\left(\begin{smallmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{smallmatrix}\right)$. Risolvendo il sistema omogeneo di matrice $A-4\mathbb{I}_4$ troviamo che l'autospazio di 4 è generato dal vettore $\left(\begin{smallmatrix} 3\\1\\-3\\1 \end{smallmatrix}\right)$. Il polinomio minimo è $(X+2)(X-4)$ poiché la matrice è diagonalizzabile. Una matrice U come richiesto si può ottenere usando come colonne una base di autovettori; per esempio $U = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1&3 \\ 1&0&0&1 \\ 0&0&1&-3 \\ 0&1&0&1 \end{smallmatrix}\right)$ è invertibile e risulta $U^{-1}AU = \left(\begin{smallmatrix} -2&0&0&0 \\ 0&-2&0&0 \\ 0&0&-2&0 \\ 0&0&0&4 \end{smallmatrix}\right)$.

(*c*) No, bisognerebbe che $\dim\ker\phi = 1$, mentre qui il nucleo è nullo.
Sì. Poiché A ha rango 4 possiamo realizzare la condizione richiesta con $P = A^{-1}$ e $Q = \mathbb{I}_4$. □

Esercizio 3. Si considerino le due famiglie di sottospazi affini dello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

$$r_\lambda : \begin{cases} X + (\lambda - 1)Y + \lambda Z = 0 \\ X + \lambda Y + 2\lambda Z = \lambda \end{cases} \qquad \pi_\lambda : X + \lambda Z = \lambda$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Si dica per quali valori di λ la retta r_λ ed il piano π_λ sono incidenti; in tali casi determinare l'intersezione.
(b) Si dica per quali valori di λ la retta r_λ ed il piano π_λ sono paralleli.
(c) È vero che per $\lambda \neq \mu$ le rette r_λ e r_μ sono sghembe?
(d) È vero che la famiglia di piani forma un fascio? Eventualmente determinarne l'asse.

Soluzione. Possiamo semplificare il sistema per r_λ $\begin{cases} X + (\lambda - 1)Y + \lambda Z = 0 \\ Y + \lambda Z = \lambda \qquad\qquad (II - I) \end{cases}$.
Cominciamo riducendo in forma di Gauss la matrice completa del sistema semplificato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda-1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \xRightarrow{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \xRightarrow[II-(\lambda-1)III]{III} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda(1-\lambda) & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che la matrice incompleta ha determinante $\lambda(1-\lambda)$, e dunque ha rango 3 (e vi è un unico punto di intersezione tra piano e retta) se il parametro λ è diverso dai valori 0 e 1.

(a) Dunque per $\lambda \neq 0, 1$ dalla riduzione di Gauss troviamo che il punto al variare di λ si scrive come

$$P_\lambda = \frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} .$$

Se invece abbiamo $\lambda = 0$ allora la matrice completa ed incompleta del sistema hanno entrambe rango 2, da cui si deduce che r_0 è contenuta in π_0.

(b) Se $\lambda = 1$ abbiamo che il sistema ha matrice incompleta di rango 2 e completa di rango 3; quindi in questo caso il sistema è incompatibile e la retta r_1 è parallela al piano π_1.

(c) Il sistema formato dalle rette r_λ ed r_μ è

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \mu-1 & \mu & 0 \\ 0 & 1 & \mu & \mu \end{pmatrix} \xRightarrow[IV-II]{III-I} \begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \mu-\lambda & \mu-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu-\lambda & \mu-\lambda \end{pmatrix}$$

e dalla sua riduzione (parziale) vediamo che il determinante della matrice completa è $(\mu - \lambda)^2$, che si annulla solo se $\lambda = \mu$, cioè se le due rette coincidono; dunque rette distinte della famiglia sono sghembe tra loro.

(d) Riscrivendo la famiglia di piani nella forma $X + \lambda(Z - 1) = 0$ vediamo che si tratta delle combinazioni del piano $X = 0$ con il piano $Z - 1 = 0$ in cui il coefficiente del primo non è mai nullo. Quindi la famiglia in questione è formata dai piani del fascio di asse la retta di equazioni $X = 0 = Z - 1$, tranne quello di equazione $Z - 1 = 0$. □

Esercizio 4. Si considerino le due rette

$$r_1 : \begin{cases} X - Y = -2 \\ X - Z = -1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X - 2Y = -8 \\ Z = -1 \end{cases}$$

nello spazio euclideo reale di dimensione 3.

(*a*) Trovare l'unica retta n incidente sia r_1 che r_2 ed ortogonale ad entrambe. Trovare i punti $P_1 = r_1 \cap n$ e $P_2 = r_2 \cap n$.

(*b*) Trovare l'unica retta t parallela al vettore w di coordinate $(1, 2, 0)$ ed incidente sia r_1 che r_2. Trovare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.

(*c*) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 e l'area del triangolo di vertici P_1, Q_1, Q_2.

Risultati.

(*a*) La retta n ha equazioni cartesiane $X - Z = -1$ e $Y + 2Z = 1$. I punti sono $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(*b*) La retta t ha equazioni cartesiane $2X - Y = -4$ e $Z = -1$. I punti sono $Q_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(*c*) Il volume richiesto è 1 mentre l'area richiesta è $\sqrt{6}$.

$\square$

Esercizio 1. Siano a, b, c, d, e, f le cifre del proprio numero di matricola, in ordine. Siano $x = ae5 + 9$, $y = c7 + 11$ e $z = b1 + 29$ (in queste definizioni le cifre sono giustapposte e non moltiplicate: per esempio se $a = 5$ e $e = 4$, allora $ae5 = 545$).

(1) Calcolare il massimo comun divisore D tra x e y, e trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tali che $\alpha x + \beta y = D$.

(2) È possibile passare da un estremo all'altro di un segmento lungo z facendo passi di lunghezza x e/o y (in un senso e/o nell'altro)?

(3) Si consideri la funzione $\sigma : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $\sigma(m, n) = mx + ny$. È iniettiva? È suriettiva? Determinarne l'immagine. Calcolare le controimmagini di 0, di 1 e di D.

Risultati.

(1) Si applica l'algoritmo di Euclide; essendo x e y numeri pari, certo D è multiplo di 2.

(2) È possibile se e solo se D divide z, e in tal caso si può trovare una soluzione al problema moltiplicando per z/D l'uguaglianza $\alpha x + \beta y = D$ prima stabilita.

(3) Questa funzione non è mai iniettiva: per esempio $\sigma(0, 0) = 0 = \sigma(y, -x)$. Non è nemmeno suriettiva, visto che l'imagine è formata da tutti e soli i multipli di D, come abbiamo visto dimostrando l'esistenza del massimo comun divisore; nel nostro caso $D \neq 1$ (essendo pari). La controimmagine di zero è data da $\sigma^*(0) = \{(m, n)|mx + ny = 0\} = \{(\frac{y}{D}k, -\frac{x}{D}k)|k \in \mathbb{Z}\}$. La controimmagine di 1 è vuota, visto che D non divide 1. La controimmagine di D è formata dalle coppie che si ottengono sommando ad (α, β) prima trovati una qualunque coppia della controimmagine di 0. □

Esercizio 2. Siano a, b, c e d la terza, quarta, quinta e sesta cifra del proprio numero di matricola, sostituite con 3 se sono nulle. Siano $v = a + ic$ e $w = b + id$ due numeri complessi.

(1) Calcolare i numeri complessi $\frac{v}{w}$ e $\frac{w}{v}$, e si disegnarli insieme a v e w nel piano di Gauss.

(2) Si consideri la funzione $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $\phi(z) = z^2 + vz + w$. Determinare se è iniettiva e/o suriettiva. Descrivere la controimmagine di 0. Esistono $\zeta \in \mathbb{C}$ tali che la loro controimmagine contenga un solo elemento?

(3) Sia k l'unico numero intero compreso tra 3 e 6 che sia congruo al proprio numero di matricola modulo 4; determinare tutti i numeri complessi u tali che u^k sia numero puramente immaginario.

Risultati.

(1) Si calcola e si disegna.

(2) La funzione non è iniettiva: per esempio $\phi(0) = w = \phi(-v)$. Essa è suriettiva, poiché in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2 + vz + w = \zeta$ ha sempre soluzione (per il teorema fondamentale dell'algebra), e dunque per ogni $\zeta \in \mathbb{C}$ si trova $z \in \mathbb{C}$ tale che $\phi(z) = \zeta$. La controimmagine di 0 è formata dai due numeri complessi che si ottengono risolvendo l'equazione di secondo grado $z^2 + vz + w = 0$. Esiste esattamente un numero $\zeta \in \mathbb{C}$ tale che la controimmagine tramite ϕ sia data da un elemento: esattamente quando il polinomio $z^2 + vz + w - \zeta$ ha una sola radice (cioè due radici coincidenti), e si trova annullando il discriminante: $\zeta = \frac{v^2}{4} - w$.

(3) Si tratta dei numeri complessi che sono multipli (reali) delle radici k-esime di i oppure di $-i$; si tratta di k rette passanti per l'origine nel piano di Gauss (passano per i punti del circolo unitario di argomenti $\dfrac{\pi}{2k} + \dfrac{2m\pi}{k}$ e $\dfrac{3\pi}{2k} + \dfrac{2m\pi}{k}$ per $m = 0, 1, \ldots, k - 1$). □

Esercizio 1. Siano a, b, c, d, e, f le cifre del proprio numero di matricola, in ordine. Siano $x = ac7 + 9$, $y = e7 + 11$ e $z = d1 + 39$ (in queste definizioni le cifre sono giustapposte e non moltiplicate: per esempio se $a = 5$ e $c = 4$, allora $ac7 + 9 = 547 + 9 = 556$).
(1) Calcolare il massimo comun divisore D tra x e y, e trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tali che $\alpha x + \beta y = D$.
(2) È possibile scrivere $z = \alpha' x + \beta' y$ con $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}$?
(3) Si consideri la funzione $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $\sigma(n) = \alpha x + ny$ (α è il numero intero prima trovato). È iniettiva? È suriettiva? Determinarne l'immagine. Calcolare le controimmagini di D e di z.

Risultati.
(1) Si applica l'algoritmo di Euclide; essendo x e y numeri pari, certo D è multiplo di 2.
(2) È possibile se e solo se D divide z, e in tal caso si può trovare una soluzione al problema moltiplicando per z/D l'uguaglianza $\alpha x + \beta y = D$ prima stabilita.
(3) Questa funzione è sempre iniettiva, mai suriettiva (perché $y \neq 1$) e la sua immagine è $\alpha x + y\mathbb{Z}$, cioè la classe laterale di αx modulo y. L'antimmagine di D è $\{\beta\}$, quella di z dipende dai dati del problema (di solito sarà vuota). □

Esercizio 2. Siano a, b, c e d la terza, quarta, quinta e sesta cifra del proprio numero di matricola, sostituite con 3 se sono nulle. Siano $v = a + ib$ e $w = c - id$ due numeri complessi.
(1) Calcolare i numeri complessi $\frac{v}{w}$ e $\frac{w}{v}$, e si disegnarli insieme a v e w nel piano di Gauss.
(2) Si consideri la funzione $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $\phi(z) = z^2 - 2ivz - v^2$. Determinare se è iniettiva e/o suriettiva. Descrivere la controimmagine di 0. Esistono $\zeta \in \mathbb{C}$ tali che la loro controimmagine contenga un solo elemento?
(3) Sia k l'unico numero intero compreso tra 3 e 6 che sia congruo al proprio numero di matricola modulo 4; determinare tutti i numeri complessi u tali che $u^k = -1$ e disegnarli sul piano di Gauss.

Risultati.
(1) Si calcola e si disegna.
(2) La funzione non è iniettiva: per esempio vi sono due valori (0 e $2iv$) la cui immagine è $-v^2$. La funzione è suriettiva perché per ogni $\zeta \in \mathbb{C}$ si può risolvere l'equazione $\phi(z) = \zeta$ (si tratta di una equazione di secondo grado nella incognita z, quindi si trovano due soluzioni, di solito distinte). La controimmagine di 0 è $\{iv\}$, e $\zeta = 0$ è l'unico valore che abbia controimmagine formata da un solo elemento.
(3) Si tratta delle radici k-esime di -1; poiché $-1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$, dalla formula di De Moivre abbiamo che le radici k-esime sono $\cos(\frac{\pi}{k} + \frac{2\pi}{k}\ell) + i\sin(\frac{\pi}{k} + \frac{2\pi}{k}\ell)$ con $\ell = 0, 1, \cdots, k-1$. Si tratta dei vertici del k-agono regolare, inscritto nella circonferenza unitaria, un cui vertice sia nella posizione $\cos(\frac{\pi}{k}) + i\sin(\frac{\pi}{k})$
□

Esercizio 1. Siano $x = 196$, $y = 315$ e $z = 49$.

(1) Calcolare il massimo comun divisore D tra x e y; trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tali che $\alpha x + \beta y = D$.
(2) È possibile scrivere $z = \alpha' x + \beta' y$ con $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}$?
(3) Si consideri la funzione $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $\sigma(n) = nx + \beta y$ (β è il numero intero prima trovato). È iniettiva? È suriettiva? Determinarne l'immagine. Calcolare le controimmagini di D e di z.

Esercizio 2. Siano $v = -3 + i4$ e $w = 2 - i5$ due numeri complessi.

(1) Calcolare i numeri complessi $\frac{v}{w}$ e $\frac{w}{v}$, e si disegnarli insieme a v e w nel piano di Gauss.
(2) Si consideri la funzione $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $\phi(z) = z^2 + ivz - 12i$. Determinare se è iniettiva e/o suriettiva. Descrivere la controimmagine di 0. Esistono $\zeta \in \mathbb{C}$ tali che la loro controimmagine contenga un solo elemento?
(3) Determinare tutti i numeri complessi u tali che $u^3 = i$ e disegnarli sul piano di Gauss.

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Siano a, b, c e d la terza, quarta, quinta e sesta cifra del proprio numero di matricola, sostituite con 3 se sono nulle. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} cX_2 - dX_3 = 0 \\ X_3 - cX_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio V e una base per il sottospazio W.
(b) Trovare equazioni, base e dimensione per i sottospazi $V \cap W$ e $V + W$.
(c) Che cosa cambierebbe nei punti precedenti se invece di $\mathbb{R}$ usassimo un corpo K di caratteristica p, più piccolo numero primo superiore ad a?

Risultati.
(a) V ha equazioni $\begin{cases} bX_1 - X_2 + dX_4 = 0 \\ aX_1 - X_3 + cX_4 = 0 \end{cases}$ e $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.
(b) $V \cap W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, ha dimensione 1 ed equazioni $\begin{cases} X_1 = 0 \\ cX_2 - dX_3 = 0 \\ X_3 - cX_4 = 0. \end{cases}$
$V + W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ c \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, ha dimensione 3 ed equazione $aX_2 - bX_3 + (bc - ad)X_4 = 0$.
(c) Dipende da p. □

Esercizio 2. Siano a e c la quinta e sesta cifra del proprio numero di matricola, sostituite con 3 se sono nulle. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$: U generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, e V di equazione $cX + Y + Z = 0$
(a) Mostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$. Si determini la matrice P (nella base canonica di $\mathbb{R}^3$) della proiezione π su V e di direzione U. Si determini la matrice S (nella base canonica di $\mathbb{R}^3$) della simmetria σ di asse V e direzione U.
(b) Esiste qualche base di $\mathbb{R}^3$ in cui le matrici associate alle applicazioni π e σ sono entrambe diagonali? Determinarne una ed esplicitare le matrici di cambiamento di base rispetto alla base canonica.
(c) È vero che la matrice $P - S$ rappresenta (nella base canonica) una proiezione (eventualmente, trovare asse e direzione)?

Risultati.
(a) $P = \dfrac{1}{a+1+c} \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -ac & 1+c & -a \\ -c & -1 & a+c \end{pmatrix}$ e $S = 2P - \mathbb{I}_3$.
(b) In una base ottenuta da una base di U e una di V (per esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}$) le due matrici sono diagonali.
(c) Sì, di asse U e direzione V; infatti $P - S = P - (2P - \mathbb{I}_3) = \mathbb{I}_3 - P$. □

Esercizio 3. Siano a e b la quinta e sesta cifra del proprio numero di matricola, sostituite con 4 se sono nulle. Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\phi(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} aX_1 + X_3 \\ X_2 + bX_4 \\ -aX_1 + X_2 - X_3 + bX_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere la matrice A di ϕ nelle basi canoniche e trovare dimensione e una base per $\ker \phi$ e per $\mathrm{im}\phi$.
(b) Determinare dei sottospazi complementari per $\ker \phi$ e per $\mathrm{im}\phi$.
(c) Esistono delle basi di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice di ϕ è esattamente $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$?

Risultati.
(a) La matrice è $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ -a & 1 & -1 & b \end{smallmatrix}\right)$. Il nucleo ha dimensione 2 ed è generato da $e_1 - ae_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $be_2 - e_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. L'immagine ha dimensione 2 ed è generata da $e_1 - e_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $e_2 + e_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
(b) Un complementare per $\ker \phi$ deve avere dimensione $4 - 2 = 2$, e per esempio può essere generato dai primi due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Un complementare per $\mathrm{im}\phi$ deve avere dimensione $3-2 = 1$, e per esempio può essere generato dal primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(c) Sì, basta usare nel dominio una base i cui ultimi due vettori stiano nel nucleo, e nel codominio una base i cui primi due vettori siano le immagini dei primi due vettori della base scelta del dominio. $\square$

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Siano a e b la quinta e sesta cifra del proprio numero di matricola, sostituite con 3 e 8 se sono nulle. Si consideri il sistema lineare reale di matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda-b & \lambda^2-a\lambda+b & \lambda-a+1 & \lambda+b \\ 1 & a & b & b & a \\ -1 & \lambda-a-b & 0 & 1-b & b-a \end{pmatrix}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Dopo aver opportunamente ridotto la matrice con il metodo di Gauss, si risponda alle seguenti domande:

(a) Determinare i ranghi delle matrici completa e incompleta al variare del parametro λ e dire per quali valori di λ il sistema dato è incompatibile.

(b) Per quali valori di λ il sistema ha spazio delle soluzioni di dimensione 1 (determinare tali spazi)?

(c) Esistono valori di λ per i quali il sistema ha spazio delle soluzioni di dimensione 2 (eventualmente determinare tali spazi)?

(d) Descrivere (per es. mediante equazioni cartesiane) l'insieme formato dalla unione al variare di λ delle soluzioni dei sistemi *omogenei* associati trovati nel punto (b).

Risultati.

(a) Dopo aver effettuato l'opportuna riduzione di Gauss (scambio di prima e seconda riga, somma della prima riga alla terza, sottrazione della seconda riga alla terza) si ottiene il sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & b & a \\ 0 & \lambda-b & b & 1 & b \\ 0 & 0 & \lambda^2-a\lambda & \lambda-a & \lambda \end{pmatrix}$$

da cui si vede che il Massimo Comun Divisore dei minori d'ordine due delle ultime due righe è $(\lambda-a)(\lambda-b)$ (in particolare $\lambda = 0$ non è un valore speciale, e un rapido controllo mostra che in effetti in quel caso la matrice incompleta ha rango massimo 3). Il rango della matrice incompleta vale 3 o 2 a seconda che $\lambda \neq a, b$ o $\lambda = a, b$. Il rango della matrice completa vale 3 se $\lambda \neq a, b$, vale 3 se $\lambda = a$, e nel caso $\lambda = b$ vale 3 se $b-a \neq 1$ e vale 2 altrimenti. In particolare il sistema è incompatibile se $\lambda = a$ e anche se $\lambda = b$ e $b-a \neq 1$ (matrici complete di rango 3 e incomplete di rango 2).

(b) Lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 se $\lambda \neq a, b$; in tal caso le soluzioni sono della forma

$$\frac{1}{(\lambda-a)(\lambda-b)} \begin{pmatrix} (a-b)\lambda^2-(a^2+2ab-b^2-a)\lambda+2a^2b \\ (b-1)\lambda-ab \\ 0 \\ \lambda(\lambda-b) \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} a+b-b\lambda \\ -1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(c) Nel caso che $b-a = 1$ e $\lambda = b$ abbiamo un sistema compatibile di rango 2, quindi lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2, e risulta $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left\langle \left(\begin{smallmatrix} a \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ a+1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

(d) L'insieme richiesto è unione dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 formati dalle soluzioni dei sistemi omogenei per $\lambda \neq a, b$; dal punto (b) si osserva che si tratta di rette contenute in un fissato piano, e sono tutte tranne due. Per $\lambda \neq a, b$ dobbiamo eliminare il parametro per la descrizione richiesta; a partire dal sistema ridotto, possiamo scrivere il sistema $\left\{\begin{smallmatrix} X_1+aX_2+bX_3+bX_4=0 \\ (\lambda-b)X_2+bX_3+X_4=0 \\ \lambda X_3+X_4=0 \end{smallmatrix}\right.$ e sottraendo la terza equazione alla seconda otteniamo le equazioni cartesiane $X_1 + aX_2 + bX_3 + bX_4 = 0$ e $X_2 - X_3 = 0$ che sono quelle di un piano di $\mathbb{R}^4$ (ma dovremmo togliere alcuni valori, corrispondenti alle due rette di cui si diceva). In alternativa possiamo eliminare i parametri dalle espressioni parametriche $\left\{\begin{smallmatrix} X_1 & =\mu(a+b)-\lambda\mu b \\ X_2 & =-\mu \\ X_3 & =-\mu \\ X_4 & =\lambda\mu \end{smallmatrix}\right.$ (ed escludere i casi $\lambda = a, b$).

$\square$

Esercizio 2. Sia a la sesta cifra del proprio numero di matricola, sostituita con 7 se è nulla. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di C^4 in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 & 1+a \\ -a & -a & 0 & 1-a \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.
(a) Determinare il polinomio caratteristico di A e dire se ϕ è invertibile.
Trovare autovalori ed autospazi di ϕ, discuterne la diagonalizzabilità e determinare il polinomio minimo nei seguenti casi:
(b) $C = \mathbb{R}$ (numeri reali);
(c) $C = \mathbb{C}$ (numeri complessi);
(d) $C = \mathbb{F}_5$ (corpo $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ delle classi di $\mathbb{Z}$ modulo 5).
$*(e)$ Nel caso $C = \mathbb{R}$, esiste una base di $\mathbb{R}^4$ tale che la matrice di ϕ sia $B = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$?

Risultati.
(a) Il polinomio caratteristico è $p_A(X) = (X-a)^2(X^2+1)$ e poiché $\det(A) = p_A(0) = a^2$ abbiamo che ϕ è invertibile in ogni corpo C la cui caratteristica non divida a.
L'autospazio $V(a)$ relativo all'autovalore a si trova calcolando il nucleo dell'applicazione $\phi - a\mathrm{id}$; poiché $A - a\mathbb{I}_4$ ha rango due, tale spazio ha dimensione 2 ed è generato dai vettori $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Il polinomio minimo sarà quindi in ogni caso $\mu_A(X) = (X-a)(X^2+1)$.
(b) Nel caso reale, ϕ non è diagonalizzabile poiché non ha tutti i suoi autovalori, essendo il fattore X^2+1 irriducibile in $\mathbb{R}$.
(c) Nel caso complesso, ϕ è diagonalizzabile poiché ha tutti i suoi autovalori (sono $a, i, -i$) e per ciascuno la molteplicità uguaglia la nullità (già visto per a, ed è ovvio per i e $-i$ visto che hanno molteplicità 1). L'autospazio di i è generato dal vettore $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, e quello di $-i$ è generato dal vettore coniugato $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.
(d) Siccome in $\mathbb{F}_5$ la classe $\overline{-1} = \overline{4}$ è un quadrato, il polinomio caratteristico si fattorizza completamente in $(X-\overline{a})^2(X+\overline{2})(X-\overline{2})$ e gli autovalori sono $\overline{a}$, $\overline{-2} = \overline{3}$ e $\overline{2}$. In ogni caso (può essere che $\overline{a}$ coincida con uno degli altri due) abbiamo una matrice diagonalizzabile, e una base dello spazio fatta di autovettori è data da $\left(\begin{smallmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{1} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \overline{1} \\ \overline{-1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{-2} \\ \overline{1} \end{smallmatrix}\right)$.
$*(e)$ Poiché i fattori $(X-a)^2$ e X^2+1 sono coprimi abbiamo che $\mathbb{R}^4$ si decompone nella somma diretta dei sottospazi ϕ-stabili $V_1 = \ker((\phi - a\mathrm{id})^2) = \ker(\phi - a\mathrm{id})$ (autospazio di a) e $V_2 = \ker(\phi^2 + \mathrm{id})$, e quest'ultimo sottospazio è generato dai vettori $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Ora la base richiesta deve avere come primi due elementi degli autovettori indipendenti relativi ad a, e questo è possibile, e come ultimi due elementi due vettori $v, w \in V_2$ tali che $\phi v = -w$ e $\phi w = v$. Siccome ϕ ristretta a V_2 ha la proprietà che $\phi^2 = -\mathrm{id}$, due tali vettori si trovano facilmente: preso qualsiasi v non nullo in V_2 possiamo usare v e $w = -\phi v$ (automaticamente $\phi w = v$). Ad esempio i due vettori evidenziati come base di V_2 vanno bene.
$\square$

Esercizio 1. Sia a la sesta cifra del proprio numero di matricola diminuita di 5, sostituita con 4 se il risultato è zero. Si considerino le due famiglie di piani in $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ di equazioni cartesiane:

$$\pi_\lambda : \begin{cases} (a+\lambda)X_1 + \lambda X_2 + X_3 - \lambda X_4 = 1 \\ (1+\lambda)X_2 + \lambda X_3 = \lambda \end{cases} \qquad \sigma_\lambda : \begin{cases} (a+\lambda)X_1 + (1-\lambda)X_3 - \lambda X_4 = -\lambda \\ X_2 + \lambda X_4 = 2a\lambda \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Dire per quali valori di λ i due piani si incontrano in un punto e determinare il punto in funzione di λ.
(b) Per quali valori di λ i due piani hanno intersezione vuota? In tali casi sono paralleli?
(c) Per quali valori di λ i due piani si intersecano in una retta?
(d) Dire per quali valori di λ i due piani sono contenuti in una varietà lineare affine di dimensione 3, e determinare equazioni cartesiane per tali spazi.

Soluzione. Una riduzione di Gauss della matrice completa:

$$\begin{pmatrix} a+\lambda & \lambda & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda & \lambda & 0 & \lambda \\ a+\lambda & 0 & 1-\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 2a\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[III-I]{} \begin{pmatrix} a+\lambda & \lambda & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda & \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda & 0 & -1-\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 2a\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[III+\lambda IV]{II+III-IV} \begin{pmatrix} a+\lambda & \lambda & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & -1-2a\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda^2 & 2a\lambda^2-\lambda-1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 2a\lambda \end{pmatrix}$$

mostra che il rango della matrice incompleta è massimo (cioè 4) a meno che non sia $\lambda = 0$ oppure $\lambda = -a$ (infatti il determinante è $\lambda^2(a+\lambda)$).

(a) Per $\lambda \neq 0, -a$ il sistema ha un'unica soluzione (matrici completa e incompleta hanno rango 4 entrambe), e la soluzione è:

$$\begin{pmatrix} (-(2a+1)\lambda^2 + \lambda + 1)/\lambda(a+\lambda) \\ -1 \\ -(2\lambda+1)/\lambda \\ -(2a\lambda+1)/\lambda \end{pmatrix}$$

(b) Nel caso $\lambda = 0$ la matrice incompleta ha rango 2 e quella completa rango 3, quindi si tratta di due piani paralleli (e contenuti in un sottospazio affine di dimensione 3). Nel caso $\lambda = -a$ abbiamo che la matrice incompleta ha rango 3 (si veda il minore si ottiene eliminando prima riga e prima colonna) e quella completa rango 4: quindi il sistema è incompatibile (non vi sono soluzioni), ma i due piani non sono paralleli (altrimenti il sistema omogeneo dovrebbe avere rango 2); in questo caso i due piani sono contenuti in due sottovarietà lineari affini di dimensione 3 parallele tra loro.

(c) Mai, perché nel caso in cui la matrice incompleta ha rango 3 (condizione necessaria affinché lo spazio delle soluzioni abbia dimensione 1, visto che siamo in $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$), quella completa ha rango 4 e dunque il sistema è incompatibile.

(d) Ciò succede solo per $\lambda = 0$; e lo spazio cercato è lo spazio affine generato da π_0 e σ_0; osservando il sistema originale per $\lambda = 0$ si vede che c'è una equazione comune, $X_2 = 0$, che quindi è l'unica sottovarietà di dimensione 3 contenente entrambi i piani π_0 e σ_0. Se non fosse stato così evidente, bastava cercare l'equazione del sottospazio $\pi_0 \vee \sigma_0$ per esempio considerando quattro suoi punti (due della retta intersezione e uno per ciascuno dei due piani, ma non sulla retta), ovvero cercare un vettore ortogonale agli spazi direttori di entrambi i piani.

Nel caso $\lambda = -a$, come già detto, i due piani sono contenuti in due iperpiani parallelii tra loro: come si può fare per determinarli?

□

Esercizio 2. Sia a la quinta cifra del proprio numero di matricola, diminuita di 6, sostituito con 3 se il risultato è zero. Sono date due rette

$$r_1 : \begin{cases} 2X - aY = a \\ Y - 2Z = 3 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X - 2Y = a - 7 \\ Z = a - 5 \end{cases}$$

dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ e il punto $P = \begin{pmatrix} -1-a \\ -6 \\ 1-a \end{pmatrix}$.

(a) Determinare la distanza tra le due rette, trovare i due punti R_1 e R_2 di minima distanza tra le due rette e la retta n di minima distanza.

(b) Determinare l'unica retta s per P complanare con le due date, e trovare i punti Q_1 e Q_2 di incidenza di s con esse.

(c) Determinare l'area del triangolo di vertici i punti R_1, R_2, P.

(d) Calcolare il volume del tetraedro che ha come vertici i punti Q_1, R_1, R_2, P.

Soluzione.

(a) Dalle equazioni cartesiane ricaviamo le equazioni parametriche: $r_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ ed $r_2 : \begin{pmatrix} a-7 \\ 0 \\ a-5 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e un vettore ortogonale ad entrambe facendo il prodotto vettore dei due vettori direzione: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a-4 \end{pmatrix}$.

Calcoliamo la distanza tra le rette: $d(r,s) = \dfrac{|\det \begin{pmatrix} a-7 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ a-3 & 1 & 0 \end{pmatrix}|}{\|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a-4 \end{pmatrix}\|} = \sqrt{a^2 - 8a + 21}$. Cerchiamo i punti di minima distanza imponendo che la retta per un punto generico di r_1 e direzione ortogonale ad entrambe le rette incontri anche r_2: cioè determiniamo α e λ in modo che $\begin{pmatrix} a\alpha \\ 2\alpha-1 \\ \alpha-2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a-4 \end{pmatrix}$ soddisfi alle equazioni di r_2. Troviamo $\alpha = 1$ e $\lambda = 1$, da cui i punti $R_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $R_2 = \begin{pmatrix} a-1 \\ 3 \\ a-5 \end{pmatrix}$. La retta richiesta è quindi quella passante per R_1 ed R_2, ed ha equazioni $2X + Y = 2a + 1$ e $(a-4)Y - 2Z = a - 2$.

(b) Ragionando come prima, imponiamo alla retta passante per il punto P e per un generico punto di r_1 di intersecare anche la retta r_2; cioè determiniamo β e μ in modo che $\begin{pmatrix} -1-a \\ -6 \\ 1-a \end{pmatrix} + \mu(\begin{pmatrix} -1-a \\ -6 \\ 1-a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a\beta \\ 2\beta-1 \\ \beta-2 \end{pmatrix})$ soddisfi alle equazioni di r_2. Troviamo $\beta = 0$ e $\mu = 2$, da cui i punti $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $Q_2 = \begin{pmatrix} a-3 \\ 2 \\ a-5 \end{pmatrix}$. La retta richiesta è quindi quella passante per Q_1, P e Q_2, ed ha equazioni $3X + (3-a)Y = a - 3$ e $X - Z = 2$.

Calcoliamo i vettori differenza: $R_1 - P = \begin{pmatrix} 2a-3 \\ 5 \\ a-2 \end{pmatrix}, R_2 - P = \begin{pmatrix} 2a-4 \\ 7 \\ 2a-6 \end{pmatrix}, Q_1 - P = \begin{pmatrix} a-3 \\ 3 \\ a-3 \end{pmatrix}$,

(c) e di conseguenza l'area richiesta è $\frac{1}{2}\|(R_1 - P) \wedge (R_2 - P)\| = \sqrt{6a^2 - 28a + 116}$

(d) e il volume richiesto è $\frac{1}{6}|\det\begin{pmatrix} R_1-P & R_2-P & Q_1-P \end{pmatrix}| = \frac{1}{6}|a^2 - 8a + 21|$.

□

Esercizio 1. Sia a l'ultima cifra del proprio numero di matricola, diminuita di 6, oppure 4 se il risultato è nullo. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1\\a\\0\\0\\a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1\\-1 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} X_1 + aX_3 = 0 \\ aX_3 + X_4 = 0 \\ aX_2 - X_5 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W.
(b) Determinare basi, equazioni e dimensioni per $U \cap W$ e $U + W$.
(c) Determinare la matrice (in base canonica) della proiezione ortogonale di direzione $U \cap W$.

Soluzione.
(a) Le equazioni per U si ottengono imponendo la condizione

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 & 1 \\ X_2 & a & 1 & 0 \\ X_3 & 0 & 0 & 1 \\ X_4 & 0 & 0 & 1 \\ X_5 & a & a & -1 \end{pmatrix} \leq 3, \quad \text{dunque} \quad \begin{cases} X_3 - X_4 = 0 \\ (a^2-a)X_1 - aX_2 - (a^2-a-1)X_3 + X_5 = 0 \end{cases}$$

(abbiamo annullato i minori contenenti le prime tre righe).
Scrivendo le soluzioni per il sistema (già in forma a scalini) che definisce W possiamo trovare una base data dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\a \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} a\\0\\-1\\a\\0 \end{pmatrix}$.

(b) Formando il sistema delle cinque equazioni (due per U e tre per W) troviamo come soluzione lo spazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\a \end{pmatrix}$; quindi $U \cap W$ ha dimensione 1 e le sue equazioni sono per esempio $X_1 = X_3 = X_4 = aX_2 - X_5 = 0$.
Dalla formula di Grassmann abbiamo allora $\dim(U+W) = 4$, e una di $U+W$ base si ottiene con l'unione insiemistica delle basi date di U e W (infatti vi è un vettore che compare due volte); una equazione per $U+W$ si trova dalla condizione

$$\det\begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 & 1 & a \\ X_2 & a & 1 & 0 & 0 \\ X_3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ X_4 & 0 & 0 & 1 & a \\ X_5 & a & a & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

oppure osservando che il vettore $\begin{pmatrix} a^3-a \\ -a^2-a \\ a \\ -a^3+a+1 \\ a+1 \end{pmatrix}$ (formato dai minori segnati della matrice dei vettori della base) è ortogonale ai generatori di $U+W$, e dunque risulta
$(a^3-a)X_1 - (a^2+a)X_2 + aX_3 - (a^3-a-1)X_4 + (a+1)X_5 = 0$.

(c) Si tratta dell'applicazione $\pi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ che manda un generico vettore v nella differenza $\pi(v) = v - w$ ove w è la proiezione ortogonale di v lungo $w_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\a \end{pmatrix}$; cioè

$$\pi(v) = v - \frac{w_1 \cdot v}{w_1 \cdot w_1} w_1 = v - w_1 \frac{w_1^t v}{w_1^t w_1} = v - \frac{w_1 w_1^t}{w_1^t w_1} v = (\mathrm{id} - \frac{w_1 w_1^t}{w_1^t w_1})v$$

(si osservi che per vettori u, v, w di $\mathbb{R}^n$ si ha che $u^t v$ è uno scalare, ovvero una matrice 1×1, mentre uv^t è una matrice $n \times n$ di rango 1; si ha $(u^t v)w = w(u^t v) = (wu^t)v$ per l'associatività del prodotto di matrici, e commutazione con il prodotto per scalari) dunque la sua matrice in base canonica risulta

$$\mathbb{I}_5 - \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1+a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1+a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a^2 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 2. Sia b la quinta cifra del proprio numero di matricola, diminuita di 4. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2b-1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2b-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2b & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 2b-2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A, gli autovalori, e le rispettive molteplicità e nullità.

(b) Si determinino gli autospazi di A, si dica se A è o meno diagonalizzabile, e in tal caso si determini una matrice invertibile U tale che $U^{-1}AU$ sia diagonale; si trovi il polinomio minimo di A.

(c) È vero che le matrici con polinomio caratteristico uguale a quello di A sono tutte diagonalizzabili? Fare degli esempi, specificando il polinomio minimo.

Soluzione.

(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ è $(X-2b)^3(X-2b+4)$ da cui si deducono i due autovalori $2b$ e $2b-4$ di molteplicità 3 e 1 rispettivamente. Le nullità coincidono con le molteplicità (ovvio per il secondo autovalore visto che la sua molteplicità è 1, e per il primo basta osservare che $A - 2b\mathbb{I}_4$ ha rango 1 e dunque $2b$ ha autospazio di dimensione 3).

(b) Abbiamo che $V_{2b} = \langle e_1+e_2, e_1+e_4, e_3\rangle$ e $V_{2b-4} = \langle e_1-e_2-e_3-2e_4\rangle$. Siccome molteplicità e nullità sono uguali per ogni autovalore, la matrice è diagonalizzabile: una matrice diagonale simile è $\begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b-4 \end{pmatrix}$ e una matrice U di cambiamento di base come richiesto si ottiene con una base corrispondente di autovettori, per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Il polinomio minimo è uguale a $(X-2b)(X-2b+4)$ poiché la matrice è diagonalizzabile, e quindi deve essere prodotto di fattori lineari distinti.

(c) No, in generale una matrice con un tale polinomio caratteristico non à diagonalizzabile, ma è sempre triangolarizzabile (poiché ha tutti gli autovalori nel corpo) e quindi daremo esempi di matrici triangolari; il polinomio minimo potrebbe essere, a parte quello di A,

- $(X-2b)^2(X-2b+4)$, per esempio per la matrice $\begin{pmatrix} 2b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b-4 \end{pmatrix}$,
- oppure $(X-2b)^3(X-2b+4)$, per esempio per la matrice $\begin{pmatrix} 2b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b-4 \end{pmatrix}$.

In entrambi i casi si tratta di matrici non diagonalizzabili. □

Esercizio 3. Sia c la quarta cifra del proprio numero di matricola diminuita di 3, oppure 5 se il risultato è nullo. Si considerino le due famiglie di piani dello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$

$$\pi_\lambda : \begin{cases} X_1 + X_2 + \lambda X_3 + \lambda X_4 = 2 + \lambda \\ (1+\lambda)X_2 + (1+c\lambda)X_3 = c \end{cases} \qquad \sigma_\lambda : \begin{cases} X_1 + \lambda X_2 + (1+\lambda+c\lambda)X_3 + \lambda X_4 = 2 - c \\ (1+\lambda)X_2 + (-1+c\lambda)X_3 + \lambda X_4 = c - \lambda \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Si dica per quali valori di λ i due piani si intersecano in un punto, e in questi casi determinare le coordinate del punto.

(b) Si dica per quali valori di λ i due piani hanno intersezione vuota, e in questi casi determinare se sono o meno paralleli.

(c) Si dica per quali valori di λ i due piani si intersecano in una retta, e in tali casi determinare le equazioni del sottospazio affine lineare di dimensione 3 contenente entrambi i piani.

Soluzione. Notiamo che se $c = 1$ allora $\pi_{-1} = \varnothing$, cioè non è un piano. Una riduzione di Gauss della matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda & 2+\lambda \\ 0 & 1+\lambda & 1+c\lambda & 0 & c \\ 1 & \lambda & 1+\lambda+c\lambda & \lambda & 2-c \\ 0 & 1+\lambda & -1-c\lambda & \lambda & c-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-II]{III-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda & 2+\lambda \\ 0 & 1+\lambda & 1+c\lambda & 0 & c \\ 0 & \lambda-1 & 1+c\lambda & 0 & -c-\lambda \\ 0 & 0 & -2 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{II-III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda & 2+\lambda \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2c+\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1+c\lambda & 0 & -c-\lambda \\ 0 & 0 & -2 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

mostra che il rango della matrice incompleta è massimo (cioè 4) a meno che non sia $\lambda = 0$ oppure $\lambda = -1/c$ (infatti il determinante è $2\lambda(1 + c\lambda)$).

(a) Per $\lambda \neq 0, -1/c$ il sistema ha un'unica soluzione (matrici completa e incompleta hanno rango 4 entrambe), che si calcola facilmente dalla matrice ridotta.

(b) Per $\lambda = -1/c \neq \pm 1$ (cioè con $c \neq \pm 1$) abbiamo matrice incompleta di rango 3 (nella matrice ridotta la quarta colonna è dipendente dalle altre) e matrice completa di rango 4 (si calcoli il determinante della matrice completa privata della quarta colonna), dunque l'intersezione è vuota e i due piani non sono paralleli (affinché siano paralleli è necessario che il rango della matrice incompleta sia 2).

(c) Per $\lambda = 0$ abbiamo matrice incompleta di rango 3 e matrice completa di rango 3, quindi abbiamo che i due piani si intersecano in una retta, di equazioni cartesiane $X_1 = 2 - c$, $X_2 = c$ e $X_3 = 0$. Osservando il sistema iniziale $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2-c \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c \end{pmatrix}$ vediamo che la prima riga è la somma delle righe terza e quarta; quindi i due piani sono contenuti nell'iperpiano di equazione $X_1 + X_2 = 2$.
Una simile discussione si applica al caso $\lambda = -1/c = 1$ (se capita $c = -1$). □

Esercizio 4. Sia d la terza cifra del proprio numero di matricola, diminuita di 5. Si considerino le due rette

$$r_1 : \begin{cases} X - Z = 0 \\ dX - Y = -2d \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} Z = -2d \\ X - 2Y = -6 - 2d \end{cases}$$

nello spazio euclideo reale di dimensione 3.

(a) Trovare l'unica retta n incidente sia r_1 che r_2 ed ortogonale ad entrambe. Trovare i punti $P_1 = r_1 \cap n$ e $P_2 = r_2 \cap n$.

(b) Trovare l'unica retta t passante per il punto Q di coordinate $(0, -1-d, -4+2d)$ ed incidente sia r_1 che r_2. Trovare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.

(c) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 e l'area del triangolo di vertici P_1, Q_1, Q_2.

Risultati.

(a) La retta n è la retta di equazioni cartesiane $2X + Y = d - 2$ e $(1 - 2d)X + Z = 2d - 2$.
I punti sono $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ d \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ d+2 \\ -2d \end{pmatrix}$.

(b) La retta t è la retta di equazioni cartesiane. $(d + 1)X + 2Y = -2d - 2$ e $(1 - d)X + Z = 2d - 4$.
I punti sono $Q_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1+d \\ -2d \end{pmatrix}$.

(c) Il volume richiesto è $\frac{1}{6}|4d^2 - 4d + 6|$ mentre l'area richiesta è $\frac{1}{2}\sqrt{(4d^2 - 4d + 6)(d^2 + 3)}$.

$\square$

Esercizio 1. Sia a l'ultima cifra del proprio numero di matricola, diminuita di 4. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0\\a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ -2aX_1 + (a-1)X_2 + 2X_4 = 0 \\ (a-1)X_2 - 2X_5 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W.
(b) Determinare basi, equazioni e dimensioni per $U \cap W$ e $U + W$.
(c) Determinare la matrice della simmetria ortogonale di direzione $U \cap W$.

Soluzione.
(a) Le equazioni per U si ottengono imponendo la condizione

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 & 1 \\ X_2 & 1 & 1 & 0 \\ X_3 & 1 & 0 & 1 \\ X_4 & 0 & 1 & 0 \\ X_5 & a & -1 & -1 \end{pmatrix} \leq 3, \quad \text{dunque} \quad \begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ -(a+1)X_2 + X_3 + (a+2)X_4 + X_5 = 0 \end{cases}$$

(abbiamo annullato i minori contenenti le tre righe centrali).
Scrivendo le soluzioni per il sistema che definisce W possiamo trovare una base data dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\a\\0 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 0\\2\\2\\-a+1\\a-1 \end{pmatrix}$.

(b) Formando il sistema delle cinque equazioni (due per U e tre per W) troviamo come soluzione lo spazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1\\2\\1\\1\\a-1 \end{pmatrix}$; quindi $U \cap W$ ha dimensione 1 e le sue equazioni sono per esempio $X_1 - X_3 = X_1 - X_4 = 2X_1 - X_2 = (a-1)X_1 - X_4 = 0$.
Dalla formula di Grassmann abbiamo allora che $U + W$ ha dimensione 4; una sua base si ottiene con l'unione insiemistica delle basi date di U e W eliminando un vettore che sia dipendente dagli altri, per esempio w_2; una equazione per $U + W$ si trova dalla condizione

$$\det\begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ X_2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ X_3 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ X_4 & 0 & 1 & 0 & a \\ X_5 & a & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

e dunque $-(a^2 + 2a - 1)X_1 - (2a + 2)X_2 + (a^2 + 2a + 1)X_3 + (2a + 4)X_4 + 2X_5 = 0$.

(c) Si tratta dell'applicazione $\sigma : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ che manda un generico vettore v nella differenza $\pi(v) = v - 2w$ ove w è la proiezione ortogonale di v lungo $u = \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\1\\a-1 \end{pmatrix}$; cioè

$$\pi(v) = v - 2u\frac{u \cdot v}{u \cdot u} = v - 2u\frac{u^t v}{u^t u} = (\mathrm{id} - 2\frac{uu^t}{u^t u})v$$

e dunque la sua matrice in base canonica risulta

$$\mathbb{I}_5 - 2\frac{1}{a^2 - 2a + 8}\begin{pmatrix} 1\\2\\1\\1\\a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & a-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 - 2a + 8}\begin{pmatrix} a^2-2a+6 & -4 & -2 & -2 & -2a+2 \\ -4 & a^2-2a & -4 & -4 & -4a+4 \\ -2 & -4 & a^2-2a+6 & -2 & -2a+2 \\ -2 & -4 & -2 & a^2-2a+6 & -2a+2 \\ -2a+2 & -4a+4 & -2a+2 & -2a+2 & -a^2+2a+6 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 2. Sia b la quinta cifra del proprio numero di matricola, diminuita di 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & -2 & 2 \\ 0 & b & 2 & -2 \\ 2 & -2 & b-6 & 4 \\ 2 & -2 & -4 & b+2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A, gli autovalori, e le rispettive molteplicità e nullità.

(b) Si determinino gli autospazi di A, si dica se A è o meno diagonalizzabile, e in tal caso si determini una matrice invertibile U tale che $U^{-1}AU$ sia diagonale; si trovi il polinomio minimo di A.

(c) È vero che le matrici con polinomio caratteristico uguale a quello di A sono tutte diagonalizzabili? Dire quali sono i possibili polinomi minimi e per ciascuno dare un esempio di matrice con tale polinomio minimo.

Soluzione.

(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ è $(X-b)^2(X-b+2)^2$ da cui si deducono i due autovalori b e $b-2$ di molteplicità 2 entrambi. Le nullità coincidono con le molteplicità (basta osservare che $A - b\mathbb{I}_4$ e $A-(b-2)\mathbb{I}_4$ hanno rango 2).

(b) Abbiamo che $V_b = \langle e_1+e_2, e_2-e_3-e_4\rangle$ e $V_{b-2} = \langle e_1-e_2+e_3, e_3+e_4\rangle$ Siccome molteplicità e nullità sono uguali per ogni autovalore, la matrice è diagonalizzabile: una matrice diagonale simile è $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$ e una matrice U di cambiamento di base come richiesto si ottiene con una base corrispondente di autovettori, per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il polinomio minimo è uguale a $(X-b)(X-b+2)$ poiché la matrice è diagonalizzabile, e quindi esso deve essere prodotto di fattori lineari distinti.

(c) No, in generale una matrice con un tale polinomio caratteristico non è diagonalizzabile, ma è sempre triangolarizzabile (poiché ha tutti gli autovalori nel corpo) e quindi daremo esempi di matrici triangolari; il polinomio minimo potrebbe essere, a parte quello di A

- $(X-b)^2(X-b++2)$, per esempio per la matrice $\begin{pmatrix} b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$,
- oppure $(X-b)(X-b+2)^2$, per esempio per la matrice $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$,
- oppure $(X-b)^2(X-b+2)^2$, per esempio per la matrice $\begin{pmatrix} b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$.

In tutti i casi si tratta di matrici non diagonalizzabili. □

Esercizio 3. Sia c la quarta cifra del proprio numero di matricola diminuita di 3, sostituito con -3 se il risultato è nullo. Si considerino le due famiglie di piani dello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$

$$\pi_\lambda : \begin{cases} (\lambda-1)X_1 + (1+\lambda)X_2 + c(\lambda-1)X_3 + (\lambda+1)X_4 = \lambda+1 \\ 2\lambda X_1 + (\lambda-1)X_2 + c(\lambda+1)X_4 = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_\lambda : \begin{cases} 2\lambda X_1 - (\lambda-1)X_2 + c(\lambda+1)X_4 = -\lambda-1 \\ (\lambda+1)X_1 + 2\lambda X_2 + c(\lambda-1)X_3 + (c+1)(\lambda+1)X_4 = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Si dica per quali valori di λ i due piani si intersecano in un punto, e in questi casi determinare le coordinate del punto.

(b) Si dica per quali valori di λ i due piani hanno intersezione vuota, e in questi casi determinare se sono o meno paralleli.

(c) Si dica per quali valori di λ i due piani si intersecano in una retta.

$*$(d) Si dica in quali casi i due piani sono contenuti in una sottovarietà lineare affine di dimensione 3, e se ne trovino le equazioni.

Risultati. Una riduzione di Gauss della matrice completa:

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1+\lambda & c(\lambda-1) & \lambda+1 & \lambda+1 \\ 2\lambda & \lambda-1 & 0 & c(\lambda+1) & 0 \\ 2\lambda & -\lambda+1 & 0 & c(\lambda+1) & -\lambda-1 \\ \lambda+1 & 2\lambda & c(\lambda-1) & (c+1)(\lambda+1) & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-I]{III-II} \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1+\lambda & c(\lambda-1) & \lambda+1 & \lambda+1 \\ 2\lambda & \lambda-1 & 0 & c(\lambda+1) & 0 \\ 0 & -2\lambda+2 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ 2 & \lambda-1 & 0 & c(\lambda+1) & -\lambda-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV-II} \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1+\lambda & c(\lambda-1) & \lambda+1 & \lambda+1 \\ 2\lambda & \lambda-1 & 0 & c(\lambda+1) & 0 \\ 0 & -2\lambda+2 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ 2-2\lambda & 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 \end{pmatrix}$$

mostra che il rango della matrice incompleta è massimo (cioè 4) a meno che non sia $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$ (infatti il determinante è $-4c^2(\lambda-1)^3(\lambda+1)$).

(a) Per $\lambda \neq \pm 1$ il sistema ha un'unica soluzione (matrici completa e incompleta hanno rango 4 entrambe), che si trova dalla matrice ridotta.

(b) Per $\lambda = 1$ si tratta di due piani paralleli e disgiunti (i ranghi delle matrici completa e incompleta sono 2 e 3 rispettivamente).

(c) Per $\lambda = -1$ si tratta di un sistema omogeneo di rango 3, e dunque l'intersezione è una retta, di equazione $X_1 = X_2 = X_3 = 0$.

(d) Nel caso (b) dei piani paralleli, essi sono contenuti nel sottospazio di equazione $X_2 + X_4 = 1$; si può capire osservando che nella matrice originale per $\lambda = 1$, che è $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2c & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2c & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 2c+2 & 0 \end{pmatrix}$, la prima riga è uguale alla differenza tra la quarta e la terza.

Nel caso (c) dei piani con intersezione una retta, essi sono contenuti nel sottospazio di equazione $X_1 + cX_3 = 0$; si può capire osservando che nella matrice originale per $\lambda = 1$, che è $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2c & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2c & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la prima riga è uguale alla somma della terza e della quarta. $\square$

Esercizio 4. Sia d la terza cifra del proprio numero di matricola, diminuita di 5. Si considerino le due rette

$$r_1 : \begin{cases} X + Z = -2 \\ dX + Y = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X = -d - 2 \\ Y + Z = d - 3 \end{cases}$$

nello spazio euclideo reale di dimensione 3.

(a) Trovare l'unica retta n incidente sia r_1 che r_2 ed ortogonale ad entrambe. Trovare i punti $P_1 = r_1 \cap n$ e $P_2 = r_2 \cap n$.

(b) Trovare l'unica retta t di direzione il vettore $(-2-d, d-2, 1)^t$ ed incidente sia r_1 che r_2. Trovare i punti $Q_1 = r_1 \cap t$ e $Q_2 = r_2 \cap t$.

(c) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 e l'area del triangolo di vertici Q_2, P_1, P_2.

Risultati.

(a) La retta n è la retta di equazioni cartesiane $Y - Z = d + 1$ e $X - (1 + d)Z = d$.
I punti sono $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ d \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -d-2 \\ d-1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b) La retta t è la retta di equazioni cartesiane. $X + (2+d)Z = -2d - 4$ e $X + Y + 4Z = -8$.
I punti sono $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} -d-2 \\ d-2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Il volume richiesto è $\frac{1}{6}(d^2 + 2d + 3)$ mentre l'area richiesta è $\frac{1}{2}\sqrt{2(d^2 + 2d + 3)}$.

□

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\0\\1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\2\\-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\\0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} 3X_1 - X_2 - 3X_5 = 0 \\ 9X_1 - X_2 - 3X_4 = 0 \\ X_2 - 3X_3 = 0 \end{cases}$$

(*a*) Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W.
(*b*) Determinare basi, equazioni e dimensioni per $U \cap W$ e $U + W$.
(*c*) Determinare la matrice della simmetria ortogonale di asse $U + W$.

Risultati.
(*a*) Equazioni per U: possiamo usare $4X_1 - 6X_3 + X_4 + 2X_5 = 0$ e $X_2 - X_3 - X_4 - X_5 = 0$. Generatori per W: possiamo usare $\begin{pmatrix} 1\\3\\1\\2\\0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\3\\1 \end{pmatrix}$.
(*b*) $U \cap W$ ha dimensione 1, base $\begin{pmatrix} 1\\3\\1\\2\\0 \end{pmatrix}$ ed equazioni $X_5 = 0$, $3X_1 = X_2$, $X_1 = X_3$, $2X_1 = X_4$. $U + W$ ha dimensione 4, equazione $16X_1 + 9X_2 - 33X_3 - 5X_4 - X_5 = 0$ e base $\begin{pmatrix} 1\\2\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\2\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\3\\1 \end{pmatrix}$.
(*c*) La matrice [della proiezione ortogonale di direzione $U \cap W$] richiesta è $\mathbb{I}_5 - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1\\3\\1\\2\\0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 14 & -3 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & 14 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & -2 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$.

□

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.
(*a*) Determinare il polinomio caratteristico di A, gli autovalori, e le rispettive molteplicità e nullità.
(*b*) Si determinino gli autospazi di A, si dica se A è o meno diagonalizzabile, e in tal caso si determini una matrice invertibile U tale che $U^{-1}AU$ sia diagonale; si trovi il polinomio minimo di A.
(*c*) È vero che le matrici con polinomio caratteristico uguale a quello di A sono tutte non diagonalizzabili? Dire quali sono i possibili polinomi minimi e per ciascuno dare un esempio di matrice con tale polinomio minimo.

Risultati.
(*a*) Il polinomio caratteristico è $(X-2)^2(X+4)(X-4)$, quindi gli autovalori sono 2 (di molteplicità 2 e nullità 1), 4 e -4 (entrambi di molteplicità e nullità 1).
(*b*) I tre autospazi sono tutti di dimensione 1 e sono generati rispettivamente dai vettori $\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}$. Il polinomio minimo è uguale a quello caratteristico, poiché la matrice non è diagonalizzabile, visto che vi è un autovalore con nullità inferiore alla molteplicità.
(*c*) Le matrici con quel polinomio caratteristico sono tutte triangolarizzabili, ma non necessariamente diagonalizzabili; il polinomio minimo può essere $(X-2)(X+4)(X-4)$, per esempio per la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ oppure $(X-2)^2(X+4)(X-4)$ per esempio per la matrice triangolare $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ (o per quella dell'esercizio). □

Esercizio 3. Si considerino le due famiglie di piani dello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$

$$\pi_\lambda : \begin{cases} X_1 + \lambda X_2 = -\lambda + 1 \\ \lambda X_2 + (1-\lambda)X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_\lambda : \begin{cases} (1-\lambda)X_2 + \lambda X_3 + X_4 = -1 \\ X_1 + X_2 + \lambda X_3 + X_4 = -2\lambda \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Si dica per quali valori di λ i due piani hanno intersezione vuota, e in questi casi determinare se sono o meno paralleli.

(b) Si dica per quali valori di λ i due piani si intersecano in una retta.

(c) Si dica in quali casi i due piani sono contenuti in una sottovarietà lineare affine di dimensione 3, e se ne trovino le equazioni.

Risultati.

(a) I piani hanno intersezione vuota per $\lambda \neq 0$, poiché in tal caso i ranghi di matrice completa e incompleta sono diversi; nel caso $\lambda = 1/2$ tali ranghi sono 3 e 2 e quindi i piani sono paralleli; per $\lambda \neq 0, 1/2$ i ranghi sono 4 e 3 e dunque i piani non sono paralleli.

(b) Per $\lambda = 0$ il sistema è compatibile di rango 3, e dunque l'intersezione è una retta.

(c) Ciò succede se i piani sono paralleli (caso $\lambda = 1/2$ e allora lo spazio richiesto ha equazione $4X_1 + X_2 - X_3 - 2X_4 = 2$) oppure se si intersecano in una retta (caso $\lambda = 0$ e allora lo spazio richiesto ha equazione $X_1 = 1$). □

Esercizio 4. Si considerino i due piani $\pi_1 : Z - 2 = 0$, $\pi_2 : 6X - 3Y - 4Z + 2 = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} 3X - 2Z = 5 \\ 3Y + 5Z = 7 \end{cases}$$

nello spazio euclideo reale di dimensione 3.

(a) Trovare i punti $Q_1 = \pi_1 \cap r$ e $Q_2 = \pi_2 \cap r$ e i due piani σ_1 e σ_2 ortogonali a $p = \pi_1 \cap \pi_2$ e passanti per Q_1 e Q_2 rispettivamente.

(b) Trovare i punti $P_1 = \sigma_1 \cap p$ e $P_2 = \sigma_2 \cap p$.

(c) Calcolare il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 e l'area del triangolo di vertici Q_1, P_1, P_2.

Risultati.

(a) $Q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Per trovare i piani richiesti conviene notare che la retta $p = \pi_1 \cap \pi_2$ ha vettore direttore dato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi i piani stessi avranno equazioni $X + 2Y = k$, ove il termine noto si trova imponendo il passaggio per i punti Q_1 e Q_2 rispettivamente: si trova $\sigma_1 : X + 2Y = 1$ e $\sigma_2 : X + 2Y = 9$.

(b) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q_2 = \begin{pmatrix} 13/5 \\ 16/5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) Il volume è 4 e l'area è $\frac{1}{2}\sqrt{109}$. □

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\2\\-1\\0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} 3X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 - X_4 = 0 \\ X_4 - X_5 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W.
(b) Determinare basi, equazioni e dimensioni per $U \cap W$ e $U + W$.
(c) Determinare la matrice della proiezione ortogonale di asse $U + W$.

Risultati.
(a) Equazioni per U: possiamo usare $2X_1 - X_3 = 0$, $X_2 - X_5 = 0$ e $X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0$. Generatori per W: possiamo usare $\begin{pmatrix} 1\\0\\3\\0\\0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\1 \end{pmatrix}$.
(b) $U \cap W$ ha dimensione 1, base $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\1 \end{pmatrix}$ ed equazioni $X_1 = 0$, $X_3 = 0$, $X_2 = X_4$, $X_2 = X_5$. $U + W$ ha dimensione 3, equazioni $X_2 - X_5 = 0$ e $3X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0$, e base $\begin{pmatrix} 1\\0\\2\\-1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\3\\0\\0 \end{pmatrix}$.
(c) Il sottospazio $(U+W)^\perp$ è generato dai vettori $a = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3\\-1\\-1\\1\\0 \end{pmatrix}$ (sono i coefficienti delle equazioni per $U + W$, ma non sono vettori ortogonali tra loro). Detta π la proiezione cercata, si ha che $\pi(X) = X - \alpha a - \beta b$ ove α e β sono scalari determinati dalla condizione che $\pi(X)$ appartenga a $U + W$. Imponendo di soddisfare alle equazioni di $U + W$ troviamo $23\alpha = 3X_1 + 11X_2 - X_3 + X_4 - 12X_5$ e $23\beta = 6X_1 - X_2 - 2X_3 + 2X_4 - X_5$. La matrice richiesta è $\frac{1}{23}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & -6 & 3 \\ 3 & 11 & -1 & 1 & 11 \\ 6 & -1 & 21 & 2 & -1 \\ -6 & 1 & 2 & 21 & 1 \\ 3 & 11 & -1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.
(a) Determinare il polinomio caratteristico di A, gli autovalori, e le rispettive molteplicità e nullità.
(b) Si determinino gli autospazi di A, si dica se A è o meno diagonalizzabile, e in tal caso si determini una matrice invertibile U tale che $U^{-1}AU$ sia diagonale; si trovi il polinomio minimo di A.
(c) È vero che le matrici con polinomio caratteristico uguale a quello di A sono tutte non diagonalizzabili? Dire quali sono i possibili polinomi minimi e per ciascuno dare un esempio di matrice con tale polinomio minimo.

Risultati.
(a) Il polinomio caratteristico è $(X+2)^2(X-4)^2$, autovalori sono -2 e 4 (molteplicità 2 e nullità 1 entrambi).
(b) I due autospazi sono tutti di dimensione 1 e sono generati rispettivamente dai vettori $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\2\\-1\\0 \end{pmatrix}$. Il polinomio minimo è uguale a quello caratteristico; la matrice non è diagonalizzabile.
(c) Le matrici con quel polinomio caratteristico sono triangolarizzabili, ma non necessariamente diagonalizzabili; il polinomio minimo può essere $(X+2)(X-4)$, $(X+2)^2(X-4)$, $(X+2)(X-4)^2$, $(X+2)^2(X-4)^2$ rispettivamente per le matrici triangolari $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 3. Si considerino le due famiglie di sottospazi dello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$

$$\pi_\lambda : \begin{cases} X_1 - \lambda X_2 + (\lambda - 1)X_4 = \lambda - 2 \\ X_1 + \lambda X_2 + (\lambda + 1)X_4 = \lambda \end{cases}$$

$$\sigma_\lambda : \begin{cases} \lambda X_1 + (\lambda - 1)X_2 + X_4 = 0 \\ X_2 + \lambda X_3 - X_4 = \lambda \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.
(a) Si dica per quali valori di λ tali sottospazi sono dei piani.
(b) Determinare la dimensione di $\pi_\lambda \cap \sigma_\lambda$ al variare di λ.
(c) Si dica in quali casi i due sottospazi sono contenuti in una sottovarietà lineare affine di dimensione 3, e se ne trovino le equazioni.

Risultati.
(a) La matrice dei coeffcienti di π_λ ha rango 2 per ogni valore di λ, dunque π_λ è sempre un piano; invece la matrice dei coefficienti di σ_λ ha rango 1 se $\lambda = 0$, e σ_λ è un piano solo se $\lambda \neq 0$.
(b) Il determinante della matrice incompleta del sistema è proporzionale a $\lambda(\lambda^3 - 1)$; quindi per λ reale diverso da 0 e 1 l'intersezione $\pi_\lambda \cap \sigma_\lambda$ è un punto, dunque di dimensione 0. Per i valori $\lambda = 0, 1$ risulta comunque un sistema compatibile di rango 3, e dunque l'intersezione $\pi_\lambda \cap \sigma_\lambda$ è una retta, dimensione 1.
(c) Ciò succede solo per $\lambda = 1$ e allora lo spazio richiesto ha equazione $X_1 + X_4 = 0$. Per $\lambda = 0$ abbiamo $\pi_0 \not\subseteq \sigma_0$ (e σ_0 ha dimensione 3). □

Esercizio 4. Si considerino la retta r di equazioni $\begin{cases} X - Z = 0 \\ 2X - Z = 1 \end{cases}$ e il piano $\pi : 2X - 5Y + 4Z = 6$ nello spazio euclideo reale di dimensione 3.
(a) Trovare il punto $P = \pi \cap r$ e la proiezione ortogonale s di r su π.
(b) Scegliere un punto S su s a distanza 3 da P, e trovare i punti R_1 e R_2 su r tali che i triangoli di vertici P, S, R_i abbiano area 5/2 (per $i = 1, 2$).
(c) Determinare il luogo dei punti Q di π tali che il volume dei tetraedri di vertici P, S, R_i, Q sia $5\sqrt{5}$ (per $i = 1, 2$).

Risultati.
(a) Si trova $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ (si noti che r è $X = 1 = Z$). La retta s è intersezione di π con il piano del fascio di asse r e ortogonale a π; imponendo a $\lambda(X-1)+\mu(Z-1) = 0$ di contenere la direzione $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ (ortogonale a π) si ottiene l'equazione $2X - Z = 1$. Quindi s ha equazioni $2X - 5Y + 4Z = 6$ e $2X - Z = 1$, passa per P e ha direzione $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.
(b) Possiamo scegliere $S = P + 3v/\|v\| = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.
Per cercare i punti $P_i = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ imponiamo che $\|(P_i - P) \wedge (S - P)\| = 5$; si ottiene $\lambda = \pm\sqrt{5}$, e quindi $P_{1,2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{5} \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
(c) Siccome i due triangoli giacciono su un piano ortogonale a π, i punti richiesti sono quelli di due rette parallele a s che distano da s per un valore h tale che $\frac{1}{3}\frac{5}{2}h = 5\sqrt{5}$, quindi $h = 6\sqrt{5}$; dunque sono le rette parallele ad s e passanti per $P \pm hw/\|w\|$ dove $w = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ è vettore nella giacitura di π ortogonale a s.
In alternativa si poteva imporre al generico $Q = \left(\begin{smallmatrix} 5\alpha+2\beta+1 \\ 2\alpha \\ -\beta+1 \end{smallmatrix}\right)$ di π la condizione $\frac{1}{6}\det(Q-P, P_1-P, S-P) = \pm 5\sqrt{5}$; sfruttando la bilinearità del determinante sulla prima colonna si ottiene $2\alpha + \beta = \pm 6$, e sostituendo β si ritrovano i punti di due rette parallele $\left(\begin{smallmatrix} 1\pm12 \\ 0 \\ 1\mp6 \end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\rangle$. □

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} 2X_1 + X_2 - 3X_3 - 3X_5 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W.
(b) Determinare basi, equazioni e dimensioni per $U \cap W$ e $U + W$.
(c) Determinare la matrice della simmetria ortogonale di direzione $U \cap W$.

Risultati.

(a) Equazioni per U: $X_3 - X_4 = 0$, $2X_1 + X_2 + 3X_3 - 3X_5 = 0$. Generatori per W: $\begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0\\3\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}$.

(b) $U \cap W$ ha dimensione 2, base $\begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\3\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$ ed equazioni $X_3 = 0$, $X_4 = 0$, $2X_1 + X_2 - 3X_5 = 0$. $U + W$ ha dimensione 4, equazione $2X_1 + X_2 - 3X_3 + 6X_4 - 3X_5 = 0$, e base $\begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0\\3\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}$.

(c) Del sottospazio $U \cap W$ abbiamo una base (non ortogonale) $a = \begin{pmatrix} 1\\-2\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0\\3\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$. Detta σ la simmetria cercata, si ha che $\sigma(X) = X - 2\alpha a - 2\beta b$ ove α e β sono scalari determinati dalla condizione che $X - \alpha a - \beta b$ appartenga a $(U \cap W)^{\perp}$. Imponendo di soddisfare alle equazioni di quest'ultimo sottospazio ($X_1 - 2X_2 = 0$ e $3X_2 + X_5 = 0$) troviamo $14\alpha = 10X_1 - 2X_2 + 6X_5$ e $14\beta = 6X_1 + 2X_3 + 5X_5$. La matrice richiesta è $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

In alternativa, si poteva scegliere come base dello spazio $a, b, e_3, e_4, 2e_1 + e_2 - 3e_5$ (gli ultimi tre vettori formano una base di $(U \cap W)^{\perp}$ e, detta P la matrice che ha quei vettori come colonne, calcolare il cambiamento di base $P \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} P^{-1}$ (data la forma particolare di P, il calcolo della sua inversa si riduce al calcolo dell'inversa di una matrice d'ordine 3). □

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A, gli autovalori, e le rispettive molteplicità e nullità.
(b) Si determinino gli autospazi di A, si dica se A è o meno diagonalizzabile, e in tal caso si determini una matrice invertibile U tale che $U^{-1}AU$ sia diagonale; si trovi il polinomio minimo di A.
(c) È vero che le matrici con polinomio caratteristico uguale a quello di A sono tutte non diagonalizzabili? Dire quali sono i possibili polinomi minimi e per ciascuno di essi dare un esempio di matrice con tale polinomio minimo.

Risultati.

(a) Il polinomio caratteristico è $(X-3)^3(X+3)$, autovalori sono 3 (molt. 3, null. 2) e -3 (molt. e null. 1).

(b) L'autospazio di 3 è generato da $\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0\\2\\0\\-1 \end{pmatrix}$. Quello di -3 da $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-2 \end{pmatrix}$.
Il polinomio minimo è $(X-3)^2(X+3)$; la matrice non è diagonalizzabile.

(c) Le matrici con quel polinomio caratteristico sono triangolarizzabili, ma non necessariamente diagonalizzabili; il polinomio minimo può essere $(X-3)(X+3)$, $(X-3)^2(X+3)$, $(X-3)^3(X+3)$ rispettivamente per le matrici triangolari $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 3. Si considerino le due famiglie di piani dello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$

$$\pi_\lambda : \begin{cases} X_1 + (\lambda+1)X_3 = 0 \\ X_2 - \lambda X_4 = \lambda \end{cases}$$

$$\sigma_\lambda : \begin{cases} X_1 + (\lambda+1)X_3 - \lambda X_4 = 0 \\ (\lambda+1)X_1 - X_2 + (\lambda+1)X_3 - \lambda X_4 = \lambda + 2 \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.
(a) Si dica per quali valori di λ i piani si intersecano in un punto, e determinare tale punto al variare del parametro; è vero che tutti questi punti giacciono su un piano?
(b) Si dica per quali valori di λ i piani si intersecano in una retta.
(c) Si dica in quali casi i due piani sono contenuti in una sottovarietà lineare affine di dimensione 3, e se ne trovino le equazioni.

Risultati.
(a) Una riduzione di Gauss porta la matrice del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & 0 & 1+\lambda & -\lambda & 0 \\ 1+\lambda & -1 & 1+\lambda & -\lambda & 2+\lambda \end{pmatrix}$ nella forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 2+2\lambda \end{pmatrix}$ da cui si vede che il determinante della matrice incompleta è $\lambda^2(1+\lambda)$, e dunque il sistema ha una unica soluzione per $\lambda \neq 0, -1$. In questi casi la soluzione si scrive $\begin{pmatrix} 2+2/\lambda \\ \lambda \\ -2/\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ e si osserva che tutti questi punti soddisfano alle condizioni $X_4 = 0$ e $X_1 + X_3 = 2$, qindi stanno su un piano; in effetti sono punti di una conica intersezione di $X_2X_3 = -2$ con quel piano.
(b) Per il valore $\lambda = 0$ risulta un sistema incompatibile (ranghi 2 e 3 le matrici incompleta e completa), Per il valore $\lambda = -1$ risulta un sistema compatibile di rango 3 e dunque l'intersezione $\pi_{-1} \cap \sigma_{-1}$ è una retta, di equazioni $X_1 = 0$, $X_2 = -1$, $X_4 = 0$.
(c) Ciò succede per $\lambda = 0$ (i due piani sono paralleli) e allora lo spazio richiesto ha equazione $X_1 + X_3 = 0$; e per $\lambda = -1$ e lo spazio richiesto ha equazione $2X_1 + X_2 + X_3 = -1$. □

Esercizio 4. Si considerino i piani $\pi_1 : X - Y - Z = 0$ e $\pi_2 : X - Y + Z = 2$ e la retta r di equazioni $\begin{cases} 3X - Y = 4 \\ Z = 2 \end{cases}$ nello spazio euclideo reale di dimensione 3.
(a) Trovare i punti $P_i = \pi_i \cap r$ e le proiezioni ortogonali s_i di r su π_i (per $i = 1, 2$).
(b) Sia $p = \pi_1 \cap \pi_2$; trovare i punti $S_i = p \cap s_i$ (per $i = 1, 2$) e il volume del tetraedro di vertici P_1, P_2, S_1, S_2.
(c) Determinare la superficie laterale dello stesso tetraedro.

Risultati.
(a) Si trova $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ La retta s_i è intersezione di π_i con il piano del fascio di asse r e ortogonale a π_i; si ottiene che s_1 ha equazioni $X - Y - Z = 0$ e $7X - 5Y = 12$, e s_2 ha equazioni $X - Y + Z = 2$ e $7X - 5Y = 4$,
(b) Si trova $S_1 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $S_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Il volume richiesto è $4/3$.
(c) La superficie richiesta è la somma delle aree di quattro triangoli: $P_1P_2S_1$ e $P_1P_2S_2$ hanno area $\sqrt{26}/2$ ciascuno, mentre $P_1S_1S_2$ e $P_2S_1S_2$ hanno area $2\sqrt{3}$ ciascuno; la superficie richiesta è quindi $4\sqrt{3} + \sqrt{26}$.

pg. 97...

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Siano a e b quinta e sesta cifra del proprio numero di matricola, diminuite di quattro e sostituite con 2 e -6 rispettivamente se risultano uguali. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{R}^4$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} a-6 & 0 & -6 & 0 \\ b & b+4 & a & 4 \\ 6 & 0 & a+6 & 0 \\ a & -4 & b & b-4 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità; dire se ϕ è invertibile.

(b) Determinare il polinomio minimo di ϕ, e si discuta diagonalizzabilità e triangolarizzabilità di ϕ.

(c) Se possibile, si determini una matrice di Jordan J per ϕ e una matrice $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}AH = J$.

Risultati.

(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ risulta $p_A(X) = (X-a)^2(X-b)^2$; gli autovalori a e b hanno entrambi molteplicità 2 e nullità 1, poiché le matrici $A - a\mathbb{I}_4$ e $A - b\mathbb{I}_4$ sono ambedue di rango 3 (si deduce dai minori ottenuti eliminando le prime riga e colonna per $A - a\mathbb{I}_4$ e le ultime riga e colonna per $A - b\mathbb{I}_4$). L'applicazione è invertibile o meno a seconda che ab sia diverso da o uguale a zero.

(b) L'applicazione è triangolarizzabile poiché tutti gli autovalori appartengono ad $\mathbb{R}$, ma non è diagonalizzabile poiché le nullità non coincidono con le molteplicità. Il polinomio minimo è uguale al polinomio caratteristico (sia per controllo diretto: l'unico divisore di $p_A(X)$ che annulla A è $p_A(X)$ stesso; sia in base a considerazioni sul teorema di decomposizione: lo spazio $\mathbb{R}^4$ si ottiene come somma diretta di $\ker(\phi - a)^2$ e $\ker(\phi - b)^2$ e non con esponenti minori poiché gli autospazi hanno dimensione 1).

(c) Siccome tutti gli autovalori sono in $\mathbb{R}$, si può trovare una forma di Jordan per ϕ, che necessariamente è del tipo $J = \left(\begin{smallmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ poiché nessuno dei blocchi relativi ai due autovalori è diagonalizzabile; per trovare una matrice H di cambiamento di base, studiamo gli autospazi e gli autospazi generalizzati:

$$\ker(\phi - a) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad \ker(\phi - a)^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (a-b)^2 \\ b(a-b)+10b-2a \\ 0 \\ a(a-b)-10b+2a \end{pmatrix} \rangle$$

e

$$\ker(\phi - b) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad \ker(\phi - b)^2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Dunque usando come colonne di H i vettori $v_2 = \begin{pmatrix} (a-b)^2 \\ b(a-b)+10b-2a \\ 0 \\ a(a-b)-10b+2a \end{pmatrix}$, $v_1 = (\phi - a)v_2 = 6(a-b)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = (\phi - b)v_4 = 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (nell'ordine degli indici) otteniamo che $H^{-1}AH = J$.

□

Esercizio 2. Sia a la quarta cifra del proprio numero di matricola, sostituita con 6 se risulta 0 oppure 1; è data la matrice reale

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{1+a}{2a} & \dfrac{1-a}{2a} \\ \dfrac{1-a}{2a} & \dfrac{1+a}{2a} \end{pmatrix} .$$

(a) Determinare se S è diagonalizzabile.

(b) Sia $v \in \mathbb{R}^2$ fissato e definiamo una successione di vettori nel modo seguente: $v_0 = v$ e ricorsivamente $v_{n+1} = Sv_n$. Determinare una formula esplicita per v_n in funzione di $v = \binom{x}{y}$.

(c) Determinare se esiste il limite $\lim_{n\to\infty} v_n$, sia v_∞. Se poniamo $f_\infty(v) = v_\infty$ definiamo una applicazione lineare? Se sì, determinarne autovalori, polinomio caratteristico e minimo, possibilmente senza fare (altri) calcoli.

Risultati.

(a) Il polinomio caratteristico di S è $X^2 - \frac{1+a}{a}X + \frac{1}{a}$, con autovalori distinti 1 e $1/a$, entambi di molteplicità (e dunque nullità) 1. La matrice è dunque diagonalizzabile in base al primo criterio, e risulta $H^{-1}SH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ $(= D)$ ove $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha come colonne autovettori relativi ai due autovalori, e $H^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Si osserva subito che $v_n = S^n v$, e dunque basta calcolare

$$S^n = HD^nH^{-1} = H \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/a^n \end{pmatrix} H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+a^n}{2a^n} & \frac{1-a^n}{2a^n} \\ \frac{1-a^n}{2a^n} & \frac{1+a^n}{2a^n} \end{pmatrix} ,$$

e di conseguenza

$$v_n = S^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+a^n}{2a^n}x + \frac{1-a^n}{2a^n}y \\ \frac{1-a^n}{2a^n}x + \frac{1+a^n}{2a^n}y \end{pmatrix} .$$

(c) Osserviamo che $D_\infty = \lim_{n\to\infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $S_\infty = \lim_{n\to\infty} S^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; risulta

$$v_\infty = \lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix}$$

e cioè $v_\infty = S_\infty v$. La funzione definita da $f_\infty(v) = v_\infty$ è lineare, rappresentata in base canonica dalla matrice S_∞, e $H^{-1}S_\infty H = D_\infty$, da cui si deduce subito che gli autovalori sono 1 e 0 (sono i limiti degli autovalori di S^n) e quindi di polinomio caratteristico (e minimo) $X(X-1)$. Si tratta di una proiezione su una retta nella direzione di un'altra (quali?). □

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Sia a la sesta cifra del proprio numero di matricola, diminuita di 4 e sostituite con 4 se risulta nulla. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{R}^4$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} a-4 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & a-7 & 0 \\ a & a-5 & a-5 & a \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità, e il polinomio minimo di ϕ.

(b) Discutere diagonalizzabilità e triangolarizzabilità di ϕ. Se possibile, si determini una matrice di Jordan J per ϕ e una matrice $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}AH = J$.

(c) Determinare quali sono le possibili matrici di Jordan, non equivalenti tra loro, con polinomio caratteristico uguale a quello di A.

Risultati.

(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ risulta $p_A(X) = (X-a)^2(X-(a-5))^2$; gli autovalori a e $a-5$ hanno entrambi molteplicità 2; il primo ha nullità 2, poiché la matrice $A - a\mathbb{I}_4$ ha rango 2, il primo ha nullità 1, poiché la matrice $A-(a-5)\mathbb{I}_4$ ha rango 3. Il polinomio minimo è $(X-a)(X-(a-5))^2$.

(b) L'applicazione è triangolarizzabile poiché tutti gli autovalori appartengono ad $\mathbb{R}$, ma non è diagonalizzabile poiché le nullità non coincidono con le molteplicità (per l'autovalore $a-5$).

Siccome tutti gli autovalori sono in $\mathbb{R}$, si può trovare una forma di Jordan per ϕ, che necessariamente è del tipo $J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$ poiché il blocco relativo ad a risulta diagonalizzabile; per trovare una matrice H di cambiamento di base, studiamo gli autospazi e gli autospazi generalizzati:

$$\ker(\phi - a) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

e

$$\ker(\phi-(a-5)) = \langle \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad \ker(\phi-(a-5))^2 = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 5-2a \end{pmatrix} \rangle .$$

Dunque usando come colonne di H i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ e $v_3 = (\phi-(a-5))v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$ (nell'ordine degli indici) otteniamo che $H^{-1}AH = J$. Se invece si sceglieva $w_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 5-2a \end{pmatrix}$, si doveva usare $w_3 = (\phi-(a-5))w_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -14 \\ -10 \end{pmatrix}$

(c) Per rispondere, basta vedere quali possono essere i blocchi di Jordan relativi ad ogni autovalore; essendo ciascun autovalore di molteplicità 2, i blocchi possono essere due (d'ordine 1 ciascuno) oppure uno (d'ordine 2) per ognuno dei due autovalori. Abbiamo quindi quattro casi possibili, che sono caratterizzati dal loro polinomio minimo:

matr.Jordan	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$
pol.minimo	$(X-a)(X-(a-5))$	$(X-a)^2(X-(a-5))$	$(X-a)(X-(a-5))^2$	$(X-a)^2(X-(a-5))^2$

□

Esercizio 2. Sia b la quinta cifra del proprio numero di matricola, sostituita con 6 se risulta 0 oppure 1; sono date le rette dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$:

$$r_1 : \begin{cases} (1-b)X + Y - bZ = 1 \\ (1-b)X - bZ = 1-b \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X + Y - Z = 0 \\ Y - Z = -b \end{cases} .$$

(a) Si determini la retta h incidente le due date e ortogonale ad esse; siano $P_i = h \cap r_i$.

(b) Si determini la retta s passante per il punto $S = \left(\begin{smallmatrix} b+2 \\ 3b \\ 2-2b \end{smallmatrix}\right)$ e incidente le due date; siano $Q_i = s \cap r_i$.

(c) Determinare volume e superficie laterale totale del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2.

Risultati.

(a) La retta richiesta passa per $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $P_2 = \left(\begin{smallmatrix} b \\ 0 \\ b \end{smallmatrix}\right)$.

(b) La retta passa per $Q_1 = \left(\begin{smallmatrix} b+1 \\ b \\ 1-b \end{smallmatrix}\right)$ e $Q_2 = \left(\begin{smallmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Si fanno i seguenti conti:

$$\mathrm{Vol}_3\, \Delta(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = \frac{1}{6} |\det \left(P_2 - P_1 \quad Q_1 - P_1 \quad Q_2 - P_1 \right)|$$

e

$$\begin{aligned} \text{Sup.Lat.} &= \mathrm{Vol}_2\Delta(P_1, P_2, Q_1) + \mathrm{Vol}_2\Delta(P_1, P_2, Q_2) + \mathrm{Vol}_2\Delta(P_1, Q_1, Q_2) + \mathrm{Vol}_2\Delta(P_2, Q_1, Q_2) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|Q_1 - P_1\| \, \|P_2 - P_1\| + \|Q_2 - P_2\| \, \|P_2 - P_1\| + \|(Q_1 - P_1) \times (Q_2 - P_1)\| + \|(Q_1 - P_2) \times (Q_2 - P_2)\|\Big) \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto delle ortogonalità date per costruzione (i triangoli di vertici P_1, P_2, Q_1 e P_1, P_2, Q_2 sono rettangoli con "cateti" rispettivamente $Q_1 - P_1, P_2 - P_1$ e $Q_2 - P_1, P_2 - P_1$). □

Esercizio 3. Sia c la quarta cifra del proprio numero di matricola, diminuita di 5 e sostituita con 4 se risulta 0 oppure -1; sono dati i piani dello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$:

$$\pi_1 : \begin{cases} (1-c)X_1 - X_2 + cX_4 = -1 + c \\ -X_3 + X_4 = c \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} cX_1 - cX_3 + X_4 = c(1+c) \\ (1+c)X_1 - cX_3 = c(1+c) \end{cases} .$$

(a) Determinare $\pi_1 \wedge \pi_2$ e $\pi_1 \vee \pi_2$. Esistono sottospazi di dimensione 3 contenenti entrambi i piani?

(b) Si mostri che per ogni punto P non appartenente a $\pi_1 \cup \pi_2$ passa un unico piano σ_P "conspaziale con π_1 e π_2" (cioè tale che le congiungenti $\pi_1 \vee \sigma_P$ e $\pi_2 \vee \sigma_P$ abbiano dimensione 3).

(c) Sia r la retta per l'origine e direzione e_1; descrivere tramite equazione cartesiane l'insieme $\bigcup_{P \in r} \sigma_P$. Si tratta di un sottospazio affine?

($d*$) Generalizzare l'esercizio ad $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$: dati due sottospazi affini $\mathbb{L}_1$ ed $\mathbb{L}_2$ di dimensione $n-2$ tali che ..., per ogni punto P non appartenente alla loro unione, esiste unico ...

Risultati.

(a) L'intersezione è il punto $\begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ e la congiungente è l'intero spazio $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, in base alla formula di Grassmann affine; dunque non esistono sottospazi di dimensione 3 contenenti entrambi i piani.

(b) Il piano σ_P cercato deve essere contenuto sia in $\pi_1 \vee P$ sia in $\pi_2 \vee P$; entrambi questi sottospazi affini hanno dimensione 3 poiché $P \notin \pi_1 \cup \pi_2$, e non possono coincidere, altrimenti si tratterebbe d'un sottospazio di dimensione 3 contenente entrambi i piani. Dunque l'intersezione $(\pi_1 \vee P) \cap (\pi_2 \vee P)$ è sottospazio affine di dimensione 2 ($= 3 + 3 - 4$, per la formula di Grassmann affine; notare che l'intersezione è non vuota, visto che contiene almeno P e la congiungente contiene $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$) e quindi è il σ_P cercato. Che la dimensione di $\pi_1 \vee \sigma_P$ (risp. $\pi_2 \vee \sigma_P$) sia 3 si ottiene osservando che coincide con $\pi_1 \vee P$ (risp. $\pi_2 \vee P$).

(c) I punti di r sono parametrizzati da $P_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (non appartengono a nessuno dei piani dati) e cerchiamo le equazioni per $(\pi_1 \vee P_\alpha) \cap (\pi_2 \vee P_\alpha)$ usando i fasci di spazi 3-dimensionali di assi π_1 e π_2.
Imponendo a $\lambda((1-c)X_1 - X_2 + cX_4 + 1 - c) + \mu(-X_3 + X_4 - c)$ di contenere P_α otteniamo $\lambda = c$, $\mu = (1-c)\alpha + 1 - c$.
Imponendo a $\lambda(X_1 - X_4) + \mu((1+c)X_1 - cX_3 = c(1+c))$ di contenere P_α otteniamo $\lambda = (1+c)\alpha - c(1+c)$, $\mu = -\alpha$.
Quindi $(\pi_1 \vee P_\alpha) \cap (\pi_2 \vee P_\alpha)$ è descritto dal sistema

$$\begin{cases} \alpha(1-c)(-X_3 + X_4 - c) + (c(1-c)X_1 - cX_2 - (1-c)X_3 + (c^2-c+1)X_4) = 0 \\ \alpha(cX_3 - (1+c)X_4 + c(1+c)) - c(1+c)(X_1 - X_4) = 0 \end{cases}$$

e perciò i punti di $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ che appartengono all'insieme richiesto sono quelli per cui il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} (1-c)(-X_3 + X_4 - c) & c(1-c)X_1 - cX_2 - (1-c)X_3 + (c^2-c+1)X_4 \\ cX_3 - (1+c)X_4 + c(1+c) & -c(1+c)(X_1 - X_4) \end{pmatrix}$$

si annulla (infatti il sistema deve avere soluzione in α), e quindi i punti le cui coordinate risolvono in generale una equazione quadratica; non si tratta perciò di un sottospazio affine, a meno che non sia $c = 1$ nel qual caso la retta r è parallela a π_1 e l'insieme cercato è un iperpiano (di equazione $X_2 - X_4 = 0$).

($d*$) Dati due sottospazi affini $\mathbb{L}_1$ ed $\mathbb{L}_2$ di dimensione $n-2$ tali che $\mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2$ sia tutto lo spazio (equivalentemente $\mathbb{L}_1 \wedge \mathbb{L}_2$ abbia dimensione $n-4$), per ogni punto P non appartenente alla loro unione, esiste unico un sottospazio $\mathbb{M}_P$ di dimensione $n-2$ tale che le sue congiungenti con $\mathbb{L}_1$ ed $\mathbb{L}_2$ siano iperpiani. In effetti $\mathbb{M}_P = (\mathbb{L}_1 \vee P) \wedge (\mathbb{L}_2 \vee P)$.

□

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{R}^4$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità, e il polinomio minimo di ϕ.

(b) Discutere diagonalizzabilità e triangolarizzabilità di ϕ. Se possibile, si determini una matrice di Jordan J per ϕ e una matrice $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}AH = J$.

(c) Determinare quali sono le possibili matrici di Jordan, non equivalenti tra loro, con polinomio caratteristico uguale a quello di A.

(d) Discutere la diagonalizzabilità delle matrici $(A+\mathbb{I})^2$ e $(A+\mathbb{I})^3$, possibilmente senza fare (altri) calcoli.

Risultati.

(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ risulta $p_A(X) = (X-1)(X+1)^3$; gli autovalori 1 e -1 hanno rispettivamente molteplicità 1 e 3; il primo ha nullità 1, poiché la molteplicità è 1 (dunque la matrice $A - \mathbb{I}_4$ avrà rango 3), il secondo ha nullità 1, poiché la matrice $A + \mathbb{I}_4$ ha rango 3. Il polinomio minimo è $(X-1)(X+1)^3$ (in questo caso si può già dire: perché?).

(b) L'applicazione è triangolarizzabile poiché tutti gli autovalori appartengono ad $\mathbb{R}$, ma non è diagonalizzabile poiché le nullità non coincidono con le molteplicità (per l'autovalore -1).
Siccome tutti gli autovalori sono in $\mathbb{R}$, si può trovare una forma di Jordan per ϕ, che necessariamente è del tipo $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ poiché il blocco relativo a -1 ha autospazio (vero) di dimensione 1, e quindi un solo blocco di Jordan; per trovare una matrice H di cambiamento di base, studiamo gli autospazi e gli autospazi generalizzati:

$$\ker(\phi - 1) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle ,$$

$$\ker(\phi+1) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle , \quad \ker(\phi+1)^2 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \quad \text{e} \quad \ker(\phi+1)^3 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle .$$

Dunque usando come colonne di H i vettori $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = (\phi+1)v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $v_2 = (\phi+1)^2 v_4 = (\phi+1)v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ (nell'ordine degli indici) otteniamo che $H^{-1}AH = J$.
Se invece si sceglieva $w_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, si doveva usare $w_3 = (\phi+1)w_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $w_3 = (\phi+1)^2 w_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ (l'importante per il quarto vettore di una base di Jordan è di essere in $\ker(\phi+1)^3$ ma non in $\ker(\phi+1)^2$).

(c) Per rispondere, basta vedere quali possono essere i blocchi di Jordan relativi ad ogni autovalore; il primo autovalore non ha scelta, dovendo avere un unico blocco di ordine uno; per il secondo autovalore i blocchi possono essere tre (d'ordine 1 ciascuno) due (d'ordini 1 e 2) oppure uno (d'ordine 3). Abbiamo quindi tre casi possibili, che sono caratterizzati dal loro polinomio minimo:

matr.Jordan	$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$
pol.minimo	$(X-1)(X+1)$	$(X-1)(X+1)^2$	$(X-1)(X+1)^3$

(d) Siccome $A + \mathbb{I} = H(J+\mathbb{I})H^{-1}$, abbiamo che $(A+\mathbb{I})^2 = H(J+\mathbb{I})^2H^{-1}$ e $(A+\mathbb{I})^3 = H(J+\mathbb{I})^3H^{-1}$. Quindi si deduce subito che $(A+\mathbb{I})^3$ è diagonalizzabile (poiché $(J+\mathbb{I})^3$ è diagonale) e che $(A+\mathbb{I})^2$ non è diagonalizzabile (poiché $(J+\mathbb{I})^2$ non è diagonalizzabile, ma si noti che non è la forma di Jordan di $(A+\mathbb{I})^2$: solo si vede subito che l'autovalore 0 ha molteplicità 3 e nullità 2...). □

Esercizio 2. Sono date le rette dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$:

$$r_1 : \begin{cases} X - Z = 0 \\ X + Z = 2 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} X + 2Z = -2 \\ X + 2Y + 2Z = 0 \end{cases} .$$

(a) Si determini la retta h incidente le due date e ortogonale ad esse; siano $H_i = h \cap r_i$.

(b) Si determini la retta s di direzione il vettore $S = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e incidente le due date; siano $S_i = s \cap r_i$.

(c) Determinare volume e superficie laterale totale del tetraedro di vertici H_1, H_2, S_1, S_2. Si determini la distanza tra h ed s.

(d) Esistono rette incidenti r_1 ed r_2 e formanti con esse angoli uguali? Se sì, determinarle tutte.

Risultati.

(a) La retta richiesta passa per $H_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $H_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) La retta passa per $S_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $S_2 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Si fanno i seguenti conti:

$$\mathrm{Vol}_3\, \Delta(H_1, H_2, S_1, S_2) = \frac{1}{6} |\det\left(H_1{-}H_2 \quad S_1{-}H_2 \quad S_2{-}H_2 \right)| = \frac{5}{6}$$

e

$$\begin{aligned} &\text{Sup.Lat.} = \mathrm{Vol}_2\Delta(H_1, H_2, S_1) + \mathrm{Vol}_2\Delta(H_1, H_2, S_2) + \mathrm{Vol}_2\Delta(H_1, S_1, S_2) + \mathrm{Vol}_2\Delta(H_2, S_1, S_2) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|S_1{-}H_1\|\, \|H_2{-}H_1\| + \|S_2{-}H_2\|\, \|H_1{-}H_2\| + \|(S_1{-}H_1) \times (S_2{-}S_1)\| + \|(S_1{-}H_2) \times (S_2{-}H_2)\| \Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(5 + \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{30}\Big) \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto delle ortogonalità date per costruzione. Per calcolare la distanza tra h ed s osserviamo che sono rette sghembe (altrimenti il tetraedro sarebbe stato degenere, dunque di volume nullo) e dunque:

$$d(h, s) = \frac{\mathrm{Vol}_3\, \Pi(H_1, H_2, S_1, S_2)}{\mathrm{Vol}_2\, \Pi(H_1 - H_2, S_1 - S_2)} = \frac{5}{30}\sqrt{30} = \frac{\sqrt{30}}{6} .$$

(d) Ne esistono, per esempio h forma angoli di $\pi/2$ con entrambe le rette. In effetti per ogni punto $P_1(\alpha) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ di r_1 vi è un fascio di rette nel piano $P_1(\alpha) \vee r_2$ e due di queste (in generale) formeranno angoli uguali con le due rette, poiché è necessario e sufficiente imporre la condizione

$$|\cos\theta(P_2(\beta){-}P_1(\alpha), S_1{-}H_1)| = |\cos\theta(P_2(\beta){-}P_1(\alpha), S_2{-}H_2)|$$

ove $P_2(\beta) = \left(\begin{smallmatrix} 2\beta \\ 1 \\ -\beta-1 \end{smallmatrix}\right)$ è il generico punto di r_2. Si ottengono allora le uguaglianze

$$\frac{|(P_2(\beta){-}P_1(\alpha)) \cdot (S_1{-}H_1)|}{\|P_2(\beta){-}P_1(\alpha)\|\, \|S_1{-}H_1\|} = \frac{|(P_2(\beta){-}P_1(\alpha)) \cdot (S_2{-}H_2)|}{\|P_2(\beta){-}P_1(\alpha)\|\, \|S_2{-}H_2\|}$$

dunque

$$\frac{|\left(\begin{smallmatrix} 2\beta-1 \\ 1-\alpha \\ -\beta-2 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)|}{1} = \frac{|\left(\begin{smallmatrix} 2\beta-1 \\ 1-\alpha \\ -\beta-2 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)|}{\sqrt{5}}$$

da cui segue $5|\beta| = \sqrt{5}|\alpha - 1|$, il che per α fissato restituisce due valori $\beta = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha - 1)$ (tranne $\alpha = 1$ che dà $\beta = 0$, ed è la retta h). □

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{R}^4$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(*a*) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità, e il polinomio minimo di ϕ.

(*b*) Discutere diagonalizzabilità e triangolarizzabilità di ϕ. Se possibile, si determini una matrice di Jordan J per ϕ e una matrice $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}AH = J$.

(*c*) Determinare quali sono le possibili matrici di Jordan, non equivalenti tra loro, con polinomio caratteristico uguale a quello di A.

(*d*) Senza fare altri conti, si determini la forma di Jordan della matrice $(A-2)(A-3)$.

Risultati.

(*a*) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ risulta $p_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$; gli autovalori 2 e 3 hanno entrambi molteplicità 2; entrambi hanno nullità 1, poiché le matrici $A - 2\mathbb{I}_4$ e $A - 3\mathbb{I}_4$ hanno rango 3. Il polinomio minimo è uguale al polinomio caratteristico (in questo caso si può già dire: perché?).

(*b*) L'applicazione è triangolarizzabile poiché tutti gli autovalori appartengono ad $\mathbb{R}$, ma non è diagonalizzabile poiché le nullità non coincidono con le molteplicità.
Siccome tutti gli autovalori sono in $\mathbb{R}$, si può trovare una forma di Jordan per ϕ, che necessariamente è del tipo $J = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ e per trovare una matrice H di cambiamento di base, studiamo gli autospazi e gli autospazi generalizzati:

$$\ker(\phi - 2) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \ , \quad \ker(\phi - 2)^2 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$$

$$\ker(\phi - 3) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \ , \quad \ker(\phi + 1)^2 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$$

Dunque usando come colonne di H i vettori $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_1 = (\phi - 2)v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = (\phi - 3)v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ (nell'ordine degli indici) otteniamo che $H^{-1}AH = J$.

(*c*) Per rispondere, basta vedere quali possono essere i blocchi di Jordan relativi ad ogni autovalore. Abbiamo quindi quattro casi possibili, che sono caratterizzati dal loro polinomio minimo:

matr.Jordan	$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$
pol.minimo	$(X-2)(X-3)$	$(X-2)^2(X-3)$	$(X-2)(X-3)^2$	$(X-2)^2(X-3)^2$

(*d*) Siccome $((A-2\mathbb{I})(A-3\mathbb{I}))^2 = \mathbb{O}$, abbiamo che la matrice è nilpotente, quindi ha tutti gli autovalori nulli e la sua forma di Jordan ha due blocchi d'ordine 2 come si nota subito dal prodotto $(J-2\mathbb{I})(J-3\mathbb{I})$. $\square$

Esercizio 2. Sono dati nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$:

$$\text{i piani } \pi_1 : X + 2Y - 2Z = 0 \ , \ \pi_2 : X + 5Y - 8Z + 9 = 0 \text{ e la retta } r : \begin{cases} X + Y = 1 \\ Y + Z = 2 \end{cases} .$$

(a) Si determinino i punti $R_1 = r \cap \pi_1$ e $R_2 = r \cap \pi_2$. È vero che r risulta sghemba con $\pi_1 \cap \pi_2$?
(b) Si determinino tutte le coppie di punti $P, P' \in \pi_1 \cap \pi_2$ tali che il tetraedro di vertici P, P', R_1, R_2 abbia volume unitario.
(c) Si determinino tutti i punti $P \in \pi_1 \cap \pi_2$ tali che il triangolo di vertici P, R_1, R_2 abbia superficie minima.
(d) Si determinino le rette h_1 e h_2 passanti rispettivamente per R_1 ed R_2, ortogonali a $\pi_1 \cap \pi_2$ e ad essa incidenti; siano H_1 e H_2 i rispettivi punti di incidenza con $\pi_1 \cap \pi_2$. Calcolare il volume del tetraedro di vertici R_1, R_2, H_1, H_2.

Risultati.
(a) $R_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $R_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. Poiché $R_1 \notin \pi_2$ e $R_2 \notin \pi_1$, si ha che r risulta sghemba con $\pi_1 \cap \pi_2$.

Per procedere conviene avere equazioni parametriche per r e $\pi_1 \cap \pi_2$; si trovano facilmente delle rappresentazioni della forma:

$$\pi_1 \cap \pi_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad r : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(b) Ponendo $P = \begin{pmatrix} -2z \\ 2z+3 \\ z+3 \end{pmatrix}$ e $P' = \begin{pmatrix} -2z' \\ 2z'+3 \\ z'+3 \end{pmatrix}$ punti generici di $\pi_1 \cap \pi_2$ risulta che il volume del tetraedro di vertici P, P', R_1, R_2 è $|z' - z|/2$. Dunque le coppie (P, P') cercate sono quelle per cui $|z - z'| = 2$.
(c) La superficie richiesta è minima quando minima è l'altezza relativa alla base R_1R_2, cioè il punto cercato P dev'essere il punto di $\pi_1 \cap \pi_2$ di minima distanza dalla retta r. Imponendo a $P - R$ d'essere ortogonale ai vettori direttori di r e $\pi_1 \cap \pi_2$ (P e R punti generici di $\pi_1 \cap \pi_2$ ed r rispettivamente), si trovano i punti di minima distanza e in particolare si trova il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
(d) Conviene cercare i punti $H_i \in \pi_1 \cap \pi_2$ imponendo le condizioni che $H_i - R_i$ sia ortogonale al vettore direttore $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\pi_1 \cap \pi_2$. Si trova $H_1 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ e $H_2 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \\ 13/6 \end{pmatrix}$. Il volume richiesto è $5/12$. $\square$

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{R}^4$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità, e il polinomio minimo di ϕ.

(b) Discutere diagonalizzabilità e triangolarizzabilità di ϕ. Se possibile, si determini una matrice di Jordan J per ϕ e una matrice $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}AH = J$.

(c) Determinare quali sono le possibili matrici di Jordan, non equivalenti tra loro, con polinomio caratteristico uguale a quello di A.

(d) Cosa si può dire, senza fare altri conti, della matrice $(A-4)(A-6)$?

Risultati.

(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ risulta $p_A(X) = X^2(X-4)(X-6)$; gli autovalori 4 e 6 hanno entrambi molteplicità e nullità 1; l'autovalore nullo ha molteplicità e nullità 2, poiché la matrice $A - 0\mathbb{I}_4 = A$ ha rango 2. Il polinomio minimo è $X(X-4)(X-6)$ dovendo avere radici semplici.

(b) L'applicazione è diagonalizzabile poiché tutti gli autovalori appartengono ad $\mathbb{R}$, e per ciascuno di essi le nullità coincidono con le molteplicità. Siccome tutti gli autovalori sono in $\mathbb{R}$, si può trovare una forma di Jordan per ϕ, che necessariamente è diagonale del tipo $J = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&4&0 \\ 0&0&0&6 \end{pmatrix}$ e per trovare una matrice H basta accostare una base di autovettori, per esempio se le colonne di H sono date da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, otteniamo che $H^{-1}AH = J$.

(c) Per rispondere, basta vedere quali possono essere i blocchi di Jordan relativi ad ogni autovalore. Abbiamo quindi due casi possibili, che sono caratterizzati dal loro polinomio minimo:

matr.Jordan	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&4&0 \\ 0&0&0&6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&4&0 \\ 0&0&0&6 \end{pmatrix}$
pol.minimo	$X(X-4)(X-6)$	$X^2(X-4)(X-6)$

(d) Siccome si tratta di matrici diagonalizzabili e commutanti (ovvero simultaneamente diagonalizzabili tramite ad esempio H), il prodotto è una matrice diagonalizzabile di autovalori 0 e 24 entramnbi di molteplicità 2, come si nota subito dal prodotto $(J - 4\mathbb{I})(J - 6\mathbb{I})$. □

Esercizio 2. Sono dati nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$:

$$\text{i piani } \pi_1 : 5X - 8Y + Z + 9 = 0\ ,\ \pi_2 : 2X - 2Y + Z = 0 \text{ e la retta } r : \begin{cases} X + Y = 2 \\ X + Z = 1 \end{cases}.$$

(a) Si determinino i punti $R_1 = r \cap \pi_1$ e $R_2 = r \cap \pi_2$. È vero che r risulta sghemba con $\pi_1 \cap \pi_2$?

(b) Si determinino tutte le coppie di punti $P, P' \in \pi_1 \cap \pi_2$ tali che il tetraedro di vertici P, P', R_1, R_2 abbia volume unitario.

(c) Si determinino tutti i punti $P \in \pi_1 \cap \pi_2$ tali che il triangolo di vertici P, R_1, R_2 abbia superficie minima.

(d) Si determinino le rette h_1 e h_2 passanti rispettivamente per R_1 ed R_2, ortogonali a $\pi_1 \cap \pi_2$ e ad essa incidenti; siano H_1 e H_2 i rispettivi punti di incidenza con $\pi_1 \cap \pi_2$. Calcolare il volume del tetraedro di vertici R_1, R_2, H_1, H_2.

Risultati. Si tratta dello stesso esercizio del compito del 15 luglio 2005, a meno di una permutazione delle variabili e dei nomi dei sottospazi. □

pg. 120...

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Siano a l'opposto della quinta cifra e b la sesta cifra del proprio numero di matricola. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{R}^4$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b-a & b & -1 & b-a \\ 1 & 1 & b+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità; dire se ϕ è invertibile.

(b) Discutere diagonalizzabilità e triangolarizzabilità di ϕ; determinare il polinomio minimo di ϕ.

(c) Se possibile, si determini una matrice $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}AH = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \end{smallmatrix}\right)$.

(d) È vero o falso che una matrice B con polinomi caratteristico e minimo uguali a quelli di A è necessariamente simile ad A?

Risultati.

(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ risulta $p_A(X) = (X-a)^2(X-(b+1))^2$; gli autovalori a e $b+1$ hanno entrambi molteplicità 2 e nullità rispettivamente 2 e 1, poiché le matrici $A - a\mathbb{I}_4$ e $A - (b{+}1)\mathbb{I}_4$ sono di rango rispettivamente 2 e 3. L'applicazione è invertibile o meno a seconda che $a(b+1)$ (cioè a, visto che $b+1>0$) sia diverso da o uguale a zero.

(b) L'applicazione è triangolarizzabile poiché tutti gli autovalori appartengono ad $\mathbb{R}$, ma non è diagonalizzabile poiché le nullità non coincidono con le molteplicità. Il polinomio minimo è uguale a $(X-a)(X-(b+1))^2$ (sia per controllo diretto: il divisore monico di grado minimo di $p_A(X)$ che annulla A è $(X-a)(X-(b+1))^2$; sia in base a considerazioni sul teorema di decomposizione: lo spazio $\mathbb{R}^4$ si ottiene come somma diretta di $\ker(\phi - a)$ e $\ker(\phi-(b+1))^2$ e non con esponenti minori poiché l'autospazi di $b{+}1$ ha dimensione 1).

(c) Usando il teorema di decomposizione $\mathbb{R}^4 = \ker(\phi - a) \oplus \ker(\phi-(b+1))^2$ (entrambi sottospazi stabili per ϕ) e tenendo conto che l'applicazione è triangolarizzabile, e ristretta a $\ker(\phi - a)$ è diagonalizzabile, possiamo dire che A è simile alla matrice proposta, usando $\alpha = a$ e $\beta = b{+}1$. Per cercare H studiamo gli autospazi:

$$\ker(\phi - a) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \qquad \text{e} \qquad \ker(\phi-(b+1)) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \ .$$

Dunque come colonne di H possiamo usare i vettori $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ (sono autovettori di autovalore a), $v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ (è autovettore di autovalore $b{+}1$), e poi cercare un vettore v_3 tale che $\phi(v_3) = (b{+}1)v_3 + v_4$. Il sistema lineare dà come soluzione particolare (tra l'altro) $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) Sì, è vero, ed è essenzialmente dimostrato nel preliminare del punto (c). Infatti qualunque matrice con polinomio caratteristico $(X-\alpha)^2(X-\beta)^2$ e polinomio minimo $(X-\alpha)(X-\beta)^2$ è simile (usando il teorema di decomposizione per vedere due blocchi diagonali d'ordine 2, il criterio di diagonalizzabilità nel blocco di α, e il criterio di triangolabilità nel blocco di β) ad una matrice triangolare del tipo $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \beta \end{smallmatrix}\right)$ con $\gamma \neq 0$; ma allora γ può essere reso uguale ad 1 con il cambiamento di base dato dalla matrice diagonale avente in diagonale i valori $1, 1, 1, \gamma$. Dunque entrambe le matrici A e B sono simili alla stessa matrice, e di conseguenza sono simili tra loro (la similitudine è una relazione di equivalenza). □

Esercizio 2.

(a) Calcolare i determinanti delle seguenti due matrici: $\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$.

Si considerino ora le matrici di ordine n date da:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

(termini eventualmente non nulli solamente sopra e sotto la diagonale principale).

(b) Calcolare il valore dei determinanti di A_4 e A_5.

(c) Si trovi e si dimostri una espressione generale per il determinante delle matrici A_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(d) Si trovi e si dimostri una espressione ricorsiva per il polinomio caratteristico $p_{A_n}(X)$ delle matrici A_n per ogni $n \in \mathbb{N}$. È vero o falso che il coefficiente di X^{n-1} in $p_{A_n}(X)$ è sempre nullo?

Risultati.

(a) Chiaramente, i determinanti sono rispettivamente $-a_1b_1$, 0 (prima e terza colonna della seconda matrice sono proporzionali).

(b) Conviene sviluppare due volte con Laplace su ultima riga, e poi ultima colonna (o viceversa); si ottiene

$$\det A_4 = \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \end{pmatrix} = -a_3b_3 \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} = a_1b_1a_3b_3$$

e

$$\det A_5 = \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \end{pmatrix} = -a_4b_4 \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

(c) I casi precedenti suggeriscono di procedere trovando una formula ricorsiva per i determinanti $\det A_n$ usando un doppio sviluppo di Laplace su ultima riga, e poi ultima colonna (o viceversa):

$$\det A_n = -a_{n-1}b_{n-1} \det A_{n-2}$$

da cui si deduce subito, e si dimostra per induzione, che

$$\det A_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ (-1)^{n/2} a_1b_1a_3b_3 \cdots a_{n-1}b_{n-1} & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

(d) Detto $p_n(X) = \det(X\mathbb{I}_n - A_n)$ il polinomio caratteristico di A_n, uno sviluppo di Laplace sull'ultima riga, seguito da un ulteriore sviluppo sull'ultima colonna del secondo termine, ci dà la formula ricorsiva:

$$p_n(X) = Xp_{n-1}(X) - a_{n-1}b_{n-1}p_{n-2}(X) \ .$$

Poiché si calcola facilmente che $p_2(X) = X^2 - a_1b_1$ e $p_3(X) = X^3 - (a_1b_1 + a_2b_2)X$, questo ci permette per induzione di calcolare via via i successivi:

n	$p_n(X)$
2	$X^2 - a_1b_1$
3	$X^3 - (a_1b_1 + a_2b_2)X$
4	$X^4 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)X^2 + a_1b_1a_3b_3$
5	$X^5 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)X^3 + (a_1b_1a_3b_3 + a_1b_1a_4b_4 + a_2b_2a_4b_4)X$
6	$X^6 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5)X^4+$
	$+(a_1b_1a_3b_3 + a_1b_1a_4b_4 + a_2b_2a_4b_4 + a_1b_1a_5b_5 + a_2b_2a_5b_5 + a_3b_3a_5b_5)X^2 - a_1b_1a_3b_3a_5b_5$

Per $n = 1$ possiamo usare $p_1(X) = X$ (infatti $A_1 = (0)$), e per $n = 0$ potremmo definire $p_0(X) = 1$, per compatibilità con la formula ricorsiva!

Per quanto riguarda l'ultima domanda, il coefficiente di X^{n-1} in $p_{A_n}(X)$ è l'opposto della traccia della matrice A_n, che è chiaramente nulla, avendo la matrice tutti zero in diagonale. □

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Sia a la quinta cifra del proprio numero di matricola, sostituita con 6 se è 0; sono date le rette dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$:

$$r_1 : \begin{cases} X + Y = a \\ X - Y = a \end{cases} \qquad r_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ a-1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(a) Si determini la retta h incidente le due date e ortogonale ad esse; siano $P_i = h \cap r_i$.

(b) Si determini la retta s passante per il punto $S = \begin{pmatrix} -1 \\ a-1 \\ 3a-1 \end{pmatrix}$ e incidente le due date; siano $Q_i = s \cap r_i$.

(c) Determinare volume e superficie laterale totale del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2.

(d) Determinare le coordinate baricentriche del punto S nel riferimento formato dai punti P_1, Q_1, P_2, Q_2.

Risultati.

(a) La retta richiesta passa per $P_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$.

(b) La retta passa per $Q_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix}$ e $Q_2 = \begin{pmatrix} 2a+1 \\ 1-a \\ a+1 \end{pmatrix}$.

(c) Si fanno i seguenti conti:

$$\mathrm{Vol}_3\, \Delta(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = \frac{1}{6} |\det (\, P_2 - P_1 \quad Q_1 - P_1 \quad Q_2 - P_1\,)| = a^2/3$$

e

$$\begin{aligned} \text{Sup.Lat.} &= \mathrm{Vol}_2\Delta(P_1, P_2, Q_1) + \mathrm{Vol}_2\Delta(P_1, P_2, Q_2) + \mathrm{Vol}_2\Delta(P_1, Q_1, Q_2) + \mathrm{Vol}_2\Delta(P_2, Q_1, Q_2) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|Q_1{-}P_1\|\, \|P_2{-}P_1\| + \|Q_2{-}P_2\|\, \|P_2{-}P_1\| + \|(Q_1{-}P_1) \times (Q_2{-}P_1)\| + \|(Q_1{-}P_2) \times (Q_2{-}P_2)\| \Big) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(|a| + \sqrt{2a^2+1} + |a|\sqrt{a^2+1} + (a^2+1) \Big) \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto delle ortogonalità date per costruzione (i triangoli di vertici P_1, P_2, Q_1 e P_1, P_2, Q_2 sono rettangoli con "cateti" rispettivamente $Q_1{-}P_1, P_2{-}P_1$ e $Q_2{-}P_1, P_2{-}P_1$).

(d) Siccome il punto S appartiene alla retta s per Q_1 e Q_2, esso è combinazione baricentrica di questi due punti, e precisamente $S = 2Q_1 - Q_2$; quindi le sue coordinate baricentriche nel riferimento chiesto sono $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\square$

Esercizio 2. Sia b la sesta cifra del proprio numero di matricola, diminuita di 5 e sostituita con 4 se risulta 0 oppure 1; sono dati la retta ed il piano dello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$:

$$r : \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \rangle \qquad \pi : \begin{cases} b^2X_1 - bX_2 + X_3 = b - 1 \\ X_1 + X_2 - X_4 = b - 1 \end{cases} .$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r e π. Esistono sottospazi di dimensione 3 contenenti entrambi?
(b) Si mostri che esiste un unico iperpiano Σ_r contenente r e parallelo a π, ed un unico iperpiano Σ_π contenente π e parallelo ad r, e se ne determinino le equazioni. È vero o falso che i due iperpiani sono paralleli tra loro?
(c) Per ogni iperpiano Γ contenente r e diverso da Σ_r, determinarne la posizione reciproca con π.
($d*$) Generalizzare l'esercizio ad $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$: dati due sottospazi affini complementari $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$, esiste un unico iperpiano $\Sigma_{\mathbb{L}}$ ... , e per ogni altro iperpiano Γ contenente $\mathbb{L}$ e diverso da $\Sigma_{\mathbb{L}}$ si ha che $\Gamma \wedge \mathbb{M}$ ...

Risultati.

(a) Siccome il vettore direttore di r non appartiene alla giacitura di π (non soddisfa la seconda equazione omogenea di π), gli spazi direttori di r e π si intersecano in $\langle 0 \rangle$. Inoltre nessun punto di r soddisfa alla prima equazione di π, dunque $r \wedge \pi = \varnothing$. Dunque r e π sono sghembe, e viste le loro dimensioni possiamo concludere che sono complementari. In particolare $r \vee \pi = \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ e non esistono iperpiani contenenti sia r che π.

(b) L'iperpiano Σ_r cercato deve contenere $r = P + \langle u \rangle$ ed essere parallelo a $\pi = Q + \langle v, w \rangle$. Ora, abbiamo visto che $u, v.w$ sono linearmente indipendenti; quindi il sottospazio affine $P + \langle u, v, w \rangle$ è chiaramente l'unico soddisfacente le richieste. Usando $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -b^2 \\ 1 \end{pmatrix}$, possiamo trovare l'equazione di σ_r svilpuppando

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 & 1 \\ X_2 & b & 1 & 0 \\ X_3-b & 0 & b & -b^2 \\ X_4+b+1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 .$$

Ragionando allo stesso modo, l'iperpiano Σ_π deve necessariamente essere $Q + \langle u, v, w \rangle$, chiaramente parallelo a Σ_r (e disgiunto, visto che $P - Q$ non appartiene a $\langle u, v, w \rangle$, essendo r e π sghembi); la sua equazione si può trovare partendo dal fascio di iperpiani di asse π:

$$\alpha(b^2X_1 - bX_2 + X_3 - b + 1) + \beta(X_1 + X_2 - X_4 - b + 1) = 0$$

e imponendo il parallelismo con r, cioè che il vettore direttore di r soddisfi l'equazione omogenea: si trova $\alpha = 1$, $\beta = 0$, e allora il piano Σ_π cercato è $b^2X_1 - bX_2 + X_3 - b + 1 = 0$. Peraltro, siccome Σ_r gli è parallelo, ha equazioni del tipo $b^2X_1 - bX_2 + X_3 = k$ ove k è una costante definita dalla condizione di contenere (un punto di) r, e si trova $k = -b - 1$.

(c) Sia Γ un iperpiano contenente r e diverso da Σ_r, dunque non parallelo a π. Siccome $\Gamma \vee \pi \geq r \vee \pi = \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, risulta che $\Gamma \vee \pi = \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, e inoltre $\Gamma \wedge \pi \neq \varnothing$ (ogni iperpiano affine interseca ogni varietà lineare che non gli sia parallela, poiché gli spazi direttori generano tutto lo spazio vettoriale...). Ma allora l'intersezione ha dimensione $\dim \Gamma + \dim \pi - 4 = 3 + 2 - 4 = 1$, e si tratta di una retta (un iperpiano di π).

($d*$) Dati due sottospazi affini complementari $\mathbb{L} = P + U$ ed $\mathbb{M} = Q + W$, esiste un unico iperpiano $\Sigma_{\mathbb{L}}$ contenente $\mathbb{L}$ e parallelo a $\mathbb{M}$, ed è $\Sigma_{\mathbb{L}} = P + (U + W)$.
Per ogni altro iperpiano Γ contenente $\mathbb{L}$ e diverso da $\Sigma_{\mathbb{L}}$ (dunque non parallelo ad $\mathbb{M}$), si ha che $\Gamma \wedge \mathbb{M}$ è un iperpiano di $\mathbb{M}$. Infatti dev'essere $\Gamma = P + \mathbb{U}$ ("doppia U" oppure "U doppia", nuova lettera dell'alfabeto) con $W + \mathbb{U} = \mathbb{R}^n$, da cui risulta $\Gamma \wedge \mathbb{M} \neq \varnothing$ (da $P - Q = w + u$, con $w \in W$ e $u \in \mathbb{U}$, si ha $P - u = Q + w \in \Gamma \wedge \mathbb{M}$), e allora dalla formula di Grassmann affine si ha $\dim(\Gamma \wedge \mathbb{M}) = \dim(\Gamma) + \dim(\mathbb{M}) - n = n - 1 + \dim(\mathbb{M}) - n = \dim(\mathbb{M}) - 1$.
Si noti che nel caso del piano l'asserzione è: per ogni punto dato esterno ad una retta data, esiste una unica retta per il punto dato e parallella alla retta data, e ogni altra retta per il punto dato interseca in un punto la retta data. □

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{R}^4$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(*a*) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità; si tratta di un endomorfismo diagonalizzabile e/o triangolarizzabile?

(*b*) Determinare il polinomio minimo di ϕ. Se possibile, si determini una matrice $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}AH = J$ con $J = \left(\begin{smallmatrix} 4&0&0&0 \\ 0&4&1&0 \\ 0&0&4&0 \\ 0&0&0&4 \end{smallmatrix}\right)$.

(*c*) Determinare, se esistono, matrici non simili ad A ma con polinomi caratteristico e minimo uguali a quelli di A.

(*d*) Dare una formula per A^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Risultati.

(*a*) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ risulta $p_A(X) = (X-4)^4$; vi è l'unico autovalore 4 con molteplicità 4. La sua nullità non può essere 4 (altrimenti la matrice A dovrebbe essere $4\mathbb{I}_4$), ed in effetti risulta $4 - \mathrm{rg}(A - 4\mathbb{I}_4) = 4 - 1 = 3$. Si tratta quindi di un morfismo triangolarizzabile (ha tutti gli autovalori nel corpo $\mathbb{R}$), ma non diagonalizzabile (la nullità è strettamente minore della molteplicità).

(*b*) Siccome $\dim\ker(A - 4\mathbb{I}_4) = 3$, abbiamo che necessariamente $\dim\ker(A - 4\mathbb{I}_4)^2 = 4$ (la dimensione deve aumentare, e al massimo può essere 4), e quindi il polinomio minimo è $(X-4)^2$ (polinomio monico di grado minimo che annulla la matrice). È possibile determinare una tale H, usando come colonne autovettori (eventualmente generalizzati) di A; infatti basta usare come v_3 (terza colonna di H) un vettore non appartenente a $\ker(A - 4\mathbb{I}_4) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$; per esempio $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{smallmatrix}\right)$. Poi $v_2 = (A - 4\mathbb{I}_4)v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0\\-1\\1\\-1 \end{smallmatrix}\right)$ (che risulta necessariamente un autovettore di 4), e infine scegliere v_1 e v_4 per completare la base dell'autospazio, per esempio $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{smallmatrix}\right)$ e $v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{smallmatrix}\right)$. Si ottiene quindi $H = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1&1 \\ 1&-1&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&-1&0&1 \end{smallmatrix}\right)$.

(*c*) Per esempio: $B = \left(\begin{smallmatrix} 4&1&0&0 \\ 0&4&0&0 \\ 0&0&4&1 \\ 0&0&0&4 \end{smallmatrix}\right)$ è matrice di Jordan non simile ad A, poiché $\dim\ker(A - 4\mathbb{I}_4) = 2 \neq 3$, pur avendo uguali polinomi minimo e caratteristico.

(*d*) Risulta

$$A^n = (HJH^{-1})^n = HJ^nH^{-1} = H\left[\begin{pmatrix} 4 &&& \\ & 4 && \\ && 4 & \\ &&& 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 &&& \\ & 0 & 1 & \\ && 0 & \\ &&& 0 \end{pmatrix}\right]^n H^{-1} =$$

$$= H\left[\begin{pmatrix} 4 &&& \\ & 4 && \\ && 4 & \\ &&& 4 \end{pmatrix}^n + n\begin{pmatrix} 4 &&& \\ & 4 && \\ && 4 & \\ &&& 4 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 0 &&& \\ & 0 & 1 & \\ && 0 & \\ &&& 0 \end{pmatrix}\right] H^{-1} = H\begin{pmatrix} 4^n &&& \\ & 4^n & n4^{n-1} & \\ && 4^n & \\ &&& 4^n \end{pmatrix} H^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n &&& \\ & 4^n & n4^{n-1} & \\ && 4^n & \\ &&& 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 & 0 \\ -n4^{n-1} & 4^n & n4^{n-1} & n4^{n-1} \\ n4^{n-1} & 0 & 4^n - n4^{n-1} & -n4^{n-1} \\ -n4^{n-1} & 0 & n4^{n-1} & 4^n + n4^{n-1} \end{pmatrix}$$

ove abbiamo usato lo sviluppo del binomio per $J = 4\mathbb{I}_4 + N$ ove $4\mathbb{I}_4$ e N commutano tra loro, e $N^2 = 0$ (quindi ci sono solo due termini). Si noti che $A^0 = \mathbb{I}_4$ e $A^1 = A$. $\square$

Esercizio 2. Sono date le rette dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$:

$$r_1 : \begin{cases} X - Z + 1 = 0 \\ 2X + Y - 2Z = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

(*a*) Si determini la retta h incidente le due date e ortogonale ad esse; siano $H_i = h \cap r_i$.

(*b*) Si determini la retta s passante per il punto $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e incidente le due date; siano $S_i = s \cap r_i$.

(*c*) Determinare volume e superficie laterale totale del tetraedro di vertici H_1, H_2, S_1, S_2.

(*d*) Determinare l'angolo formato dai due piani $h \vee r_1$ e $h \vee r_2$; e l'angolo formato dai due piani $s \vee r_1$ e $s \vee r_2$ *(si ricorda che l'angolo tra due piani è definito come l'angolo (più piccolo) tra vettori normali ai piani).*

Risultati.

(*a*) La retta richiesta passa per $H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $H_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(*b*) La retta passa per $S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si ottiene come intersezione del piano $X + Y - Z - 1 = 0$ (contenente r_1 e passante per S) e del piano $-Y + Z + 1 = 0$ (contenente r_2 e passante per S).

(*c*) Si fanno i seguenti conti:

$$\mathrm{Vol}_3\ \Delta(H_1, H_2, S_1, S_2) = \frac{1}{6} |\det (\, H_2 - H_1 \quad S_1 - H_1 \quad S_2 - H_1 \,)| = \frac{1}{6} |\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}| = 2/3$$

e

$$\begin{aligned} &\text{Sup.Lat.} = \mathrm{Vol}_2\Delta(H_1, H_2, S_1) + \mathrm{Vol}_2\Delta(H_1, H_2, S_2) + \mathrm{Vol}_2\Delta(H_1, S_1, S_2) + \mathrm{Vol}_2\Delta(H_2, S_1, S_2) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|S_1 - H_1\| \, \|H_2 - H_1\| + \|S_2 - H_2\| \, \|H_2 - H_1\| + \|(S_1 - H_1) \times (S_2 - H_1)\| + \|(S_1 - H_2) \times (S_2 - H_2)\| \Big) \\ &= 1 + \sqrt{6} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto delle ortogonalità date per costruzione (i triangoli di vertici H_1, H_2, S_1 e H_1, H_2, S_2 sono rettangoli con "cateti" rispettivamente $S_1 - H_1, H_2 - H_1$ e $S_2 - H_1, H_2 - H_1$).

(*d*) È chiaro che l'angolo tra i due piani $h \vee r_1$ e $h \vee r_2$ coincide con l'angolo formato da vettori direttori delle due rette r_1 ed r_2, e vale $\arccos \sqrt{2/3}$.
Per calcolare l'angolo tra $s \vee r_1$ e $s \vee r_2$ conviene ricorrere alle equazioni dei due piani, che erano un sottoprodotto del punto (*b*): i coefficienti delle indeterminate danno vettori ortogonali (ai piani), e risulta che l'angolo è $\arccos(-\sqrt{2/3})$. $\square$

Esercizio 3. Sono dati i piani dello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$:

$$\pi_1 : \begin{cases} X_1 - X_3 + X_4 = 1 \\ X_2 - X_4 = 1 \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\1 \end{pmatrix} \rangle .$$

(*a*) Determinare $\pi_1 \wedge \pi_2$ e $\pi_1 \vee \pi_2$. Esistono sottospazi di dimensione 3 contenenti entrambi i piani?
(*b*) Esistono rette di $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ che siano parallele ad entrambi i piani? Eventualmente trovarle tutte.
(*c*) Esistono iperpiani di $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ che siano paralleli ad entrambi i piani? Eventualmente trovarli tutti.
(*d*) È vero o falso che la relazione di parallelismo tra sottovarietà affini di uno spazio affine è transitiva? E tra sottospazi della stessa dimensione? Esistono piani di $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ che siano paralleli ad entrambi i piani dati?

Risultati.

(*a*) L'intersezione è vuota, l'intersezione degli spazi direttori è generata da $\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$; quindi i due piani non sono né paralleli né incidenti, né sghembi. La congiungente $\pi_1 \vee \pi_2$ è tutto lo spazio affine.

(*b*) Sono tutte e sole le rette il cui spazio direttore è dato da $W = \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \rangle$; per descrivere questo insieme di rette servono tre parametri : infatti basta considerare un sistema lineare di 3 piani che identificano quello spazio direttore (per esempio $X_1 - X_3 = 0$, $X_2 = 0$ e $X_4 = 0$) e le rette in questione si scriveranno tutte tramite il sistema $\begin{cases} X_1 - X_3 = \alpha \\ X_2 = \beta \\ X_4 = \gamma \end{cases}$ con α, β, γ reali qualsiasi. L'insieme di queste rette forma in effetti uno spazio affine di dimensione 3 il cui spazio delle traslazioni può essere identificato con $\mathbb{R}^4/W$. Per ogni punto $\begin{pmatrix} a_1\\a_2\\a_3\\a_4 \end{pmatrix}$ passa una di tali rette, identificata da $\alpha = a_1 - a_3$, $\beta = a_2$ e $\gamma = a_4$.

(*c*) Sono tutti e soli gli iperpiani il cui spazio direttore è dato da $U = \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\1 \end{pmatrix} \rangle$; si tratta di un fascio di iperpiani, tutti quelli paralleli a $X_2 - X_4 = 0$; quindi l'insieme è descritto da un unico parametro ed è formato dai piani di equazioni $X_2 - X_4 = \alpha$ con α qualsiasi reale. L'insieme di questi iperpiani ha struttura in effetti di retta affine il cui spazio delle traslazioni può essere identificato con $\mathbb{R}^4/U$. Per ogni punto $\begin{pmatrix} a_1\\a_2\\a_3\\a_4 \end{pmatrix}$ passa uno di tali iperpiani, identificato da $\alpha = a_1 - a_3$.

(*d*) Ricordiamo che due sottospazi affini si dicono paralleli se lo spazio direttore di uno è contenuto in quello dell'altro; chiaramente si tratta di una relazione riflessiva e simmetrica; ma non è transitiva: per esempio tutti i sottospazi affini sono paralleli ad un qualsiasi punto (che ha spazio direttore nullo), ma non è vero che tutti i sottospazi affini siano paralleli tra loro...
Tuttavia, restringendosi a spazi affini della stessa dimensione, la relazione di parallelismo impone che gli spazi direttori siano uguali, il che dà certamente una relazione transitiva (in effetti una relazione di equivalenza).
Per questo motivo non può esistere un piano che sia parallelo ad entrambi i dati, poiché essi non sono paralleli tra loro.

□

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{R}^4$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità; si tratta di un endomorfismo diagonalizzabile e/o triangolarizzabile?

(b) Determinare il polinomio minimo di ϕ. Se possibile, si determini una matrice $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}AH = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Determinare, se esistono, matrici non simili ad A ma con polinomi caratteristico e minimo uguali a quelli di A.

(d) Dare una formula per A^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Risultati.

(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ risulta $p_A(X) = (X-4)^4$; vi è l'unico autovalore 4 con molteplicità 4. La sua nullità non può essere 4 (altrimenti la matrice A dovrebbe essere $4\mathbb{I}_4$), ed in effetti risulta $4 - \mathrm{rg}(A - 4\mathbb{I}_4) = 4 - 2 = 2$. Si tratta quindi di un morfismo triangolarizzabile (ha tutti gli autovalori nel corpo $\mathbb{R}$), ma non diagonalizzabile (la nullità è strettamente minore della molteplicità).

(b) Abbiamo $\dim\ker(A - 4\mathbb{I}_4) = 2$, e $\dim\ker(A - 4\mathbb{I}_4)^2 = 4$ (calcolo diretto: $(A - 4\mathbb{I}_4)^2 = \mathbb{O}_4$), e quindi il polinomio minimo è $(X-4)^2$ (polinomio monico di grado minimo che annulla la matrice). È possibile determinare una tale H, usando come colonne autovettori (eventualmente generalizzati) di A; infatti basta usare come v_3 e v_4 (terza e quarta colonne di H) vettori linearmente indipendenti che diano un complementare di $\ker(A - 4\mathbb{I}_4) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, e poi $v_2 = (A - 4\mathbb{I}_4)v_3$ e $v_1 = (A - 4\mathbb{I}_4)v_4$. Per esempio, scegliendo $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, abbiamo $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$. Si ottiene quindi $H = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Per esempio: $B = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ è matrice di Jordan non simile ad A, poiché $\dim\ker(A - 4\mathbb{I}_4) = 3 \neq 2$, pur avendo uguali polinomi minimo e caratteristico.

(d) Risulta

$$A^n = (HJH^{-1})^n = HJ^nH^{-1} = H\left[\begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right]^n H^{-1} =$$

$$= H\left[\begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}^n + n\begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right]H^{-1} = H\begin{pmatrix} 4^n & & & n4^{n-1} \\ & 4^n & n4^{n-1} & \\ & & 4^n & \\ & & & 4^n \end{pmatrix}H^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & & & n4^{n-1} \\ & 4^n & n4^{n-1} & \\ & & 4^n & \\ & & & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n+n4^{n-1} & -2n4^{n-1} & -n4^{n-1} & n4^{n-1} \\ 0 & 4^n-2n4^{n-1} & 0 & 2n4^{n-1} \\ n4^{n-1} & 0 & 4^n-n4^{n-1} & -n4^{n-1} \\ 0 & -2n4^{n-1} & 0 & 4^n+2n4^{n-1} \end{pmatrix}$$

ove abbiamo usato lo sviluppo del binomio per $J = 4\mathbb{I}_4 + N$ ove $4\mathbb{I}_4$ e N commutano tra loro, e $N^2 = 0$ (quindi ci sono solo due termini). Si noti che $A^0 = \mathbb{I}_4$ e $A^1 = A$. $\square$

Esercizio 2. Sono date le rette dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$:

$$r_1 : \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} \rangle \qquad r_2 : \begin{cases} X + 2Y - 2Z = 0 \\ Y - Z + 1 = 0 \end{cases} .$$

(a) Si determinino la posizione reciproca delle due rette, la loro distanza e i punti $R_i \in r_i$ ($i = 1, 2$) di minima distanza.
(b) Si determinino i piani π_i contenenti r_i e R_{3-i} ($i = 1, 2$).
(c) Si calcolino gli angoli formati da r_i e π_{3-i} ($i = 1, 2$) *(si ricorda che l'angolo tra una retta e un piano è definito come complementare dell'angolo (più piccolo) tra un vettore direttore della retta e un vettore normale al piano).*
(d) Si determini il piano σ parallelo a r_1 ed r_2 passante per il baricentro di R_1 ed R_2, e si calcolino gli angoli formati da σ con π_1 e π_2 *(si ricorda che l'angolo tra due piani è definito come l'angolo (più piccolo) tra vettori normali ai piani).*

Risultati.
(a) Poiché $r_2 = \begin{pmatrix} 2\\0\\1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} \rangle$ si vede che le rette non sono parallele; poiché la distanza $d(r_1, r_2) = \sqrt{3}$ (calcolata usando il parallelepipedo) è positiva le rette sono sghembe. I punti richiesti sono $R_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\1 \end{pmatrix}$ e $R_2 = \begin{pmatrix} 2\\1\\2 \end{pmatrix}$.
(b) $\pi_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix} \rangle$ (un vettore ortogonale è $\begin{pmatrix} 1\\-1\\-2 \end{pmatrix}$ e un'equazione è $X - Y - 2Z = -3$) e $\pi_2 = \begin{pmatrix} 2\\0\\1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix} \rangle$ (un vettore ortogonale è $\begin{pmatrix} 2\\1\\-1 \end{pmatrix}$ e un'equazione è $2X + Y - Z = 3$).
(c) L'angolo $\theta(r_1, \pi_2)$ è tale che il suo seno è uguale a $|\cos(\begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\-1 \end{pmatrix})| = \sqrt{3}/2$, e l'angolo $\theta(r_2, \pi_1)$ è tale che il suo seno è uguale a $|\cos(\begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-1\\-2 \end{pmatrix})| = \sqrt{3}/2$.
(d) Il piano σ è $\begin{pmatrix} 3/2\\3/2\\3/2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} \rangle$, ed è chiaramente ortogonale ad entrambi π_1 e π_2; un vettore ortogonale è $\begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix}$ e una equazione $X - Y + Z = 3/2$. $\square$

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{R}^4$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità; si tratta di un endomorfismo diagonalizzabile e/o triangolarizzabile?

(b) Determinare il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J per ϕ e una matrice $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}AH = J$.

(c) Se possibile, si determini una matrice $K \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $K^{-1}AK = \left(\begin{smallmatrix} 3&0&0&0 \\ 0&3&0&0 \\ 0&1&3&1 \\ 0&0&0&3 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) Determinare tutte le matrici di Jordan d'ordine 6 con polinomo minimo uguale a quello di A.

Risultati.

(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ risulta $p_A(X) = (X-3)^4$; vi è l'unico autovalore 4 con molteplicità 4. La sua nullità è 2: in effetti risulta $4 - \mathrm{rg}(A - 3\mathbb{I}_4) = 4 - 2 = 2$. Si tratta quindi di un morfismo triangolarizzabile (ha tutti gli autovalori nel corpo $\mathbb{R}$), ma non diagonalizzabile (la nullità è strettamente minore della molteplicità).

(b) Abbiamo $\dim\ker(A-3\mathbb{I}_4) = 2$, e $\dim\ker(A-3\mathbb{I}_4)^2 = 3$ e quindi il polinomio minimo è $(X-4)^3$ (polinomio monico di grado minimo che annulla la matrice). Una matrice di Jordan è quindi $J = \left(\begin{smallmatrix} 3&0&0&0 \\ 0&3&1&0 \\ 0&0&3&1 \\ 0&0&0&3 \end{smallmatrix}\right)$. e possiamo usare $H = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&1&-1 \\ 1&0&0&1 \\ 2&1&0&1 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Non è possibile: la matrice del punto (c) ha dimensione dell'autospazio di 3 diverso da quello di A, quindi non può essere simile ad A (per esempio ha polinomio minimo $(X-3)^2$).

(d) Si tratta di tre matrici a meno di equivalenza, poiché deve esserci l'unico autovalore 3 e un blocco di Jordan d'ordine 3; quindi vi sono le possibilità $\left(\begin{smallmatrix} 3\mathbb{I}_3 & \\ & J_3(3) \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 3 & & \\ & J_2(3) & \\ & & J_3(3) \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} J_3(3) & \\ & J_3(3) \end{smallmatrix}\right)$. □

Esercizio 2. Sono date le rette dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$:

$$r_1 : \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle \qquad r_2 : \begin{cases} X + 5Y - 3Z = 0 \\ X - 3Z + 5 = 0 \end{cases} .$$

(a) Si determinino la posizione reciproca delle due rette, la loro distanza e i punti $R_i \in r_i$ ($i = 1,2$) di minima distanza.

(b) Si determini la retta s per $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ e incidente le due date; siano $S_i = s \cap r_i$ ($i = 1,2$) i punti di intersezione.

(c) Si calcolino superficie laterale e volume del tetraedro di vertici R_1, R_2, S_1, S_2.

(d) Si determinino gli angoli che s forma con le due rette date.

Risultati.

(a) Le due rette sono sghembe, la loro distanza è $\sqrt{14}$, e risulta $R_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $R_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Risulta $S_1 = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Il volume è $\frac{7}{3}$, la superficie laterale è $\frac{\sqrt{70}}{2} + \sqrt{35} + \sqrt{21} + \frac{\sqrt{154}}{2}$

(d) L'angolo formato da s con r_1 ha coseno $\frac{\sqrt{85}}{85}$, quello tra s e r_2 ha coseno $2\sqrt{2}\frac{\sqrt{85}}{85}$. □

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{R}^4$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità; si tratta di un endomorfismo diagonalizzabile e/o triangolarizzabile?

(b) Determinare il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J per ϕ e una matrice $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $H^{-1}AH = J$.

(c) Se possibile, si determini una matrice $K \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $K^{-1}AK = \left(\begin{smallmatrix} 3&0&0&0 \\ 1&3&0&0 \\ 0&0&3&1 \\ 0&0&0&3 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) Determinare tutte le matrici di Jordan d'ordine 6 con polinomo minimo uguale a quello di A.

Risultati.

(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ risulta $p_A(X) = (X-3)^4$; vi è l'unico autovalore 4 con molteplicità 4. La sua nullità è 2: in effetti risulta $4 - \mathrm{rg}(A - 3\mathbb{I}_4) = 4 - 2 = 2$. Si tratta quindi di un morfismo triangolarizzabile (ha tutti gli autovalori nel corpo $\mathbb{R}$), ma non diagonalizzabile (la nullità è strettamente minore della molteplicità).

(b) Abbiamo $\dim\ker(A - 3\mathbb{I}_4) = 2$, e $(A - 3\mathbb{I}_4)^2 = \mathbb{O}_4$ e quindi il polinomio minimo è $(X-4)^2$ (polinomio monico di grado minimo che annulla la matrice). Una matrice di Jordan è quindi $J = \left(\begin{smallmatrix} 3&1&0&0 \\ 0&3&0&0 \\ 0&0&3&1 \\ 0&0&0&3 \end{smallmatrix}\right)$, e possiamo usare $H = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0&1 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&-1&0 \\ 1&0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) È possibile: per ottenere una tale K basta per esempio scambiare tra loro le prime due colonne di H.

(d) Si tratta di tre matrici a meno di equivalenza, poiché deve esserci l'unico autovalore 3 e almeno un blocco di Jordan d'ordine 2; quindi vi sono le possibilità $\left(\begin{smallmatrix} 3\mathbb{I}_4 & \\ & J_2(3) \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 3\mathbb{I}_2 & & \\ & J_2(3) & \\ & & J_2(3) \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} J_2(3) & & \\ & J_2(3) & \\ & & J_2(3) \end{smallmatrix}\right)$. □

Esercizio 2. Sono date le rette dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$:

$$r_1 : \begin{cases} X - 2Y - 4 = 0 \\ X - 2Y + Z - 3 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \left(\begin{smallmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\rangle .$$

(a) Si determinino la posizione reciproca delle due rette, la loro distanza e i punti $R_i \in r_i$ ($i = 1, 2$) di minima distanza.

(b) Si determini la retta s per $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ e incidente le due date; siano $S_i = s \cap r_i$ ($i = 1, 2$) i punti di intersezione.

(c) Si calcolino superficie laterale e volume del tetraedro di vertici R_1, R_2, S_1, S_2.

(d) Si determinino gli angoli che s forma con le due rette date.

Risultati. (era lo stesso esercizio del compito precedente).

pg. 139...

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Siano $a, -b$ interi tra 1 e 4 congrui modulo 4 a quinta e sesta cifra del proprio numero di matricola. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{Q}^4$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -b & -b \\ 0 & a & b & b \\ -a+b & 0 & 2b & b \\ a-b & 0 & a-3b & a-2b \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(*a*) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità; dire se ϕ è invertibile.

(*b*) Discutere diagonalizzabilità e triangolarizzabilità di ϕ; se possibile, si determini una matrice $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.

(*c*) Quante sono le matrici diagonali simili ad A (elencarle tutte, se possibile)?

(*d*) Considerando la matrice A in $M_4(\mathbb{F}_p)$, per quali primi p la matrice è invertibile? Per quali primi p è diagonalizzabile?

Risultati.

(*a*) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ risulta $p_A(X) = (X-a)^2(X-b)(X-(a-b))$; siccome $a, b, a-b$ sono distinti allora abbiamo autovalori a (molteplicità e nullità 2), b e $a-b$ (entrambi di molteplicità 1, e quindi nullità 1).
L'applicazione è invertibile (gli autovalori sono non nulli).

(*b*) L'applicazione è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$ poiché tutti gli autovalori appartengono a $\mathbb{Q}$, e per ciascuno di essi molteplicità e nullità coincidono. Possiamo usare $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e allora $H^{-1}AH = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & b & \\ & & & a-b \end{pmatrix}$.

(*c*) Una matrice diagonale simile ad A deve avere in diagonale gli autovalori (ripetuti con le molteplicità) di A, e d'altra parte l'ordine in cui compaiono varia con tutte le permutazioni possibili, permutando le colonne della matrice H di cambiamento di base (colonne formate da autovettori). Quindi, siccome $a, b, a-b$ sono distinti allora sono 12 le matrici diagonali simili ad A.

(*d*) La matrice è invertibile per tutti i primi p che non dividono il determinante $a^2b(a-b)$. La matrice è diagonalizzabile per ogni p, poiché la matrice H prima trovata ha determinante 1, quindi è per qualsiasi corpo una matrice invertibile.

□

Esercizio 2. Si considerino le matrici di ordine n date da:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y & 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & 1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 1 \end{pmatrix}$$

(1 sulla diagonale principale, x subito sopra, y subito sotto, altrove zero), e sia $a_n = \det(A_n)$.
(a) Calcolare i determinanti a_2 e a_3.
(b) Calcolare i determinanti a_4 e a_5.
(c) Determinare una formula ricorsiva che esprima a_n in termini di a_{n-1} e a_{n-2}.
(d) Determinare l'espressione di a_n in quanto polinomio nelle variabili x, y specificando (con formule chiuse, cioè non ricorsive) i coefficienti di tale polinomio.

Risultati.
(a) Risulta $a_2 = 1 - xy$ e $a_3 = 1 - 2xy$.
(b) Risulta $a_4 = 1 - 3xy + x^2y^2$ e $a_5 = 1 - 4xy + 3x^2y^2$.
(c) Conviene sviluppare due volte con Laplace su prima riga, e poi prima colonna (o viceversa):

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y & 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & 1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & 1 & x & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & y & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} y & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & y & 1 \end{vmatrix} = a_{n-1} - xya_{n-2}$$

si ottiene la relazione ricorsiva $a_n = a_{n-1} - xya_{n-2}$.
(d) Dai primi casi e dalla forma ricorsiva è chiaro che a_n è della forma $a_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} b(n,i)(-xy)^i$, e che i coefficienti $b(n,i) \in \mathbb{Z}$ soddisfano alle relazioni ricorsive $b(n,i) = b(n-1,i) + b(n-2,i-1)$; scrivendo allora la tabellina dei coefficienti per i primi casi di n:

$n\backslash i$	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	1							
2	1	1						
3	1	2						
4	1	3	1					
5	1	4	3					
6	1	5	6	1				
7	1	6	10	4				
8	1	7	15	10	1			
9	1	8	21	20	5			
10	1	9	28	35	15	1		
11	1	10	36	56	35	6		
12	1	11	45	84	70	21	1	
13	1	12	55	110	126	56	7	
14	1	13	66	155	210	126	28	1

si vede subito che si tratta di un triangolo di Tartaglia deformato (si osservino le "diagonali" della tabellina), e si trova subito che $b(n,i) = \binom{n-i}{i}$, da cui

$$a_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i} (-xy)^i$$

(che si può dimostrare per induzione, se non fosse già chiaro).

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Siano $a, -b$ interi tra 1 e 3 congrui modulo 3 a quinta e sesta cifra del proprio numero di matricola. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{Q}^5$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ a-b-1 & b+1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a+b-1 & b-1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità.
(b) Determinare il polinomio minimo di ϕ e una forma di Jordan J per ϕ.
(c) Si determini una matrice $H \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ tale che $H^{-1}AH$ sia J.
(d) Quante matrici di Jordan d'ordine 6 non simili tra loro hanno lo stesso polinomio minimo di ϕ (elencarle)?

Risultati. Supponiamo $a - b \neq 2$ [risp. $= 2$].
(a) Il polinomio caratteristico $\det(X\mathbb{I}_4 - A)$ risulta $p_A(X) = (X-a)^3(X-b)^2$; abbiamo autovalori a (molteplicità 3 e nullità 2 [$= 3$]), b (molteplicità 2 e nullità 1).
(b) Il polinomio minimo risulta $m_A(X) = (X-a)^2(X-b)^2$ [$= p_A(X)$]. La forma di Jordan di ϕ è del tipo $A = \begin{pmatrix} a & & & & \\ & a & 1 & & \\ & 0 & a & & \\ & & & b & 1 \\ & & & 0 & b \end{pmatrix}$, cioè $(1,1)$ per a, e $(0,1)$ per b [$= \begin{pmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & 0 & a & & \\ & & & b & 1 \\ & & & 0 & b \end{pmatrix}$, del tipo $(3,0)$ per a, e $(0,1)$ per b].
(c) Possiamo usare per esempio $H = \begin{pmatrix} 0 & a-b-2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-b-2 & -1 & -1 & a-b \\ 1 & 0 & a-b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a+b-1 \end{pmatrix}$ [...].
(d) Le matrici di Jordan d'ordine 6 con lo stesso polinomio minimo di ϕ devono avere unici autovalori a, b, con almeno un blocco d'ordine 2 per ciascuno di essi. Vi sono quindi 5 possibilità individuate dai tipi di nilpotenza riguardanti a, b:
(1) $(0,2)$ per a, $(0,1)$ per b, pol.car. $(X-a)^4(X-b)^2$,
(2) $(2,1)$ per a, $(0,1)$ per b, pol.car. $(X-a)^4(X-b)^2$,
(3) $(1,1)$ per a, $(1,1)$ per b, pol.car. $(X-a)^3(X-b)^3$,
(4) $(0,1)$ per a, $(2,1)$ per b, pol.car. $(X-a)^2(X-b)^4$,
(5) $(0,1)$ per a, $(0,2)$ per b, pol.car. $(X-a)^2(X-b)^4$.
[vi sono sei possibilità]. □

Esercizio 2. Siano a, b interi tra 1 e 3 congrui modulo 3 a terza e quarta cifra del proprio numero di matricola. Si considerino nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ i punti $P_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$, e il piano σ di equazione $aY - bZ + ab = 0$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi = P_1 \vee P_2 \vee P_3$.
(b) Determinare equazioni parametriche per la retta $\pi \wedge \sigma$, e la sua intersezione con il triangolo di vertici P_1, P_2, P_3.
(c) Determinare l'equazione cartesiana del piano σ' parallelo a σ e passante per il baricentro di P_1, P_2, P_3 e la sua intersezione con il triangolo di vertici P_1, P_2, P_3.
(d) Caratterizzare tra i piani paralleli a σ quelli che intersecano il triangolo di vertici P_1, P_2, P_3.

Risultati.
(a) Risulta che l'equazione di π è $bX + aY - bZ = ab$.
(b) Risulta $\pi \wedge \sigma = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \end{pmatrix} \rangle$, e ha intersezione vuota con il triangolo.
(c) Il piano σ' passa per $\begin{pmatrix} a/3 \\ b/3 \\ -a/3 \end{pmatrix}$ ed ha equazione $aY - bZ = 2ab/3$; interseca il triangolo nel segmento compreso tra i punti $\begin{pmatrix} a/3 \\ 0 \\ -2a/3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a/3 \\ 2b/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(d) I piani paralleli a σ hanno equazioni del tipo $aY - bZ = \kappa ab$ per $\kappa \in \mathbb{R}$, e risulta che intersecano il triangolo quelli per cui $\kappa \leq 1$ e $\kappa \geq 0$. □

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Sia a intero tra 1 e 4 congruo modulo 4 alla sesta cifra del proprio numero di matricola. Si considerino i due vettori $u = \left(\begin{smallmatrix}1\\a\\1\\a\end{smallmatrix}\right)$ e $v = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-a\\0\end{smallmatrix}\right)$ dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare equazioni cartesiane e una base ortogonale per $\langle u, v\rangle^\perp$.
(b) Determinare equazioni cartesiane e una base ortogonale per $\langle u\rangle^\perp$.
(c) Si determinino le matrici in base canonica delle proiezioni ortogonali π di asse $\langle u, v\rangle^\perp$ e π' di asse $\langle u\rangle^\perp$.
(d) Calcolare le composizioni $\pi \circ \pi'$ e $\pi' \circ \pi$. È vero che sono uguali? Di tratta di proiezioni?

Risultati.
(a) Equazioni $X_1 + aX_2 + X_3 + aX_4 = 0$ e $X_2 - aX_3 = 0$ e base ortogonale $u' = \left(\begin{smallmatrix}-1\\a\\1\\-a\end{smallmatrix}\right)$ e $v' = \left(\begin{smallmatrix}-a\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.
(b) Equazione $X_1 + aX_2 + X_3 + aX_4 = 0$ e base ortogonale per esempio data da v, u', v' (due sono quelli di prima, e poi basta osservare che come altro generatore posso scegliere v che è già ortogonale a u).
(c) Le matrici sono

$$\frac{u'u'^{\mathrm t}}{u'^{\mathrm t}u'} + \frac{v'v'^{\mathrm t}}{v'^{\mathrm t}v'} = \tfrac{1}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix}-1\\a\\1\\-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & a & 1 & -a\end{pmatrix} + \tfrac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix}-a\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix}1 & -a & -1 & a\\ -a & a^2 & a & -a^2\\ -1 & a & 1 & -a\\ a & -a^2 & -a & a^2\end{pmatrix} + \tfrac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix}a^2 & 0 & 0 & -a\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ -a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix}1+2a^2 & -a & -1 & -a\\ -a & a^2 & a & -a^2\\ -1 & a & 1 & -a\\ -a & -a^2 & -a & a^2+2\end{pmatrix}$$

e

$$\mathbb{I}_4 - \frac{uu^{\mathrm t}}{u^{\mathrm t}u} = \mathbb{I}_4 - \tfrac{1}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix}1\\a\\1\\a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & 1 & a\end{pmatrix} = \mathbb{I}_4 - \tfrac{1}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix}1 & a & 1 & a\\ a & a^2 & a & a^2\\ 1 & a & 1 & a\\ a & a^2 & a & a^2\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix}1+2a^2 & -a & -1 & -a\\ -a & 2+a^2 & -a & -a^2\\ -1 & -a & 2a^2+1 & -a\\ -a & -a^2 & -a & a^2+2\end{pmatrix}$$

(d) Risulta $\pi \circ \pi' = \pi' \circ \pi = \pi$, che quindi è una proiezione ortogonale (e non è necessario fare prodotti di matrici per capirlo). □

Esercizio 2. Siano a, b interi tra 1 e 3 congrui modulo 3 a quarta e quinta cifra del proprio numero di matricola. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ le due rette

$$r_1 : \left(\begin{smallmatrix}1\\a\\0\end{smallmatrix}\right) + \left\langle\left(\begin{smallmatrix}0\\b\\a-1\end{smallmatrix}\right)\right\rangle \qquad r_2 : \begin{cases} X - bZ = -b^2 \\ X + Y - bZ = -b^2 + 1\end{cases}$$

(a) Determinare la retta h incidente e normale ad entrambe, e i punti $H_i = r_i \wedge h$.
(b) Determinare l'unica retta s passante per il punto $P = \left(\begin{smallmatrix}b+2\\2a+2b-1\\2a-b-1\end{smallmatrix}\right)$ e incidente entrambe le rette date, e i punti $S_i = r_i \wedge s$.
(c) Determinare il volume del tetraedro di vertici H_1, H_2, S_1, S_2.
(d) Determinare la posizione reciproca delle rette $H_1 \vee P$ con r_2 e $H_2 \vee P$ con r_1.

Risultati.
(a) $H_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\a\\0\end{smallmatrix}\right)$ e $H_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\b\end{smallmatrix}\right)$.
(b) $S_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\a+b\\a-1\end{smallmatrix}\right)$ e $S_2 = \left(\begin{smallmatrix}-b\\1\\b-1\end{smallmatrix}\right)$.
(c) $b(b^2 + 1 + (a-1)^2)$ (è un determinante d'ordine 4 con i punti precedenti, e la prima riga di 1).
(d) Certamente non complanari, quindi sghembe... □

Esercizio 1. Si consideri la matrice reale A_n d'ordine n avente entrate $a_{i,j}$ uguali a 1 se $j = n - i + 1$, e nulle altrimenti.

(a) Determinare polinomi caratteristico e minimo per $n = 2, 3$, e discutere la diagonalizzabilità.
(b) Determinare polinomi caratteristico e minimo per $n = 4, 5$, e discutere la diagonalizzabilità.
(c) Determinare polinomi caratteristico e minimo per $n \geq 6$, e discutere la diagonalizzabilità.
(d) È vero che si tratta di matrici in base canonica di simmetrie ortogonali? Quali simmetrie ortogonali ammettono matrici di questo tipo (in qualche base)?

Risultati.

(a) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $p_2(X) = X^2 - 1 = m_2(X)$, diagonalizzabile.
$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p_3(X) = (X-1)^2(X+1)$, $m_3(X) = (X-1)(X+1)$, diagonalizzabile.

(b) $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p_4(X) = (X-1)^2(X+1)^2$, $m_4(X) = (X-1)(X+1)$, diagonalizzabile.
$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p_4(X) = (X-1)^3(X+1)^2$, $m_4(X) = (X-1)(X+1)$, diagonalizzabile.

(c) $A_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & A_n \\ A_n & 0 \end{pmatrix}$, $p_{2n}(X) = (X-1)^n(X+1)^n$, $m_{2n}(X) = (X-1)(X+1)$, diagonalizzabile.
$A_{3n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_n \\ 0 & 1 & 0 \\ A_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p_{2n+1}(X) = (X-1)^{n+1}(X+1)^n$, $m_{2n+1}(X) = (X-1)(X+1)$, diagonalizzabile.

(d) Sì, essendo matrici simmetriche sono ortogonalmente diagonalizzabili, ed avendo autovalori ± 1 sono matrici di simmetrie, con autospazi ortogonali tra loro, e quindi di simmetrie ortogonali.
Senza usare il teorema spettrale per matrici, si poteva comunque ragionare sugli autospazi: comunque le matrici sono a blocchi del tipo A_2, eventualmente con un blocchetto (1) nel caso dispari, e si vede subito che sono matrici di simmetrie ortogonali. Per vedere che si tratta di simmetrie bastava notare che $A_n^2 = \mathbb{I}_2$ (dal che segue subito anche la diagonalizzabilità per ogni n).
Sono le simmetrie ortogonali tali che l'autospazio di 1 ha dimensione $\frac{n}{2}$ se n è pari, ed $\frac{n+1}{2}$ se n è dispari.
□

Esercizio 3. Siano a, b interi tra 1 e 3 congrui modulo 3 a quarta e quinta cifra del proprio numero di matricola. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ le due rette

$$r_1 : \begin{cases} Y + Z = a \\ Y - Z = a \end{cases} \qquad r_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Determinare la retta h incidente e normale ad entrambe, e i punti $H_i = r_i \wedge h$.
(b) Determinare l'unica retta s passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b-a \\ 2a+2b \end{pmatrix}$ e incidente entrambe le rette date, e i punti $S_i = r_i \wedge s$.
(c) Determinare il volume del tetraedro di vertici H_1, H_2, S_1, S_2, e l'area delle sue facce.
(d) Determinare quali facce del tetraedro di vertici H_1, H_2, S_1, S_2 sono attraversate dalla retta parallela ad h e passante per il baricentro del tetraedro stesso, e si determini l'intersezione tra tale retta e il tetraedro.

Risultati.

(a) $H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ e $H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$.
(b) $S_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ e $H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ a+b \end{pmatrix}$.
(c) Trattasi dei soliti conti.
(d) Siccome la retta è parallela ad h (uno dei lati del tetraedro) e passa per il baricentro, essa incontra le facce che non hanno h come lato, e quindi quelle di vertici H_1, S_1, S_2 e H_2, S_1, S_2. per trovare il segmento dato dall'intersezione basta quindi intersecare la retta con i due piani corrispondenti. □

Esercizio 2. Siano $a, -b$ interi tra 1 e 3 congrui modulo 3 a quinta e sesta cifra del proprio numero di matricola. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{Q}^5$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a-b-1 & b+1 & 0 & a-b-1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

nella base canonica.
(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità.
(b) Determinare il polinomio minimo di ϕ e una forma di Jordan J per ϕ.
(c) Si determini una matrice $H \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ tale che $H^{-1}AH$ sia J.
(d) Quante matrici di Jordan d'ordine 6 non equivalenti tra loro hanno lo stesso polinomio minimo di ϕ (elencarle)?

Risultati.
(a) $p_\phi(X) = (X-b)(X-a)^4$, autovalori b, a di molteplicità $1, 4$ e nullità $1, 2$.
(b) $p_\phi(X) = (X-b)(X-a)^3$, $J = \begin{pmatrix} b & & & & \\ & a & & & \\ & & a & 1 & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}$.
(c) per esempio possiamo usare $H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2k(a-b) & a-b-2 & a-b-2 \\ k & 0 & 2k(a-b) & k(a-b-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (a-b)^2 \\ 0 & -1 & 0 & (a-b)^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (a-b)^2 & 0 \end{pmatrix}$ dove $k = a-b-1$.
(d) devono avere un blocco $J_3(a)$ (ordine massimo 3) e almeno un blocco (b) (ordine massimo 1); quindi sono quattro possibili forme:

$$\begin{pmatrix} b & & & \\ & b & & \\ & & b & \\ & & & J_3(a) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b & & & \\ & b & & \\ & & a & \\ & & & J_3(a) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b & & & \\ & a & & \\ & & a & \\ & & & J_3(a) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b & & \\ & J_2(a) & \\ & & J_3(a) \end{pmatrix}$$

con polinomi caratteristici e minimi rispettivamente

$$\begin{matrix} (X-b)^3(X-a)^3 & (X-b)^2(X-a)^4 & (X-b)(X-a)^5 & (X-b)(X-a)^5 \\ (X-b)(X-a)^3 & (X-b)(X-a)^3 & (X-b)(X-a)^3 & (X-b)(X-a)^3 \end{matrix}$$

(in particolare le ultime due forme si distinguono solo guardando il tipo di nilpotenza del blocco di a).
□

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{Q}^5$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità.

(b) Determinare il polinomio minimo di ϕ e una forma di Jordan J per ϕ.

(c) Si determini una matrice $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ tale che $H^{-1}AH$ sia J.

(d) Tra le matrici di Jordan d'ordine 7 aventi lo stesso polinomio minimo di ϕ, ve ne sono di non simili ma con identico polinomio caratteristico? Per distinguerle tra loro è sufficiente guardare la dimensione degli autospazi?

Risultati.

(a, b, c) Si tratta del compito precedente, con $a = 4$ e $b = -2$.

(d) Essendo il polinomio minimo $(X-4)^3(X+2)$ vi saranno solo gli autovalori 4, -2 con blocchi d'odine massimo rispettivamente 3, 1; vi saranno quindi due casi possibili di polinomi caratteristici con diverse (non simili) forme di Jordan:

(1) $(X-4)^5(X+2)^2$ con le due forme di Jordan $\begin{pmatrix} -2 &&&& \\ & -2 &&& \\ && 4 && \\ &&& 4 & \\ &&&& J_3(4) \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 &&& \\ & -2 && \\ && J_2(4) & \\ &&& J_3(4) \end{pmatrix}$

(2) $(X-4)^6(X+2)$ con le tre forme di Jordan $\begin{pmatrix} -2 &&&& \\ & 4 &&& \\ && 4 && \\ &&& 4 & \\ &&&& J_3(4) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 &&& \\ & 4 && \\ && J_2(4) & \\ &&& J_3(4) \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 && \\ & J_3(4) & \\ && J_3(4) \end{pmatrix}$

tutte queste forme si distinguono tra loro conoscendo la dimensione degli autospazi. □

Esercizio 2. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ le due rette

$$r_1 : \begin{cases} Y + Z = 2 \\ Y - Z = 2 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Determinare la retta h incidente e normale ad entrambe, e i punti $H_i = r_i \wedge h$.

(b) Determinare l'unica retta s parallela al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ e incidente entrambe le rette date, e i punti $S_i = r_i \wedge s$.

(c) Determinare il volume del tetraedro di vertici H_1, H_2, S_1, S_2, e l'area delle sue facce.

(d) Siano r_1', r_2', h', s' le rette parallele ad r_1, r_2, h, s (risp.) e passanti per il baricentro del tetraedro di vertici H_1, H_2, S_1, S_2; per ciascuna retta determinare le coordinate baricentriche, nel riferimento affine dato dai quattro vertici del tetraedro, dei punti di intersezione con le facce del tetraedro stesso.

Risultati.

(a, b, c) Si tratta del compito precedente, con $a = 2$ e $b = 3$.

(d) In generale, detti P_0, P_1, P_2, P_3 i vertici di un tetraedro, consideriamo il lato $P_0 \vee P_1$ e la retta ad esso parallela passante per il baricentro $B = \sum \frac{1}{4} P_i$. Chiaramente essa interseca le due facce di vertici P_0, P_2, P_3 e P_1, P_2, P_3 (delle altre facce, è parallela ad un lato). Il punto di intersezione per esempio sulla faccia P_1, P_2, P_3 è dato dalla combinazione $B + \alpha(P_1 - P_0)$ che annulla la coordinata baricentrica di P_0, cioè con $\alpha = \frac{1}{4}$ e quindi $\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3$ (è il punto medio tra P_1 e il baricentro del lato P_2, P_3, cioè il punto medio della mediana di P_1 in quel triangolo). Analogamente, l'intersezione con la faccia di vertici P_0, P_2, P_3 è data da $\frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3$.

In generale quindi i punti di intersezione cercati sono dati dal punto medio tra il punto medio del lato opposto e ciascuno dei due vertici del lato scelto. □

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{Q}^5$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità.

(b) Determinare il polinomio minimo di ϕ e una forma di Jordan J per ϕ.

(c) Si determini una matrice $H \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ tale che $H^{-1}AH$ sia J.

(d) Tra le matrici di Jordan d'ordine 7 aventi lo stesso polinomio minimo di ϕ, ve ne sono di non simili tra loro? Per distinguerle è sufficiente guardare la dimensione dell'autospazio?

Risultati.

(a) Il polinomio caratteristico risulta $p_A(X) = (X-2)^5$; L'unico autovalore ha molteplicità 5 e nullità 3.

(b) Il polinomio minimo è $(X-2)^3$, e quindi la forma di Jordan ha un blocco d'ordine 3 e due blocchi d'ordine 1.

(c) Solito procedimento.

(d) Vi sono 4 forme possibili, due delle quali aventi la stessa dimensione dell'autospazio. □

Esercizio 2. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ le due rette

$$r_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad r_2 : \begin{cases} 2X - Y + Z = 0 \\ Y - Z = -2 \end{cases}$$

(a) Determinare la retta h incidente e normale ad entrambe, e i punti $H_i = r_i \wedge h$.

(b) Determinare l'unica retta s passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e incidente entrambe le rette date, e i punti $S_i = r_i \wedge s$.

(c) Determinare l'unica retta t parallela al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e incidente entrambe le rette date, e i punti $T_i = r_i \wedge t$.

(d) Si descriva l'inviluppo convesso dei 6 punti trovati (cioè le combinazioni baricentriche a coefficienti non negativi di tali punti), e il volume del solido così determinato.

Risultati.

(a) $H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $H_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $S_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) $T_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $T_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Si tratta del tetraedro di vertici S_1, S_2, T_1, T_2 (perché?), di volume pari a 6. □

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{Q}^5$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.
(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità.
(b) Determinare il polinomio minimo di ϕ e una forma di Jordan J per ϕ.
(c) Si determini una matrice $H \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ tale che $H^{-1}AH$ sia J.
(d) Elencare le matrici di Jordan d'ordine 7 non simili tra loro e aventi lo stesso polinomio minimo di ϕ. Per distinguerle è sufficiente guardare le dimensioni degli autospazi?

Esercizio 2. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ le due rette

$$r_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad r_2 : \begin{cases} X + 2Y - Z = 0 \\ X - Z = 2 \end{cases}$$

(a) Determinare la retta h incidente e normale ad entrambe, e i punti $H_i = r_i \wedge h$.
(b) Determinare l'unica retta s passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ e incidente entrambe le rette date, e i punti $S_i = r_i \wedge s$.
(c) Determinare l'unica retta t parallela al vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e incidente entrambe le rette date, e i punti $T_i = r_i \wedge t$.
(d) Si descriva l'inviluppo convesso dei 6 punti trovati (cioè le combinazioni baricentriche a coefficienti non negativi di tali punti), e il volume del solido così determinato.

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Sia $a =$"10$-$la sesta cifra del proprio numero di matricola".

(a) Determinare l'insieme A delle radici cubiche di $ia \in \mathbb{C}$, scrivendole sia in forma trigonometrica che algebrica.

(b) Determinare l'insieme B dei numeri complessi z per cui $|z| \geq |z+a|$ e $|z| \geq |z+ia|$.

(c) Disegnare sul piano di Gauss gli insiemi A, B e gli insiemi $\{\frac{1}{z} : z \in A\}$, $\{\frac{1}{z} : z \in B\}$.

Esercizio 2. Sia $b =$"10$-$la quinta cifra del proprio numero di matricola". Si considerino nello spazio vettoriale $V_4(\mathbb{R})$ i sottospazi

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2b \\ b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \qquad W : \begin{cases} bX_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 = 0 \\ bX_1 - X_4 = 0 \end{cases} .$$

(a) Determinare le dimensioni di U e W, equazioni cartesiane per U e una base per W.

(b) Determinare dimensioni, basi ed equazioni cartesiane per $U \cap W$ e $U + W$.

(c) Determinare un sottospazio V di $V_4(\mathbb{R})$ che sia complementare sia ad U sia a W. È possibile trovare un complementare di $U + W$ che non sia contenuto in V?

ESERCIZI TEORICI (da svolgere SOLO dopo aver svolto i precedenti):

(1) Fattorizzare in $\mathbb{C}$, in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{Q}$ il polinomio $X^5 - 1$.

(2) Sia V uno spazio vettoriale, e sia S un suo sottinsieme. Mostrare che S è linearmente indipendente se e solo se per ogni $s \in S$ si ha che $s \notin \langle S \smallsetminus \{s\} \rangle$ (cioè *ogni* s non appartiene al sottospazio vettoriale generato dagli *altri* elementi di S).

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Sia $a =$"1+la sesta cifra del proprio numero di matricola". Si considerino nello spazio vettoriale $V_4(\mathbb{R})$ i sottospazi

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \qquad W : \begin{cases} aX_1 - X_2 = 0 \\ X_3 + X_4 = 0 \end{cases} .$$

(a) Verificare che $V_4(\mathbb{R}) = U \oplus W$.
(b) Trovare le matrici in base canonica di proiezione π_U^W e simmetria σ_U^W di direzione W.
(c) Determinare una base di $V_4(\mathbb{R})$ in cui le matrici di π_U^W e σ_U^W siano entrambi diagonali, e le due matrici di cambiamento di base rispetto alla base canonica.

Esercizio 2. Sia $b =$"1+la quinta cifra del proprio numero di matricola". Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ e sia

$$f : M_{2,3}(K) \longrightarrow M_2(K)$$

la funzione definita da $f(M) = MA$.
(a) Mostrare che f è lineare e determinare dimensioni e basi per nucleo e immagine.
(b) Si scriva la matrice di f nelle basi canoniche dei due spazi.
(c) Esistono inverse destre o sinistre per f? Se sì, determinarle tutte.

ESERCIZI TEORICI (da svolgere SOLO dopo aver svolto i precedenti):

Siano dati V e W spazi vettoriali sul campo K, W' un sottospazio di W, V' un sottospazio di V.
(1) Usando l'applicazione canonica $p : V \to V/V'$, descrivere le relazioni tra gli spazi $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ e $\mathrm{Hom}_K(V/V', W)$.
(2) Usando l'applicazione canonica $q : W \to W/W'$, descrivere le relazioni tra gli spazi $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ e $\mathrm{Hom}_K(V, W/W')$.

Nota: le soluzioni dipendono dai parametri individuali.

Esercizio 1. Sia a la più piccola cifra non nulla del proprio numero di matricola. Si consideri il sistema lineare di matrice completa

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t-a & 0 & 1 \\ 1 & t & t-a & 0 & t+1 \\ t+1 & t^2+t & t^2-at & t-a & t^2+2t \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $t \in K$.

(a) Determinare i ranghi delle matrici completa e incompleta del sistema al variare del parametro.

(b) Per ogni valore del parametro, descrivere l'insieme delle soluzioni S_t del sistema completo e le soluzioni U_t del sistema omogeneo associato.

(c) Descrivere l'unione, al variare di t non nullo, degli U_t. Si tratta di un sottospazio? Trovare equazioni cartesiane del sottospazio generato.

Esercizio 2. Sia A_n matrice diagonale con termini $a_{i,i} = a_i$ in diagonale, e sia B_n matrice antidiagonale con termini $b_{i,n-i+1} = b_i$. Poniamo $C_n = A_n + B_n$ (matrice santandrea).

(a) Calcolare i determinanti di C_n per $n = 2, 3, 4$.

(b) Dare e dimostrare una formula per il determinante di C_n per ogni n.

(c) Esistono basi di K^n in cui la matrice dell'applicazione lineare rappresentata da C_n in base canonica risulti a blocchi diagonali (e di che tipo)?

ESERCIZI TEORICI (da svolgere SOLO dopo aver svolto i precedenti):

Siano $V = K^n$ e $v_1, \ldots, v_{n-1} \in V$; consideriamo l'applicazione $h : V \to K$ definita da $h(v) = \det(v_1 \cdots v_{n-1}\ v)$. È lineare?

(1) determinare matrice nelle basi canoniche, nucleo e immagine di h.

(2) determinare nucleo e immagine di $h^* : K^* \to V^*$.

Esercizio 1. Sia $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ (numero complesso).

(a) Determinare $z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tali che $0, z_1, z_3, z_2$ formino un quadrato nel piano di Gauss (z_2 vertice opposto di z_1).

(b) Mostrare che $(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = 2z_1^2$ e che $2z_1z_2 = z_3^2$.

(c) I risultati precedenti sono veri qualunque sia z_1, scegliendo z_2 e z_3 come in (a)?

Esercizio 2. Siano dati i sottospazi di K^4

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 4\\2\\2\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Verificare che V e W sono complementari.

(b) Trovare le matrici in base canonica della simmetria e della proiezione di direzione V.

(c) Trovare le due matrici di cambiamento di base dalla base canonica alla base ottenuta unendo le basi date di V e W.

Esercizio 3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Consideriamo l'applicazione $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_{3,2}(\mathbb{R})$ data da $f(M) = AM$.

(a) Mostrare che f è lineare e calcolare dimensioni e basi di nucleo e immagine.

(b) Scrivere la matrice di f nelle basi canoniche di dominio e codominio.

(c) Dire se esistono inverse destre e/o sinistre per f, e nel caso determinarle tutte.

Esercizio 4. Sia A_n la matrice quadrata di ordine $2n$ costituita dai seguenti blocchi: $A_n = \begin{pmatrix} a\mathbb{I}_n & b\mathbb{I}_n \\ c\mathbb{I}_n & d\mathbb{I}_n \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in K$.

(a) Calcolare i determinanti di A_n per $n = 1, 2, 3$.

(b) Dare e dimostrare una formula per il determinante di A_n per ogni n.

(c) Esistono basi di K^{2n} in cui la matrice dell'applicazione lineare rappresentata da A_n in base canonica risulti a blocchi diagonali (e di che tipo)?

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare di matrice completa

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & t & 1 \\ t^2 & -1 & t^3-1 & t^2-1 \\ t & t^2 & -1 & t \end{pmatrix}$$

al variare del parametro t.

(a) Determinare i ranghi delle matrici completa e incompleta del sistema al variare del parametro $t \in \mathbb{C}$ (numeri complessi).

(b) Per ogni valore del parametro, descrivere l'insieme delle soluzioni S_t del sistema completo e le soluzioni U_t del sistema omogeneo associato (sottinsiemi di $\mathbb{C}^3$), usando la regola di Cramer quando possibile.

(c) Che cosa cambia considerando lo stesso sistema sul campo dei numeri reali (al variare del parametro t in $\mathbb{R}$)?

Esercizio 2. Siano dati i sottospazi di K^4

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad W = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

(a) Determinare equazioni cartesiane per V e W, e verificare che sono complementari.

(b) Trovare le matrici in base canonica della simmetria e della proiezione di direzione W.

(c) Si consideri la base di K^4 ottenuta unendo le basi date di V e W; trovare le due matrici di cambiamento di base rispetto alla base canonica.

Esercizio 3. Consideriamo l'applicazione $\phi : \mathbb{R}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[Y]_{\leq 5}$ che manda un polinomio $p(X)$ nel polinomio $\phi(p(X)) = Yp(1+Y)$.

(a) Mostrare che ϕ è lineare e calcolare dimensioni e basi di nucleo e immagine.

(b) Scrivere la matrice di ϕ nelle basi canoniche di dominio e codominio.

(c) Dire se esistono inverse destre e/o sinistre per ϕ, e nel caso determinarle tutte.

Esercizio 4. Consideriamo le seguenti matrici quadrate di ordine n: A_n la matrice avente i termini $a_1, \ldots, a_n$ nella prima colonna e zero altrove; B_n la matrice avente i termini $b_1, \ldots, b_n$ nella diagonale e zero altrove; C_n la matrice avente i termini $c_1, \ldots, c_n$ nell'ultima colonna e zero altrove; infine $N_n = A_n + B_n + C_n$ ("matrice a N", o napoleonica)

(a) Calcolare i determinanti di N_n per $n = 2, 3, 4$.

(b) Dare e dimostrare una formula per il determinante di N_n per ogni n.

(c) Nei casi in cui N_n sia invertibile, determinare la matrice inversa.

Esercizio 1. Si consideri il numero complesso $z = -9$.

(a) Determinare in forma trigonometrica ed algebrica le radici sestiche di z, e disegnarle sul piano di Gauss.
(b) Riconoscere tra le radici precedenti quelle che sono radici cubiche di $3i$ (risp. $-3i$).
(c) Fattorizzare in $\mathbb{C}[X]$ e in $\mathbb{R}[X]$ il polinomio $X^6 + 9$.

Esercizio 2. Siano dati i sottospazi di $M_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \ : \ X_i \in K \right\}$

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{e} \qquad W = \begin{cases} X_1 - X_4 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare equazioni cartesiane per V e generatori per W.
(b) Determinare generatori ed equazioni cartesiane per $V \cap W$ e $V + W$.
(c) Determinare un complementare di $V + W$ in $M_2(K)$.

Esercizio 3. Consideriamo le applicazioni $f_\alpha : K^4 \to K^4$ date da

$$f_\alpha \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X_1 + X_2 + 2X_3 \\ X_1 + X_2 + X_3 \\ 2X_3 \\ X_1 + X_2 + \alpha X_3 + \alpha X_4 \end{pmatrix}$$

al variare di $\alpha \in K$

(a) Mostrare che le f_α sono lineari ed esplicitarne le matrici in base canonica; calcolare il determinante di f_α.
(b) Per i valori di α per cui f_α non è isomorfismo, determinarne rango, nucleo e immagine.
(c) Per i valori di α per cui f_α è isomorfismo, determinarne l'applicazione inversa.

Esercizio 1.

(a) Trovare gli zeri (complessi) del polinomio $z^2 - (1+i)z + i$.

(b) Trovare gli zeri (complessi) del polinomio $z^4 - (1+i)z^2 + i$.

(c) Disegnare nel piano di Gauss le quattro radici del punto precedente e calcolare l'angolo formato dalle diagonali del quadrangolo.

Esercizio 2. Si consideri il sottospazio di $M_2(K) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{smallmatrix}\right) : X_i \in K \right\}$ dato da $V = \langle \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -3 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

(a) Dimostrare che l'insieme W formato dalle matrici di $M_2(K)$ che sono triangolari superiori e hanno traccia nulla è un sottospazio di $M_2(K)$.

(b) Determinare equazioni cartesiane e basi per V e W.

(c) Determinare basi ed equazioni cartesiane per $V \cap W$ e $V + W$.

Esercizio 3. Si considerino le applicazioni $f_a \colon K^5 \longrightarrow K^5$

$$f_\alpha \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\alpha+1)x_2 + (\alpha+1)x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \\ -x_1 + (\alpha-1)x_3 - 2x_4 - x_5 \\ (\alpha+1)x_2 + (\alpha+1)x_3 + x_4 - (\alpha+1)x_5 \\ x_4 + x_5 \end{pmatrix}$$

al variare di a in K.

(a) Si esplicitino le matrici di f_α rispetto alle basi canoniche e si determini il rango in funzione del parametro α. Dire per quali valori di α l'applicazione f_α non è un isomorfismo e per tali valori di α calcolare nucleo e immagine di f_α e loro dimensioni.

(b) Si ponga $\alpha = 1$ e si calcolino il determinante di f_1 e l'antimmagine di $(1,1,1,0,1)^t$.

(c) Si consideri l'applicazione $g \colon K^5 \to K^5$ che ad una matrice associa la sua trasposta. Per quali valori di α l'applicazione composta $g \circ f_\alpha$ è lineare?

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{Q}^5$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità; dire se ϕ è invertibile.

(b) Determinare il polinomio minimo e una forma di Jordan per A, e una matrice $H \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ tale che $H^{-1}AH$ sia di Jordan.

(c) Tra le matrici di ordine 7 aventi lo stesso polinomio minimo di A, ve ne sono di non simili tra loro e aventi uguali dimensioni degli autospazi?

Esercizio 2. Si consideri la sequenza $x_i \in \mathbb{Z}$ definita dalla relazione ricorsiva $X_n = X_{n-1}+X_{n-2}-X_{n-3}$ (per $n \geq 3$) e dai valori iniziali $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

(a) Determinare la matrice A tale che $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix}$ e una forma di Jordan per A.

(b) Determinare una formula chiusa per x_n in funzione di n e dei valori iniziali x_0, x_1, x_2.

(c) Sotto quali condizioni (sui valori iniziali) la sequenza diventa costante (da un certo punto in poi)? E crescente?

Esercizio teorico. Sia A una matrice reale d'ordine n, e supponiamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ sia autovalore dell'applicazione $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da $\phi_A(v) = Av$. Mostrare che λ è anche autovalore dell'applicazione $\psi_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definita da $\psi_A(v) = Av$, e che le dimensioni degli autospazi relativi a λ sono uguali, cioè $\dim_{\mathbb{R}} V_\phi(\lambda) = \dim_{\mathbb{C}} V_\psi(\lambda)$. Qual è la dimensione di $V_\psi(\lambda)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$?

Esercizio 1. Sono date le rette dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$:

$$r_1 : \begin{cases} X + Z = 0 \\ X + Y + Z = 2 \end{cases} \qquad r_2 : \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle \ .$$

(a) Si determinino la retta h e i punti $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$ di minima distanza, e tale distanza.
(b) Si determinino la retta s per $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ e incidente le due date, e i punti $P_3 = s \cap r_1$, $P_4 = s \cap r_2$.
(c) Per ciascuno dei tre quadrangoli (P_1, P_2, P_3, P_4), (P_1, P_2, P_4, P_3) e (P_1, P_3, P_2, P_4) determinare il piano che contiene i punti medi dei lati; discutere la posizione reciproca di tali piani.
($d*$) Come descrivere in generale i risultati del punto (c), dati quattro punti in posizione generale?

Esercizio 2. Si consideri nel piano $\mathbb{A}^2(K)$ la retta r di equazione $3X - Y - 1 = 0$, e siano dati i vettori $v_1 = \binom{1}{1}$, $v_2 = \binom{1}{-1}$ in K^2.
(a) Determinare le matrici S_1, S_2, nel riferimento canonico, delle simmetrie σ_1, σ_2 di asse r e direzione v_1, v_2 rispettivamente.
(b) Determinare la matrice di $\sigma_1 \circ \sigma_2$ e determinare punti e rette fissate da questa composizione. È vero che $\sigma_1 \circ \sigma_2$ è una simmetria?
(c) In generale, quali sono i punti uniti e le rette unite della affinità data dalla composizione di due simmetrie di ugual asse?
($d*$) In generale, quali sono i punti uniti e le rette unite della affinità data dalla composizione di due simmetrie di ugual direzione?

Esercizio 1. Consideriamo il piano π di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ di equazione $X+Y+Z=3$.

(a) Si determini la matrice nel riferimento canonico della riflessione ortogonale s di asse π.

(b) Si componga s con la traslazione di vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, e si descriva tale composizione s' come glisso-riflessione (riflessione di asse π' seguita da traslazione parallela all'asse).

(c) Si determini l'antimmagine tramite s' dei vertici del tertraedro fondamentale di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$.

$(d*)$ Che rigidità sono le composizioni $s \circ s'$ e $s' \circ s$? Sono uguali?

Esercizio 2. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ il piano π di equazioni $\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 1 \\ X_4 = 3 \end{cases}$ e le rette $r_1 : \begin{pmatrix}1\\1\\0\\4\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle$, $r_2 : \begin{cases} X_1 - X_2 = 1 \\ X_3 = 3 \\ X_2 - X_4 = 0. \end{cases}$

(a) Discutere le posizioni reciproche a due a due di π, r_1, r_2.

(b) Determinare distanza e punti di minima distanza tra π e r_1 (siano P_1, R_1) e tra π e r_2 (siano P_2, R_2).

(c) Determinare il volume del tetraedro formato dai quattro punti P_1, P_2, R_1, R_2, e l'area dei triangoli di vertici P_1, P_2, R_1 e P_1, R_1, R_2.

$(d*)$ Sia $S = r_1 \vee r_2$ (minimo sottospazio affine contenente le due rette); determinare S e discuterne la posizione reciproca con π.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{Q}^5$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità; dire se ϕ è invertibile.

(b) Determinare il polinomio minimo e una forma di Jordan J per A, e una matrice $H \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ tale che $H^{-1}AH$ sia di Jordan.

(c) Elencare le matrici di Jordan di ordine 7, non simili tra loro, ed aventi lo stesso polinomio minimo di A.

($d*$) È vero o falso che A è simile a J^{t} (eventualmente, trovare il cambiamento di base)?

Esercizio 2. Consideriamo la retta r di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ data da $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$.

(a) Si determini la matrice nel riferimento canonico della rotazione ortogonale ρ di angolo $\pi/2$ attorno ad r.

(b) Si componga ρ con la traslazione di vettore $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, e si descriva tale composizione ρ' come glisso-rotazione (rotazione di asse r' seguita da traslazione parallela all'asse).

(c) Si determini l'antimmagine tramite ρ dei vertici del tertraedro fondamentale di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$.

($d*$) Che rigidità sono le composizioni $\rho \circ \rho'$ e $\rho' \circ \rho$? Sono uguali?

Esercizio 3. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ il piano π_1 di equazioni $\begin{cases} X_1 - X_2 = 1 \\ X_1 - X_3 = 2 \end{cases}$, il piano $\pi_2 : \left(\begin{smallmatrix}2\\2\\2\\2\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)\rangle$ e la retta $r : \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\rangle$.

(a) Discutere le posizioni reciproche a due a due di π_1, π_2, r.

(b) Determinare distanza e punti di minima distanza tra π_1 e r (siano P_1, R_1) e tra π_2 e r (siano P_2, R_2).

(c) Determinare il volume del tetraedro formato dai quattro punti P_1, P_2, R_1, R_2, e l'area dei triangoli di vertici P_1, P_2, R_1 e P_1, R_1, R_2.

($d*$) Discutere la posizione reciproca di $\pi_1 \vee R_1$ con $\pi_2 \vee R_2$; è vero o falso che la loro intersezione contiene la retta r?

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{Q}^5$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità; dire se ϕ è invertibile.

(b) Determinare il polinomio minimo e una forma di Jordan per A, e una matrice $H \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ tale che $H^{-1}AH$ sia di Jordan.

(c) Elencare le matrici di Jordan di ordine 7, non simili tra loro, ed aventi lo stesso polinomio minimo di A.

Esercizio 2. Consideriamo i piani di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ dati da $\pi_1 : X_1 - X_2 = 1$ e $\pi_2 : X_3 = 0$.

(a) Si determini la matrice nel riferimento canonico della composizione s delle riflessioni ortogonali di assi π_1 e π_2 rispettivamente.

(b) Si determinino i punti uniti di s; che tipo di rigidità è?

(c) Si determinino i piani uniti di s.

Esercizio 3. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ i piani
$\pi_1 : \begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$, $\pi_2 : \begin{cases} X_3 + X_4 = 0 \\ X_4 = -1 \end{cases}$, $\pi_3 : \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 \\ X_2 + X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$,

(a) Calcolare i punti di intersezione $P_1 = \pi_2 \cap \pi_3$, $P_2 = \pi_1 \cap \pi_3$, $P_3 = \pi_1 \cap \pi_2$ ed equazioni cartesiane per i sottospazi $\pi_i \vee P_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

(b) Determinare le equazioni del piano passante per il baricentro del triangolo P_1, P_2, P_3 e di spazio direttore ortogonale a quello del piano contenente il triangolo.

(c) Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2, P_3, e determinare l'insieme dei punti $X \in \mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ tali che il tetraedro P_1, P_2, P_3, X abbia volume 6.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{Q}^5$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità; dire se ϕ è invertibile.

(b) Determinare il polinomio minimo e una forma di Jordan per A, e una matrice $H \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ tale che $H^{-1}AH$ sia di Jordan.

(c) Elencare le matrici di Jordan di ordine 7, non simili tra loro, ed aventi lo stesso polinomio minimo di A.

Esercizio 2. Consideriamo in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ il piano π passante per il punto $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ e ortogonale al vettore $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, e la retta r passante per il punto $\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ e di direzione data dal vettore $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Trovare la matrice nel riferimento canonico della riflessione ortogonale σ di asse π.

(b) Trovare la matrice nel riferimento canonico della rotazione ρ di angolo 180^o e asse r.

(c) Determinare e classificare (come isometrie dello spazio) le due composizioni $\sigma \circ \rho$ e $\rho \circ \sigma$.

Esercizio 3. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ le rette
$r_1 = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $r_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $r_3 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\3\end{smallmatrix}\right)\rangle$.

(a) Determinare equazioni cartesiane delle tre rette.

(b) Discutere la posizione reciproca a due a due delle tre rette. Esiste un sottospazio affine di dimensione 3 di $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ contenente le tre rette date?

(c) Determinare le distanze reciproche tra le tre rette.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare ϕ di $\mathbb{Q}^5$ in sè di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

(a) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e rispettive molteplicità e nullità; dire se ϕ è invertibile.

(b) Determinare il polinomio minimo e una forma di Jordan per A, e una matrice $H \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ tale che $H^{-1}AH$ sia di Jordan.

(c) Elencare le classi di similitudine di matrici di ordine 5, aventi lo stesso polinomio caratteristico di A, e i corrispondenti polinomi minimi.

Esercizio 2. Consideriamo in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ il piano π passante per il punto $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)$ e ortogonale al vettore $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Trovare la matrice nel riferimento canonico della riflessione ortogonale σ di asse π.

(b) Trovare la matrice nel riferimento canonico della composizione σ' di σ con la traslazione di vettore $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$, e decomporre σ' come glisso-riflessione (riflessione di asse π' seguita da una traslazione parallela all'asse).

(c) Determinare le antimmagini tramite σ' dei vertici del tetraedro fondamentale di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Si considerino nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ le rette
$r_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $r_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, e il piano $\pi : \begin{cases} X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Determinare equazioni cartesiane delle due rette ed espressioni vettoriali per π.

(b) Discutere la posizione reciproca delle due rette, calcolandone la distanza e i punti di minima distanza.

(c) Determinare le posizioni reciproche tra ciascuna retta e il piano π, specificandone la distanza. Esiste un sottospazio affine di dimensione 3 contenente le due rette e il piano?

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 11 novembre 2004

ESERCIZIO 1.

(1) *Si verifichi per induzione che*

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j j = \begin{cases} \frac{n}{2} & \textit{se } n \in 2\mathbb{N} \\ -\frac{n+1}{2} & \textit{se } n \in 1+2\mathbb{N} \end{cases}.$$

(2) *Si verifichi per induzione che*

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j j^2 = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \textit{se } n \in 2\mathbb{N} \\ -\frac{n(n+1)}{2} & \textit{se } n \in 1+2\mathbb{N} \end{cases}.$$

(3) *Si scriva una formula chiusa per*

$$\sigma(n) = \sum_{j=1}^{n}\left\{n_1 + (-1)^j[(n_3+3)j + (n_5+5)j^2]\right\}$$

e la si calcoli per $n = n_2 + n_4 + 6$.

Svolgimento. (*1*) La formula è vera per $n = 1$; infatti, si tratta di un numero dispari e $-1 = -\frac{1+1}{2}$. Supponiamo che la formula sia vera per un intero n e dimostriamola per il successivo. Se n è pari, per l'ipotesi induttiva, si ha

$$\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j j = \frac{n}{2} - (n+1) = -\frac{n+2}{2}.$$

Analogamente, se n è dispari,

$$\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j j = -\frac{n+1}{2} + (n+1) = \frac{n+1}{2},$$

che è quanto si doveva verificare.

(*2*) La formula è vera per $n = 1$; infatti, si tratta di un numero dispari e $-1 = -\frac{1(1+1)}{2}$. Supponiamo che la formula sia vera per un intero n e dimostriamola per il successivo. Se n è pari, per l'ipotesi induttiva, si ha

$$\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j j^2 = \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)^2 = -\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Analogamente, se n è dispari,

$$\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j j^2 = -\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

che è quanto si doveva verificare.

(*3*) Usando le espressioni precedenti, si ricava immediatamente che

$$\sigma(n) = \begin{cases} nn_1 + (n_3+3)\frac{n}{2} + (n_5+5)\frac{n(n+1)}{2} & \text{se } n \in 2\mathbb{N} \\ nn_1 - (n_3+3)\frac{n+1}{2} - (n_5+5)\frac{n(n+1)}{2} & \text{se } n \in 1+2\mathbb{N} \end{cases}$$

e si lascia al lettore l'ultimo calcolo. □

ESERCIZIO 2. *Si ponga $a = n_1n_2n_3$ e $b = n_4n_5n_6 + 600$.*
(1) *Si determini $d = MCD(a, b)$.*
(2) *Si determinino $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $d = ma + nb$ con $|m| < b$ ed $|n| < a$.*
(3) *Si determinino le soluzioni della congruenza $mX \equiv d \mod |n|$.*
(4) *Si determinino le soluzioni della congruenza $nX \equiv d \mod |m|$.*
(5) *Posto $s = a/d$ ed $r = b/d$, si determinino le soluzioni del sistema di congruenze* $\begin{cases} 7X \equiv 5 \mod s \\ 3X \equiv 4 \mod r \end{cases}$.

Svolgimento. (*1*) e (*2*) Sia $M = 510243$ il numero di matricola. Allora, $a = 510$ e $b = 843$, e $d = 3 = 81 \cdot 510 - 49 \cdot 843$.

(*3*) e (*4*) Osserviamo che $MCD(m, n) = 1$, perché $1 = m(a/d) + n(b/d)$, e quindi le due congruenze ammettono entrambe soluzione. Dalla combinazione $d = ma+nb$, si ricava che tutte le soluzioni della prima congruenza formano la classe $a+|n|\mathbb{Z} = 20+49\mathbb{Z}$. Analogamente le soluzioni della seconda congruenza sono gli elementi della classe $b + |m|\mathbb{Z} = 33 + 81\mathbb{Z}$.

(*5*) Siano $s = a/d = 170$ ed $r = b/d = 281$; si ha $MCD(7, s) = 1 = MCD(3, r)$ e quindi le due congruenze hanno soluzione. Si ha $1 = 7 \cdot 73 - 3 \cdot 170$ da cui si deduce che $7 \cdot 73 \equiv 1 \mod 170$ e quindi tutte le soluzioni della congruenza $7X \equiv 5 \mod 170$ sono gli interi $X \in 73 \cdot 5 + 170\mathbb{Z} = 25 + 170\mathbb{Z}$. Sia dunque $X = 25+170Y$ e sostituiamolo nella seconda congruenza; si ottiene così che $229Y \equiv 210 \mod 281$. Essendo $1 = 229 \cdot 27 - 22 \cdot 281$, si deduce che $229 \cdot 27 \equiv 1 \mod 281$ e quindi tutte le soluzioni di quest'ultima congruenza sono gli interi $Y \in 27 \cdot 210 + 281\mathbb{Z} = 50 + 281\mathbb{Z}$. Dunque le soluzioni del sistema sono gli interi $X = 25 + 170(50 + 281k) = 8525 + 47770k$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. □

ESERCIZIO 3. *Si considerino i numeri complessi*

$$a = n_2 - 5, \qquad b = (n_1 + 4) + i(n_5 + 4), \qquad c = n_6 - 5.$$

(1) *Si determini l'insieme $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c < 0 \right\}$ e lo si disegni nel piano di Gauss.*
(2) *Sia $z_0 = ia - a$. Si determinino i numeri complessi, z, tali che $z^3 - z_0 = 0$. Si disegnino tali numeri nel piano di Gauss e si dica se qualcuno di questi appartiene a D.*
(3) *Si consideri la funzione $f(z) = \dfrac{z - 2 + i}{z + i}$ e si determinino, se esistono, due sottoinsiemi massimali U e V di $\mathbb{C}$, tali che $f : U \to V$ sia una biiezione. Si scriva l'espressione esplicita dell'applicazione inversa, $g : V \to U$.*
(4) *Si determini il sottoinsieme $f_*(D \cap U)$ e lo si disegni nel piano di Gauss.*

Svolgimento. (*1*) Sia $z = x + iy$ con x, y numeri reali. Allora $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = a(x^2 + y^2) + 2[(n_1 + 4)x - (n_5 + 4)y] + c$. A seconda del segno di a, si tratta dei punti del piano di Gauss interni o esterni al disco di centro $\tau = -\frac{n_1+4}{a} + i\frac{n_5+4}{a}$ e raggio $R = \frac{(n_1+4)^2+(n_5+4)^2-ac}{a^2}$.

(*2*) Si tratta di determinare le radici terze di $z_0 = a(i-1)$. Indipendentemente dal segno, esiste $\sqrt[3]{a} \in \mathbb{R}$, ed $i - 1 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4})$. Applicando le formule di de Moivre, una radice terza di z_0 è $\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$, e le altre si ottengono da questa moltiplicando per le radici terze di 1, ovvero per $\zeta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\bar{\zeta} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le radici cercate sono quindi $\xi = \sqrt[3]{a}\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}(1 + i)$, $\xi\zeta$ e $\xi\bar{\zeta}$.

(*3*) f è definita per $z \neq -i$ e su $U = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ è un'applicazione iniettiva; infatti, da $f(z_1) = f(z_2)$ si ricava che $z_1 = z_2$. Inoltre, qualunque sia il numero complesso $w \neq 1$, l'equazione $f(z) = \dfrac{z - 2 + i}{z + i} = w$ ha come (unica) soluzione $z = \dfrac{iw + 2 - i}{1 - w}$. Quindi $V = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ e la funzione inversa manda w in $g(w) = \dfrac{iw + 2 - i}{1 - w}$.

(*4*) Gli elementi di $f_*(D \cap U)$, sono i punti $w \in V$, tali che $ag(w)\overline{g(w)} + bg(w) + \bar{b}\overline{g(w)} + c < 0$. I calcoli si semplificano se si scrive la circonferenza che delimita D come $|z - \tau| = R$ e si usa questa espressione per definire D. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 9 dicembre 2004

ESERCIZIO 1. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_6 \mod 4$. Si considerino, lo spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^4$ ed i sottospazi $D = \langle e_1 - ine_4, (2i-n)e_2 + e_3\rangle_{\mathbb{C}}$ ed $E = \langle e_1, e_2\rangle_{\mathbb{C}}$, ove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica dello spazio ed i indica l'unità immaginaria ($i^2 = -1$).*

(*a*) *Si verifichi che $\mathbb{C}^4 = D \oplus E$ e che la proiezione, parallelamente a D, $\pi : \mathbb{C}^4 \to E$, induce un isomorfismo $\alpha : \mathbb{C}^4/D \to E$.*

(*b*) *Si consideri lo spazio vettoriale reale $L = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle_{\mathbb{R}}$ e sia $\phi : L \to E$ l'applicazione composta $L \xrightarrow{j} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\pi} E$, ove j è l'inclusione. Si verifichi che si tratta si un isomorfismo di spazi vettoriali reali e se ne scriva la matrice $P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\phi)$ rispetto alle basi $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di L ed $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, ie_1, ie_2\}$ di E.*

(*c*) *L'isomorfismo ϕ determina su L una struttura di spazio vettoriale complesso, ove la moltiplicazione per i è l'applicazione $\iota(x) := \phi^{-1}(i\phi(x))$ per ogni $x \in L$. Si verifichi che $\iota : L \to L$ è un'applicazione lineare e si scriva la matrice $J = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\iota)$. È vero o falso che J^2 è una matrice scalare?*

Svolgimento. (a) Le coordinate dei generatori dei sottospazi E e D sono le colonne della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2i-n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -in \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 4. Dunque i quattro vettori sono una base di $\mathbb{C}^4$ (su $\mathbb{C}$) e perciò $\mathbb{C}^4 = D+E = D\oplus E$, in base alle relazioni di Grassmann.

La proiezione π è un'applicazione lineare che ha nucleo D ed immagine E; quindi, per il primo Teorema di Isomorfismo, induce un isomorfismo tra $\mathbb{C}^4/D = \mathbb{C}^4/\ker\pi$ e l'immagine $\mathrm{im}\,\pi = E$.

(*b*) Dato un vettore $x \in L$, la sua immagine $\phi(x)$ è quell'unico vettore $y \in E$ tale che $j(x) - y \in D$. In particolare, si ha

$$\phi(e_1) = e_1, \qquad \phi(e_2) = e_2, \qquad \phi(e_3) = ne_2 - 2ie_2, \qquad \phi(e_4) = -\frac{1}{n}ie_1;$$

e quindi la matrice è

$$P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{n} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4 ed è quindi la matrice di un isomorfismo. Questo fatto si poteva anche verificare osservando che $jL \cap D = \langle 0\rangle$ e quindi la restrizione di π ad L è iniettiva e ϕ è un isomorfismo.

(*c*) Le applicazioni coinvolte nella definizione di ι sono tutte $\mathbb{R}$–lineari e quindi lo stesso vale per l'applicazione composta che, per costruzione, ha matrice $J = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\iota) = \alpha_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\phi^{-1})\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(i)\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\phi) = P^{-1}IP$, ove

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -n & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{n}{2} & \frac{n^2+4}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{n}{2} & 0 \\ -n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, essendo J la matrice della moltiplicazione per il numero complesso i, si ha $J^2 = -\mathbf{1}_4$. □

ESERCIZIO 2. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_4 \mod 4$. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 3 e siano*

- *$\pi : \mathbb{R}[X] \to V$ la proiezione su V nella direzione del sottospazio $\langle X^n \mid n \geq 4\rangle$;*
- *$\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'applicazione $P(X) \mapsto (X+n)^2P'(X) - 2(X+n)P(X)$, ove $P'(X)$ è la derivata di $P(X)$;*

- *$\phi : V \to V$ la composizione* $V \xrightarrow{j} \mathbb{R}[X] \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}[X] \xrightarrow{\pi} V$, *ove j è l'inclusione $V \subset \mathbb{R}[X]$.*

(a) *Verificare che ϕ è un'applicazione lineare e scrivere la sua matrice rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.*

(b) *Determinare le dimensioni di nucleo ed immagine di ϕ ed una base per ciascuno dei due sottospazi. È vero che $V = \ker\phi \oplus \mathrm{im}\phi$?*

(c) *Si dica se l'insieme $\mathcal{B}_n = \{1, X+n, (X+n)^2, (X+n)^3\}$ è una base di V. In caso affermativo si scriva la matrice $B = \alpha_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n}(\phi)$.*

(d) *Dire se il sottoinsieme $A = \{\, \beta \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \mid \phi \circ \beta = 0 \,\}$ è un sottospazio di $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$. In caso affermativo, si consideri l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n} : \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \to M_4(\mathbb{R})$ e si determinino la dimensione ed una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n}(A)$.*

Svolgimento. (a) La derivazione, così come la moltiplicazione per un fissato polinomio sono applicazioni lineari. La composizione e la somma di applicazioni lineari sono applicazioni lineari, per cui ϕ è un'applicazione lineare. La sua matrice è

$$A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2n & n^2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2n^2 & 0 \\ 0 & -1 & 2n & 3n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 4n \end{pmatrix}.$$

(b) Il nucleo è il sottospazio $\ker\phi = \langle (X+n)^2 \rangle$, di dimensione 1. L'immagine ha dimensione 3 ed è il sottospazio $\langle X+n, n^2 - X^2, 4X^3 + 3nX^2 \rangle$. La somma non è diretta perché $(X+n)^2 = \phi(-X-n) \in \ker\phi$.

(c) Le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}_n$, rispetto alla base $\mathcal{B}$, sono le colonne della matrice $\begin{pmatrix} 1 & n & n^2 & n^3 \\ 0 & 1 & 2n & 3n^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ che ha chiaramente rango 4 e quindi si tratta di una base di V. La matrice di ϕ rispetto a questa base è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -n^4 \\ -2 & 0 & 0 & 4n^3 \\ 0 & -1 & 0 & -6n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 4n \end{pmatrix}.$$

(d) Il sottoinsieme A contiene l'omomorfismo nullo ed inoltre, poiché la composizione di applicazioni lineari distribuisce rispetto alla somma, si conclude che A è un sottospazio. Un omomorfismo β appartiene ad A se, e solo se, $\mathrm{im}\beta \subseteq \ker\phi$ e quindi una matrice sta in $\alpha_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n}(A)$ se le colonne sono multipli delle coordinate di $(X+n)^2$ e quindi una base di $\alpha_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n}(A)$ sono le matrici

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

che ha perció dimensione 4. □

ESERCIZIO 3. *Sia $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ tale che $n \equiv n_5 \mod 4$. Si consideri il seguente sistema a coefficienti reali:*

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = n + t \\ tx_2 - nx_4 = (n+t)(t-1) \\ -x_1 + (2-t)x_2 + (t^2 + 2nt + n)x_3 + (t+1)x_4 = 2n + 2t \\ x_1 + tx_2 - nx_3 + (t+1)x_4 = 1 \end{cases}$$

(a) *Per quali valori di t il sistema non ammette soluzioni? Per quali valori di t ammette un'unica soluzione? Per quali valori di t il sistema ammette infinite soluzioni? In quest'ultimo caso, determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.*

(b) *Esplicitare, se esistono, le soluzioni del sistema appena studiato per il valore $t = 1$. Risolvere, sempre per $t = 1$, il sistema nel caso in cui i coefficienti siano in $\mathbb{F}_2$.*

(c) *Determinare l'inversa, se esiste, della matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & n \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & n+1 \end{pmatrix}$$

e scriverla come prodotto di matrici elementari.

Svolgimento. (a) Attraverso la riduzione di Gauss (IV, I, IV+III, II e poi I,II, III-2II, IV-tII) si arriva al sistema

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 - nx_3 + (t+1)x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = n + t \\ t(t+2n)x_3 + 2tx_4 = 1 \\ (t+n)x_4 = t + n \end{cases}$$

Se $t = 0$ o $t = -2n$ il sistema non ammette soluzioni. Se $t = -n$ il sistema ammette infinite soluzioni e la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato è 1. Per tutti gli altri valori di t il sistema ammette un'unica soluzione.

(b) Per $t = 1$ a coefficienti reali il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - nx_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = n + 1 \\ (1+2n)x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

e l'unica soluzione è $\frac{1}{2n+1}\begin{pmatrix} -n-(n+1)(2n+1) \\ n(2n+1) \\ -1 \\ 2n+1 \end{pmatrix}$.

Nel caso di $\mathbb{F}_2$:

-se n pari il sistema ammette come unica soluzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

-se n è dispari si hanno infinite soluzioni: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(c) La matrice B ha rango 4 e quindi, con operazioni elementari sulle righe, si può trasformare nella matrice identica. Ad esempio, $IV, I, III - I, \frac{1}{n+1}(I + II)$, seguita da $I, II - IV, -(III + IV), IV$ e da $I - 2II + III - (n+1)IV, II, III, IV$. Il prodotto delle matrici elementari corrispondenti è l'inversa cercata, ovvero

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -(n+1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+2n}{n+1} & -\frac{n}{n+1} & -1 & 1 \\ \frac{n}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & 0 & 0 \\ \frac{n}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & -1 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 17 dicembre 2004

ESERCIZIO 1. *Siano $n = n_1n_4n_4n_1$ e $m = n_1n_2n_1$.*

(a) *Determinare le soluzioni della congruenza*

$$nX \equiv n_4 + 3 \mod m.$$

(b) *Si scelga un $c \in \mathbb{Z}$ tale che la congruenza $nX \equiv c \mod m$ ammetta soluzioni e si ponga $m' = 8$ se m è dispari e $m' = 5$ se m è pari. Determininare le soluzioni del sistema* $\begin{cases} nX \equiv c \mod m \\ 3X \equiv 1 \mod m' \end{cases}$

Svolgimento. (a) Risolviamo l'esercizio per il numero di matricola 510243. Siano quindi $n = 5225$ ed $m = 515$. Il $MCD(n, m) = 5 = 5225(-48) + 515 \cdot 487$ divide 5, per cui la congruenza è equivalente a $1045X \equiv 1 \mod 103$ ed ha come soluzioni gli interi del tipo $55 + 103y$ al variare di $y \in \mathbb{Z}$ ($55 \equiv -48 \mod 103$).

(b) Dobbiamo prendere $m' = 8$ e considerare il sistema di due congruenze

$$\begin{cases} 1045X \equiv 1 \mod 103 \\ 3X \equiv 1 \mod 8 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} 15X \equiv 1 \mod 103 \\ 3X \equiv 1 \mod 8 \end{cases}.$$

Le due congruenze hanno soluzione e $MCD(103, 8) = 1$ per cui il sistema ha soluzione. Si tratta di trovare gli interi del tipo $x = 55+103y$, al variare di $y \in \mathbb{Z}$, che soddisfano anche alla seconda congruenza. Deve aversi $3(55 + 103y) \equiv 1 \mod 8$, ovvero $5y \equiv 4 \mod 8$, ed essendo $MCD(5, 8) = 1 = 8 \cdot 2 - 5 \cdot 3$, si conclude che $y = 4+8k$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$; e quindi le soluzioni cercate sono gli interi $x = 55+103(4+8k) = 467+824k$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. □

ESERCIZIO 2.

(a) *Si dimostri per induzione che $n^2 = \sum_{j=1}^{n}(2j - 1)$, per ogni intero $n \geq 1$.*

(b) *Si osservi che si ha*

$$1^3 = 1, \qquad 2^3 = 3 + 5, \qquad 3^3 = 7 + 9 + 11, \qquad 4^3 = 13 + 15 + 17 + 19.$$

Si dica quale tra le seguenti formule generalizza le osservazioni precedenti[(*)]*:*

$$a)\ n^3 = \sum_{j=2n+1}^{3n+1}(2j - 1); \qquad b)\ n^3 = \sum_{j=\frac{n(n-1)}{2}+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}(2j - 1); \qquad c)\ n^3 = \sum_{j=\frac{n(n+1)}{2}}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}(2j + 1).$$

Svolgimento. (a) La tesi è vera per $n = 1$. Inoltre, supponendola vera per un numero naturale, n, si ha

$$\sum_{j=1}^{n+1}(2j - 1) = \left[\sum_{j=1}^{n}(2j - 1)\right] + 2(n + 1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

(b) La formula corretta è b) e si può verificare nel modo seguente. Per prima cosa osserviamo che gli addendi nella somma sono $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$, e si ha

$$\sum_{j=\frac{n(n-1)}{2}+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}(2j - 1) = [n(n - 1) + 1] + [n(n - 1) + 3] + [n(n - 1) + 5] + \cdots + [n(n - 1) + (2n - 1)] =$$

$$= n^2(n - 1) + \sum_{j=1}^{n}(2j - 1) = n^2(n - 1) + n^2 = n^3;$$

[(*)] La dimostrazione della validità di tale formula non è richiesta, ma può costituire un punteggio supplementare.

che è quanto dovevamo dimostrare. Ricordiamo a margine che questa formula è attribuita a Nicomaco di Gerasa, vissuto tra il I ed il II secolo dopo Cristo. □

ESERCIZIO 3. *Sia* $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ *tale che* $n \equiv n_4 \mod 4$.

Si consideri la funzione complessa $f(z) = \frac{z}{z-n-2i}$.

(a) *Determinare il dominio* D *di* f *e l'insieme* $C = f_*(D)$. *Si scriva, se esiste, la funzione inversa* $g : C \to D$.

(b) *Si disegnino sul piano di Gauss l'insieme* $U = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| < n \,\}$ *e l'insieme* $f_*(U)$.

Svolgimento. (a) La funzione è definita in $D = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z \neq n + 2i \,\}$ e la sua immagine è l'insieme $C = f_*(D) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z \neq 1 \,\}$, che coincide con il dominio della funzione inversa $g(z) = \frac{(n+2i)z}{z-1}$.

(b) Un numero complesso z appartiene ad U se $\left|\frac{z}{z-n-2i}\right| < n$, ovvero se $(n^2 - 1)(x^2 + y^2) - 2n^3x - 4n^2y + n^2(n^4 + 4) < 0$. Se $n \neq 1$, ciò significa che z è un punto interno alla circonferenza di centro $C = \begin{pmatrix} \frac{n^3}{n^2-1} \\ \frac{2n^2}{n^2-1} \end{pmatrix}$ e raggio $R = \frac{n\sqrt{n^2+4}}{n^2-1}$. Se, invece, $n = 1$, allora z è al di sopra della retta $r : 2x + 4y - 5 = 0$.

L'insieme $f_*(U) = \{\, f(z) \mid z \in U \,\}$ è quindi fatto dai numeri complessi $w \in C$ tali che $|w| < n$ e quindi i punti interni alla circonferenza con centro nell'origine e raggio n. □

ESERCIZIO 4. *Sia* $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ *tale che* $n \equiv n_6 \mod 4$.

(a) *Si dica se esiste un endomorfismo* $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *tale che*

$$\phi(e_1 - e_2) = e_1 - \tfrac{n}{2}e_4; \qquad \phi(e_1 - 2e_2) = -2e_2 + 2e_3; \qquad \phi(e_2 - e_3) = e_2 - e_3;$$
$$\phi(e_1 - e_2 - e_3 + e_4) = \tfrac{2}{n}e_1 + \left(\tfrac{4}{n} - 1\right)e_2 + \left(1 - \tfrac{4}{n}\right)e_3 - e_4;$$

e, in caso affermativo, se ne scriva la matrice rispetto alla base canonica.

(b) *Nell'ipotesi che* ϕ *esista, se ne determinino nucleo ed immagine, esibendo una base di ciascuno dei due sottospazi. Si determinino inoltre nucleo ed immagine dell'applicazione* $\phi^2 = \phi \circ \phi$.

(c) *Nell'ipotesi che* ϕ *esista, si determinino delle basi* $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ *di* $\mathbb{R}^4$ *tali che* $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, *ove* r *è il rango di* ϕ. *Esiste una base* $\mathcal{U}$ *tale che* $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$?

Svolgimento. (a) I vettori $e_1 - e_2, e_1 - 2e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_2 - e_3 + e_4$ sono una base di $\mathbb{R}^4$ e quindi esiste un unico endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che soddisfi alle condizioni date. In particolare, si ha

$$\begin{aligned}
&\phi(e_2) = \phi(e_1 - e_2) - \phi(e_1 - 2e_2) = e_1 + 2e_2 - 2e_3 - \tfrac{n}{2}e_4;\\
&\phi(e_1) = \phi(e_1 - e_2) + \phi(e_2) = 2e_1 + 2e_2 - 2e_3 - ne_4;\\
&\phi(e_3) = \phi(e_2) - \phi(e_2 - e_3) = e_1 + e_2 - e_3 - \tfrac{n}{2}e_4;\\
&\phi(e_4) = \phi(e_1 - e_2 - e_3 + e_4) - \phi(e_1 - e_2) + \phi(e_3) = \tfrac{2}{n}e_1 + \tfrac{4}{n}e_2 - \tfrac{4}{n}e_3 - e_4;
\end{aligned}$$

e quindi la matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \frac{2}{n} \\ 2 & 2 & 1 & \frac{4}{n} \\ -2 & -2 & -1 & -\frac{4}{n} \\ -n & -\frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A ha rango 2 perché la terza colonna è la metà della prima e la quarta è uguale alla seconda moltiplicata per $\frac{2}{n}$. Dunque $\ker\phi = \langle e_1 - 2e_3, 2e_2 - ne_4 \rangle$. L'immagine di ϕ è generata da due colonne indipendenti della matrice, ad esempio le prime 2, e si ha $\operatorname{im}\phi = \langle 2e_1 - ne_4, e_2 - e_3 \rangle$. Osserviamo che $A^2 = A$, ovvero, $\phi^2 = \phi$ e quindi le due applicazioni hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine. In particolare, ϕ è la proiezione sul sottospazio $\operatorname{im}\phi$, parallelamente al sottospazio $\ker\phi$.

(c) ϕ è una proiezione e quindi, prendendo una base di imϕ, $u_1 = 2e_1 - ne_4$, $u_2 = e_2 - e_3$, e completandola con una base di kerϕ, $u_3 = e_1 - 2e_3$ ed $u_4 = 2e_2 - ne_4$, si ottiene una base cercata. Infatti

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

come si voleva. □

ESERCIZIO 5. *Sia $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ tale che $n \equiv n_5 \mod 4$. Si consideri il seguente sistema a coefficienti reali:*

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 + n^2x_3 + (n-t)x_4 = t \\ x_1 + (n^2 - t^2)x_3 + nx_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + (n^2 - t^2 - t)x_3 + (t + 2n + 1)x_4 = t - 1 \\ -tx_2 - t^2x_3 + 2tx_4 = 0 \end{cases}$$

(a) *Per quali valori di t il sistema non ammette soluzioni? Per quali valori di t ammette un'unica soluzione? Per quali valori di t il sistema ammette infinite soluzioni? In quest'ultimo caso, determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.*

(b) *Esplicitare, se esistono, le soluzioni del sistema appena studiato per il valore $t = 5$.*

Svolgimento. (a) Se $t = 0$ il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 + n^2x_3 + nx_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + n^2x_3 + (2n+1)x_4 = -1 \end{cases}$$

e pertanto ammette infinite soluzioni e dim$S_{A,0} = 2$. Possiamo d'ora in poi supporre $t \neq 0$. Il sistema diventa allora equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 + n^2x_3 + (n-t)x_4 = t \\ x_1 + (n^2 - t^2)x_3 + nx_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + (n^2 - t^2 - t)x_3 + (t + 2n + 1)x_4 = t - 1 \\ -x_2 - tx_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Attraverso la riduzione di Gauss (II-I, $-t^{-1}$II, IV+II, III-2I, III+$(1+2t)$II) si arriva al sistema

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 + n^2x_3 + (n-t)x_4 = t \\ x_2 + tx_3 - x_4 = 1 \\ (t^2 - n^2)x_3 + tx_4 = t \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Per $t = \pm n$ il sistema ammette infinite soluzioni e dim$S_{A,0} = 1$. Per $t \neq 0, n, -n$ il sistema ammette un'unica soluzione.

(b) Per qualsiasi $t \neq 0, n, -n$ il sistema ammette come unica soluzione $\begin{pmatrix} -n \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 6. *Sia $n = n_6 + 3$*

(a) *Determinare l'inversa, se esiste, della seguente matrice a coefficienti reali*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e scriverla come prodotto di matrici elementari.

(*b*) *La matrice B è invertibile in $\mathbb{F}_3$?*

Svolgimento. (a) La matrice B ha rango 4 e quindi, con operazioni elementari sulle righe, si può trasformare nella matrice identica. Ad esempio, n^{-1}III, IV+II, II+I, scambio III e IV, scambio II e III, III-nII, -III, III+IV, I-nII, I-IV. Il prodotto delle matrici elementari corrispondenti è l'inversa cercata, ovvero

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0&-1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&-n&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&-n&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1/n&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&-n&1/n&-n\\ 0&1&0&1\\ -1&n-1&-1/n&n\\ 0&0&-1/n&0 \end{pmatrix}$$

(*b*) La matrice B è invertibile in $\mathbb{F}_3$ se e solo se n non è multiplo di 3. Infatti se $n = 3k$ la terza riga diventa nulla e il rango della matrice B è 3. Se invece n non è multiplo di 3 allora la matrice B ha rango 4. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 11 gennaio 2005

ESERCIZIO 1. *Siano $n = 4n_4n_44$ ed $m = 4n_24$.*

(a) Si determinino le soluzioni della congruenza

$$nX \equiv n_4 + 4 \mod m.$$

(b) Si scelga $c \in \mathbb{Z}$, non nullo, tale che la congruenza $nX \equiv c \mod m$ abbia soluzione e si ponga $m' = 5$. Si determinino le soluzioni del sistema $\begin{cases} nX \equiv c \mod m \\ 4X \equiv -1 \mod m' \end{cases}$.

Svolgimento. (a) Risolviamo l'esercizio per il numero di matricola 510243. Siano quindi $n = 4224$ ed $m = 414$. Il $MCD(n, m) = 6 = 4224 \cdot 5 - 414 \cdot 51$ divide 6 per cui la congruenza è equivalente a $704 \equiv 1 \mod 69$ ed ha come soluzioni gli interi del tipo $5 + 69y$ al variare di $y \in \mathbb{Z}$.

(b) Consideriamo quindi il sistema $\begin{cases} 704X \equiv 1 \mod 69 \\ 4X \equiv -1 \mod 5 \end{cases}$. Dobbiamo trovare gli interi del tipo $x = 5+69y$, al variare di $y \in \mathbb{Z}$, che soddisfino anche alla seconda congruenza. Deve aversi $4(5+69y) \equiv 4 \mod 5$, ovvero $y \equiv 4 \mod 5$. Dunque le soluzioni del sistema sono gli interi del tipo $x = 5 + 69(4 + 5k) = 281 + 345k$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. □

ESERCIZIO 2.

(a) Si dimostri per induzione sull'esponente $p \in \mathbb{N}$ la disuguaglianza di Bernoulli $x^p \geq 1 + p(x-1)$, ove x è un qualsiasi numero reale positivo.

(b) Siano $K > k$ due numeri naturali. Utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli per l'esponente $p + 1$, con $x = \frac{k}{K}$ ed $x = \frac{K}{k}$, si ottengano le disuguaglianze

$$(p+1)k^p \leq \frac{K^{p+1} - k^{p+1}}{K - k} \leq (p+1)K^p.$$

(c) (*) Si ponga $S = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Utilizzando le disuguaglianze del punto precedente, per $K = k+1$ e k che varia tra 0 ed $n-1$, si deduca che $(p+1)(S - n^p) \leq n^{p+1} \leq (p+1)S$ e quindi le disuguaglianze

$$\frac{1}{p+1} \leq \frac{S}{n^{p+1}} \leq \frac{1}{p+1} + \frac{1}{n},$$

qualunque sia il numero naturale n(†)

Svolgimento. (a) La disuguaglianza è chiaramente vera quando $p = 0$ oppure $p = 1$. Supposta vera per un esponente p, si ha

$$x^{p+1} = x \cdot x^p \geq [1 + (x-1)] \cdot [1 + p(x-1)] \geq 1 + (p+1)(x-1);$$

perché $x = 1 + (x-1) > 0$ e $p(x-1)^2 \geq 0$. E quindi, per induzione, la disuguaglianza è verificata per ogni numero naturale p.

(b) Applicando la disuguaglianza per $x = \frac{k}{K}$, si ottiene

$$\left(\frac{k}{K}\right)^{p+1} \geq 1 + (p+1)\left(\frac{k}{K} - 1\right) \quad \text{e, moltiplicando per } K^{p+1} > 0, \text{ si ha} \quad k^{p+1} \geq K^{p+1} - (p+1)K^p(K-k)$$

(*) La dimostrazione di quest'ultimo punto fornisce un punteggio supplementare.

(†) Da cui si conclude che $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.

e quindi, spostando opportunamente i termini della disuguaglianza e dividendo per $K - k > 0$, si ottiene una delle disuguaglianze cercate, ovvero

$$(p+1)K^p \geq \frac{K^{p+1} - k^{p+1}}{K - k}.$$

Analogamente, applicando la disuguaglianza per $x = \frac{K}{k}$, si ottiene

$$\left(\frac{K}{k}\right)^{p+1} \geq 1 + (p+1)\left(\frac{K}{k} - 1\right) \quad \text{e, moltiplicando per } k^{p+1} > 0, \text{ si ha} \quad K^{p+1} \geq k^{p+1} + (p+1)k^p(K-k)$$

e quindi, spostando opportunamente i termini della disuguaglianza e dividendo per $K - k > 0$, si ottiene l'altra disuguaglianza cercata, ovvero

$$(p+1)k^p \leq \frac{K^{p+1} - k^{p+1}}{K - k}.$$

(c) Le disuguaglianze del punto precedente, per $K = k+1$ e k che varia tra 0 ed $n-1$, danno

$$\begin{array}{rcl} (p+1)0^p \leq & 1^{p+1} - 0^{p+1} & \leq (p+1)1^p \\ (p+1)1^p \leq & 2^{p+1} - 1^{p+1} & \leq (p+1)2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (p+1)(n-1)^p \leq & n^{p+1} - (n-1)^{p+1} & \leq (p+1)n^p \end{array}$$

Sommando i membri delle disuguaglianze si ottiene $(p+1)(S - n^p) \leq n^{p+1} \leq (p+1)S$; dividendo per $(p+1)n^{p+1}$, si ottiene $\frac{S}{n^{p+1}} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p+1} \leq \frac{S}{n^{p+1}}$ e quindi $\frac{1}{p+1} \leq \frac{S}{n^{p+1}} \leq \frac{1}{p+1} + \frac{1}{n}$, che è quanto volevamo provare. □

ESERCIZIO 3. *Sia* $n \in \{1,2,3,4\}$ *tale che* $n \equiv n_3 \mod 4$. *Si consideri, al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *il sottoinsieme*

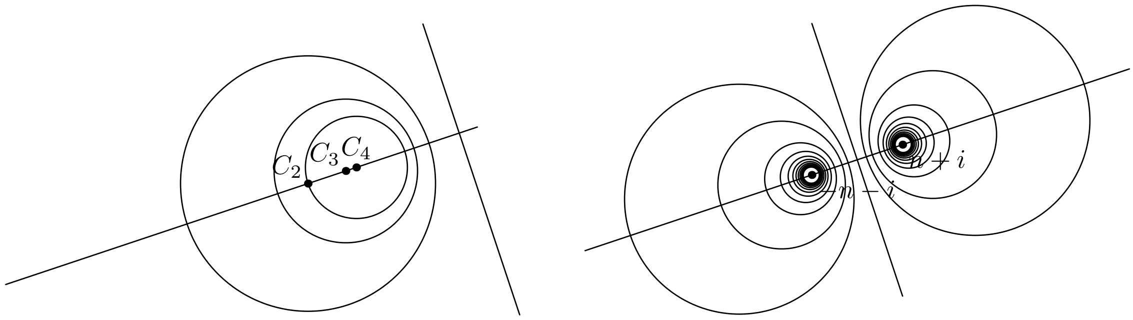
$$D_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left|\frac{z - n - i}{\bar{z} + n - i}\right| < \alpha \right\}.$$

Si dica per quali valori di α *il sottoinsieme non è vuoto e si descriva in tal caso* D_α. *Si disegnino (se esistono) i sottoinsiemi* D_α *per* $\alpha \in \{1,2,3,4\}$.

Svolgimento. Posto $z = x + iy$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e $z \neq -n - i$, si trova che

$$D_\alpha : \begin{cases} x^2 + y^2 + 2\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}(nx + y) + n^2 + 1 > 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ nx + y > 0 & \text{se } \alpha = 1 \\ x^2 + y^2 + 2\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}(nx + y) + n^2 + 1 < 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \emptyset & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}.$$

Dunque, se $\alpha > 1$, D_α è formato dai punti esterni al cerchio reale di centro $C_\alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\binom{-n}{-1}$ e raggio $r_\alpha = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\sqrt{n^2+1}$. Se $\alpha = 1$, D_1 è l'insieme dei punti al di sopra della retta di equazione $nx + y = 0$. Per $0 < \alpha < 1$, D_α è formato dai punti interni al cerchio reale di centro $C_\alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\binom{-n}{-1}$ e raggio $r_\alpha = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\sqrt{n^2+1}$. Infine, per i valori di $\alpha \leq 0$ si ha che $D_\alpha = \emptyset$.



Qui sopra, a sinistra, sono rappresentati i cerchi e le rette che delimitano i quattro insiemi $D_1, \ldots, D_4$. A destra si possono vedere degli ulteriori cerchi che delimitano gli insiemi della famiglia dei D_α. □

ESERCIZIO 4. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^5$ e si considerino i sottospazi $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$, ove*

$$u_1 = e_1 + e_3, \quad u_2 = e_2 - e_4 \qquad w_1 = e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5, \quad w_2 = e_3 + e_4 + e_5, \quad w_3 = e_4 + e_5.$$

(a) Si verifichi che $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$ e si determinino le matrici, rispetto alla base canonica, delle proiezioni, $\pi_U : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, sul sottospazio U, parallelamente a W, e $\pi_W : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, sul sottospazio W, parallelamente ad U.

(b) Sia $\phi : U \to W$ l'applicazione lineare definita da $\phi(u_1) = w_1 - w_2 + 2w_3$, $\phi(u_2) = w_2 + w_3$. Si verifichi che il sottospazio $U_\phi = \{\, u + \phi(u) \mid u \in U \,\} \subseteq \mathbb{R}^5$, è un complementare di W e che la restrizione di π_U ad U_ϕ induce un isomorfismo $\pi_{U|U_\phi} : U_\phi \to U$. Si mostri che $\phi = \pi_W \circ \pi_{U}{}^{-1}_{|U_\phi}$.

Svolgimento. (a) Mettendo in colonna le coordinate dei generatori di U e W, si trova la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 5 e quindi $\mathbb{R}^5 = U + W = U \oplus W$. Il sottospazio W ha equazioni cartesiane $\begin{cases} X_4 - X_5 = 0 \\ X_1 - X_2 = 0 \end{cases}$.
Dato un generico vettore $v = x_1e_1 + \cdots + x_5e_5$, la sua proiezione su U è il vettore $u = a_1u_1 + a_2u_2$ tale che $v - u \in W$. Dunque

$$\begin{pmatrix} x_1-a_1 \\ x_2-a_2 \\ x_3-a_1 \\ x_4+a_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \in W \iff \begin{cases} (x_4 + a_2) - x_5 = 0 \\ (x_1 - a_1) - (x_2 - a_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = x_1 - x_2 - x_4 + x_5 \\ a_2 = -x_4 + x_5 \end{cases}$$

e quindi

$$\pi_U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-x_2-x_4+x_5 \\ -x_4+x_5 \\ x_1-x_2-x_4+x_5 \\ x_4-x_5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{da cui si deduce} \quad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U) = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\pi_U + \pi_W = 1$, si conclude che

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_W) = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(1 - \pi_U) = \mathbf{1} - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice che ha come colonne le coordinate dei generatori $u_1 + \phi(u_1)$ ed $u_2 + \phi(u_2)$ di U_ϕ ed i generatori di W è ottenuta da B con operazioni elementari sulle colonne e quindi ha lo stesso rango. Dunque $\mathbb{R}^5 = U_\phi + W = U_\phi \oplus W$. Dato $u + \phi(u) \in U_\phi$, si ha che $\pi_U(u + \phi(u)) = u$, perché $\phi(u) \in W$, e questo è un isomorfismo (l'inversa è l'applicazione $\pi_{U}{}^{-1}_{|U_\phi} : u \mapsto u + \phi(u)$). Si ha quindi

$$\pi_W \circ \pi_{U}{}^{-1}_{|U_\phi}(u) = \pi_W(u + \phi(u)) = \phi(u), \qquad \text{per ogni } u \in U,$$

che è quanto dovevamo verificare. □

ESERCIZIO 5. *Sia $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ tale che $n \equiv n_5 \mod 4$. Si consideri il seguente sistema a coefficienti reali:*

$$\begin{cases} (t + 1)x_1 + 2x_3 - nx_4 = t + 1 \\ tx_2 - x_3 + nx_4 - nx_5 = 0 \\ (1 + t)x_1 + 2x_3 - tx_4 - 2x_5 = t - 2 \\ (t + 1)x_1 + tx_2 + x_3 - (2t + n)x_5 = 1 - 2t \end{cases}$$

(*a*) *Per quali valori di t il sistema non ammette soluzioni? Per tutti gli altri valori di t si determinino le soluzioni del sistema.*
(*b*) *Si risponda alle stesse domande del punto precedente nel caso in cui i coefficienti siano in $\mathbb{F}_2$.*

Svolgimento. (a) Attraverso la riduzione di Gauss (I, II, I-III, I+II-IV), ovvero moltiplicando a sinistra la matrice completa del sistema per la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} t+1 & 0 & 2 & -n & 0 & t+1 \\ 0 & t & -1 & n & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-n & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2t & 3t \end{pmatrix}.$$

Se $t = 0$ la matrice completa del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & n & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e le soluzioni sono} \quad \begin{pmatrix} 1+3n \\ 0 \\ -3n/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2n^2-2n \\ 0 \\ 2n-n^2 \\ 2 \\ n \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $t = -1$ la matrice completa del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -n & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & n & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-n & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e le soluzioni sono} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -3n/2 \\ 0 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $t = n$ la matrice completa del sistema è equivalente a

$$\begin{pmatrix} n+1 & 0 & 2 & -n & 0 & n+1 \\ 0 & n & -1 & n & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e le soluzioni sono} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} n \\ -n-1 \\ 0 \\ n+1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ n \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per ogni altro valore di t la matrice completa del sistema ha rango 4, così come la matrice incompleta e le soluzioni del sistema sono

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3n/2t \\ 0 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2t \\ t+1 \\ t^2+t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(*b*) La matrice P è invertibile anche in $\mathbb{F}_2$ e quindi la matrice completa del sistema è riga–equivalente alla matrice

$$\begin{pmatrix} t+1 & 0 & 0 & n & 0 & t+1 \\ 0 & t & 1 & n & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t+n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

che certamente non ha soluzione per $t \neq 0$. Per $t = 0$, il sistema continua a non avere soluzione se n è pari; mentre vi sono infinite soluzioni se n è dispari perché la matrice completa e quella incompleta hanno entrambe rango 3 e, precisamente, le soluzioni sono $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. □

ESERCIZIO 6. *Sia $n = n_6 + 4$.*

(a) Determinare l'inversa, se esiste, della matrice a coefficienti reali

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 1 & 0 & -n-1 & 2 \end{pmatrix}$$

e scriverla come prodotto di matrici elementari.

(b) La matrice B è invertibile in $\mathbb{F}_3$?

Svolgimento. La matrice B ha rango 4 e quindi, con operazioni elementari sulle righe, si può trasformare nella matrice identica. Il prodotto delle matrici elementari corrispondenti è l'inversa cercata, ovvero

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n+\frac{2}{n} & 0 & -\frac{2}{n} & -\frac{2}{n}-n \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

(b) Se n è un multiplo di 3, la prima e la quarta colonna di B sono proporzionali in $\mathbb{F}_3$ e quindi la matrice non può essere invertibile. Se invece n non è divisibile per 3, allora n è invertibile in $\mathbb{F}_3$ e tutte le matrici elementari che compaiono nella fattorizzazione di B^{-1} han senso anche in $\mathbb{F}_3$. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 12 aprile 2005

ESERCIZIO 1. *Si consideri la funzione di variabile complessa* $f(z) = \dfrac{z\sqrt{3}-1}{z+\sqrt{3}}$.

(a) *Si determini il dominio D della funzione f, si trovi, se esiste, un sottoinsieme di D su cui f induce una biiezione e si scriva l'espressione della funzione inversa.*

(b) *Si determinino, se esistono, i punti uniti della funzione f.*

(c) *Si determini l'insieme dei punti di D per cui $|f(z)| > 2$ e lo si rappresenti nel piano di Gauss.*

(d) *Si determinino le funzioni $f^2 = f \circ f$ ed $f^3 = f \circ f \circ f$. È vero che, dati $n, m \in \mathbb{N}$, si ha $f^n(z) = f^m(z)$ per ogni z se, e solo se, $n \equiv m \mod 6$?*

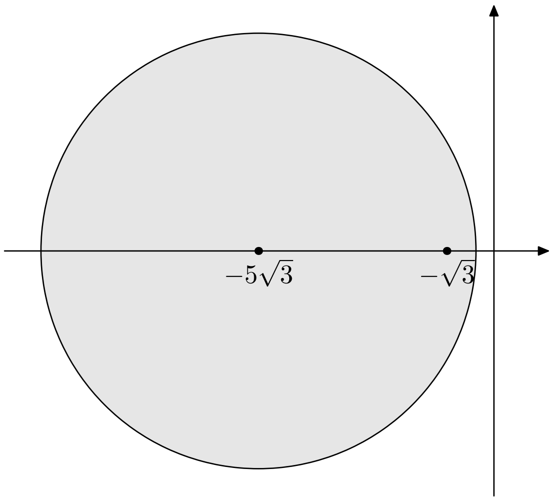
Svolgimento. (a) La funzione è definita per $z \neq -\sqrt{3}$, e la sua inversa è la funzione $g(z) = \dfrac{z\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-z}$, che è definita per $z \neq \sqrt{3}$. Dunque $D = \mathbb{C} \setminus \{-\sqrt{3}\}$ ed f induce una biiezione sull'insieme $\mathbb{C} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

(b) $f(z) = z$ se, e solo se, $z^2 = -1$; quindi i punti uniti sono $\{\pm i\}$.

(c) Scriviamo, come di consueto, $z = x + iy$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$\left|\frac{z\sqrt{3}-1}{z+\sqrt{3}}\right| > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x\sqrt{3}-1)^2 + 3y^2 > 4[(x+\sqrt{3})^2 + y^2] \quad \Longleftrightarrow \quad (x+5\sqrt{3})^2 + y^2 < 64.$$

Dunque l'insieme è formato da tutti i punti interni alla circonferenza di centro $-5\sqrt{3}$ e raggio 8, escluso $-\sqrt{3}$ che non appartiene al dominio di f. Si veda il disegno qui sotto



(d) Si ha $f^2(z) = \dfrac{z-\sqrt{3}}{z\sqrt{3}+1}$ ed $f^3(z) = -\dfrac{1}{z}$. Dunque, $f^6(z) = z$ e 6 è il minimo esponente per cui questo accade. È quindi vero che $f^n(z) = f^m(z)$ per ogni z se, e solo se, $n \equiv m \mod 6$. □

ESERCIZIO 2. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^5$ e si considerino i sottospazi $U = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ e $W = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$, ove*

$$\begin{array}{lcl} u_1 = 2e_1 - 3e_2 - 4e_3 + 2e_4 & & w_1 = e_1 + 2e_2 - 4e_3 + e_4 - e_5 \\ u_2 = e_1 - 2e_3 + e_5 & e & w_2 = -e_2 + 2e_3 \\ u_3 = -3e_1 + 6e_2 + 6e_3 - 4e_4 + e_5 & & w_3 = 3e_1 - 2e_2 + 4e_3 + 3e_4 \end{array}.$$

(a) Per ognuno dei sottospazi U e W, si determinino la dimensione, una base ed un sistema di equazioni cartesiane. Si verifichi che $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.
(b) Si determinino le matrici, rispetto alla base canonica, della proiezione, $\pi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, sul sottospazio U, parallelamente a W, e della simmetria $\sigma : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, di asse U e parallela al sottospazio W.
(c) Si determinino le matrici, rispetto alla base canonica, della proiezione, $\pi' : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, sul sottospazio W, parallelamente ad U, e della simmetria $\sigma' : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, di asse W e parallela al sottospazio U.
(d) Per ogni $x \in \mathbb{R}^5$, si calcolino $[\sigma' \circ \pi \circ \sigma' - \pi' \circ \sigma \circ \pi'](x)$ e $[\sigma \circ \pi' \circ \sigma - \pi \circ \sigma' \circ \pi](x)$.

Svolgimento. (a) Si ha $2u_1 - u_2 + u_3 = 0$, e quindi i tre vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti. Il sottospazio U ha quindi dimensione 2 ed una sua base è $\{u_1, u_2\}$. I vettori w_1, w_2, w_3 sono invece linearmente indipendenti e sono quindi una base del sottospazio W, che ha perciò dimensione 3. Delle equazioni cartesiane per i due sottospazi sono

$$U : \begin{cases} 2X_1 + X_3 = 0 \\ 2X_2 + 3X_4 = 0 \\ X_3 + 2X_4 + 2X_5 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} X_1 - X_4 = 0 \\ 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases}.$$

(b) Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^5$, la sua proiezione su U, parallelamente a W è il vettore $\pi(x) = a_1u_1 + a_2u_2$, ove i coefficienti a_1 ed a_2 sono determinati in modo che $x - \pi(x) \in W$. Dunque, si ha

$$\begin{cases} (x_1 - 2a_1 - a_2) - (x_4 - 2a_1) = 0 \\ 2(x_2 + 3a_1) + (x_3 + 4a_1 + 2a_2) = 0 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} a_1 = \frac{-2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4}{10} \\ a_2 = \frac{10x_1 - 10x_4}{10} \end{cases}.$$

Ricordiamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}^5$, si ha $x = \pi(x) + (1 - \pi)(x)$ e che $\sigma(x) = \pi(x) - (1 - \pi)(x) = 2\pi(x) - x$; ovvero $\sigma = 2\pi - 1$.

Le matrici cercate sono quindi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -6 & 0 \\ -12 & 8 & 4 & 12 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & 4 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}, \ \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma) = 2\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) - \mathbf{1}_5 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -6 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & -6 & 0 \\ -12 & 8 & -1 & 12 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

(c) Ricordando che $\pi' = 1 - \pi$ e $\sigma' = -\sigma$, le matrici sono

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi') = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ -6 & 4 & -3 & 6 & 0 \\ 12 & -8 & 6 & -12 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}, \ \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma') = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -6 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & -6 & 0 \\ -12 & 8 & -1 & 12 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

(d) Le applicazioni σ, π, σ', π' commutano tra loro, essendo tutte costruite a partire da π e dall'identità. Inoltre, $\sigma \circ \sigma = 1 = \sigma' \circ \sigma'$, $\pi \circ \pi = \pi$, $\pi' \circ \pi' = \pi'$, $\pi \circ \sigma' = -\pi$ e $\pi' \circ \sigma = -\pi'$. Si ha quindi

$$[\sigma' \circ \pi \circ \sigma' - \pi' \circ \sigma \circ \pi'](x) = [\sigma' \circ \sigma' \circ \pi - \pi' \circ \pi' \circ \sigma](x) = [\pi - \pi' \circ \sigma](x) = [\pi + \pi'](x) = x;$$

ed analogamente $[\sigma \circ \pi' \circ \sigma - \pi \circ \sigma' \circ \pi](x) = x$, per ogni $x \in \mathbb{R}^5$. □

ESERCIZIO 3. *Si considerino i sistemi lineari omogenei*

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t-1)X_1 + 2tX_3 + 2tX_4 - X_5 = 0 \\ (t+2)X_2 - tX_3 - X_4 + (t-2)X_5 = 0 \\ (t-1)X_1 + (t+2)X_2 + 2tX_3 - 3X_5 = 0 \\ (t-1)X_1 + (t+2)X_2 + tX_3 - X_4 + (t-3)X_5 = 0 \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.
(a) Si determini il rango di Σ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si determini una base del sottospazio delle soluzioni del sistema Σ_t, al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(c) Si determini il sottospazio generato da tutte le soluzioni dei sistemi Σ_t, $t \in \mathbb{R}$.
(d) Si risolva il sistema Σ_4 considerando i coefficienti nel corpo $\mathbb{F}_3$.

Svolgimento. (a) e (b). Consideriamo la matrice del sistema

$$\begin{pmatrix} t-1 & 0 & 2t & 2t & -1 \\ 0 & t+2 & -t & -1 & t-2 \\ t-1 & t+2 & 2t & 0 & -3 \\ t-1 & t+2 & t & -1 & t-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 2t & 2t & -1 \\ 0 & t+2 & -t & -1 & t-2 \\ 0 & 0 & t & 1-2t & -t \\ 0 & 0 & 0 & -2t & 0 \end{pmatrix},$$

come si verifica sottraendo alla terza ed alla quarta riga la somma delle prime due. Il rango della matrice è quindi uguale a 4 per $t \notin \{1, 0, -2\}$ e lo spazio delle soluzioni è $\left\langle \begin{pmatrix} (1-2t)(2+t) \\ 2(t-1) \\ (t-1)(t+2) \\ 0 \\ (t-1)(t+2) \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = -2$, si ha la matrice di rango 4

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e lo spazio delle soluzioni è } \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t = 0$, si ha la matrice di rango 3

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e lo spazio delle soluzioni è } \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t = 1$, si ha la matrice di rango 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e lo spazio delle soluzioni è } \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) Tutte le soluzioni soddisfano all'equazione $X_4 = 0$ e sono quindi contenute nel corrispondente iperpiano. Le soluzioni del sistema per $t \in \{1, 0, -2\}$ generano l'iperpiano $X_4 = 0$, che è quindi il sottospazio cercato.
(d) Per $t = 4$, si ha la matrice di rango 4

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & 8 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e lo spazio delle soluzioni (su } \mathbb{Q}) \text{ è } \left\langle \begin{pmatrix} 42 \\ 6 \\ 18 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

come abbiamo già osservato in precedenza.

Sul corpo $\mathbb{F}_3$, la matrice precedente è uguale alla matrice di rango 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e lo spazio delle soluzioni (su } \mathbb{F}_3) \text{ è } \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ciò conclude la discussione. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 15 luglio 2005

ESERCIZIO 1. *Si consideri l'insieme* $\mathscr{C} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - (2-i)z - (2+i)\bar{z} + 1 = 0 \}$.

(a) *Si verifichi che* $\mathscr{C}$ *è un cerchio del piano di Gauss e se ne determinino centro e raggio.*

(b) *Data la funzione* $f(z) = \dfrac{z}{z-i}$ *e si determinino i sottoinsiemi* $f^*(\mathscr{C})$ *e* $f_*(\mathscr{C})$ *dando delle equazioni soddisfatte dai loro elementi.*

(c) *Si dica quale tra gli insiemi* $f^*(\mathscr{C})$ *e* $f_*(\mathscr{C})$ *è una retta oppure un cerchio e si disegnino nel piano di Gauss i sottoinsiemi* $\mathscr{C}$, $f^*(\mathscr{C})$ *e* $f_*(\mathscr{C})$.

Svolgimento. (a) Osserviamo che $z\bar{z} - (2-i)z - (2+i)\bar{z} + 1 = (z-2-i)(\bar{z}-2+i) - 4 = \|z-(2+i)\|^2 - 4$. Dunque $\mathscr{C}$ è il cerchio di centro $2+i$ e raggio 2.

(b) e (c) Osserviamo che

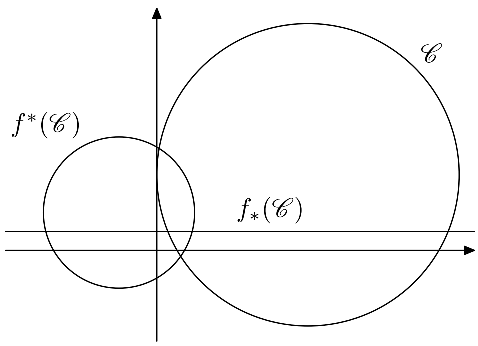
$$f^*(\mathscr{C}) = \{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathscr{C} \} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, f(z)\overline{f(z)} - (2-i)f(z) - (2+i)\overline{f(z)} + 1 = 0 \right\} =$$
$$= \{ z \in \mathbb{C} \mid 2z\bar{z} + (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 1 = 0 \}\,.$$

Quindi $f^*(\mathscr{C})$ è il cerchio di centro $\frac{i-1}{2}$ e raggio 1.

La funzione inversa di f è $g(w) = \frac{iw}{w-1}$. Dunque

$$f_*(\mathscr{C}) = \{ f(z) \mid z \in \mathscr{C} \} = \{ w \in \mathbb{C} \mid g(w) \in \mathscr{C} \} =$$
$$= \left\{ w \in \mathbb{C} \,\middle|\, g(w)\overline{g(w)} - (2-i)g(w) - (2+i)\overline{g(w)} + 1 = 0 \right\} = \{ w \in \mathbb{C} \mid 2iw - 2i\bar{w} + 1 = 0 \}\,.$$

Quindi $f_*(\mathscr{C})$ è la retta $y = \frac{1}{4}$ del piano di Gauss.



I sottoinsiemi sono rappresentati nella figura qui sopra. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino i sottospazi* U *e* W *di* $\mathbb{R}^4$ *così definiti:*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad e \qquad W : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Per ognuno dei sottospazi* U *e* W, *si determinino la dimensione ed una base e si verifichi se* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) *Si determini la matrice, rispetto alla base canonica, della proiezione,* $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, *sul sottospazio* U, *parallelamente a* W *e se ne calcolino nucleo ed immagine.*

(c) *Si determini la matrice, rispetto alla base canonica, della simmetria* $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, *di asse* W *e parallela al sottospazio* U. *È vero che, per ogni vettore* $v \in \mathbb{R}^4$ *si ha* $v + \sigma(v) = 2(v - \pi(v))$.

Svolgimento. (a) Detti, nell'ordine, u_1, u_2, u_3 i tre generatori di U, si vede che $2u_1 - u_2 + 2u_3 = 0$, quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti. Dunque, $\dim U = 2$ ed una base è data dai vettori u_1 ed u_3.

Il sistema omogeneo che definisce W ha rango 2; infatti la terza equazione è uguale alla differenza tra la seconda ed il doppio della prima. Dunque $\dim W = 2$ ed una base del sottospazio è data dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Infine osserviamo che i quattro vettori u_1, u_3, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti e quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(*b*) Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^4$, la sua proiezione su U, parallelamente a W è il vettore $\pi(x) = au_1 + bu_3$, ove i coefficienti a e b sono determinati in modo che $x - \pi(x) \in W$. Dunque, si ha

$$\begin{cases} (x_1 - 2a) - (x_2 - b) = 0 \\ 2(x_2 - b) + (x_3 + a - b) + (x_4 - b) = 0 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} a = \frac{4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4}{7} \\ b = \frac{x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4}{7} \end{cases}.$$

La matrice cercata è quindi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

(*c*) Ricordiamo che, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$, si ha $v = \pi(v) + (1 - \pi)(v)$ e che $\sigma(v) = -\pi(v) + (1 - \pi)(v) = v - 2\pi(v)$; ovvero $\sigma = 1 - 2\pi$, e la matrice è

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -9 & 8 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 6 & -10 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Infine, aggiungendo v ai due membri dell'uguaglianza $\sigma(v) = v - 2\pi(v)$ si ha la tesi. □

ESERCIZIO 3. *Si considerino i sistemi lineari*

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t-1)X_1 + (2t - t^2)X_2 + X_4 - 2tX_5 = 1 - t \\ (t-1)X_2 + tX_3 - tX_5 = -1 \\ (t-1)X_1 + (2t - t^2)X_2 + (2t-1)X_3 - X_4 + (2t+1)X_5 = t \\ (t-1)X_1 + (1 + t - t^2)X_2 - tX_3 - X_4 + 5tX_5 = 3t \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.

(a) Si determini il rango di Σ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si determini l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_t, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(c) Per ogni numero primo p, si risolva il sistema Σ_p, considerando i coefficienti nel corpo $\mathbb{F}_p$.

Svolgimento. (a) e (*b*). Consideriamo la matrice del sistema

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} t-1 & 2t - t^2 & 0 & 1 & -2t & 1-t \\ 0 & t-1 & t & 0 & -t & -1 \\ t-1 & 2t-t^2 & 2t-1 & -1 & 2t+1 & t \\ t-1 & 1+t-t^2 & -t & -1 & 5t & 3t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} t-1 & 2t-t^2 & 0 & 0 & t & t \\ 0 & t-1 & t & 0 & -t & -1 \\ 0 & 0 & 2t-1 & -1 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3t & 1-2t \end{array}\right),$$

come si verifica moltiplicando a sinistra per la matrice

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è quindi uguale a 4 per $t \notin \{1, \frac{1}{2}\}$ e le soluzioni di Σ_t sono i punti della retta $\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \\ 1-2t \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \\ 3t(1-t) \\ 1-t \end{pmatrix} \right\rangle$. Per $t = \frac{1}{2}$, si ha un sistema di rango 3

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e le soluzioni formano il piano } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t = 1$, si ha di nuovo un sistema di rango 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e le soluzioni formano il piano } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) Sul corpo $\mathbb{F}_p$, la matrice del sistema Σ_p è uguale a

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

come si ottiene sottraendo alla III la I riga ed alla IV la differenza tra la I e la II.

Se $p \neq 2$, il sistema ha rango 4 e le soluzioni sono i punti della retta

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $p = 2$, il sistema ha rango 3 e le soluzioni sono i punti del piano

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ciò conclude la discussione. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 13 settembre 2005

ESERCIZIO 1.

(a) *Determinare il $MCD(111, 2310)$ e scriverlo come combinazione dei due numeri dati.*

(b) *Determinare le soluzioni della congruenza* $111X \equiv 138 \mod 2310$.

(c) *Determinare le soluzioni del sistema* $\begin{cases} 111X \equiv 138 \mod 2310 \\ 2X \equiv 4 \mod 13 \end{cases}$.

Svolgimento. (a) $MCD(111, 2310) = 3 = 333 \cdot 111 - 2310 \cdot 16$.

(b) Anche 138 è divisibile per 3, quindi la prima congruenza è equivalente a $37X \equiv 46 \mod 770$. Per quanto visto nel punto precedente, 333 è l'inverso di 37, modulo 770, e quindi le soluzioni della congruenza sono la classe laterale $x = 333 \cdot 46 + 770\mathbb{Z} = 688 + 770\mathbb{Z}$.

(c) Sia $x = 688 + 770k \equiv 12 + 3k \mod 13$ e sostituiamolo ad X nella seconda congruenza. Si ottiene così $6k \equiv 6 \mod 13$ e quindi $k \in 1 + 13\mathbb{Z}$, da cui si conclude che le soluzioni del sistema sono gli elementi della classe laterale $1458 + 10010\mathbb{Z}$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'insieme* $\mathscr{C} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - (2-3i)z - (2+3i)\bar{z} + 4 = 0 \}$.

(a) *Si verifichi che $\mathscr{C}$ è un cerchio del piano di Gauss e se ne determinino centro e raggio.*

(b) *Data la funzione* $f(z) = \dfrac{z-i}{z-2}$ *e si determinino i sottoinsiemi $f^*(\mathscr{C})$ e $f_*(\mathscr{C})$ scrivendo delle equazioni soddisfatte dai loro elementi.*

(c) *Si dica quale tra gli insiemi $f^*(\mathscr{C})$ e $f_*(\mathscr{C})$ è una retta oppure un cerchio e si disegnino nel piano di Gauss i sottoinsiemi $\mathscr{C}$, $f^*(\mathscr{C})$ e $f_*(\mathscr{C})$.*

Svolgimento. (a) Osserviamo che $z-(2+3i)z-(2-3i)\bar{z}+4 = (z-2-3i)(\bar{z}-2+3i)-9 = \|z-(2+3i)\|^2-9$. Dunque $\mathscr{C}$ è il cerchio di centro $2+3i$ e raggio 3.

(b) e (c) Osserviamo che

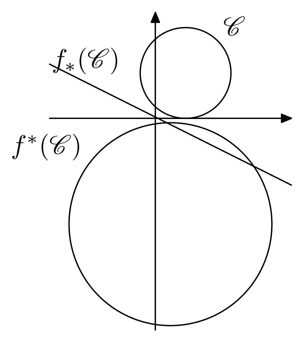
$$f^*(\mathscr{C}) = \{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathscr{C} \} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, f(z)\overline{f(z)} - (2-3i)f(z) - (2+3i)\overline{f(z)} + 4 = 0 \right\} = \\ = \{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - (1+7i)z - (1-7i)\bar{z} + 5 = 0 \}.$$

Quindi $f^*(\mathscr{C})$ è il cerchio di centro $1-7i$ e raggio $3\sqrt{5}$.

La funzione inversa di f è $g(w) = \frac{2w-i}{w-1}$. Dunque

$$f_*(\mathscr{C}) = \{ f(z) \mid z \in \mathscr{C} \} = \{ w \in \mathbb{C} \mid g(w) \in \mathscr{C} \} = \\ = \left\{ w \in \mathbb{C} \,\middle|\, g(w)\overline{g(w)} - (2-3i)g(w) - (2+3i)\overline{g(w)} + 4 = 0 \right\} = \\ = \{ w \in \mathbb{C} \mid (3-6i)w + (3+6i)\bar{w} - 1 = 0 \}.$$

Quindi $f_*(\mathscr{C})$ è la retta $6x + 12y = 1$ del piano di Gauss.



I sottoinsiemi sono rappresentati nella figura a fianco. □

ESERCIZIO 3. *Si considerino i sottospazi U e W di $\mathbb{R}^4$ così definiti:*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad e \quad W : \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Per ognuno dei sottospazi U e W, si determinino la dimensione ed una base e si verifichi se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.*
(b) *Si determini la matrice, rispetto alla base canonica, della proiezione, $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, sul sottospazio U, parallelamente a W e se ne calcolino nucleo ed immagine.*
(c) *Si determini la matrice, rispetto alla base canonica, della simmetria $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di asse W e parallela al sottospazio U. È vero che, per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ si ha $v - \sigma(v) = 2\pi(v)$.*

Svolgimento. (a) Detti, nell'ordine, u_1, u_2, u_3 i tre generatori di U, si vede che $2u_1 - u_2 + u_3 = 0$. I tre vettori sono linearmente dipendenti ed una base di U è data dai vettori u_1 ed u_2; quindi $\dim U = 2$.

Il sistema omogeneo che definisce W ha rango 2; infatti la prima equazione è uguale alla differenza tra la seconda ed il doppio della terza. Dunque $\dim W = 2$ ed una base del sottospazio è data dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Infine osserviamo che i quattro vettori u_1, u_2, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti e quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^4$, la sua proiezione su U, parallelamente a W è il vettore $\pi(x) = au_1 + bu_2$, ove i coefficienti a e b sono determinati in modo che $x - \pi(x) \in W$. Dunque, si ha

$$\begin{cases} 2(x_1 - a - 2b) - (x_3 - b) = 0 \\ (x_2 + a) + (x_3 - b) + (x_4 - b) = 0 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} a = \frac{4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4}{7} \\ b = \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4}{7} \end{cases}.$$

La matrice cercata è quindi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e, per costruzione, il nucleo è W e l'immagine è U. (c) Ricordiamo che, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$, si ha $v = \pi(v) + (1 - \pi)(v)$ e che $\sigma(v) = -\pi(v) + (1 - \pi)(v) = v - 2\pi(v)$; ovvero $\sigma = 1 - 2\pi$, e la matrice è

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 & 2 \\ -8 & -1 & 10 & 6 \\ 4 & 4 & -5 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Infine, si ha $v - \sigma(v) = v - (v - 2\pi(v)) = 2\pi(v)$, come richiesto. □

ESERCIZIO 4. *Si considerino i sistemi lineari*

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t-1)X_2 + (t+1)X_3 + tX_4 - tX_5 = t^2 + 2t - 1 \\ tX_1 + (t-1)X_2 + (1-t)X_3 + (1+t)X_4 = 2t - t^2 - 2 \\ tX_1 + 2X_3 - tX_5 = 4t \\ tX_1 + (1-t)X_3 + X_4 = 2t - t^2 - 1 \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.
(a) *Si determini il rango di Σ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.*
(b) *Si determini l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_t, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*
(c) *Per ogni numero primo p, si risolva il sistema Σ_p, considerando i coefficienti nel corpo $\mathbb{F}_p$.*

Svolgimento. (a) e (b). Consideriamo la matrice del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & t-1 & t+1 & t & -t & | & t^2+t-1 \\ t & t-1 & 1-t & 1+t & 0 & | & 2t-t^2-2 \\ t & 0 & 2 & 0 & -t & | & 4t \\ t & 0 & 1-t & 1 & 0 & | & 2t-t^2-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} t & 0 & 1-t & 0 & 0 & | & 2t-t^2 \\ 0 & t-1 & 0 & t & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & t+1 & 0 & -t & | & t^2+2t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix},$$

come si verifica moltiplicando a sinistra per la matrice invertibile

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è quindi uguale a 4 per $t \notin \{-1,0,1\}$ e le soluzioni di Σ_t sono i punti della retta $\begin{pmatrix} 1\\1\\t\\-1\\-1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} t-1\\0\\t\\0\\t+1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Per $t=-1$, si ha un sistema di rango 4

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e le soluzioni formano la retta} \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\-1\\-1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t=0$, si ha un sistema di rango 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e le soluzioni formano il piano} \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t=1$, si ha di nuovo un sistema di rango 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e le soluzioni formano il piano} \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\-1\\-1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) Sul corpo $\mathbb{F}_p$, la matrice del sistema Σ_p è uguale a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Qualunque sia il primo p, il sistema ha rango 3, e le soluzioni. sono i punti del piano

$$\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ciò conclude la discussione. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 4 novembre 2005

ESERCIZIO 1. *Si ponga* $a = n_1n_3n_5 + 900$ *e* $b = n_2n_4n_6 + 600$[(†)].

(a) *Si determini* $d = MCD(a, b)$ *e gli interi* $m, n \in \mathbb{Z}$ *tali che* $d = ma + nb$ *con* $|m| < b$ *ed* $|n| < a$.

(b) *Si determinino le soluzioni delle congruenze* $mX \equiv d \mod |n|$ *ed* $nX \equiv d \mod |m|$.

(c) *Posto* $s = a/d$ *ed* $r = b/d$, *si determinino le soluzioni del sistema di congruenze* $\begin{cases} 7X \equiv 5 \mod s \\ 3X \equiv 4 \mod r \end{cases}$.

Svolgimento. (a) Sia $M = 540213$ il numero di matricola. Allora, $a = 501 + 900 = 1401$ e $b = 423 + 600 = 1023$, e $d = 3 = -46 \cdot 1401 + 63 \cdot 1023$.

(b) Osserviamo che $MCD(m, n) = 1$, perché $1 = m(a/d) + n(b/d)$, e quindi le due congruenze ammettono entrambe soluzione. Dalla combinazione $d = ma+nb$, si ricava che tutte le soluzioni della prima congruenza formano la classe $a+|n|\mathbb{Z} = 15+63\mathbb{Z}$. Analogamente le soluzioni della seconda congruenza sono gli elementi della classe $b + |m|\mathbb{Z} = 11 + 46\mathbb{Z}$.

(c) Siano $s = a/d = 467$ ed $r = b/d = 341$; si ha $MCD(7, s) = 1 = MCD(3, r)$ e quindi le due congruenze hanno soluzione. Si ha $1 = 3 \cdot 467 - 200 \cdot 7$ da cui si deduce che $7 \cdot (-200) \equiv 1 \mod 467$ e quindi tutte le soluzioni della congruenza $7X \equiv 5 \mod 467$ sono gli interi $X \in (-200 \cdot 5) + 467\mathbb{Z} = -66 + 467\mathbb{Z}$. Sia dunque $X = 401 + 467Y$ e sostituiamolo nella seconda congruenza; si ottiene così che $37Y \equiv 165 \mod 341$. Essendo $1 = 341 \cdot 14 - 129 \cdot 37$, si deduce che $37 \cdot 212 \equiv 1 \mod 341$ e quindi tutte le soluzioni di quest'ultima congruenza sono gli interi $Y \in 212 \cdot 165 + 341\mathbb{Z} = 198 + 341\mathbb{Z}$. Dunque le soluzioni del sistema sono gli interi $X = 401 + 467(198 + 341k) = 92867 + 159247k$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

ESERCIZIO 2. *Sia* x *un numero reale diverso da* 1.

(a) *Posto* $\sigma_n = x + x^2 + \cdots + x^{n+1}$, *si verifichi per induzione che* $\sigma_n = x\dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, *per ogni* $n \geq 1$.

(b) *Posto* $S_n = 1x + 2x^2 + \cdots + nx^n$, *si verifichi che* $S_{n+1} = xS_n + \sigma_n$, *per ogni* $n \geq 1$.

(c) *Da quanto visto nel punto precedente e dall'osservazione che* $S_{n+1} = S_n + (n + 1)x^{n+1}$, *si deduca una formula chiusa per* S_n *e la si verifichi per induzione.*

(d) *Si osservi che*

$$9 \cdot 1 + 2 = 11, \quad 9 \cdot 12 + 3 = 111, \quad 9 \cdot 123 + 4 = 1111, \quad 9 \cdot 1234 + 5 = 11111.$$

Si usi la formula chiusa di S_n, *per un opportuno valore di* x, *per generalizzare queste identità per ogni intero positivo* n. *Come si può modificare l'espressione ottenuta per ottenere un analogo risultato per una base* b *diversa da* 10?

Svolgimento. (a) Per $n = 1$ si ha $\sigma_1 = x + x^2 = x\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Supponiamo quindi vera l'uguaglianza per un numero naturale n e verifichiamola per $n + 1$. Si ha

$$\sigma_{n+1} = x + x^2 + \cdots + x^{n+2} = x\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+2} = x\frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}.$$

(b) Con un calcolo diretto, si ha

$$xS_n + \sigma_n = x(1x + 2x^2 + \cdots + nx^n) + (x + x^2 + \cdots + x^{n+1}) = x + 2x^2 + \cdots + nx^n + (n + 1)x^{n+1},$$

che è quanto volevamo.

(†) N.B. le cifre vanno giustapposte e non moltiplicate tra loro. Ad esempio, se il numero di matricola è 510342, allora $a = 504 + 900 = 1404$ e $b = 132 + 600 = 732$.

(c) Dalla relazione $S_n + (n+1)x^{n+1} = S_{n+1} = xS_n + \sigma_n$ si deduce

$$(x-1)S_n = (n+1)x^{n+1} - x\frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \qquad \text{ovvero} \qquad S_n = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}.$$

Verifichiamo la formula per induzione. Per $n=1$ si ha $S_1 = x = \frac{x^3-2x^2+x}{(x-1)^2}$. Supponiamo quindi vera l'uguaglianza per un numero naturale n e verifichiamola per $n+1$. Si ha

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1x + 2x^2 + \cdots + nx^n + (n+1)x^{n+1} = \\ &= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2} + (n+1)x^{n+1} = \\ &= \frac{(n+1)x^{n+3}-(n+2)x^{n+2}+x}{(x-1)^2}, \end{aligned}$$

che è quanto volevamo.

(d) I membri di sinistra dell'uguaglianza sono i termini iniziali della sequenza

$$T_n = 9\cdot 10^n\left(\sum_{j=1}^{n} j10^{-j}\right) + (n+1).$$

Per quanto visto al punto precedente, possiamo scrivere,

$$T_n = 9\cdot 10^n\frac{n(1/10)^{n+2}-(n+1)(1/10)^{n+1}+1/10}{(1/10-1)^2} + (n+1) = \frac{10^{n+1}-1}{9}$$

che generalizza le uguaglianze date per un numero naturale n qualsiasi.

È ora chiaro che, per ottenere delle analoghe identità per una qualsiasi base, b, basta scrivere b al posto di 10 e $b-1$ al posto di 9, ovvero

$$(b-1)b^n\sum_{j=1}^{n} jb^{-j} + (n+1) = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}.$$

Le identità possono essere facilmente verificate per induzione su n. □

ESERCIZIO 3. *Siano* $k, m, n \in \{1,2,3\}$ *tali che* $k \equiv n_4 \mod 3$, $m \equiv n_5 \mod 3$, $n \equiv n_6 \mod 3$, *e si consideri la funzione di variabile complessa* $f(z) = \frac{miz-k}{z-1-ni}$.

(a) *Si determinino dominio ed immagine di* f *e l'eventuale funzione inversa.*

(b) *Si determini il sottoinsieme* $U = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| < k \,\}$ *e lo si disegni nel piano di Gauss.*

(c) *Posto* $a = m + in$ *e* $b = 2kn$, *si consideri il sottoinsieme* $R = \{\, z \in \mathbb{C} \mid az + \bar{a}\bar{z} + b = 0 \,\}$. *Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss i sottoinsiemi* R *ed* $R \cap g^*(U)$, *ove* g *è l'inversa di* f.

(d) *Si dica se* $g_*(R)$ *è un cerchio oppure una retta.*

Svolgimento. (a) La funzione f è definita quando $z \neq 1 + ni$ e la sua inversa è la funzione $g(w) = \frac{(1+ni)w-k}{w-mi}$, come si verifica con un calcolo diretto. La funzione g è definita per $w \neq mi$, e quindi, il dominio e l'immagine di f sono rispettivamente $D = \mathbb{C} \smallsetminus \{1+ni\}$ e $C = \mathbb{C} \smallsetminus \{mi\}$.

(b) Posto $z = x + iy$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha che, per ogni $z \in D$,

$$\left|\frac{miz-k}{z-1-ni}\right| < k \iff (m^2-k^2)(x^2+y^2) + 2k^2x + 2k(m+kn)y - k^2n^2 < 0.$$

Dunque, se $m \neq \pm k$, ovvero se n_4 non è congruo ad n_5 modulo 3, l'insieme U è formato dai punti del piano di Gauss delimitati dalla circonferenza di centro $c = -\dfrac{k^2}{m^2 - k^2} - i\dfrac{k(m + kn)}{m^2 - k^2}$ e raggio $r = \dfrac{k\sqrt{(nm + k)^2 + m^2}}{|m^2 - k^2|}$. Precisamente, si tratta dei punti interni alla circonferenza se $m > k$ e dei punti esterni se $m < k$. Nel caso in cui $m = k$, si trova che U è l'insieme dei punti al di sopra della retta di equazione $2x + 2(n + 1)y = n^2$.

(c) Nelle notazioni del punto precedente, si ricava che R è uguale all'insieme dei punti (x, y) del piano di Gauss tali che $y = \frac{m}{n}x + k$ e si tratta quindi della retta passante per i punti corrispondenti ai numeri complessi ki e $-\frac{kn}{m}$.

Osserviamo che, essendo f e g l'una l'inversa dell' altra, si ha

$$g^*(U) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid g(z) \in U \,\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |f(g(z))| < k \,\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < k \,\}$$

e quindi $R \cap g * U$ è l'intersezione della retta R con i punti interni al cerchio di raggio k, centrato nell'origine, ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \\ y = \frac{m}{n}x + k \end{cases}$$

ovvero i punti interni al segmento di estremi $z_1 = ik$ e $z_2 = -\frac{2mnk}{n^2+m^2} + ik\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}$.

(d) Ricordiamo che l'immagine diretta di una retta, r, tramite g è un cerchio, a meno che la retta non passi per il punto ove si annulla il denominatore di g, nel qual caso, l'immagine diretta è una retta. Nel nostro caso la retta R contiene il punto mi se, e solo se, $m = k$. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 7 dicembre 2005

ESERCIZIO 1. *Sia* $n \in \{1,2,3,4\}$ *tale che* $n \equiv n_5 \mod 4$. *Si considerino in* $\mathbb{R}^4$ *i vettori*

$$u_1 = ne_1 + e_3, \quad u_2 = \frac{1}{2n+1}e_2, \qquad w_1 = -e_2 + (2n+1)e_3, \quad w_2 = 2ne_1 + 2e_3 + \frac{1}{n}e_4;$$

ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ *è, come di consueto, la base canonica.*

(*a*) *Posto* $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ *e* $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, *si verifichi che* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ *e si determinino delle equazioni cartesiane per* U *e* W. *Detta* $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *la proiezione su* U, *parallelamente a* W, *si scriva la matrice* $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$.

(*b*) *Sia* $\phi : W \to U$ *l'applicazione lineare di matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *rispetto alle basi* $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ *e* $\mathcal{U} = \{u_1, u_2\}$. *Si consideri il sottospazio* $W_\phi = \{\, w + \phi(w) \mid w \in W \,\}$ *e si determinino* $\dim W_\phi$ *ed una sua base. Detta* $\pi_\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *la proiezione su* U *parallela a* W_ϕ, *si calcolino* $\pi_\phi(w_1)$ *e* $\pi_\phi(w_2)$.

(*c*) *Sia* $W' = \langle e_1 - 2e_3, ne_2 + e_4 \rangle$. *Si verifichi che* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W'$. *Si dica se esiste una applicazione lineare* $\psi : W \to U$ *tale che* $W' = \{\, w + \psi(w) \mid w \in W \,\}$ *e, in caso affermativo, si scriva la matrice* $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\psi)$.

Svolgimento. (a) Con un calcolo diretto, si verifica che u_1, u_2, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti e sono quindi una base di $\mathbb{R}^4$. Dunque $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Delle equazioni cartesiane per i due sottospazi possono essere

$$U : \begin{cases} x_1 - nx_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} x_1 - 2n^2x_4 = 0 \\ (2n+1)x_2 + x_3 - 2nx_4 = 0 \end{cases}.$$

Dato un generico vettore, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, la sua proiezione su U è una combinazione lineare $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, tale che $x - \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in W$. Sostituendo le coordinate di questo vettore nelle equazioni del sottospazio W, si ricava

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{n} - 2nx_4, \qquad \alpha_2 = (2n+1)x_2 + x_3 - \frac{x_1}{n},$$

da cui si deduce che la matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2n^2 \\ -\frac{1}{n(2n+1)} & 1 & \frac{1}{2n+1} & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & -2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Si ha $W_\phi = \langle w_1 + \phi(w_1), w_2 + \phi(w_2) \rangle$ ed i due vettori sono una base del sottospazio. Infatti, se fosse $\beta_1(w_1 + \phi(w_1)) + \beta_2(w_2 + \phi(w_2)) = 0$ si avrebbe $\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 = -\beta_1\phi(w_1) - \beta_2\phi(w_2) \in U \cap W = \langle 0 \rangle$. Da cui si conclude che $\beta_1 = \beta_2 = 0$, per l'indipendenza di w_1, w_2. Dunque $\dim W_\phi = 2$ ed $\mathbb{R}^4 = U \oplus W_\phi$. Da quanto visto nel punto precedente, dato un vettore $x \in \mathbb{R}^4$, esistono (e sono unici) due vettori $u \in U$ e $w \in W$ tali che $x = u + w$. Si ha quindi

$$x = (u - \phi(w)) + (w + \phi(w)), \qquad \text{con } u - \phi(w) \in U,\ w + \phi(w) \in W_\phi;$$

da cui si deduce che $\pi_\phi(x) = u - \phi(w) = \pi(x) - \phi(x - \pi(x))$. Dunque $\pi_\phi(w_1) = -\phi(w_1) = -2u_1 + u_2$, $\pi_\phi(w_2) = -\phi(w_2) = 3u_1 - 2u_2$.

(*c*) I vettori u_1, u_2, $e_1 - 2e_3$, $ne_2 + e_4$ sono linearmente indipendenti, come si verifica con un calcolo diretto, quindi sono una base di $\mathbb{R}^4 = U \oplus W'$. Un'applicazione lineare $\psi : W \to U$, soddisfacente alle condizioni date, esiste se, e solo se, esiste la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\psi)$, ovvero se esistono delle costanti $a_{11}, \dots, a_{22}$ tali che

$$w_1 - a_{11}u_1 - a_{21}u_2 \in W' \qquad w_2 - a_{12}u_1 - a_{22}u_2 \in W'.$$

Osservando che delle equazioni cartesiane per W' sono $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - nx_4 = 0 \end{cases}$, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} (2n+1)a_{11} + 2n + 1 = 0 \\ -1 + \frac{a_{21}}{2n+1} = 0 \\ (2n+1)a_{12} + 4n + 2 = 0 \\ \frac{a_{22}}{2n+1} - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} a_{11} = -1 \\ a_{21} = 2n+1 \\ a_{12} = -2 \\ a_{22} = 2n+1 \end{cases}.$$

L'esistenza dell'applicazione ψ, poteva essere dedotta anche nel modo seguente. Detta $\pi' : \mathbb{R}^4 \to W$, la proiezione su W, parallelamente ad U, dalla condizione $U \cap W' = \langle 0 \rangle$, si deduce che $\pi'_{|W'} : W' \to W$ è un isomorfismo tra W' e W. L'omomorfismo $\psi : W \to U$ altri non è che $\pi \circ {\pi'_{|W'}}^{-1}$. □

ESERCIZIO 2. *Sia $n \in \{1, 2, 3\}$ tale che $n \equiv n_6 \mod 3$. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 3 e siano*

- *$\pi : \mathbb{R}[X] \to V$ la proiezione su V nella direzione del sottospazio $\langle X^n \mid n \geq 4 \rangle$;*
- *$\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'applicazione $P(X) \mapsto (X-n)^3 P'(X) - 3(X-n)^2 P(X)$, ove $P'(X)$ è la derivata di $P(X)$;*
- *$\phi : V \to V$ la composizione $V \xrightarrow{j} \mathbb{R}[X] \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}[X] \xrightarrow{\pi} V$, ove j è l'inclusione $V \subset \mathbb{R}[X]$.*

(*a*) *Verificare che ϕ è un'applicazione lineare e scrivere la sua matrice rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.*
(*b*) *Determinare una base per kerϕ, imϕ, ker$\phi \cap$ imϕ e kerϕ + imϕ.*
(*c*) *Si consideri $\phi^2 = \phi \circ \phi$. È vero che $V = \ker\phi^2 \oplus \operatorname{im}\phi^2$ e che $\phi(\ker\phi^2) \subseteq \ker\phi^2$ ed $\phi(\operatorname{im}\phi^2) \subseteq \operatorname{im}\phi^2$? È vero che $\ker\phi^n = \ker\phi^2$ per ogni $n \geq 2$?*
(*d*) *Dire se il sottoinsieme $A = \{\, \beta \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} V \mid \phi \circ \beta = 0 \,\}$ è un sottospazio di $\operatorname{End}_{\mathbb{R}} V$. In caso affermativo, si consideri l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}} : \operatorname{End}_{\mathbb{R}} V \to M_4(\mathbb{R})$ e si determinino la dimensione ed una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(A)$.*

Svolgimento. (a) La derivazione, così come la moltiplicazione per un fissato polinomio sono applicazioni lineari. La composizione e la somma di applicazioni lineari sono applicazioni lineari, per cui ϕ è un'applicazione lineare. La sua matrice è

$$A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} -3n^2 & -n^3 & 0 & 0 \\ 6n & 0 & -2n^3 & 0 \\ -3 & 3n & 3n^2 & -3n^3 \\ 0 & -2 & 0 & 6n^2 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Il nucleo è il sottospazio $\ker\phi = \langle (X-n)^3 \rangle$, di dimensione 1. L'immagine ha dimensione 3 ed è il sottospazio $\langle 2n^3X - 3n^2X^2, 2X^3 - 3nX^2 + n^3, 6n^2X^3 - 3n^3X^2 \rangle$. Inoltre, $\phi(X-n) = -2(X-n)^3$ genera $\ker\phi$, e quindi $\ker\phi \subset \operatorname{im}\phi$, da cui si conclude che $\ker\phi \cap \operatorname{im}\phi = \ker\phi$ e $\ker\phi + \operatorname{im}\phi = \operatorname{im}\phi$.

(*c*) Si ha

$$\ker\phi^2 = \langle X-n, (X-n)^3 \rangle \qquad \operatorname{im}\phi^2 = \langle 4x^3 - 6nX^2 + 4n^2X - n^3, 20X^3 - 15nX^2 + 6n^2X - n^3 \rangle$$

e $\ker\phi^2 \cap \operatorname{im}\phi^2 = \langle 0 \rangle$; quindi $\mathbb{R}^4 = \ker\phi^2 \oplus \operatorname{im}\phi^2$. È ovvio che, se $P \in \ker\phi^2$, allora $\phi(P) \in \ker\phi \subset \ker\phi^2$. Se, invece, $P \in \operatorname{im}\phi^2$, allora $P = \phi^2(Q)$ per un polinomio $Q \in V$ e $\phi(P) = \phi^3(Q) = \phi^2(\phi(Q)) \in \operatorname{im}\phi^2$. Infine, che $\ker\phi^n = \ker\phi^2$, è certamente vero per $n = 2$; supponiamolo vero per un esponente n e dimostriamolo per l'esponente successivo. Se $\ker\phi^{n+1}$ contenesse propriamente $\ker\phi^2 = \ker\phi^n$, esisterebbe un polinomio P, con $0 \neq P \in \operatorname{im}\phi^n \cap \ker\phi$; ma $\operatorname{im}\phi^n \subseteq \operatorname{im}\phi^2$, $\ker\phi \subset \ker\phi^2$ e $\operatorname{im}\phi^n \cap \ker\phi \subseteq \operatorname{im}\phi^2 \cap \ker\phi^2 = \langle 0 \rangle$ e quindi un tale P non può esistere.

(*d*) Il sottoinsieme A contiene l'omomorfismo nullo ed inoltre, poiché la composizione di applicazioni lineari distribuisce rispetto alla somma, si conclude che A è un sottospazio. Un omomorfismo β appartiene ad A se, e solo se, $\operatorname{im}\beta \subseteq \ker\phi$ e quindi una matrice sta in $\alpha_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n}(A)$ se le colonne sono multipli delle coordinate di $(X-n)^3$ e quindi una base di $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(A)$ sono le matrici

$$\begin{pmatrix} -n^3 & 0 & 0 & 0 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 \\ -3n & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -n^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3n^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3n^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -n^3 \\ 0 & 0 & 0 & 3n^2 \\ 0 & 0 & 0 & -3n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha perció dimensione 4. □

ESERCIZIO 3. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_4 \mod 4$. Si consideri il seguente sistema a coefficienti reali:*

$$\begin{cases} (1-2n-t)x_1 + x_2 + (1-t)x_3 + 2x_4 + x_5 = n \\ (t+2n-1)x_1 + (t-1)x_2 + (t-1)x_3 + (t-3)x_4 - (1+n)x_5 = -n^2 - n \\ tx_2 + (t-1)x_3 + (t-1)x_4 - nx_5 = -n^2 \\ (1-2n-t)x_1 + (t+1)x_2 + (1-t)x_3 + 2x_4 + x_5 = n \end{cases}$$

(*a*) *Per quali valori di t il sistema non ammette soluzioni? Per quali valori di t ammette un'unica soluzione? Per quali valori di t il sistema ammette infinite soluzioni? In ogni caso, determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.*

(*b*) *Si determinino le soluzioni del sistema, al variare di t in $\mathbb{R}$.*

(*c*) *Dire se esiste l'inversa della matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ n & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e, in caso affermativo, scriverla come prodotto di matrici elementari. Nel caso in cui B non sia invertibile determinare due matrici invertibili $P, Q \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ tali che $PBQ = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ove $r = rkB$.

Svolgimento. (a) Attraverso la riduzione di Gauss (I, I+II, III-I-II e IV-2I-II) si arriva al sistema

$$\begin{cases} (1-2n-t)x_1 + x_2 + (1-t)x_3 + 2x_4 + x_5 = n \\ tx_2 + (t-1)x_4 - nx_5 = -n^2 \\ (t-1)x_3 = 0 \\ (1-t)x_4 + nx_5 = n^2 \end{cases}$$

Il sistema ammette soluzioni per ogni valore di t e, in particolare, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$ è una soluzione, qualunque sia il valore di t. Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni valore del parametro t e, precisamente, le soluzioni del sistema omogeneo associato formano un sottospazio di dimensione 1 per $t \notin \{1-2n, 0, 1\}$. Per gli altri valori di t il sistema omogeneo associato ammette un sottospazio di dimensione 2 di soluzioni.

(*b*) Abbiamo già visto nel punto precedente che il sistema ha la soluzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$, indipendentemente dal valore del parametro t. Per $t \notin \{1-2n, 0, 1\}$ la matrice incompleta ha rango 4 e le soluzioni del sistema omogeneo associato sono tutti i vettori del sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ n \\ t-1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = 0$, la matrice incompleta ha rango 3 e le soluzioni del sistema sono tutti i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ n \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2n-1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t = 1$, la matrice incompleta ha rango 3 e le soluzioni del sistema sono tutti i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t = 1 - 2n$, la matrice incompleta ha rango 3 e le soluzioni del sistema sono tutti i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) Per $n \neq 1$, la matrice B ha rango 4 e quindi, con operazioni elementari sulle righe, si può trasformare nella matrice identica. Ad esempio, $I, I - II, I - III, IV - nI$, seguita da $I, II, III, \frac{1}{n-1}IV + II$ e da $I - II + IV, II, III + IV, IV$. Il prodotto delle matrici elementari corrispondenti è l'inversa cercata, ovvero

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \frac{1}{n-1} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{n-2}{n-1} & -1 & -1 & \frac{1}{n-1} \\ -\frac{1}{n-1} & -1 & 0 & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}$$

Per $n = 1$ la matrice B ha rango 3 e pensiamola come la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ nella base canonica. Le matrici P e Q saranno quindi le matrici di cambiamento di base che portano ϕ in forma canonica. Prendiamo la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, ove $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = e_3$, $v_4 = e_1 + e_3 + e_4$, e l'ultimo vettore è una base di $\ker\phi$. Prendiamo poi la base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, ove $w_1 = \phi(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $w_2 = \phi(e_2) = e_1 + e_3 + e_4$, $w_3 = \phi(e_3) = -e_3$, $w_4 = e_4$. È chiaro che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; quindi le matrici cercate sono $Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{W}}(1) = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 15 dicembre 2005

ESERCIZIO 1. *Sia n un numero intero positivo.*

(a) *Si calcoli*
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

(b) *Si calcoli*
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

(c) *Si calcoli*
$$\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2[n/2]}$$

ove $[n/2]$ indica il più grande intero, minore o uguale ad $n/2$.

Svolgimento. (a) Per la formula del binomio $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ è uguale a $(1+1)^n = 2^n$.

(b) Per la formula del binomio $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ è uguale a $(-1+1)^n = 0$.

(c) Da quanto visto nei punti precedenti si deduce
$$\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + (-1)^k\binom{n}{k} = 2^{n-1}.$$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 2. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_6 \mod 4$. Si consideri la funzione di variabile complessa*
$$f(z) = \frac{(n+1)z + i(n-1)}{z+i}.$$

(a) *Si determinino il dominio e l'immagine di f e si determini la sua funzione inversa.*

(b) *Si disegnino i sottoinsiemi H e $D = f_*(H)$, ove $H = \{\, z \in \mathbb{C} \mid i(z-\bar{z}) < 0 \,\}$.*

(c) *Si considerino le trasformazioni $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ed $ad-bc = 1$, e si mostri che per ogni tale g si ha $g_*(H) = H = g^*(H)$. Data $g(z) = z+1$, sia h la trasformazione composta $h = f \circ g \circ f^{-1}$. Si determini $h_*(D)$.*

Svolgimento. (a) f è definita per $z \neq -i$ ed ha come immagine $\mathbb{C} \setminus \{n+1\}$. Su quest'ultimo insieme è definita la funzione inversa $f^{-1}(z) = i\dfrac{z-n+1}{n+1-z}$.

(b) Osserviamo che $i(z-\bar{z}) = -2Im(z)$ e quindi H è il semipiano formato dai numeri complessi con parte immaginaria positiva. Si ha
$$D = f_*(H) = f^{-1*}(H) = \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; i(f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(z)}) < 0 \,\right\} = \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z\bar{z} - nz - n\bar{z} + n^2 - 1 < 0 \,\right\}.$$

Quindi D è il disco aperto (senza il bordo) di centro n e raggio 1 e si ha $f_*^{-1}(D) = f^*(D) = H$.

(c) Consideriamo la trasformazione $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ e la sua inversa $g^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{a-cz}$. Si ha
$$g^*(H) = \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; i(g(z) - \overline{g(z)}) < 0 \,\right\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid i(ad-bc)(z-\bar{z}) < 0 \,\} = H$$

e, analogamente, $g_*(H) = g^{-1*}(H) = H$. Da quanto visto si conclude che $h_*(D) = f_*(g_*(f_*^{-1}(D))) = f_*(g_*(H)) = f_*(H) = D$, qualunque sia g tra le trasformazioni del tipo descritto e quindi ciò vale in particolare per $g(z) = z + 1$. □

ESERCIZIO 3. *Sia $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ tale che $n \equiv n_5 \mod 4$. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{C}^4$,*

$$D = \langle ne_1 - ie_3 + (i - n)e_4, nie_1 - (n - i)e_2 + e_3\rangle \qquad \text{ed} \qquad E = \langle e_1, e_2\rangle\,,$$

ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ è la base canonica.

(a) Per ognuno dei sottospazi, D ed E, si determinino delle equazioni cartesiane e si verifichi se $\mathbb{C}^4 = D \oplus E$. Si dica se la proiezione su E, parallela a D, induce un isomorfismo $\mathbb{C}^4/D \cong E$.

(b) Si indichi con $\bar{D}$ l'insieme dei vettori di $\mathbb{C}^4$ che si ottengono dai vettori di D applicando il coniugio a tutte le coordinate. Si verifichi se $\mathbb{C}^4 = D \oplus \bar{D}$. Si considerino la base $\{e_1, e_2\}$ su E e la base di $\bar{D}$ formata dai coniugati dei vettori di base di D e si scriva la matrice dell'applicazione composta $\bar{D} \xrightarrow{j} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\pi} E$, ove j è l'inclusione e π la proiezione parallela a D.

(c) Sia $L = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale reale generato dalla base canonica e si verifichi che la restrizione ad L della proiezione $\pi : \mathbb{C}^4 \to E$ induce un isomorfismo, $\phi : L \to E$, di spazi vettoriali reali. Si scriva la matrice nella base data dell'endomorfismo, $\psi : L \to L$, definito da $\psi(x) = \phi^{-1}(i\phi(x))$, per ogni $x \in L$.

Svolgimento. (a) Due sistemi di equazioni cartesiane sono

$$D : \begin{cases} ix_1 + nx_3 = 0 \\ x_1 + ix_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad E : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Le coordinate dei generatori di E e D sono le colonne della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ni & n \\ 0 & 1 & i-n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i-n \end{pmatrix}$, che ha chiaramente rango 4; dunque $\mathbb{C}^4 = D \oplus E$. La proiezione su E, parallela a D, è un endomorfismo di $\mathbb{C}^4$ che ha D come nucleo ed E come immagine, quindi, per il Primo Teorema di Isomorfismo, $E \cong \mathbb{C}^4/D$.

(b) $\bar{D}$ è il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ generato dai coniugati dei due vettori di base di D, ovvero

$$\bar{D} = \langle ne_1 + ie_3 - (i + n)e_4, -nie_1 - (n + i)e_2 + e_3\rangle$$

e si può verificare, in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente, che $\mathbb{C}^4 = D \oplus \bar{D}$. Detti $\bar{d}_1$ e $\bar{d}_2$ i due vettori di base di $\bar{D}$, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ di $\pi \circ j$ è determinata dalle condizioni

$$\bar{d}_1 - ae_1 - ce_2 \in D \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} a = 2n \\ c = 2ni \end{cases}$$

e

$$\bar{d}_2 - be_1 - de_2 \in D \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} b = -2ni \\ d = -2i \end{cases}$$

come si ricava dalle equazioni cartesiane di D.

(c) I sottospazi L ed E hanno entrambi dimensione 4 su $\mathbb{R}$ e quindi la proiezione π induce un isomorfismo se, e solo se, la sua restrizione ad L è iniettiva. Ora $\ker \pi_{|L} = L \cap \ker \pi = L \cap D = \langle 0\rangle$, perché, se $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, si ha

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in D \iff \begin{cases} ix_1 + nx_3 = 0 \\ x_1 + ix_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

In particolare, si ha

$$\pi(e_1) = e_1, \quad \pi(e_2) = e_2, \quad \pi(e_3) = -nie_1 + (n - i)e_2, \quad \pi(e_4) = -ie_2;$$

quindi, indicata con $\mathcal{L} = \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di L e con $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, ie_1, ie_2\}$ la base "naturale" di E come spazio vettoriale reale, si ha

$$P = \alpha_{\mathcal{L},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La moltiplicazione per i, $m_i : E \to E$, nella base data di E, ha matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(m_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice di ψ è uguale a $P^{-1}AP$, ovvero

$$\alpha_{\mathcal{L},\mathcal{L}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/n & 0 \\ 0 & 0 & 1/n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1/n & 0 & 0 & 0 \\ 1/n & -1 & -n & 0 \end{pmatrix}.$$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 4. *Si considerino le matrici*

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 1 & -2t & 2 \\ 0 & t & -t & 1 & 0 \\ t-1 & 0 & t+1 & -2t-2 & 2t+2 \\ t-1 & -t & 1+t & -t & 2 \end{pmatrix}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.

(a) Si determini il rango di A_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(b) Si determini l'insieme, R_t, delle matrici B_t, tali che $A_t B_t = \mathbf{1}_4$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(c) Per ogni numero primo p, si determini il nucleo di A_p, considerando le entrate della matrice come elementi di $\mathbb{F}_p$.

Svolgimento. (a) e (b) Rispondere alla seconda domanda significa risolvere quattro sistemi lineari che hanno le colonne di B_t come incognite e le colonne della matrice identica, $\mathbf{1}_4$, come termini noti. Operiamo quindi col metodo di riduzione di Gauss sulla matrice completa di questo sistema, ovvero

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} t-1 & 0 & 1 & -2t & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -t & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t-1 & 0 & t+1 & -2t-2 & 2t+2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t-1 & -t & 1+t & -t & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

che è riga-equivalente a

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - I \\ IV - I + II \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} t-1 & 0 & 1 & -2t & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -t & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & -2 & 2t & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e quindi possiamo già affermare che, per $t \notin \{-1, 0, 1\}$, la matrice A_t ha rango 4 e quindi l'insieme R_t non è vuoto.

Proseguendo con la tecnica di eliminazione si ottiene

$$\begin{array}{l} I+\frac{2t}{t+1}IV) \\ \frac{1}{t}(II-\frac{1}{t+1}IV) \\ \frac{1}{t}(III+\frac{2}{t+1}IV) \\ \frac{1}{t+1}IV \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} t-1 & 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1-2t}{t+1} & \frac{2t}{t+1} & 0 & \frac{2t}{t+1} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{t(t+1)} & \frac{1}{t+1} & 0 & -\frac{1}{t(t+1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{t+3}{t(t+1)} & \frac{2}{t(t+1)} & \frac{1}{t} & \frac{2}{t(t+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{t+1} & \frac{1}{t+1} & 0 & \frac{1}{t+1} \end{array}\right)$$

ed infine

$$\begin{array}{l} \frac{1}{t-1}(I-III) \\ II+III \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2t^2+3}{t(t^2-1)} & \frac{2t^2-2}{t(t^2-1)} & -\frac{1}{t(t-1)} & \frac{2t^2-2}{t(t^2-1)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{t+2}{t(t+1)} & \frac{t+2}{t(t+1)} & \frac{1}{t} & \frac{1}{t(t+1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{t+3}{t(t+1)} & \frac{2}{t(t+1)} & \frac{1}{t} & \frac{2}{t(t+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{t+1} & \frac{1}{t+1} & 0 & \frac{1}{t+1} \end{array}\right).$$

Abbiamo quindi trovato una soluzione particolare al problema, a cui dobbiamo sommare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato, ovvero le matrici che hanno come colonne vettori nel nucleo di A_t. Quindi, per $t \notin \{-1,0,1\}$, gli elementi di R_t sono le matrici

$$\begin{pmatrix} -\frac{2t^2+3}{t(t^2-1)} & \frac{2t^2-2}{t(t^2-1)} & -\frac{1}{t(t-1)} & \frac{2t^2-2}{t(t^2-1)} \\ 2a-\frac{t+2}{t(t+1)} & 2b+\frac{t+2}{t(t+1)} & 2c+\frac{1}{t} & 2d-\frac{1}{t(t+1)} \\ 2a-\frac{t+3}{t(t+1)} & 2b+\frac{2}{t(t+1)} & 2c+\frac{1}{t} & 2d-\frac{2}{t(t+1)} \\ -\frac{1}{t+1} & \frac{1}{t+1} & 0 & \frac{1}{t+1} \\ -a & -b & -c & -d \end{pmatrix} \qquad \text{al variare di } a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Per $t = \pm 1$ il rango di A_t è uguale a 3, mentre per $t = 0$ il rango è 2. In tutti e tre i casi $R_t = \varnothing$ perché nessun prodotto $A_t X$ può avere rango maggiore di $\operatorname{rk} A_t$.

(c) Osserviamo infine che, su $\mathbb{F}_p$, la matrice A_p diventa

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque ha rango 2 ed il suo nucleo è il sottospazio $K = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, che mantiene senso anche in $\mathbb{F}_2$. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 9 gennaio 2006

ESERCIZIO 1. *Siano $n \geq 0$ e $k \geq 1$ due numeri interi e si indichi con P_k^n lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado n in k indeterminate a coefficienti reali.*
(a) *Si mostri che* $\dim P_k^n = \binom{n+k-1}{n}$.
(b) *Si mostri che, per ogni $n \geq 0$ e $k \geq 1$, si ha*

$$\binom{n+k}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k-1}{j}.$$

(c) *È vero che si ha*

$$\binom{n+k+1}{k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n+i-1}{n} + \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k-1}{j}$$

per ogni $n \geq 0$ e $k \geq 1$?

Svolgimento. (a) La dimensione dello spazio vettoriale P_k^n coincide con il numero di monomi di grado n, in k indeterminate, $X_1, \dots, X_k$. Se $k = 1$, per ogni intero $n \geq 0$ c'è un unico monomio di grado n, X_1^n, e quindi $\dim P_1^n = 1 = \binom{n}{n}$, che dimostra la formula in questo caso particolare. Se $k > 1$, osserviamo che, se $n = 0$, l'unico monomio di grado 0 è la cortante 1 e quindi $\dim P_k^0 = 1 = \binom{k-1}{0}$. Possiamo quindi fare induzione supponendo che la formula sia vera per tutte le coppie di interi in cui almeno uno dei due è minore di n o di k e distinguiamo i monomi della base di P_k^n mettendo da una parte quelli in cui compare X_1 e dall'altra quelli in cui questo fattore non compare. I primi si otterranno moltiplicando per X_1 i monomi di grado $n-1$, mentre i secondi sono i monomi di grado n in $k-1$ indeterminate, applicando l'ipotesi induttiva, si ottiene

$$\dim P_k^n = \dim P_k^{n-1} + \dim P_{k-1}^n = \binom{n+k-2}{n-1} + \binom{n+k-2}{n} = \binom{n+k-1}{n}$$

che è quanto dovevamo verificare.
(b) Sia fissato k e dimostriamo la formula per induzione su n. Se $n = 0$, si ha $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k-1}{0}$. Per $n > 0$, applicando l'ipotesi induttiva, si ha

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{j+k-1}{j} = \binom{n+k}{n+1} + \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k-1}{j} = \binom{n+k}{n+1} + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

che dimostra la formula.
(c) Per quanto visto al punto precedente, si tratta di verificare se è vero che

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{n+i-1}{n} = \binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k-1}.$$

Possiamo quindi fissare n e fare induzione su k. Infatti, per $k = 1$, si ha $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{0}$. Per $k > 1$, applicando l'ipotesi induttiva, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{k+1} \binom{n+i-1}{n} = \binom{n+k}{n} + \sum_{i=1}^{k} \binom{n+i-1}{n} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Dunque la formula è vera per ogni k. □

ESERCIZIO 2. *Sia*

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

(*a*) *Si verifichi che, qualunque siano A e B in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, si ha $AB \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ed $A^{-1} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.*

(*b*) *Data $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, si consideri la funzione di variabile complessa $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Si determinino il dominio ed immagine di f_A. Sia $H = \{ z \in \mathbb{C} \mid i(z - \bar{z}) < 0 \}$ e si mostri che $f_{A*}(H) = H = f_A^*(H)$ per ogni $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.*

(*c*) *Siano $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Si mostri che $f_{AB} = f_A \circ f_B$.*

Svolgimento. (a) Siano

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \quad AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Operando sulle righe della matrice e ricordando che $ad - bc = 1$, si ha

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -c & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+bc & -ab \\ 0 & 1 & -c & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d & -b \\ 0 & 1 & -c & a \end{array}\right);$$

e quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

(*b*) La funzione $f_A(z)$ è definita per $z \neq -d/c$ ed ha come immagine il sottoinsieme $\mathbb{C} \smallsetminus \{a/c\}$. Inoltre, con un calcolo diretto, si verifica che $f_A^{-1}(z) = \frac{dz-b}{a-cz} = f_{A^{-1}}(z)$ e quindi, essendo $f_{A*}(H) = f_A^{-1*}(H) = f_{A^{-1}}^*(H)$, è sufficiente verificare che $f_A^*(H) = H$ per ogni $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Infatti,

$$\begin{aligned} z \in f_A^*(H) &\iff i\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right) < 0 \\ &\iff i\big((az+b)(c\bar{z}+d) - (a\bar{z}+b)(cz+d)\big) < 0 \\ &\iff i(z - \bar{z})(ad - bc) < 0, \end{aligned}$$

che permette di concludere, essendo $ad - bc = 1$.

(*c*) Siano A e B come sopra, $z \neq -d/c$, e consideriamo il vettore $\binom{z}{1} \in \mathbb{C}^2$. Si ha

$$A\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} = (cz+d)\begin{pmatrix} f_A(z) \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed $f_A(z)$ è determinato dalla condizione

$$\begin{pmatrix} f_A(z) \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\langle A\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Osserviamo che si ha

$$AB\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = A(\gamma z + \delta)\begin{pmatrix} f_B(z) \\ 1 \end{pmatrix} = (\gamma z + \delta)A\begin{pmatrix} f_B(z) \\ 1 \end{pmatrix} = (\gamma z + \delta)(cf_B(z) + d)\begin{pmatrix} f_A(f_B(z)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\begin{pmatrix} f_A(f_B(z)) \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\langle AB\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, da cui si conclude che $f_{AB}(z) = f_A(f_B(z))$. □

ESERCIZIO 3. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_5 \mod 4$. Si consideri la matrice,*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -n & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si scrivano le matrici*

$$S = (B\,{}^tB)^{-1}, \qquad R = {}^tB(B\,{}^tB)^{-1}, \qquad P = {}^tB(B\,{}^tB)^{-1}B.$$

(b) *Si determinino una base di nucleo ed immagine di P e si dicano che relazioni vi sono tra questi sottospazi e nucleo ed immagine di B e ${}^tB$. È vero che P è la matrice di una proiezione?*

(c) *Sia $v = \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ n \end{pmatrix}$ e si consideri il sistema lineare $Bx = v$. Si mostri che tutte le soluzioni del sistema sono del tipo $Rv + (\mathbf{1} - P)y$, al variare di y in $\mathbb{R}^4$. È così per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$?*

Svolgimento. (a) Si ha

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & n^2+1 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10/49 & 0 & -1/49 \\ 0 & 1/(n^2+1) & 0 \\ -1/49 & 0 & 5/49 \end{pmatrix}, \; R = {}^tBS = \begin{pmatrix} 3/7 & 0 & -1/7 \\ 0 & -n/(n^2+1) & 0 \\ 1/7 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1/(n^2+1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = RB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^2/(n^2+1) & 0 & -n/(n^2+1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -n/(n^2+1) & 0 & 1/(n^2+1) \end{pmatrix}.$$

(b) Le prime 3 colonne della matrice P sono linearmente indipendenti, mentre la quarta è uguale alla seconda divisa per $-n$ e quindi $\operatorname{rk} P = 3$, $\operatorname{im} P = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\ker P = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} \right\rangle$. Si tratta di sottospazi di $\mathbb{R}^4$ e quindi non vi sono relazioni con $\operatorname{im} B$ e $\ker {}^tB$ che sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$. D'altro canto, si hanno le inclusioni naturali $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} {}^tB$ e $\ker B \subseteq \ker P$ che sono entrambo uguaglianze per motivi di dimensione, essendo $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} {}^tB = 3 = \operatorname{rk} P$.

Si ha $P^2 = {}^tB(B\,{}^tB)^{-1}(B{}^tB)(B\,{}^tB)^{-1}B = P$ e quindi P è la matrice della proiezione di $\mathbb{R}^4$ su $\operatorname{im} {}^tB$ parallelamente a $\ker B$.

(c) Si ha $BRv = (B{}^tB)(B\,{}^tB)^{-1}v = v$ e quindi Rv è una soluzione particolare del sistema. Inoltre, $\mathbf{1} - P$ è la matrice della proiezione su $\ker P = \ker B$ (parallelamente ad $\operatorname{im} P$) e quindi i vettori del tipo $(\mathbf{1} - P)y$, al variare di $y \in \mathbb{R}^4$, generano $\ker B$, ovvero il sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Si conclude che

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid Bx = v \right\} = \left\{ Rv + (\mathbf{1} - P)y \;\middle|\; y \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

e che ciò vale qualsiasi sia il vettore v in $\mathbb{R}^3$. □

ESERCIZIO 4. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_6 \mod 4$. Si considerino i sistemi lineari*

$$\Sigma_t = \begin{cases} (t-2)x_1 - tx_2 - 3x_3 - tx_4 = -t \\ tx_2 + 2x_3 = 2 - t \\ (t-2)x_1 + (t+n-1)x_3 = 2 + n \\ (t-2)x_1 - (1+t+n)x_3 + tx_4 = 2 - t - n \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.

(a) *Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, quando il sistema ha soluzione e la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.*

(b) *Si scrivano le soluzioni del sistema al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

(c) *Per ogni numero primo p, si determinino le soluzioni del sistema Σ_p, considerando i coefficienti del sistema come elementi di $\mathbb{F}_p$.*

Svolgimento. (a) e (b) Operiamo sulle righe della matrice completa del sistema per arrivare ad una forma a scalini.

$$\begin{pmatrix} t-2 & -t & -3 & -t & -t \\ 0 & t & 2 & 0 & 2-t \\ t-2 & 0 & t+n-1 & 0 & 2+n \\ t-2 & 0 & -1-t-n & t & 2-t-n \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} III \\ II \\ III-I \\ IV-III \end{array} \begin{pmatrix} t-2 & 0 & t+n-1 & 0 & 2+n \\ 0 & t & 2 & 0 & 2-t \\ 0 & t & t+n+2 & t & t+2+n \\ 0 & 0 & -2t-2n & t & -t-2n \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{l} \\ \\ III-II \\ IV+2III-2II \end{array} \begin{pmatrix} t-2 & 0 & t+n-1 & 0 & 2+n \\ 0 & t & 2 & 0 & 2-t \\ 0 & 0 & t+n & t & 2t+n \\ 0 & 0 & 0 & 3t & 3t \end{pmatrix}$$

Si conclude quindi che, per $t \notin \{-n, 0, 2\}$ la matrice incompleta ha rango 4, così come la matrice completa e quindi il sistema Σ_t ammette un'unica soluzione, uguale a $v_t = \begin{pmatrix} \frac{3-t}{t-2} \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per $t = -n$ le ultime due righe della matrice completa diventano proporzionali e quindi la matrice completa e quella incompleta hanno entrambo rango 3 ed il sistema omogeneo associato ha un sottospazio di dimensione 1 di soluzioni. Le soluzioni del sistema formano quindi la classe laterale $\begin{pmatrix} -\frac{n+3}{n+2} \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{n}{n+2} \\ 2 \\ n \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = 0$ l'ultima riga della matrice completa diventa identicamente nulla, mentre la seconda e la terza riga diventano proporzionali e quindi la matrice completa e quella incompleta hanno entrambo rango 2 ed il sistema omogeneo associato ha un sottospazio di dimensione 2 di soluzioni. Le soluzioni del sistema formano quindi la classe laterale $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = 2$ la matrice incompleta ha rango 3 mentre quella completa ha rango 4 e quindi il sistema non ha soluzione. Il sistema omogeneo associato ha comunque un sottospazio di dimensione 1 di soluzioni.

(c) La matrice completa del sistema Σ_p è

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & n-1 & 0 & 2+n \\ -2 & 0 & -1-n & 0 & 2-n \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} -I \\ \\ III-I \\ IV-I \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & n+2 & 0 & 2+n \\ 0 & 0 & 2-n & 0 & 2-n \end{pmatrix}.$$

Quindi, se $p \neq 2$, la matrice incompleta e la matrice completa hanno entrambo rango 2 ed il sistema ha le soluzioni $\begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Se $p = 2$ ed n è pari, il sistema è omogeneo ed ha rango 1, quindi le soluzioni formano il sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Se invece n è dispari la matrice incompleta ha ancora rango 1, mentre la matrice completa ha rango 2 e quindi non vi sono soluzioni. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 4 aprile 2006

ESERCIZIO 1. *Sia $z \in \mathbb{C}$.*
(a) Si disegni il sottoinsieme, D, del piano di Gauss definito dalle condizioni

$$D : \begin{cases} |z + \bar{z}| \leq 1 \\ z\bar{z} \geq 1 \end{cases} .$$

(b) Si consideri la funzione $f(z) = -\frac{1}{z+1}$. Si determinino i domini, D_f, di f e D_g, della sua inversa, g, e si scriva esplicitamente la funzione $g(z)$. Si determini l'insieme $D_f \cap D_g \cap D$.
(c) Si determini e si disegni nel piano di Gauss il sottoinsieme $f_*(D)$.

Svolgimento. (a) Come di consueto scriviamo $z = x + iy$, ove $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\tfrac{1}{2} \leq x \leq \tfrac{1}{2},\ x^2 + y^2 \geq 1 \right\}.$$

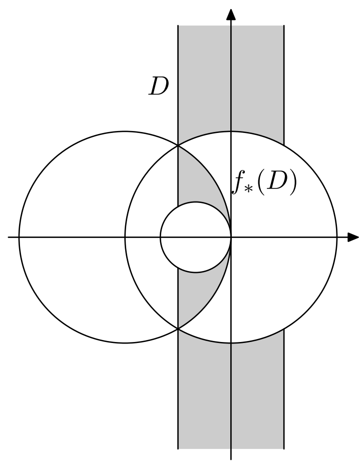
Si tratta cioè dei numeri posti all'esterno della circonferenza unitaria ed all'interno della striscia verticale, come nel disegno sottostante.
(b) Il dominio di f è il piano complesso privato del punto $z = -1$. L'inversa di f è la funzione $g(z) = -\frac{z+1}{z}$ che è quindi definita su tutto il piano complesso, con l'eccezione dell'origine $z = 0$. Entrambi i punti sono esterni a D e quindi $D_f \cap D_g \cap D = D$.

(c) Osserviamo che

$$f_*(D) = g^*(D) : \begin{cases} -1 \leq g(z) + \overline{g(z)} \leq 1 \\ g(z)\overline{g(z)} \geq 1 \end{cases} .$$

e quindi

$$f_*(D) : \begin{cases} (x + \frac{1}{3})^2 + y^2 \geq \frac{1}{9} \\ (x + 1)^2 + y^2 \leq 1 \\ 2x \geq -1 \end{cases} \qquad \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}.$$



per cui $f_*(D)$ è l'insieme evidenziato in grigio, delimitato dalle tre circonferenze nel disegno qui a fianco, compreso il bordo, con l'esclusione dell'origine, $z = 0$, che non appartiene all'immagine di f.

Fine della discussione $\square$

ESERCIZIO 2. *Si considerino i vettori*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1\\1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\1\\-1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\-1\\-1 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} -2\\-1\\0\\1\\2 \end{pmatrix}$$

ed i sottospazi $U = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ e $W = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$.

(a) Dai generatori dati si estraggano delle basi di U e W e si determinino delle equazioni cartesiane per i due sottospazi. È vero che $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$?

(b) Sia $\pi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la proiezione su U, parallelamente a W. Si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$. Qual è il rango di A?

(c) Si dica se esiste un'applicazione lineare, $\phi : W \to U$, tale che

$$\phi(w_1 + w_2) = 2u_1 - 2u_3, \qquad \phi(w_2 + w_3) = u_3 - u_1, \qquad \phi(w_1 + w_3) = 3u_1 - 2u_2 - u_3$$

e si scriva la matrice di ϕ rispetto alle basi determinate al punto (a). È vero che l'insieme $W_\phi = \{\, w - \phi(w) \mid w \in W \,\}$ è un sottospazio complementare ad U?

Svolgimento. (a) I tre vettori u_1, u_2, u_3, sono linearmente indipendenti, mentre si ha $w_1 + 3w_2 + 2w_3 = 0$. Dunque una base di U è $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$, ed una base di W è $\mathcal{W} = \{w_2, w_3\}$. I due sottospazi sono determinati dai seguenti sistemi di equazioni cartesiane

$$U : \begin{cases} x_1 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} x_1 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Le cinque equazioni formano un sistema di rango massimo e quindi si ha $U \cap W = \langle 0\rangle$; e dunque $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

(b) Dato $x = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$, la proiezione $\pi(x) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$, è determinata dalla condizione $x - \pi(x) \in W$; e quindi $\pi(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1+x_5\\ x_2+x_4\\ 2x_3\\ x_2+x_4\\ x_1+x_5 \end{pmatrix}$. Si conclude che

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

(c) Si ha

$$\phi(w_1) = 3u_1 - u_2 - 2u_3, \qquad \phi(w_2) = u_2 - u_1, \qquad \phi(w_3) = u_3 - u_2$$

e quindi $\phi(w_1) + 3\phi(w_2) + 2\phi(w_3) = 0$, da cui si conclude che l'applicazione ϕ esiste ed ha matrice

$$B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0\\ 1 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qualunque sia l'applicazione lineare $\psi : W \to U$, il sottospazio $W_\psi = \{\, w + \psi(w) \mid w \in W \,\}$ è un complementare di U, dunque ciò vale anche per ϕ. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 18 luglio 2006

ESERCIZIO 1. *Sia* $z \in \mathbb{C}$.

(a) Si disegni il sottoinsieme, D, del piano di Gauss definito dalle condizioni

$$D : \begin{cases} z\bar{z} \leq 1 \\ z\bar{z} + z + \bar{z} \geq 0 \\ z\bar{z} - z - \bar{z} \geq 0 \end{cases} .$$

(b) Si consideri la funzione $f(z) = -\frac{z+1}{z}$. Si determinino i domini, D_f, di f e D_g, della sua inversa, g, e si scriva esplicitamente la funzione $g(z)$. Si determini l'insieme $D_0 = D_f \cap D_g \cap D$.

(c) Si determini e si disegni nel piano di Gauss il sottoinsieme $f_*(D_0)$.

(d) Esistono punti $x \in D_0$ tali che $f(x) = x$?

Svolgimento. (a) Si tratta dei numeri complessi posti all'interno della circonferenza unitaria centrata nell'origine ed all'esterno delle due circonferenze unitarie centrate in 1 e -1, compreso il bordo (cf. il disegno qui sotto).

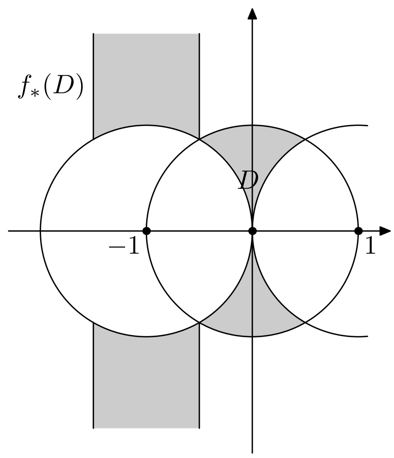
(b) Il dominio di f è il piano complesso privato dell'origine. L'inversa di f è la funzione $g(z) = -\frac{1}{1+z}$ che è quindi definita su tutto il piano complesso, con l'eccezione del punto $z = -1$. Si ha $D_0 = D_f \cap D_g \cap D = D \smallsetminus \{0\}$.

(c) Osserviamo che

$$f_*(D_0) = g^*(D_0) : \begin{cases} g(z)\overline{g(z)} \leq 1 \\ g(z)\overline{g(z)} + g(z) + \overline{g(z)} \geq 0 \\ g(z)\overline{g(z)} - g(z) - \overline{g(z)} \geq 0 \end{cases} .$$

ovvero

$$f_*(D_0) : \begin{cases} (z+1)(\bar{z}+1) \geq 1 \\ z + \bar{z} \leq -1 \\ z + \bar{z} \geq -3 \end{cases}$$



per cui $f_*(D)$ è l'insieme evidenziato in grigio, delimitato dalla circonferenza e dalle due rette nel disegno qui a fianco, compreso il bordo.

(d) I punti uniti sono le soluzioni dell'equazione $z^2+z+1 = 0$, ovvero i punti dell'insieme $D_0 \cap f_*(D_0) = \{\zeta, \bar{\zeta}\}$, ove $\zeta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. □

ESERCIZIO 2. *Siano V e W due spazi vettoriali reali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ due rispettive basi.*

(a) Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ tali che

$$\phi(v_1 + v_2) = 2w_3, \quad \phi(v_1 + v_3) = 2w_2, \quad \phi(v_2 + v_3) = 2w_1, \quad \phi(v_1 + v_2 + v_3) = w_1 + w_2 + w_3.$$

Si dica se tali applicazioni formano un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ e se ne determini l'eventuale dimensione.

(b) Si dica se tra le applicazioni del punto precedente esiste una ϕ_0 che soddisfi all'ulteriore condizione $\phi_0(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = -w_1$. In caso affermativo se ne scriva la matrice nelle basi date e si determinino nucleo ed immagine.

(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\psi : W \to V$ tali che $\phi_0 \circ \psi = 1_W$ e si scrivano le loro matrici nelle basi date.

(d) Siano V e W due spazi vettoriali sul corpo $\mathbb{F}_2$ e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ due rispettive basi. Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ tali che

$$\phi(v_1 + v_2) = 2w_3, \quad \phi(v_1 + v_3) = 2w_2, \quad \phi(v_2 + v_3) = 2w_1, \quad \phi(v_1 + v_2 + v_3) = w_1 + w_2 + w_3.$$

Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ tali che

$$\phi(v_1 + v_2) = 2w_3, \quad \phi(v_1 + v_3) = 2w_2, \quad \phi(v_2 + v_3) = 2w_1, \quad \phi(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = w_1.$$

Svolgimento. (*a*) I vettori $v_1 + v_2$, $v_1 + v_3$, $v_2 + v_3$, formano una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ di V, e quindi esiste un'unica applicazione lineare $\langle v_1, v_2, v_3\rangle \to W$ che soddisfi alle prime tre condizioni. Il vettore $v_1 + v_2 + v_3$ appartiene al sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ e la condizione data si ottiene sommando le tre condizioni precedenti. Quindi esistono infinite applicazioni $\phi : V \to W$ soddisfacenti alle condizioni date e dipendono dalla scelta dell'immagine del vettore v_4. Non formano quindi un sottospazio (non c'è l'applicazione nulla), ma una sottovarietà lineare di dimensione $3(= \dim W)$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$.

(*b*) Tutte le applicazioni del punto (*a*) sono determinate dalle condizioni

$$\phi(v_1) = -w_1 + w_2 + w_3, \quad \phi(v_2) = w_1 - w_2 + w_3, \quad \phi(v_3) = w_1 + w_2 - w_3, \quad \phi(v_4) = aw_1 + bw_2 + cw_3.$$

Dunque si ha $\phi_0(v_4) = -2w_1 - w_2 - w_3$ e la matrice è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha rango 3 ed il nucleo è il sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(*c*) L'applicazione ϕ_0 è suriettiva, quindi esistono infinite applicazioni $\psi : W \to V$ tali che $\phi_0 \circ \psi = 1_W$ e la differenza tra due tali applicazioni è un elemento di $\mathrm{Hom}\,(W, \ker \phi_0)$.

Con la tecnica di eliminazione, si vede che sono riga-equivalenti le matrici

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

e quindi si ha

$$\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \\ 3a & 3b & 3c \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix},$$

al variare di $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(*d*) In $\mathbb{F}_2$, $2 = 0$, e quindi non possono esistere applicazioni lineari soddisfacenti alla prima serie di condizioni. L'unica applicazione che soddisfi alla seconda serie di condizioni è quindi definita da $\phi(v_1) = 0$, $\phi(v_2) = 0$, $\phi(v_3) = 0$, $\phi(v_4) = w_1$. □

ESERCIZIO 1. *Siano*

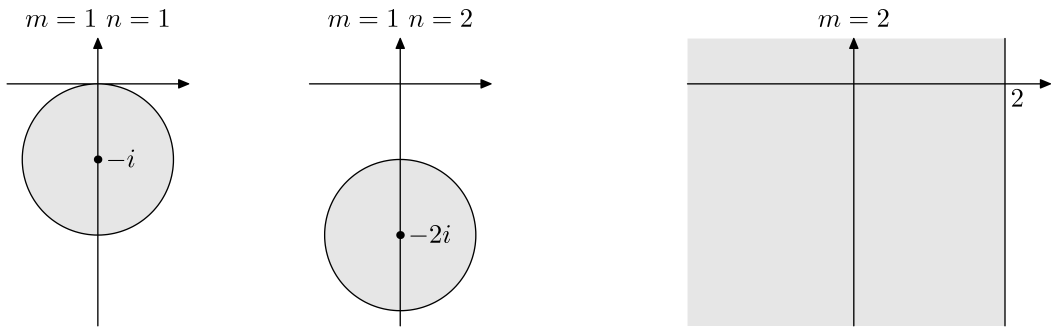
$$U = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{2z - m + 2in}{iz - n - im - i} \right| < m \right\} \qquad ed \qquad f(z) = \frac{iz - ik}{z - 1 + i}.$$

(a) *Si disegni l'insieme U nel piano di Gauss.*
(b) *Si determinino il dominio e l'immagine di f, l'eventuale funzione inversa ed i numeri complessi, z, tali che $f(z) = z$.*
(c) *Si determini il sottoinsieme $f_*(U) = \{ f(z) \mid z \in U \}$ e lo si disegni nel piano di Gauss.*
(d) *Si determinino il sottoinsieme $I = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{z}{\bar{z}} = -1 \right\}$ e le sue intersezioni con U ed $f_*(U)$.*

Svolgimento. (a) Sia $z = x + iy$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. U è formato dai punti (x, y) tali che

$$(2x - m)^2 + 4(y + n)^2 < m^2\left[(x - m - 1)^2 + (y + n)^2\right].$$

Si tratta quindi dei punti interni alla circonferenza di centro ni e raggio 1, se $m = 1$ e dei punti del semipiano a sinistra della retta $x = 2$ se $m = 2$.



$|z + ni| < 1$ $\qquad\qquad$ $z + \bar{z} < 4$

(b) La funzione f è definita quando $z \neq 1 - i$ e la sua inversa è la funzione $g(z) = \dfrac{(1 - i)z - ik}{z - i}$, come si verifica con un calcolo diretto. La funzione g è definita per $z \neq i$, e quindi, il dominio e l'immagine di f sono rispettivamente $D = \mathbb{C} \smallsetminus \{1 - i\}$ e $f_*(D) = \mathbb{C} \smallsetminus \{i\}$.

I punti uniti sono le soluzioni dell'equazione

$$\frac{iz - ik}{z - 1 + i} = z \qquad \text{ovvero} \qquad z^2 - z + ik = 0.$$

Si han quindi i punti

$$\frac{1}{2} \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{17} + 1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}} \right) \quad \text{se } k = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2} \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{65} + 1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{65} - 1}{2}} \right) \quad \text{se } k = 2.$$

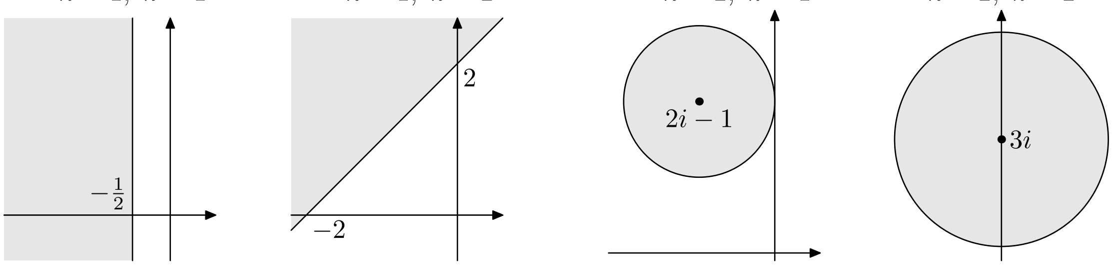
(c) Nelle notazioni del punto precedente, si ricava che $f_*(U) = g^*(U) = \{ z \in f_*(D) \mid g(z) \in U \}$. Distinguiamo quindi i possibili casi per U.

Se $\boxed{m = 1}$, si ha la disuguaglianza

$$\left| \frac{(1 - i)z - ik}{z - i} + ni \right| < 1 \qquad \text{ovvero} \qquad \left|\big(1 + (n - 1)i\big)z + n - ik\right| < |z - i|.$$

Per $n = 1$ si ottiene un semipiano, che dipende dal valore di k. Per $n = 2$ si ottengono i punti interni ad una circonferenza che dipende dal valore di k. Si veda quindi la figura.

$n=1,\ k=1$ $\qquad$ $n=1,\ k=2$ $\qquad$ $n=2,\ k=1$ $\qquad$ $n=2,\ k=2$



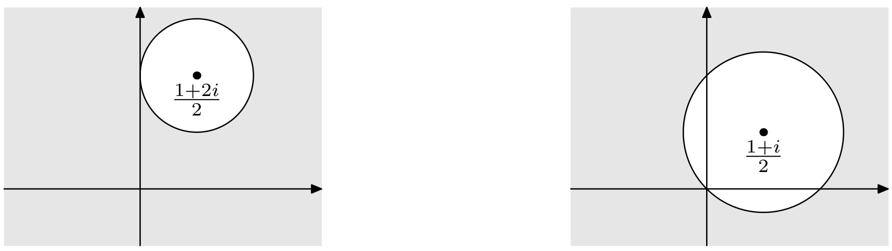
$z + \bar{z} < -1$ $\qquad$ $(1+i)z + (1-i)\bar{z} + 4 < 0$ $\qquad$ $|z - 2i + 1| < 1$ $\qquad$ $|z - 3i| < \sqrt{2}$

Se $\boxed{m = 2}$, si ha la disuguaglianza

$$\frac{(1-i)z - ik}{z - i} + \frac{(1+i)\bar{z} + ik}{\bar{z} + i} < 4 \qquad \text{ovvero} \qquad 2z\bar{z} - (1 - i(3-k))z - (1 + i(3-k))\bar{z} + 4 - 2k > 0.$$

Si ottengono così i punti esterni ad una circonferenza che dipende dal valore di k.

$k = 1$ $\qquad$ $k = 2$



$|2z - 2i - 1| > 1$ $\qquad$ $|2z - 1 - i| > \sqrt{2}$

(*d*) Si ha $\frac{z}{\bar{z}} = -1$ se, e solo se, $z \neq 0$ e $z^2 = -|z|^2$. Ciò accade se, e solo se, z è un numero puramente immaginario. Dunque I coincide con l'asse immaginario, privato dell'origine. Le intersezioni con U ed $f_*(U)$ si possono quindi dedurre dai disegni precedenti. □

ESERCIZIO 2. *Nel piano di Gauss si considerino le rette*

$$a : (m + ik)z + (m - ik)\bar{z} = 0 \qquad \text{e} \qquad b : (3 + in)z + (3 - in)\bar{z} = 0$$

e siano α e β gli angoli formati da queste con il semiasse positivo dell'asse reale.

(*a*) *Si disegnino le rette a e b e si scrivano le espressioni analitiche delle riflessioni, σ_a e σ_b, rispetto alle rette date.*
(*b*) *Si determini l'applicazione composta $z \mapsto \sigma_b(\sigma_a(z))$. È vero che si tratta di una rotazione? In caso affermativo, si determinino il centro, P, e l'angolo, ϑ, di rotazione in funzione degli angoli α e β. È vero che $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$?*
(*c*) *Si consideri il cerchio, C, di centro $z_0 = k + im$ e passante per l'origine. Si scriva l'espressione analitica della riflessione, λ_C, rispetto al cerchio C.*
(*d*) *Si determinino e si disegnino le immagini delle rette a e b tramite λ.*

Svolgimento. (a) Sia $z = x + iy$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La retta a ha equazione $y = \frac{m}{k}x$ e quindi passa per il punto $k + im$. Dunque, la retta a forma con il semiasse positivo un angolo, α, determinato dalle condizioni

$$\cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}}.$$

Quindi σ_a è l'applicazione composta $\rho_\alpha \circ \sigma \circ \rho_{-\alpha}$, ove σ indica il coniugio e ρ_ϑ la rotazione di angolo ϑ. Si ha perciò

$$\sigma_a(z) = \frac{(k+im)^2}{k^2+m^2}\bar{z} \qquad \text{e, analogamente,} \qquad \sigma_b(z) = \frac{(n+3i)^2}{n^2+9}\bar{z}.$$

(b) L'applicazione composta $\sigma_b \circ \sigma_a$ è la moltiplicazione $z \mapsto \frac{(n+3i)^2}{n^2+9}\frac{(k-im)^2}{k^2+m^2}z$. Essendo la moltiplicazione per un numero complesso di modulo 1 è una rotazione di centro l'origine. L'angolo di rotazione è $\vartheta = 2(\beta - \alpha)$. Le due rotazioni $\sigma_a \circ \sigma_b$ e $\sigma_b \circ \sigma_a$ sono l'una l'opposto dell'altra e coincidono solo se $\vartheta = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

(c) La riflessione $\lambda_C : \mathbb{C} \smallsetminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{z_0\}$ è l'applicazione composta $\lambda_C = \tau_{z_0} \circ \mu_{|z_0|} \circ \lambda \circ \mu_{|z_0|^{-1}} \circ \tau_{-z_0}$, ove τ_x è la traslazione di vettore x, μ_s è la moltiplicazione per s e λ è la riflessione nel cerchio unitario. Dunque

$$\lambda_C(z) = \frac{|z_0|^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0 = \frac{(k+im)\bar{z}}{\bar{z} - (k-im)}.$$

(d) L'applicazione λ_C coincide con la sua inversa e quindi si ha $\lambda_{C*}(U) = \lambda_C^*(U)$ per ogni sottoinsieme U del dominio.

La retta a passa per il centro di C e quindi viene mandata in sé (ma non punto per punto!). Infatti un numero complesso z appartiene a $\lambda_C^*(a)$ se, e solo se,

$$i\bar{z}_0 \frac{z_0\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_0} - iz_0 \frac{\bar{z}_0 z}{z - z_0} = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{|z_0|^2}{|z - z_0|^2}(i\bar{z}_0 z - iz_0\bar{z}) = 0.$$

Escludendo il punto z_0 (che non appariene al dominio di λ_C), i punti di a vengono mandati in punti della stessa retta.

Analogamente, un numero complesso z appartiene a $\lambda_C^*(b)$ se, e solo se,

$$(3+in)\frac{z_0\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_0} + (3-in)\frac{\bar{z}_0 z}{z - z_0} = 0$$

ovvero

$$2(3k-nm)z\bar{z} - \big((3k^2-3m^2-2mnk) - i(6mk+nk^2-nm^2)\big)z - \big((3k^2-3m^2-2mnk) + i(6mk+nk^2-nm^2)\big)\bar{z} = 0.$$

Si tratta quindi di una circonferenza passante per l'origine il cui centro e raggio si possono dedurre dall'espressione scritta sopra. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 17 novembre 2006

ESERCIZIO 1. *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^5$ *si considerino i sottospazi*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\-1\\2m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\m-1\\-1\\0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad e \qquad W : \begin{cases} x_1 - mx_4 = 0 \\ (m-1)x_3 + (2+m)x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

ove $m \in \{1,2,3,4\}$ *ed* $m \equiv n_6 \mod 4$.

(a) *Si determini la dimensione e si esibisca una base di ciascuno dei due sottospazi e si verifichi se* $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

(b) *Detta* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^5$, *si scrivano le matrici* $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U)$ *ed* $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_W)$, *ove* $\pi_U : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ *è la proiezione su* U *parallelamente a* W *e* $\pi_W : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ *è la proiezione su* W *parallelamente ad* U.

(c) *Si scrivano le matrici* $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_U)$ *ed* $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_W)$, *ove* $\sigma_U : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ *è la simmetria di asse* U *e direzione* W *e* $\sigma_W : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ *è la simmetria di asse* W *e direzione* U.

(d) *Si consideri il sottospazio*

$$U' = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\2m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\m+1\\0\\-1\\2m+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\m-1\\m-1\\-1\\1-2m \end{pmatrix} \right\rangle$$

È vero che $\mathbb{R}^5 = U' \oplus W$? *In caso affermativo, siano* $\pi_{U'}$ *la proiezione su* U', *parallelamente a* W, $\pi = \pi_{U|U'} : U' \to U$ *e* $\pi' = \pi_{U'|U} : U \to U'$. *È vero che* $\pi \circ \pi' = 1_U$ *e* $\pi' \circ \pi = 1_{U'}$?

Svolgimento. (a) Indichiamo con u_1, u_2, u_3 i tre generatori di U.

Sia $\boxed{m \neq 1}$. Allora $\dim U = 3$ ed una sua base è $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$, mentre $\dim W = 2$ ed una base è $\mathcal{W} = \{e_2, e_5\} \subset \mathcal{E}$. I vettori u_1, u_2, u_3, e_2, e_5 sono linearmente indipendenti e quindi $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

Sia $\boxed{m = 1}$. Allora $\dim U = 2$ (si ha $2u_1 - u_2 + u_3 = 0$) ed una base di U è, ad esempio, $\mathcal{U} = \{u_1, u_3\}$, mentre $\dim W = 3$ ed una sua base è $\mathcal{W} = \{e_2, e_3, e_5\} \subset \mathcal{E}$. I vettori u_1, u_3, e_2, e_3, e_5 sono linearmente indipendenti e quindi $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

(b) Sia $\boxed{m \neq 1}$. Poiché $\dim W < \dim U$ calcoliamo dapprima la proiezione π_W. Il sottospazio U è definito dalle equazioni cartesiane $U : \begin{cases} mx_1 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$, e quindi, dato un generico generico vettore $x \in \mathbb{R}^5$, la sua proiezione $\pi_W(x) = ae_2 + be_5$ è determinata dalla condizione

$$x - \pi_W(x) \in U \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} mx_1 - (x_5 - b) = 0 \\ (x_2 - a) + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} b = -mx_1 + x_5 \\ a = x_2 + x_4 \end{cases}$$

da cui si conclude che

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

essendo $\pi_U + \pi_W = 1$.

Sia $\boxed{m = 1}$. In questo caso $\dim U < \dim W$ e quindi calcoliamo dapprima la proiezione π_U. Dato un generico generico vettore $x \in \mathbb{R}^5$, la sua proiezione $\pi_U(x) = au_1 + bu_3$ è determinata dalla condizione

$$x - \pi_U(x) \in W \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} (x_1 - a) - (x_4 + b) = 0 \\ x_4 + b = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} b = -x_4 \\ a = x_1 \end{cases}$$

da cui si conclude che

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

essendo $\pi_U + \pi_W = 1$.

(c) È sufficiente ricordare che $\sigma_U = \pi_U - \pi_W = -\sigma_W$ per concludere che

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_U) = -\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{se } \boxed{m \neq 1}$$

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_U) = -\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{se } \boxed{m = 1}$$

(d) Indichiamo con u'_1, u'_2, u'_3 i tre generatori di U'.

Sia $\boxed{m \neq 1}$. Allora $\dim U' = 3$ ed i vettori $u'_1, u'_2, u'_3, e_2, e_5$ sono linearmente indipendenti; quindi $\mathbb{R}^5 = U' \oplus W$.

Sia $\boxed{m = 1}$. Allora $\dim U' = 2$ ed i vettori $u'_1, u'_3, e_2, e_3, e_5$ sono linearmente indipendenti; quindi $\mathbb{R}^5 = U' \oplus W$.

In entrambo i casi, dato $x \in U'$, si ha $x = u + w$, ove $u = \pi_U(x)$ e $w = \pi_W(x)$ e quindi $u = x - w$, per cui $\pi_{U'}(\pi_U(x)) = \pi_{U'}(u) = x$. Ciò dimostra che $\pi' \circ \pi = 1_{U'}$. L'altra verifica è analoga ed è lasciata al lettore. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino gli spazi vettoriali, $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$, con la base $1, X, X^2, X^3$, ed $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$, con la base $1, X, X^2, X^3, X^4$, e sia $\phi : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ la funzione $P \mapsto D(P) + nXP$, ove D indica la derivazione e l'intero $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ ed $n \equiv n_5 \mod 4$.*

(a) *Si verifichi che ϕ è lineare e si scriva la sua matrice nelle basi date.*

(b) *Si determinino $\ker\phi$ ed $\mathrm{im}\phi$ indicando la dimensione ed una base di ciascun sottospazio.*

(c) *Scrivere, se esistono, delle funzioni lineari $\psi : \mathbb{R}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ inverse a destra o a sinistra per ϕ specificandone le matrici nelle basi date.*

(d) *Scrivere la matrice di ϕ (e delle eventuali ψ) nelle basi $1, 1 - nX, (1 - nX)^2, (1 - nX)^3$ di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ ed $1, 1 - nX, (1 - nX)^2, (1 - nX)^3, (1 - nX)^4$ di $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$.*

Svolgimento. (a) Con un calcolo diretto, si ha

$$\phi(1) = nX, \qquad \phi(X) = 1 + nX^2, \qquad \phi(X^2) = 2X + nX^3, \qquad \phi(X^3) = 3X^2 + nX^4.$$

La matrice cercata è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 2 & 0 \\ 0 & n & 0 & 3 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathrm{rk}\phi = \mathrm{rk}A = 4$, quindi $\ker\phi = \langle 0 \rangle$ (dimensione 0) ed $\mathrm{im}\phi = \langle nX, 1 + nX^2, 2X + nX^3, 3X^2 + nX^4 \rangle$ (dimensione 4).

(c) L'applicazione ϕ non è suriettiva, quindi non può esistere un'inversa destra. Essendo iniettiva, esistono inverse sinistre, ψ, tali che $\psi \circ \phi = 1_{\mathbb{R}[X]_{\leq 3}}$ Le matrici cercate sono quindi del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & -\frac{2}{n^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 & -\frac{3}{n^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n^2a & 0 & -na & 0 & 3a \\ n^2b & 0 & -nb & 0 & 3b \\ n^2c & 0 & -nc & 0 & 3c \\ n^2d & 0 & -nd & 0 & 3d \end{pmatrix},$$

al variare di a, b, c, d in $\mathbb{R}$.

(d) Osservando che $nX = 1 - (1 - nX)$, si ha

$$\begin{aligned} \phi(1) &= nX = 1 - (1 - nX), \\ \phi(1 - nX) &= -n + nX(1 - nX) = -n + (1 - nX) - (1 - nX)^2, \\ \phi((1 - nX)^2) &= -2n(1 - nX) + nX(1 - nX)^2 = -2n(1 - nX) + (1 - nX)^2 - (1 - nX)^3, \\ \phi((1 - nX)^3) &= -3n(1 - nX)^2 + nX(1 - nX)^3 = -3n(1 - nX)^2 + (1 - nX)^3 - (1 - nX)^4. \end{aligned}$$

Dunque la matrice cercata è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2n & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3n \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le matrici inverse sinistre sono tutte le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2n-1 & 5n-1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3n-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a & (1-n)a & (1-3n)a & (1-6n+3n^2)a \\ b & b & (1-n)b & (1-3n)b & (1-6n+3n^2)b \\ c & c & (1-n)c & (1-3n)c & (1-6n+3n^2)c \\ d & d & (1-n)d & (1-3n)d & (1-6n+3n^2)d \end{pmatrix},$$

al variare di a, b, c, d in $\mathbb{R}$. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 7 dicembre 2006

ESERCIZIO 1. *Si consideri il sistema*

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t-n)X_2 + (n-t)X_4 - X_5 = n - t + 1 \\ tX_1 - X_2 + 2tX_3 - 2nX_5 = 2n + 1 \\ (2t-2n)X_2 + (t+1)X_3 + 2(n+1)X_4 + (2t-2)X_5 = 2n - 3t + 3 \\ tX_1 - X_2 + 2tX_3 - 2tX_5 = 2t + 1 \end{cases}$$

ove $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ *ed* $n \equiv n_5 \mod 4$.

(a) *Si riduca il sistema* Σ_t *in una forma a scalino, riga-equivalente, e si determini il rango del sistema al variare del parametro* $t \in \mathbb{R}$.

(b) *Si determinino le soluzioni del sistema* Σ_t *al variare di* $t \in \mathbb{R}$.

(c) *Per ogni* $t \in \mathbb{R}$, *sia* U_t *il sottospazio formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a* Σ_t. *Posto* $H = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} U_t$, *si dica se* H *è un sottospazio vettoriale e si determini una base di* $\langle H \rangle$.

(d) *Per ogni primo* p *si dica quante soluzioni ha il sistema* Σ_p *nel corpo* $\mathbb{F}_p$.

Svolgimento. (a) e (b) Il sistema Σ_t ha matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & t-n & 0 & n-t & -1 & | & n-t+1 \\ t & -1 & 2t & 0 & -2n & | & 2n+1 \\ 0 & 2t-2n & t+1 & 2n+2 & 2t-2 & | & 2n-3t+3 \\ t & -1 & 2t & 0 & -2t & | & 2t+1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{l} II \\ I \\ III-2I \\ IV-II \end{array} \begin{pmatrix} t & -1 & 2t & 0 & -2n & | & 2n+1 \\ 0 & t-n & 0 & n-t & -1 & | & n-t+1 \\ 0 & 0 & t+1 & 2t+2 & 2t & | & 1-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(n-t) & | & 2(t-n) \end{pmatrix}.$$

Dunque, se $t \notin \{-1, 0, n\}$, matrice completa ed incompleta han rango 4 e le soluzioni del sistema sono

$$S_t = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} (1+4t)/t \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Discutiamo ora i casi particolari.

Se $\boxed{t = -1}$. Possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto. Matrice completa ed incompleta han rango 3 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ IV+(n+1)III \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 & -2n & | & 2n+1 \\ 0 & -1-n & 0 & n+1 & -1 & | & n+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{-1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $\boxed{t=0}$. Possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto. Matrice completa ed incompleta han rango 4 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\begin{array}{l} \\ III \\ II-nI \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -2n & | & 2n+1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & n & -1+2n^2 & | & 1-2n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2n & | & -2n \end{pmatrix}, \qquad S_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $\boxed{t=n}$. Possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto. Matrice completa ed incompleta han rango 3 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\begin{array}{l} \\ III \\ II \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} n & -1 & 2n & 0 & -2n & | & 2n+1 \\ 0 & 0 & n+1 & 2n+2 & 2n & | & 1-n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_n = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) H è un'unione di sottospazi, ma non è un sottospazio. Infatti, contiene i vettori $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ma non ne contiene la somma. Il sottospazio generato da H è

$$\left\langle \begin{pmatrix} (1+4t)/t \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(d) Le trasformazioni elementari fatte per ridurre la matrice del sistema nella sua forma a scalini, sono tali anche su $\mathbb{F}_p$ e quindi possiamo partire considerando la matrice a scalini e riducendo su $\mathbb{F}_p$ le sue entrate. Dobbiamo distinguere alcuni casi.

Se $\boxed{p \geq 5}$ n e $2n$ sono diversi da 0 in $\mathbb{F}_p$ e possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto,

$$\begin{array}{l} \\ III \\ II-nI \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -2n & | & 2n+1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & n & 2n^2-1 & | & 1-2n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2n & | & -2n \end{pmatrix}.$$

Matrice completa ed incompleta han rango 4 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 1, e vi sono perciò p soluzioni.

Se $\boxed{p=2}$ possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto,

$$\begin{array}{l} \\ III \\ II-nI \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & n & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice completa ed incompleta han rango 3 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 2, e vi sono perciò $2^2 = 4$ soluzioni.

Sia $\boxed{p=3}$. Se $n \neq 3$ possiamo ridurre la matrice del sistema come indicato qui sotto,

$$\begin{array}{r} \\ III \\ II-nI \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & n & | & 1-n \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & n & -n^2-1 & | & 1+n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n & | & n \end{pmatrix}.$$

Matrice completa ed incompleta han rango 4 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 1, e vi sono perciò 3 soluzioni. Se $n = 3$ possiamo ridurre la matrice del sistema come indicato qui sotto,

$$\begin{array}{r} \\ III \\ II \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice completa ed incompleta han rango 3 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 2, e vi sono perciò $3^2 = 9$ soluzioni. □

ESERCIZIO 2. *Sia $m \in \{1,2,3,4\}$ tale che $m \equiv n_6 \mod 4$. Si considerino gli spazi vettoriali reali V e W, dotati delle rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$.*

(a) *Si determini l'applicazione lineare $\psi : V \to W$ tale che*

$$\begin{aligned} \psi(v_3 - 2v_1) &= -w_1 + (m-2)w_2 + (2-m)w_3 + w_4 \\ \psi(v_2 - v_1) &= mw_1 - mw_2 - w_3 - w_4 \\ \psi(v_1 - v_3) &= mw_1 - mw_2 - w_3 - w_4 \end{aligned}$$

Si scriva $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi)$ e si determinino nucleo ed immagine di ψ.

(b) *Si consideri l'applicazione lineare $\phi : W \to W$ tale che*

$$\begin{aligned} \phi(2w_1 + w_4) &= mw_1 + mw_2 + 3w_3 + w_4 \\ \phi(w_2 + w_3) &= mw_1 + mw_2 + 3w_3 + w_4 \\ \phi(w_3 - w_2) &= mw_1 - mw_2 - w_3 - w_4 \\ \phi(w_4 - w_2) &= (m-2)w_1 - 4w_2 + (1-2m)w_3 \end{aligned}$$

Si scriva $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$ e si determinino nucleo ed immagine di ϕ.

(c) *Si determinino tutte le applicazioni lineari $\chi : V \to W$ tali che $\psi = \phi \circ \chi$ e si scrivano tutte le matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\chi)$.*

(d) *Si determini il sottospazio $\mathrm{im}\phi \cap \mathrm{im}\psi$ di W e gli ortogonali $(\mathrm{im}\phi)^\perp$ ed $(\mathrm{im}\psi)^\perp$ in W^*.*

(e)* *Dette $\phi^* : W^* \to W^*$ e $\psi^* : W^* \to V^*$ le applicazioni trasposte di ϕ e ψ, si determinino le applicazioni lineari $\eta : W^* \to W^*$ tali che $\phi^* \circ \eta = 0$ e $\psi^* \circ \eta = 0$ e si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{W}^*}(\eta)$, ove $\mathcal{W}^*$ è la base duale della base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$.*

Svolgimento. (a) I vettori $v_3 - 2v_1, v_2 - v_1, v_1 - v_3$ sono una base di V e quindi l'applicazione lineare ψ è univocamente determinata dalle condizioni date e la sua matrice è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1-2m \\ 2 & 2-m & 2+m \\ m-1 & m-2 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\psi(v_2 - v_1) = \psi(v_1 - v_3)$ e le prime due colonne della matrice sono chiaramente indipendenti. Dunque $\ker\psi = \langle 2v_1 - v_2 - v_3 \rangle$ ed $\mathrm{im}\,\psi = \langle (1-m)w_1 + 2w_2 + (m-1)w_3, w_1 + (2-m)w_2 + (m-2)w_3 - w_4 \rangle$.

(b) Analogamente al caso precedente, ϕ è univocamente determinata dalle condizioni date e la sua matrice è

$$B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m & m-2 \\ 2 & m & 0 & m-4 \\ m & 2 & 1 & 3-2m \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\phi(2w_1 + w_4) = \phi(w_2 + w_3)$ e le prime tre colonne della matrice sono linearmente indipendenti. Dunque $\ker\phi = \langle 2w_1 - w_2 - w_3 + w_4 \rangle$ ed $\operatorname{im}\phi = \langle w_1 + 2w_2 + mw_3, mw_2 + 2w_3 + w_4, mw_1 + w_3 \rangle$.

(c) Dobbiamo risolvere il "sistema lineare", $BX = A$, ove sono da determinarsi le entrate della matrice $X = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\chi) \in M_{4\times 3}$. Possiamo quindi applicare la tecnica di eliminazione alla matrice completa del sistema.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & m & m-2 & 1-m & 1 & 1-2m \\ 2 & m & 0 & m-4 & 2 & 2-m & 2+m \\ m & 2 & 1 & 3-2m & m-1 & m-2 & m \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ IV \\ \frac{1}{m}(II-2I) \\ III-mI \end{array} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & m & m-2 & 1-m & 1 & 1-2m \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1-m^2 & 3-m^2 & m^2-1 & -2 & 2m^2 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{2}(II-III) \\ IV-2II \end{array} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & m & m-2 & 1-m & 1 & 1-2m \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & 1-m^2 & m^2-1 & 0 & 2(m^2-1) \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} I-mIII \\ \\ \\ IV+(m^2-1)III \end{array} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Possiamo quindi concludere che le matrici delle applicazioni lineari cercate sono della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -a & -b & -c \\ -a & -b & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

al variare di a, b, c in $\mathbb{R}$ e sono quindi un traslato di un sottospazio di $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$. In modo equivalente, si potevano determinare le applicazioni lineari, χ, scegliendo ad arbitrio $\chi_0(v_i) \in \phi^{-1}(\psi(v_i))$, per $i = 1, 2, 3$, e sommando all'applicazione, χ_0, così determinata tutti gli elementi di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \ker\phi) \subset \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$.

(d) Poiché esistono delle applicazioni lineari χ tali che $\psi = \phi\circ\chi$, deve aversi $\operatorname{im}\psi \subseteq \operatorname{im}\phi$ e quindi l'intersezione è uguale al più piccolo tra i due sottospazi: $\operatorname{im}\phi \cap \operatorname{im}\psi = \operatorname{im}\psi$. Per gli ortogonali vale l'inclusione inversa e si ha

$$\begin{aligned} (\operatorname{im}\phi)^\perp = \left\langle 2w_1^* + (m^2-1)w_2^* - 2mw_3^* + m(5-m^2)w_4^* \right\rangle \subseteq \\ \left\langle 2w_1^* + (m^2-1)w_2^* - 2mw_3^* + m(5-m^2)w_4^*, w_1^* + w_3^* + (m-1)w_4^* \right\rangle = (\operatorname{im}\psi)^\perp. \end{aligned}$$

(*e*) Le applicazioni, η, devono soddisfare alla condizione $\operatorname{im}\eta \subseteq \ker\phi^* \cap \ker\psi^*$. Ricordando che per qualsiasi applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita, f, si ha $\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp$, si conclude che deve aversi $\operatorname{im}\eta \subseteq (\operatorname{im}\phi)^\perp = \left\langle 2w_1^* + (m^2-1)w_2^* - 2mw_3^* + m(5-m^2)w_4^* \right\rangle$. Dunque le matrici cercate sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c & 2d \\ (m^2-1)a & (m^2-1)b & (m^2-1)c & (m^2-1)d \\ -2ma & -2mb & -2mc & -2md \\ m(5-m^2)a & m(5-m^2)b & m(5-m^2)c & m(5-m^2)d \end{pmatrix},$$

al variare di a, b, c, d in $\mathbb{R}$. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 14 dicembre 2006

ESERCIZIO 1. *Siano $n, m \in \{1, 2\}$ tali che $n \equiv n_6 \mod 2$ ed $m \equiv n_5 \mod 2$.*

Si consideri il polinomio $P(X) = (X - m - in)(X^2 - (m - n)(1 + i)X + i(m^2 + n^2)) \in \mathbb{C}[X]$.

(a) *Si determinino le radici, z_1, z_2, z_3, di $P(X)$.*

(b) *Si scriva l'equazione della circonferenza, C, del piano di Gauss, passante per z_1, z_2, z_3.*

(c) *Si scriva l'espressione analitica della riflessione, λ_C, rispetto al cerchio C e si determinino i punti uniti dell'applicazione composta $z \mapsto \lambda_C(2i + \bar{z})$. È vero che i punti uniti stanno su C?*

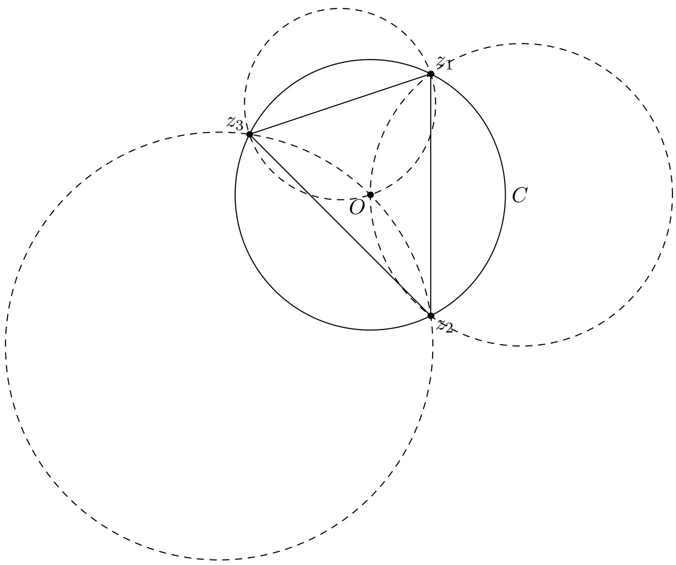
(d) *Si disegni l'immagine tramite l'applicazione λ_C del triangolo di vertici z_1, z_2, z_3.*

Svolgimento. (a) La radice del fattore lineare è evidente; le altre due si determinano risolvendo un'equazione di secondo grado. Dunque le tre radici sono $z_1 = m + in$, $z_2 = m - in = \bar{z}_1$, $z_3 = -n + im = iz_1$.

(b) I tre punti hanno il medesimo modulo e quindi appartengono alla circonferenza $C : z\bar{z} = m^2 + n^2$, di centro nell'origine e raggio $|z_1| = \sqrt{m^2 + n^2}$.

(c) La riflessione, λ_C, è quindi la funzione lineare fratta $\lambda_C(z) = \frac{m^2+n^2}{\bar{z}}$. I punti uniti sono i numeri complessi, z, tali che $z = \frac{m^2+n^2}{z-2i}$, ovvero le soluzioni dell'equazione $z^2 - 2iz - m^2 - n^2 = 0$. Sono quindi i numeri complessi $i \pm \sqrt{m^2 + n^2 - 1}$, che appartengono a C. Si può anche osservare che l'applicazione $z \mapsto 2i + \bar{z}$ è la riflessione rispetto ad una retta (quale?) e quindi che i punti uniti dell'applicazione composta sono l'intersezione tra questa retta ed il cerchio C.

(d) Le rette che formano i lati del triangolo vengono trasformate in tre cerchi passanti per l'origine e per i vertici del lato corrispondente.



Dunque i punti interni al triangolo vengono trasformati nei punti esterni alle tre circonferenze rappresentate nel disegno qui sopra ($m = 1, n = 2$). □

ESERCIZIO 2. *Siano $n, m \in \{1, 2\}$ tali che $n \equiv n_6 \mod 2$ ed $m \equiv n_5 \mod 2$.*

Si considerino i seguenti sottospazi U e W di $\mathbb{R}^4$,

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} m-n \\ n \\ n-m \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n-2 \\ m+2 \\ 2-n \\ n+m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -m \\ n \\ m \\ n-m \end{pmatrix} \right\rangle \quad e \quad W : \begin{cases} nX_1 - mX_2 - nX_3 + nX_4 = 0 \\ X_1 + (2+n)X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ mX_1 + X_2 - mX_3 + mX_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino delle basi per i sottospazi U e W e si dica se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.*
(b) *Detta $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione su W parallelamente ad U, si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.*
(c) *Si determinino tutte le applicazioni lineari $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $\pi \circ \phi = \pi$ e si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$.*
(d) *Detta π^* l'applicazione trasposta di π, si determinino nucleo ed immagine di π^*. È vero che π^* è ancora una proiezione?*

Svolgimento. (a) I tre generatori di U sono linearmente dipendenti e generano un sottospazio di dimensione 2, soluzione del sistema di equazioni cartesiane

$$U : \begin{cases} X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \end{cases}.$$

Le tre equazioni lineari omogenee che definiscono W sono dipendenti ($III - mII$ e $I - nII$ sono proporzionali) e anche W è un sottospazio di dimensione 2. L'intersezione, $U \cap W$, è formata dalle soluzioni del sistema omogeneo che si ottiene unendo le equazioni dei due sottospazi ed è un sistema di rango 4. Quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) Una base di W è costituita dai vettori $e_1 + e_3$, $e_3 + e_4$ e, con i calcoli consueti, si ricava la matrice

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) L'applicazione identica o la stessa proiezione, π, sono applicazioni lineari che soddisfano alla condizione posta. Ogni altra differisce da queste per applicazioni, $\phi_0 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tali che $\operatorname{im}\phi_0 \subseteq \ker\pi = U$. Quindi le matrici cercate sono tutte e sole quelle appartenenti all'insieme

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(d) Il nucleo di π^* è

$$\ker\pi^* = (\operatorname{im}\pi)^\perp = W^\perp = \langle e_2^*, e_1^* - e_3^* + e_4^* \rangle,$$

viste le equazioni cartesiane di W. Analogamente

$$\operatorname{im}\pi^* = (\ker\pi)^\perp = U^\perp = \langle e_1^* + e_3^*, e_2^* - e_3^* - e_4^* \rangle.$$

Per ogni coppia di endomorfismi di uno spazio vettoriale si ha $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$ e quindi $\pi^* \circ \pi^* = \pi^*$ da cui si conclude che π^* è la proiezione su $U^\perp$ parallelamente a $W^\perp$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri il sistema*

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t-n)X_2 + (t-3)X_3 + nX_4 + X_5 = t - 1 \\ (3-t)X_1 + X_3 + mX_4 = 0 \\ (t-3)X_1 - X_3 + tX_4 + (m-n)X_5 = t + n \\ (3t-3n)X_2 + (3t-9)X_3 + 3nX_4 + tX_5 = 2t \end{cases}$$

ove $n, m \in \{1, 2\}$, $n \equiv n_6 \mod 2$ ed $m \equiv n_5 \mod 2$.
(a) *Si riduca il sistema Σ_t in una forma a scalino, riga-equivalente, e si determini il rango del sistema al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.*
(b) *Si determinino le soluzioni del sistema Σ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.*
(c) *Per $t = n$, siano S_n l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_n ed U_n il sottospazio formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato. Si determinino i sottospazi $U_n^\perp$ ed $S_n^\perp$ dello spazio duale.*

(*d*) *Per ogni primo p si dica quante soluzioni ha il sistema Σ_p nel corpo $\mathbb{F}_p$.*

Svolgimento. (a) e (*b*) Il sistema Σ_t ha matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & t-n & t-3 & n & 1 & | & t-1 \\ 3-t & 0 & 1 & m & 0 & | & 0 \\ t-3 & 0 & -1 & t & m-n & | & t+n \\ 0 & 3t-3n & 3t-9 & 3n & t & | & 2t \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{l} II \\ I \\ III+II \\ IV-3I \end{array} \begin{pmatrix} 3-t & 0 & 1 & m & 0 & | & 0 \\ 0 & t-n & t-3 & n & 1 & | & t-1 \\ 0 & 0 & 0 & t+m & m-n & | & t+n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-3 & | & 3-t \end{pmatrix}.$$

Dunque, se $t \notin \{-m, 3, n\}$, matrice completa ed incompleta han rango 4 e le soluzioni del sistema sono

$$S_t = \begin{pmatrix} m/(t-3) \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} (t-n)/(t-3) \\ 3-t \\ t-n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Discutiamo ora i casi particolari.

Se $\boxed{t = -m}$, possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto. Matrice completa ed incompleta han rango 3 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\begin{pmatrix} 3+m & 0 & 1 & m & 0 & | & 0 \\ 0 & -m-n & -m-3 & n & 1 & | & -m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m-3 & | & m+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{-m} = \begin{pmatrix} -m/(m+3) \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -m(m+n) \\ n(m+3) \\ 0 \\ (n+m)(m+3) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m+n \\ (m+3)^2 \\ -(n+m)(m+3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $\boxed{t = n}$, matrice completa ed incompleta han rango 4 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\begin{pmatrix} 3-n & 0 & 1 & m & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & n & 1 & | & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & n+m & m-n & | & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-3 & | & 3-n \end{pmatrix}, \qquad S_n = \begin{pmatrix} m/(n-3) \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $\boxed{t = 3}$, matrice completa ed incompleta han rango 3 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\begin{array}{l} II \\ I \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 3-n & 0 & n & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & m & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3+m & m-n & | & 3+n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (n^2-nm+m+3)/(n-3) \\ m^2-nm \\ n-m \\ 3+m \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(*c*) Si ha

$$\begin{aligned} U_n^\perp &= \langle e_2 \rangle^\perp = \langle e_1^*, e_3^*, e_4^*, e_5^* \rangle \\ S_n^\perp &= \langle me_1 + (n-3)e_2 + (n-3)e_4 - (n-3)e_5, e_2 \rangle^\perp = \langle e_3^*, (n-3)e_1^* - me_4^*, (n-3)e_1^* + me_5^* \rangle . \end{aligned}$$

(d) Le trasformazioni elementari fatte per ridurre la matrice del sistema nella sua forma a scalini, sono tali anche su $\mathbb{F}_p$ e quindi possiamo partire considerando la matrice a scalini e riducendo su $\mathbb{F}_p$ le sue entrate. Dobbiamo distinguere alcuni casi.

Se $\boxed{p \geq 5}$, i pivot sono diversi da 0 in $\mathbb{F}_p$ e matrice completa ed incompleta del sistema han rango 4; quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 1 e vi sono perciò p soluzioni.

Se $\boxed{p = 3}$ possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto,

$$\begin{array}{c} II \\ I \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -n & 0 & n & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & m & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & m-n & | & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Qualunque siano m ed n, matrice completa ed incompleta han rango 3 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 2; vi sono perciò $3^2 = 9$ soluzioni in $\mathbb{F}_3$.

Se $\boxed{p = 2}$ la matrice del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & m & 0 & | & 0 \\ 0 & n & 1 & n & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m & m-n & | & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Se m è dispari, matrice completa ed incompleta han rango 4 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 1; vi sono perciò 2 soluzioni.

Se m è pari, matrice completa ed incompleta han rango 3 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 2; vi sono perciò 4 soluzioni. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 9 gennaio 2007

ESERCIZIO 1. *Sia $m = 3$ se il proprio numero di matricola è pari, $m = -3$ altrimenti. Consideriamo $z = mi \in \mathbb{C}$.*

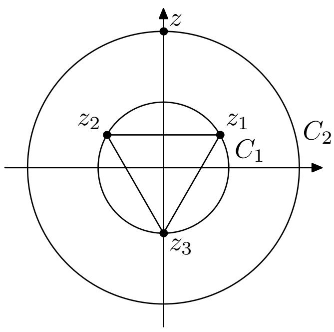
(a) *Determinare le radici cubiche z_1, z_2, z_3 di z, sia in forma algebrica che in forma trigonometrica, e si disegnino assieme a z sul piano di Gauss.*

(b) *Determinare la circonferenza C_1 del piano di Gauss contenente z_1, z_2, z_3, e quella concentrica C_2 contenente z.*

(c) *Scrivere le espressioni analitiche per le riflessioni λ_1, λ_2 rispetto a C_1, C_2 (rispettivamente).*

(d) *È vero che $\lambda_1 \circ \lambda_2 = \lambda_2 \circ \lambda_1$? Di che trasformazioni si tratta? In generale, che risultato dà la composizione di due riflessioni rispetto a due cerchi concentrici del piano di Gauss?*

Svolgimento. (a) Sia, ad esempio, $m = 3$. Allora



$$z_1 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}\right),$$
$$z_2 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{3}\left(\tfrac{-\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}\right),$$
$$z_3 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\tfrac{9\pi}{6} + i\sin\tfrac{9\pi}{6}\right) = -i\sqrt[3]{3}.$$

Se, invece $m = -3$, si ottengono quei punti ruotati di $\frac{\pi}{3}$, ovvero la stessa figura, simmetrica rispetto all'asse orizzontale.

(b) Le equazioni sono $C_1 : z\bar{z} - \sqrt[3]{9} = 0$, e $C_2 : z\bar{z} - 9 = 0$.

(c) Si ha

$$\lambda_1(z) = \frac{\sqrt[3]{9}}{\bar{z}} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2(z) = \frac{9}{\bar{z}} \qquad \text{per } z \neq 0.$$

(d) L'applicazione composta da due riflessioni rispetto a cerchi concentrici è un'omotetia rispetto al centro comune, con fattore di dilatazione uguale al rapporto tra i due raggi. Nel caso corrente si ha

$$\lambda_1(\lambda_2(z)) = \frac{\sqrt[3]{9}}{9}z \qquad \text{e} \qquad \lambda_2(\lambda_1(z)) = \frac{9}{\sqrt[3]{9}}z$$

e quindi le due applicazioni composte non coincidono, ma sono una l'inversa dell'altra. □

ESERCIZIO 2. *Sia m tra 1 e 4 congruo modulo 4 all'ultima cifra del proprio numero di matricola. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ m \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m-1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} X_1 + X_2 + mX_4 = 0 \\ X_1 + X_3 + mX_4 = 0 \\ X_1 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

(a) *Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W (che dimensione hanno?). Verificare che si tratta di sottospazi complementari.*

(b) *Determinare le matrici in base canonica della simmetria, σ, di asse U e direzione W, e della proiezione, π, su W parallelamente ad U.*

(*c*) *È vero che* $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$? *Si tratta di proiezioni?*

(*d*) *Descrivere, tramite equazioni cartesiane e basi, nuclei e immagini delle applicazioni trasposte di* σ, π, $\sigma \circ \pi$ *e* $\pi \circ \sigma$.

Svolgimento. (a) I tre generatori di U sono linearmente indipendenti, per cui si tratta di un sottospazio di dimensione 3, definito dall'equazione cartesiana $U : X_1 + X_2 + X_3 + mX_4 = 0$.

Il sistema lineare omogeneo che definisce W ha rango 3; quindi il sottospazio ha dimensione 1 ed una sua base è costituita dal vettore $w = {}^t(1, -1, -1, 0)$.

Il sistema lineare che definisce l'intersezione tra i due sottospazi ha rango 4 (o, analogamente, $w \notin U$); quindi $U \cap W = \langle 0 \rangle$ ed $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(*b*) Dato un vettore $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4$, la proiezione, $\pi(x) = \alpha w$, è quell'unico vettore tale che $x - \alpha w \in U$. Deve quindi aversi $\alpha = -x_1 - x_2 - x_3 - mx_4$. Quindi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -m \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla relazione $\sigma = 1 - 2\pi$, si ricava

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2m \\ -2 & -1 & -2 & -2m \\ -2 & -2 & -1 & -2m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*c*) $\sigma \circ \pi = (1 - 2\pi) \circ \pi = \pi - 2\pi = -\pi$ ed, analogamente, $\pi \circ \sigma = -\pi$. Dunque le due applicazioni composte sono uguali, ma non si tratta di proiezioni, perché $(-\pi) \circ (-\pi) = \pi \neq -\pi$.

(*d*) σ è un isomorfismo e quindi lo è anche l'applicazione trasposta, che ha perciò $\langle 0 \rangle$ come nucleo e tutto lo spazio duale come immagine.

Per quanto riguarda la proiezione, π^*, si ha $\ker(\pi^*) = (\operatorname{im}\pi)^\perp = W^\perp$ ed $\operatorname{im}(\pi^*) = (\ker\pi)^\perp = U^\perp$. Le equazioni cartesiane, riferite alla base duale della base canonica, sono quindi

$$W^\perp : X_1 - X_2 - X_3 = 0, \qquad \text{e} \qquad U^\perp : \begin{cases} X_1 - X_2 + mX_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + (m-1)X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 - X_3 = 0 \end{cases}$$

Nucleo ed immagine di $-\pi^*$ coincidono con nucleo ed immagine di π^*. □

ESERCIZIO 3. *Sia* m *tra* 1 *e* 4 *congruo modulo* 4 *alla penultima cifra del proprio numero di matricola. Si consideri il sistema lineare*

$$\Sigma_t : \begin{cases} tX_1 + 2X_2 + tX_4 + mX_5 = -m \\ 2X_2 + mX_5 = -m \\ tX_1 + 2X_2 + 5X_3 + tX_4 + mX_5 = 1 - m \\ 2tX_2 + t^2X_5 = (1-m)t \end{cases}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(*a*) *Scrivere la matrice del sistema e ridurla in forma a scalini per righe; determinare i ranghi di matrici completa e incompleta al variare di* $t \in \mathbb{R}$.

(*b*) *Si determinino le soluzioni* U_t *del sistema* Σ_t *al variare di* $t \in \mathbb{R}$.

(*c*) *Descrivere l'unione* U *di tutti i sottinsiemi* U_t *(per* $t \in \mathbb{R}$*), il minimo sottospazio affine contenente* U*, e il minimo sottospazio vettoriale contenente* U.

(*d*) *Determinare il numero di soluzioni del sistema* Σ_p *pensato a coefficienti in* $\mathbb{F}_p$ *per ogni primo* p.

Svolgimento. (a) e (b) Il sistema Σ_t ha matrice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} t & 2 & 0 & t & m & -m \\ 0 & 2 & 0 & 0 & m & -m \\ t & 2 & 5 & t & m & 1-m \\ 0 & 2t & 0 & 0 & t^2 & (1-m)t \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} I-II \\ II \\ III-I \\ IV-tII \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} t & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & m & -m \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t(t-m) & t \end{array}\right).$$

Dunque, se $t \notin \{0, m\}$, matrice completa ed incompleta han rango 4 e le soluzioni del sistema sono

$$U_t = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{m}{2} - \frac{m}{2(t-m)} \\ 1/5 \\ 0 \\ \frac{1}{t-m} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Discutiamo ora i casi particolari.

Se $\boxed{t=0}$, matrice completa ed incompleta han rango 2 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & m & -m \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m/2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $\boxed{t=m}$, la matrice completa ha rango 4 mentre quella incompleta ha rango 3 e quindi non ci sono soluzioni al sistema.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} m & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & m & -m \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{array}\right), \qquad U_m = \varnothing.$$

(*c*) Si osservi che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{m}{2} - \frac{m}{2(t-m)} \\ 1/5 \\ 0 \\ \frac{1}{t-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m/2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2(t-m)} \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e quindi $U_t \subset U_0$ per ogni valore di t. Dunque $U = U_0$ ed

$$\langle U \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -m/2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(*d*) Le trasformazioni elementari fatte per ridurre la matrice del sistema nella sua forma a scalini, sono tali anche su $\mathbb{F}_p$ e quindi possiamo partire considerando la matrice a scalini e riducendo su $\mathbb{F}_p$ le sue entrate. Dobbiamo distinguere alcuni casi.

Se $\boxed{p \notin \{2, 5\}}$, i pivot sono diversi da 0 in $\mathbb{F}_p$ e matrice completa ed incompleta del sistema han rango 2; quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 3 e vi sono perciò p^3 soluzioni.

Se $\boxed{p=2}$ la matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & m \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Se $m \notin \{2, 4\}$, matrice completa ed incompleta han rango 2 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione $2^3 = 8$. Altrimenti il rango è uguale ad 1 e le soluzioni in $\mathbb{F}_2$ sono $2^4 = 16$.

Se $\boxed{p = 5}$ la matrice del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & m & | & -m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

e quindi non vi sono soluzioni in $\mathbb{F}_5$. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 17 luglio 2007

ESERCIZIO 1. *Sia* $P(z) = z^3 + 1$.

(a) *Si determinino le radici,* z_1, z_2, z_3, *di* $P(z)$ *e le si disegnino nel piano di Gauss, indicando con* z_1 *una radice reale di* $P(z)$.

(b) *Si scriva l'equazione della circonferenza,* C, *del piano di Gauss contenente* z_1, z_2, z_3 *e si scriva l'espressione analitica della riflessione,* λ_C. *rispetto a* C. *Si disegni nel piano di Gauss l'insieme*

$$U = \left\{ z_1^m z_2^n z_3^k \,\middle|\, (n,m,k) \in \mathbb{Z}^3 \right\}.$$

(c) *Detta* C_k *la circonferenza di centro* z_1 *e raggio* $k \geq 0$, *si determinino in funzione di* k *parte reale e parte immaginaria dei punti di intersezione tra* C *e* C_k *nel piano di Gauss. Si determini (se esiste) il valore* k_0 *per cui la circonferenza* C_{k_0} *passa per* z_2 *e* z_3.

(d) *Si determinino le equazioni di* $\lambda_C^*(C_k)$, *al variare di* k, *e si dica per quali valori di* k *si ottiene un cerchio o una retta. In ogni caso, si determinino centro e raggio della circonferenza o le equazioni cartesiane della retta. Al variare di* k, *si dica se* $\lambda_{C_k}^*(C)$ *è un cerchio o una retta.*

Svolgimento. (a) $P(z) = (z+1)(z^2 - z + 1) = (z+1)(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2})(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2})$. Dunque, le tre radici sono $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \bar{z}_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

(b) La circonferenza è la circonferenza unitaria centrata nell'origine $C : |z| = 1$ e $\lambda_C(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. U è l'insieme delle radici seste dell'unità, ovvero i vertici dell'esagono regolare iscritto nella circonferenza unitaria (con un vertice uguale ad 1).

(c) Si ha

$$C_k \cap C : \begin{cases} |z| = 1 \\ |z+1| = k \end{cases}, \qquad \text{ovvero} \qquad C_k \cap C : \begin{cases} \bar{z}z = 1 \\ (z + \bar{z}) - (k^2 - 2) = 0 \end{cases}.$$

Nel piano di Gauss i punti di intersezione tra le due circonferenze sono $\frac{k^2-2}{2} \pm i\frac{|k|\sqrt{4-k^2}}{2}$ $(0 \leq k \leq 2)$. Si ha $k_0 = |z_2 + 1| = \left|\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$.

(d) Il punto $z_1 = -1$ appartiene a C, quindi

$$\lambda_C^*(C_k) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |\lambda_C(z) + 1| = k \,\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |\bar{z} + 1| = k|\bar{z}| \,\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (1-k^2)z\bar{z} + (z + \bar{z}) + 1 = 0 \right\}.$$

Dunque, per $k = 1$ si tratta della retta verticale $z + \bar{z} = 1$ ($\Re z = -\frac{1}{2}$). Per $k \neq 1$ si tratta della circonferenza di centro $z_0 = \frac{1}{k^2-1}$ e raggio $\frac{k}{|1-k^2|}$. Per ogni valore di $k \neq 1$, il cerchio C passa per il centro di C_k, quindi $\lambda_{C_k}^*(C)$ è una retta.

Lasciamo al lettore il compito di fare i disegni richiesti. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U : \begin{cases} X_1 + X_2 + X_4 = 0 \\ X_1 + 2X_2 - 2X_3 + 3X_4 = 0 \\ X_1 + 2X_3 - X_4 = 0 \end{cases} \qquad e \qquad V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(*a*) *Si determinino la dimensione, una base e delle equazioni cartesiane per i sottospazi* U *e* V*.*
(*b*) *Si determinino* $U \cap V$ *ed un sottospazio,* W*, tale che* $V = W \oplus (U \cap V)$*. Si verifichi che* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$*.*
(*c*) *Determinare le matrici in base canonica di* π_U^W*,* σ_W^U*. Qual è la restrizione ad* $U \cap V$ *di queste due applicazioni?*
(*d*) *Si dica se l'insieme,* C*, delle applicazioni lineari* $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *tali che* $\operatorname{im}(\pi_U^W \circ \phi) \subseteq V \cap U$ *è un sottospazio di* Hom $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ *ed in tal caso se ne calcoli la dimensione. Si scrivano le matrici in base canonica degli elementi di* C*.*

Svolgimento. (a) La seconda equazione che definisce V è uguale al doppio della prima meno la terza ed il sistema ha rango 2. Quindi $\dim U = 2$ ed una base è $\{e_1 - e_3 - e_4, 2e_1 - 2e_2 - e_3\}$.

I tre vettori che generano V sono linearmente indipendenti. Quindi V ha dimensione 3 ed è determinato dall'equazione cartesiana $V : X_1 + 2X_2 + X_4 = 0$.

(*b*) $U \cap V = \langle e_1 - e_3 - e_4 \rangle$ ha dimensione 1 e possiamo prendere $W = \langle e_1 + 2e_3 - e_4, e_1 - e_2 + e_4 \rangle$. Tramite la tecnica di eliminazione di Gauss, si verifica immediatamente che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(*c*) Dato un vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, la proiezione, $\pi_U^W(x) = a(e_1 - e_3 - e_4) + b(2e_1 - 2e_2 - e_3) \in U$, è quell'unico vettore tale che $x - \pi_U^W(x) \in W$. Deve quindi aversi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U^W) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 & -5 \\ 6 & 12 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -5 & -6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_W^U) = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(1 - 2\pi_U^W) = \mathbf{1}_4 - 2\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U^W).$$

Essendo $U \cap V \subset U$, per ogni $x \in U \cap V$, si ha $\pi_U^W(x) = x$ e $\sigma_W^U(x) = -x$.

(*d*) C non è vuoto perché contiene l'applicazione nulla. Indicato con v_0 un generatore di $U \cap V$, si ha che

$$\operatorname{im}(\pi_U^W \circ \phi) \subseteq V \cap U \iff \forall x \in \mathbb{R}^4,\ \phi(x) = av_0 + w,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \exists w \in W \iff \operatorname{im}\phi \subseteq (V \cap U) + W = V.$$

Dunque, gli elementi di C formano un sottospazio di Hom $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ isomorfo a Hom $(\mathbb{R}^4, V)$, che ha dimensione 12. Le matrici in base canonica degli elementi di C hanno come colonne combinazioni lineari dei vettori della base di V data nel testo. Con questo in mente, il lettore può facilmente scrivere le matrici di una base di C o la matrice di un generico suo elemento (farlo!). □

Esame di Matematica 2 – Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 11 settembre 2007

ESERCIZIO 1. Si consideri la trasformazione del piano complesso $z \mapsto f(z) = i\frac{1+z}{1-z}$.

(a) Si determinino i punti uniti della trasformazione.

(b) Al variare di k tra i numeri reali positivi, siano $D_k = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < k \,\}$ e $C_k = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = k \,\}$. Si determinino i valori di k per cui $f(z)$ è definita su tutti i punti di D_k. Detto k_0 il massimo valore per cui la trasformazione è definita su tutti i punti di D_{k_0}, si dica se l'insieme contiene qualche punto unito.

(c) Si determini l'insieme $f_*(D_{k_0})$ e lo si disegni nel piano di Gauss. Qual'è l'immagine di C_{k_0}?

(d) Si determinino gli insiemi $f_*(C_k)$, quando $k < k_0$.

ESERCIZIO 2. Siano date le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ degli spazi vettoriali reali V e W, rispettivamente.

(a) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ tali che

$$\phi(v_2 + v_3) = w_1 + 2w_2 + w_3, \quad \phi(v_1 + v_4) = 2w_1, \quad \phi(v_3) = w_2 + w_3, \quad \phi(v_1 + v_2 + v_4) = 3w_1 + w_2$$

e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ per ciascuna di queste.

(b) Si determinino nucleo ed immagine per ϕ e si determini, se esiste, un sottospazio $U \subseteq V$ tale che $\phi_{|U}$ sia una biiezione su W per tutte le applicazioni, ϕ, soddisfacenti alle condizioni del punto (a).

(c) Si consideri l'unione $\mathscr{K}$ dei sottospazi $\ker\phi$ per tutte le applicazioni, ϕ, soddisfacenti alle condizioni del punto (a). Si dica se $\mathscr{K}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ o si determini il sottospazio generato da $\mathscr{K}$.

(d) Al variare di ϕ si determini l'insieme, C_ϕ, delle applicazioni lineari $\psi : V \to V$ tali che $\operatorname{im}(\phi \circ \psi) \subseteq \langle w_1 \rangle$. Si dica se si tratta di un sottospazio e se ne determini l'eventuale dimensione. Si descrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi)$ delle applicazioni $\psi \in C_\phi$.