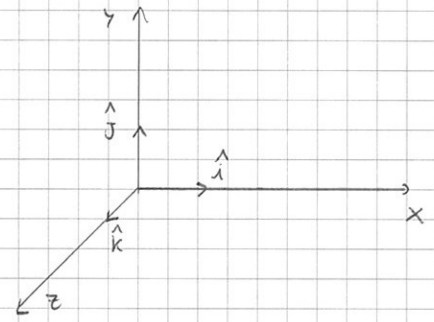
Elettrotecnica A

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
A.A. 2007/2008

Prof. Carlo Concari

Appunti di Beltrami Rita

RIPASSO DELLA FISICA MAXWELLIANA



Prendiamo uno spazio cartesiano e introduciamo i versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, rispettivamente sugli assi x, y e z. In questo spazio cartesiano possiamo definire l'operatore "nabla":

$$\boxed{\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]}$$

Questo operatore può essere applicato a campi scalari o vettoriali. Applichiamolo ad esempio ad un campo scalare Φ: otteniamo un campo vettoriale.

$\Phi(x, y, z, t)$

$$\boxed{\nabla \Phi = \left[\frac{\partial}{\partial x} \Phi_x , \frac{\partial}{\partial y} \Phi_y , \frac{\partial}{\partial z} \Phi_z \right] = \text{grad}\, \Phi}$$

Se adesso consideriamo invece un campo vettoriale qualsiasi, ci sono due modi per applicare ad esso l'operatore ∇:

$\vec{A}(x, y, z, t)$

- prodotto scalare

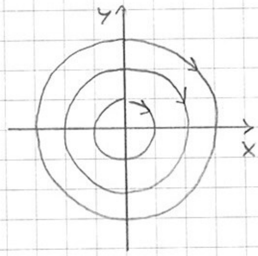
$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A}(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z = \text{div}\, \vec{A}}$$

- prodotto vettoriale

$$\nabla \times \vec{A}(x, y, z, t) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) \right] = \text{rot}\, \vec{A}$$

le rotore è indice della tendenza del campo ad avvolgersi intorno al punto considerato. La sua direzione è l'asse intorno al quale si avvolge il campo.



La direzione del rotore sarà quella dell'asse z. Il verso è entrante (regola della mano destra)

Alcune grandezze

$\vec{H}$ intensità di campo magnetico $[A/m]$

$\vec{E}$ intensità di campo elettrico $[V/m]$

$\vec{B}$ induzione magnetica $[T]$

$\vec{D}$ corrente di spostamento $[C/m^2]$

Sorgenti del campo:

ρ densità di carica elettrica $[C/m^2]$

$\vec{J}$ densità di corrente elettrica $[A/m^2]$

Postulati

L'elettromagnetismo è esprimibile a partire da due sole leggi da cui le altre discendono come conseguenza.

$$\boxed{\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \end{cases}}$$

Sono espressioni puntuali delle leggi integrali di Faraday e Ampère.
Le prendiamo come postulati.

Costante dielettrica e permeabilità magnetica

Introduciamo altre due grandezze che sono

ε costante dielettrica

μ permeabilità magnetica

Sono le due grandezze che caratterizzano il mezzo all'interno del quale sono presenti i campi elettromagnetici.

$$\boxed{\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \end{cases}}$$

Anche nel vuoto esistono queste costanti e quindi possono esistere i campi.

Divergenza del campo magnetico

Prendiamo i postulati di prima e applichiamo l'operatore divergenza a entrambi i membri.

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{\text{div rot } \vec{E}} = \text{div}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

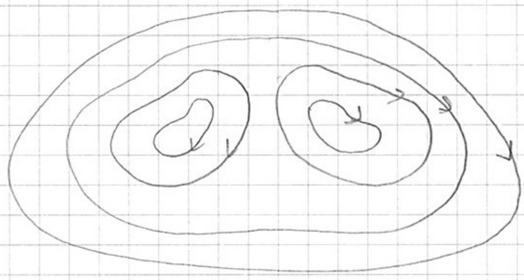
$$\text{div}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{B}\right)=0$$

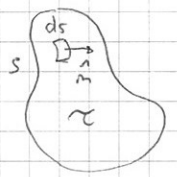
$$\operatorname{div}\vec{B} = cost$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$$

Il fatto della divergenza sia nulla dice che il campo non ha sorgenti nè pozzi, cioè le linee di forza sono chiuse, non hanno nè inizio nè fine. In altre parole si dice che il campo è SOLENOIDALE.



Teorema della divergenza
Prendiamo un volume chiuso τ delimitato da una superficie S.
Il teorema della divergenza dice che se faccio l'integrale della divergenza su tutti i punti del volume è uguale al volume sulla sup. chiusa di $\vec{B}\cdot\hat{n}\, ds$.
scalare



$$\boxed{\int_\tau \operatorname{div}\vec{B}\, d\tau = \oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, ds}$$

Il versore $\hat{n}$ è un vettore di lunghezza unitaria perpendicolare alla sup. e uscente dalla sup. stessa.
Ma poichè $\operatorname{div}\vec{B}=0$

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, ds = 0}$$ ← flusso di $\vec{B}$ attraverso S

Significa, in parole povere, che tanto il campo entra da una parte tanto esce dall'altra. Tante linee di forza entrano tante escono. Non esistono cioè punti dello spazio che siano sorgenti o pozzi di linee di forza di $\vec{B}$.

Ora ripetiamo lo stesso processo di prima alla seconda legge di Maxwell che abbiamo preso come postulato. Si ottiene

$$\boxed{\operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0} \qquad (1)$$

Legge di conservazione della carica

Sempre riferendoci a un volume chiuso τ delimitato da una superficie S possiamo scrivere la seguente identità:

$$\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau = - \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, ds$$

Il n° a primo membro è la variazione temporale della quantità di carica contenuta all'interno di τ. Se la derivata ha segno negativo sta ~~uscendo~~ uscendo carica, altrimenti sta entrando. La densità di carica integrata su S mi dice quanta carica sta uscendo

$$\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau = - \int_\tau \operatorname{div} \vec{J} \, d\tau$$

Da cui ricavo la legge di conservazione della carica scritta in forma puntuale

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Sostituiamo il risultato ottenuto nella (1). Otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} - \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{D} - \rho = \text{cost}$$

Posso immaginare che sia esistito un istante in cui questa costante valeva 0 (non c'era niente). Quindi deve essere ancora zero.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Riepilogo delle leggi viste

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} = \dfrac{\partial D}{\partial t} + \vec{J} \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \end{cases}$$

Quelle sopra sono le 4 leggi fondamentali di Maxwell.

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}$$

Queste sono le leggi costitutive della materia

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

e infine la legge di conservazione della carica.

Queste leggi ci permettono di trovare i campi $\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{D}$. La risoluzione di queste equazioni è affidata al calcolatore, tranne nei casi più semplici. Oppure si possono applicare ipotesi semplificative.

Regime quasi stazionario

Consideriamo di essere nel vuoto.

$\rho \equiv 0 \quad \vec{j} \equiv 0$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = - \dfrac{\delta \vec{B}}{\delta t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \dfrac{\delta \vec{D}}{\delta t} \end{cases}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\delta \operatorname{rot} \vec{B}}{\delta t}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} = - \frac{\delta \operatorname{rot} \vec{H}}{\delta t} \mu_0 \qquad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \vec{D} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\delta^2 \vec{E}}{\delta t^2}$$

Analogamente otteniamo

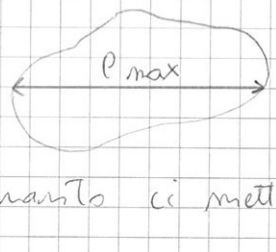
$$\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\delta^2 \vec{H}}{\delta t^2}$$

Una possibile soluzione di queste eq. differenziali è:

$$E_y = E_M \operatorname{sen}\left[\omega \left(\frac{x}{c_0} - t\right)\right] \qquad \text{dove} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad \text{velocità della luce nel vuoto}$$

$$H_z = E_M \left(-\frac{1}{\mu_0 c_0}\right) \operatorname{sen}\left[\omega \left(\frac{x}{c_0} - t\right)\right]$$

Ora immaginiamo che questo campo elettromagnetico raggiunga una regione di spazio in cui è contenuto il circuito.



Quanto ci mette il campo ad attraversare il circuito? $\dfrac{l_{max}}{c}$

La lunghezza d'onda del campo è $\lambda = \dfrac{2\pi c_0}{\omega}$. Si può dimostrare che se λ è molto maggiore della lunghezza massima del circuito che attraversa allora il circuito non viene minimamente alterato dal passaggio dell'onda. Supponiamo che nel circuito ci siano campi elettrici e magnetici con frequenza ω: λ risulta così grande che nel tempo impiegato a attraversare il circuito i segnali sono cambiati di poco.

Tutte le volte che

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \vec{B}}{\delta t} \simeq 0 \\ \dfrac{\delta \vec{D}}{\delta t} \simeq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{R.Q.S.} \qquad \text{R.Q.S} \begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{J} = 0 \end{cases}$$

Si parla di Regime Quasi Stazionario: qualche variazione c'è, ma è così lenta che i termini propagativi sono praticamente nulli.

esempio:
L'energia fornita dall'ENEL ha una frequenza di

$f = 50\ Hz \Rightarrow \omega = 2\pi f = 314\ rad/s$

Qual è la lunghezza d'onda?

$\lambda \simeq 6'000\ Km$

è un numero talmente grande che possiamo dire di essere in R.Q.S, a meno di non stare lavorando con una rete elettrica di dimensioni internazionali.

REGIME QUASI STAZIONARIO

Quando il tempo caratteristico di variazione delle grandezze elettriche (ad esempio, il tempo che intercorre tra due picchi successivi di una tensione) è molto maggiore del tempo di propagazione dei segnali elettromagnetici lungo la rete in esame (è noto infatti che la propagazione delle onde elettromagnetiche avviene alla velocità della luce

In regime R.Q.S. le equazioni di Maxwell si semplificano (le derivate temporali si annullano).

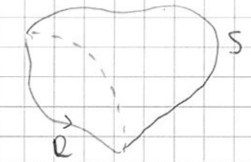
$$\boxed{\begin{cases} \text{rot}\,\vec{E} \simeq 0 \\ \text{rot}\,\vec{H} \simeq \vec{J} \\ \text{div}\,\vec{B} \simeq 0 \\ \text{div}\,\vec{D} = \rho \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \\ \text{div}\,\vec{J} \simeq 0 \end{cases}}$$

$\leftarrow \text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \text{div}\,\vec{D} = \rho$ legge di Gauss in forma locale

In questo regime la trasmissione dell'energia non può avvenire nel moto, ma l'unico modo di trasferire energia in regime quasi stazionario è far scorrere delle cariche elettriche. L'unico modo per trasmettere energia a distanza con campi elettrici o magnetici è utilizzare dei conduttori.

Conseguenze pratiche delle semplificazioni introdotte dal RQS
Poniamoci nel caso
$\text{rot}\,\vec{E} = 0$

Ricordiamoci il teorema di Stokes. Abbiamo una linea chiusa ℓ a cui è appoggiata una superficie aperta S. Possiamo scrivere che



$$\boxed{\int_S \text{rot}\,\vec{E}\cdot\hat{n}\cdot dS = \oint_\ell \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}$$

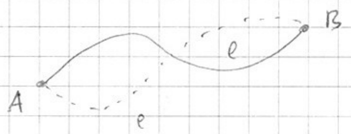
Teorema di Stokes

flusso di $\vec{E}$ esteso alla superficie

In regime R.Q.S il primo membro è uguale a zero, quindi

$$\boxed{\oint_\ell \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0}$$

Ciò significa che il campo è conservativo. Quindi per calcolare questo integrale lungo una linea aperta si può dimostrare che il risultato non dipende dal percorso che ho scelto di seguire.



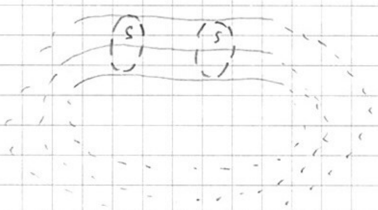
È possibile definire un potenziale V funzione del punto tale che

$$\boxed{\vec{E} = -\text{grad } V}$$

TENSIONE O DIFFERENZA DI POTENZIALE

Se il campo è conservativo possiamo dire che è IRROTAZIONALE.

In regime R.Q.S. anche il campo $\vec{J}$ diventa di tipo solenoidale. ($\text{div}\,\vec{J} = 0$).



Un tubo di flusso è definito dallo spazio individuato dalla superficie tubolare che si forma tracciando una linea di flusso per ogni punto di una linea chiusa che non sia essa stessa una linea di flusso

Un tubo di flusso è una forma vagamente cilindrica attraversata da un certo n° di linee di flusso. Siccome tutte le linee sono chiuse anche il tubo di flusso sarà chiuso.

Si può definire un integrale ~~de~~ sulla superficie S del tubo di flusso

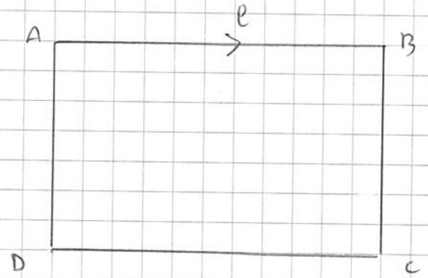
$$\boxed{I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} \cdot dS}$$

CORRENTE

La corrente I è identica in ogni punto del tubo di flusso.

I principi di Kirchoff

- Prendiamo una linea chiusa L delimitata da 4 punti A, B, C, D.



$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{E}\cdot d\vec{l} =$$

$$= V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_D + V_D - V_A = 0$$

Possiamo scrivere che lungo una linea chiusa l la somma di tutte le d.d.p, prese sempre con lo stesso verso, è uguale a zero.

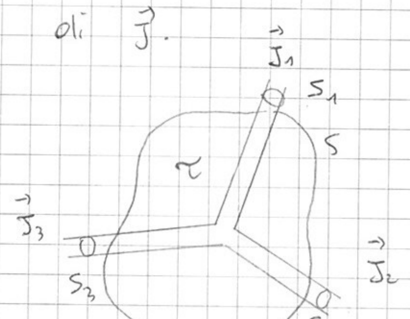
$$\boxed{\sum_l \Delta V = 0}$$ SECONDO PRINCIPIO DI KIRCHOFF

Questo risultato è del tutto generale. Per es. vale anche se lungo il circuito ci sono dei componenti.

- Poichè $\operatorname{div}\vec{J}=0$ possiamo dire (th divergenza)

$$\oint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\cdot ds = 0$$

Ora immaginiamo ~~di en~~ che $\vec{J}$ entri o esca da τ attraverso dei conduttori elettrici. Possiamo considerare questi canali come tubi di flusso di $\vec{J}$.



Se voglio calcolare il flusso di $\vec{J}$ attraverso S mi basta fare

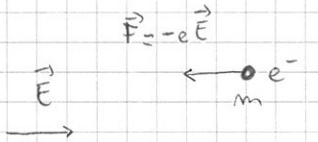
$$\sum_{1}^{n} J_n S_n = 0$$

Ma ognuno di questi addendi è la corrente che entra da ciascuno dei conduttori. Quindi posso dire

$$\boxed{\sum_{1}^{n} I_n = 0}$$

Ci devono essere quindi conduttori da cui la corrente entra ed altri da cui esce, perchè il bilancio deve essere zero. In altre parole non c'è accumulo di carica all'interno della superficie.
Anche questo è un risultato del tutto generico.

Legge di Ohm (in forma locale)
Immaginiamo di avere una carica (ad es. un elettrone) libero di muoversi e un campo elettrico $\vec{E}$. Sull'elettrone agirà una forza di senso inverso rispetto a quella del campo.



m = massa dell'elettrone

Poichè l'elettrone è soggetto a una forza esso sarà sottoposto ad un'accelerazione.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Poichè $\vec{E}$ è costante $\Rightarrow$ $\vec{F}$ costante $\Rightarrow$ $\vec{a}$ costante
Quindi la particella si muoverà ~~ed~~ a velocità sempre più sostenuta.
Questo contrasta col dato sperimentale che se applico una tensione a un filo la corrente resta costante, non aumenta sempre di più come potremmo aspettarci. Il problema è che quando la particella subisce l'azione della forza durante il suo moto urta contro gli atomi che costituiscono il mezzo in cui si muove. Statisticamente esiste un TEMPO MEDIO TRA GLI URTI che possiamo chiamare τ (tau).

τ = tempo medio tra due urti

Possiamo dire, semplificando, che dopo l'urto la particella si ferma e deve ripartire da $v_0 = 0$. Poiché consideriamo il tempo medio fra gli urti costante le particelle si muoveranno con velocità costante.

$$\vec{F} = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{-e\vec{E}}{m}$$

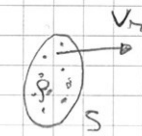
$$v(\tau) = v(0) + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{e\vec{E}}{m}\, t\, dt$$

Poniamo $v(0) = 0$ (velocità iniziale nulla). Vogliamo calcolare la velocità media raggiunta dalla particella nel tempo τ.

$$v_M = \frac{1}{\tau}\cdot\int_0^\tau \frac{eE}{m}\, t\, dt = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\tau$$

la densità di corrente $\vec{J}$ su una superficie è uguale alla densità di carica per la velocità degli elettroni.

$$J = \rho\, v_M$$



$$J = \frac{1}{2}\frac{\rho e E}{m}\tau = \gamma E$$

costante caratteristica del mezzo

γ = CONDUCIBILITÀ ELETTRICA del mezzo

$$\boxed{J = \gamma E}$$

LEGGE DI OHM IN FORMA LOCALE

esempio:

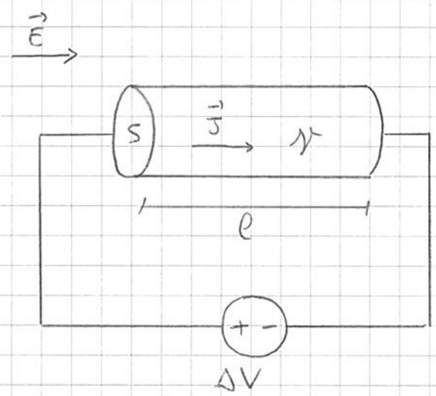
$\gamma_{RAME} = 5{,}8 \cdot 10^{7}\ \Omega^{-1} m^{-1}$ materiale conduttore

$\gamma_{TEFLON} = 10^{-20}\ \Omega^{-1} m^{-1}$ materiale isolante

Se abbiamo un filo ricoperto di resina possiamo considerare che la corrente scorra unicamente all'interno del filo, perché la conducibilità della resina non è nulla ma è comunque piccolissima.

Legge di Ohm (in forma integrale)

Consideriamo un conduttore che abbia sezione S e lunghezza l.
Il materiale avrà conducibilità γ.



$$I = J \cdot S = \gamma E \cdot S = \frac{\gamma \cdot E \cdot l \cdot S}{l} = \underbrace{\gamma \cdot \frac{S}{l}}_{\doteq \frac{1}{R}} \Delta V$$

$$\boxed{I = \frac{\Delta V}{R}}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{S}}$$

In questo caso semplice la resistenza dipende solo dalla conducibilità, dalla lunghezza e dalla sezione del conduttore

$$\boxed{\Delta V = I \cdot R}$$

LEGGE DI OHM in forma integrale

Più il conduttore è lungo, maggiore è la resistenza, minore è l'intensità di corrente a parità di tensione. La resistenza è una misura di quanto il mezzo "resista" allo scorrere della corrente.
La resistenza non è costante: essa varia fortemente con la temperatura.

Seconda legge di Ohm

$$\boxed{\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_0}\left(1 + \alpha \theta\right)}$$

$$\boxed{\frac{1}{\gamma} = \rho}$$

RESISTIVITÀ ELETTRICA

$\frac{1}{\gamma_0}$ = resistività del materiale a 0 °C

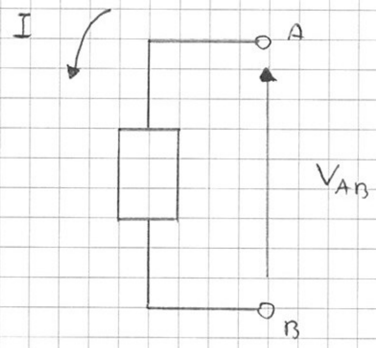
α = COSTANTE TERMICA del materiale

θ = temperatura (in gradi centigradi)

Come mai avviene questo? Quanto più il materiale è caldo tanto più il reticolo cristallino vibra => diminuisce il tempo medio tra gli urti τ => diminuisce la conducibilità.

Bipolo elettrico

Un bipolo elettrico è un componente che è accessibile elettricamente dall'esterno con due morsetti che identifichiamo con le lettere A e B.

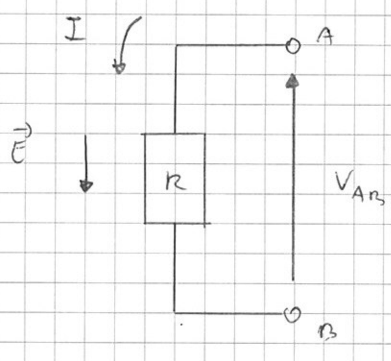


Definiamo ~~V_{AB} la di~~ tensione V_{AB} la d.d.p tra il punto A e il punto B e la indichiamo come una freccia che va dal punto B al punto A.

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

La corrente I sarà positiva se va veramente come indicato in figura. Se una volta che la calcolo mi viene negativa non cambio il disegno, ma so che va nell'altro senso.

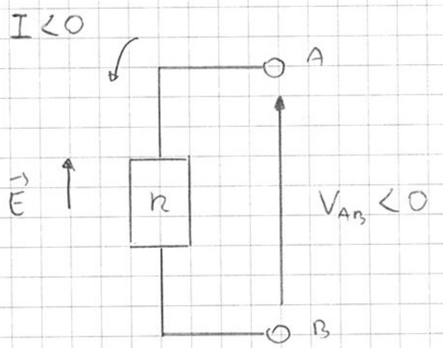
Un dipolo può essere ad esempio una resistenza R.



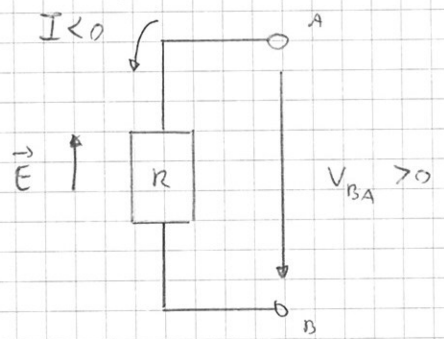
Come capire qual è il vero verso della corrente? La corrente scorre nello stesso senso del campo elettrico. Siccome ho fissato il segno del potenziale e so che

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V$$

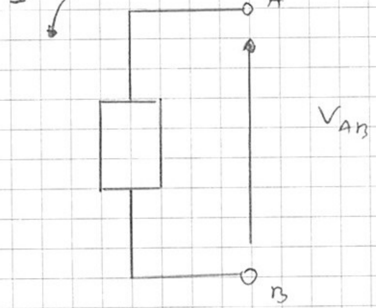
Il potenziale diminuisce quando vado dal punto A al punto B.
Il gradiente mi indica la direzione in cui il potenziale aumenta.
$\vec{E}$ andrà nel senso opposto (c'è il segno meno).
Quindi in una resistenza la corrente entra dal morsetto a cui è applicato il potenziale maggiore.
Se applico una $V_{AB} < 0 \Rightarrow I < 0$



In questo caso

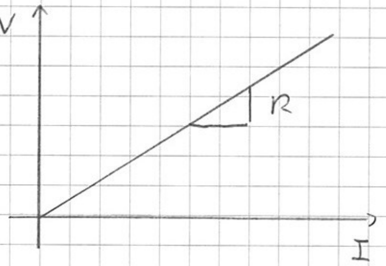


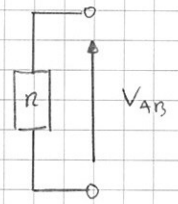
Il campo $\vec{E}$ andrà nella direzione di diminuzione del potenziale



Questa convenzione si chiama CONVENZIONE DELL'UTILIZZATORE perché è il modo in cui si configurano normalmente la tensione e la corrente quando il bipolo è una resistenza.

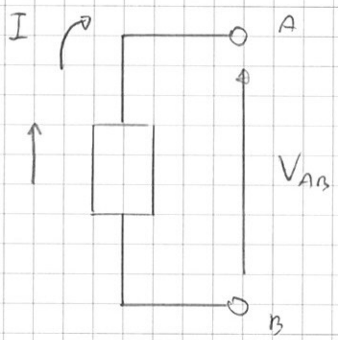
Dato un utilizzatore posso rappresentare graficamente la legge di Ohm. Ottengo una retta la cui pendenza è proporzionale a R (man mano che aumenta R la retta è sempre più verticale).





Questo è vero se è rispettata la condizione dell'utilizzatore

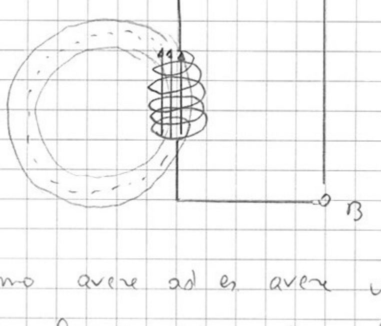
La convenzione opposta è detta CONVENZIONE DEL GENERATORE



La tensione esce dal morsetto positivo come se il bipolo fosse un generatore. Se il bipolo si sta comportando come un generatore e rispetto la convenzione del generatore $I > 0$

Ma se il campo elettrico va nel verso della corrente, come mai non vale $E = -\text{grad}\,V$ ma $E = \text{grad}\,V$? All'interno del generatore avvengono delle condizioni che violano le condizioni del RQS.

Immaginiamo che il dipolo sia un generatore elettromeccanico. Lo possiamo schematizzare come una bobina, all'interno della quale c'è un campo magnetico di induzione $\vec{B}$ e densità di induzione magnetica J



Possiamo avere ad es avere un nucleo ferromagnetico che passa nella bobina. Se da fuori c'è qualcosa che fa variare il campo si hanno fenomeni di induzione.

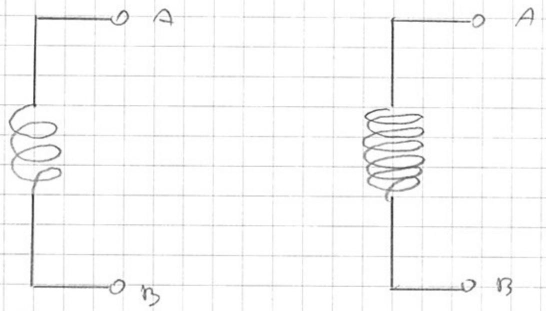
Si crea una f.e.m.

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi}{dt} = V_{AB} \qquad \text{legge di induzione di Faraday}$$

Ma questa è la legge di Faraday

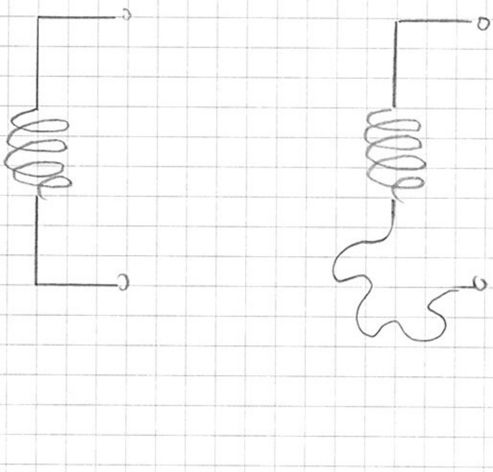
$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Quindi $rot\,\vec{E} = 0$ $\Rightarrow$ il campo non è stazionario. Dimostriamolo.
Andiamo da A a B seguendo una strada diversa (ad. es. passando per una bobina con più spire) raccolgo più f.e.m., sebbene sia sempre andato dal punto A al punto B.

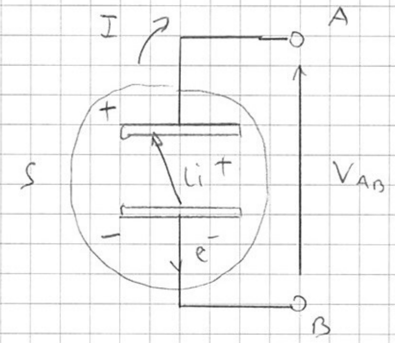


$\frac{\partial B}{\partial t}$ non è più trascurabile perché mi dà l'importante conseguenza di modificare la f.e.m.

Solo all'<u>interno</u> del generatore il campo non è più stazionario.



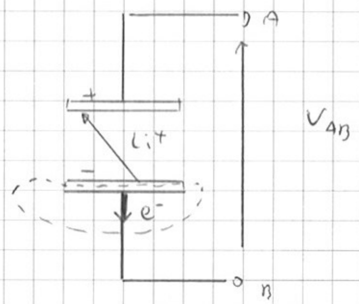
Immaginiamo che il bipolo sia un generatore elettrochimico (es. batteria).



Qua viene violata la seconda delle condizioni RQS, cioè $\operatorname{div} \vec{J} = 0$.
Supponiamo di avere una batteria al litio: essa è piena di molti atomi di litio.
Gli ioni litio+ si spostano dall'elettrodo negativo a quello positivo. C'è quindi un elettrone negativo in più sull'armatura negativa. L'elettrone si muove attraverso il circuito fino a ricongiungersi allo ione I^+.
Complessivamente la batteria è neutra, perché un elettrone esce e l'altro rientra, dando origine alla corrente interna alla batteria.
Ora prendo una superficie chiusa S che racchiude la batteria. Il campo risulta solenoidale; quanti e^- escono e tanti entrano. Il flusso è zero.

$$\oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, ds = 0$$

Ora andiamo a modificare la superficie.

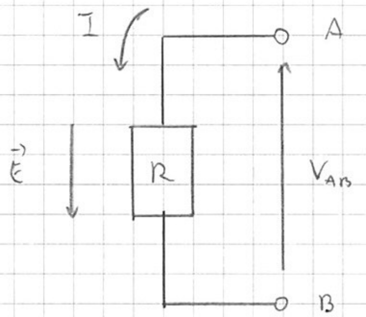


Dentro a questa sup. ho un elettrone che esce e nessuno che entra. In regime SQR non ci possono essere sparizioni di carica così nel nulla.

Se per assurdo ipotizzassimo che non possa esistere nessuno di questi due tipi di generazione, allora non potrebbe esserci corrente elettrica. La risultante delle forze agenti sugli elettroni sarebbe nulla. Invece nei due casi visti prima abbiamo energia (meccanica e chimica) che viene trasformata in energia elettrica.

Cosa avviene a livello energetico all'interno di una resistenza.

Prendiamo una resistenza



forza che agisce su una carica

$$V_A - V_B = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_A^B \frac{d\vec{F}}{dq}\cdot d\vec{l} =$$

$$(V_A - V_B)\, dq = \underbrace{-\int_A^B d\vec{F}\, d\vec{l}}_{dL}$$

energia spesa per spostare una particella da A a B

Qual è la potenza che mi serve per spostare questa carica a una certa velocità

$$(V_A - V_B)\frac{dq}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

$$\underbrace{(V_A - V_B)}_{R \cdot I}\,\underbrace{I}_{\frac{V_A - V_B}{R}} = P$$

POTENZA DISSIPATA DA UNA RESISTENZA

$$R I^2 = P$$

$$P = \frac{(V_A - V_B)^2}{R}$$

$$\boxed{P = (V_A - V_B)\, I}$$

$$\boxed{P = R I^2}$$

$$\boxed{P = \frac{(V_A - V_B)^2}{R}}$$

Ci sono dei calcoli di massima che ci dice se una resistenza può sopportare una certa corrente.

L'energia dissipata dalla resistenza come calore è

$$\underbrace{R I^2 dt}_{\text{E elettrica } (P)} = \underbrace{c M d(\theta - \theta_A)}_{\text{E termica (Q) immagazzinata nella resistenza (si scalda)}} + \underbrace{\lambda S_T (\theta - \theta_A) dt}_{\text{E termica dissipata nell'ambiente}}$$

θ = temperatura della resistenza

θ_A = temperatura ambiente.

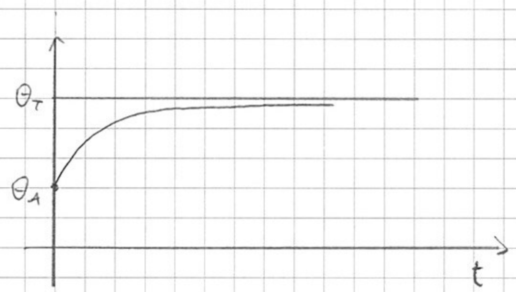
c = capacità termica specifica

M = massa

λ = coeff. globale di trasmissione del calore

S_T = superficie totale della resistenza. (sup. esterna)

Ciò che succede di solito è che la resistenza parte dalla temperatura ambiente e sale, di solito in modo esponenziale, fino ad avvicinarsi sempre di più (asintoto) a una temperatura di regime



$$R I^2 dt = \underbrace{c M d(\theta - \theta_A)}_{=0} + \lambda S_T (\theta - \theta_A) dt$$

A regime

$$R I^2 dt = \lambda S_T (\theta - \theta_A) dt$$

Tutta l'energia viene dissipata nell'ambiente.

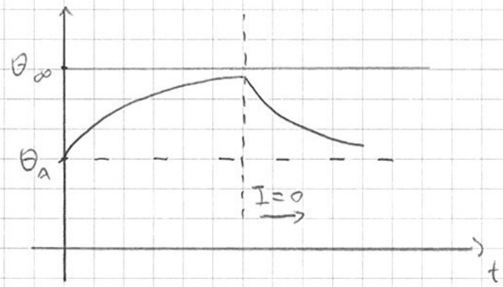
Ci sono delle tabelle che mi dicono quanta corrente può scorrere nel filo prima che si sciolga la guaina esterna.

$S = 1\ mm^2 \Rightarrow I_{max} = 9A$

$S = 4\ mm \Rightarrow I_{max} = 30\ A$

$S = 10\ mm^2 \Rightarrow I_{max} = 52\ A$

Se stacco la corrente la resistenza non smette istantaneamente di fornire calore all'ambiente, ma si raffredda pian piano.



Diventa

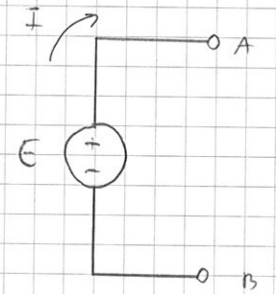
$$RI^2 dt = cM d(\theta - \theta_A) + \lambda S_T (\theta - \theta_A) dt$$

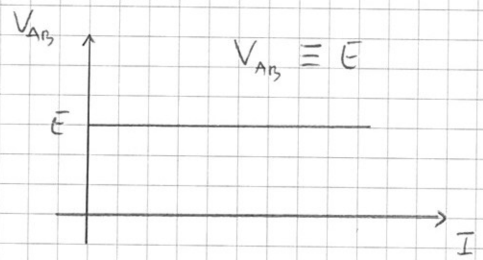
$\overset{\shortparallel}{0}$ negativo (✓) positivo

Viene pian piano ceduta all'ambiente l'energia che la resistenza aveva accumulato nella prima fase (✓).

$$cM\, d(\theta - \theta_A) = -\lambda S_T (\theta - \theta_A) dt$$

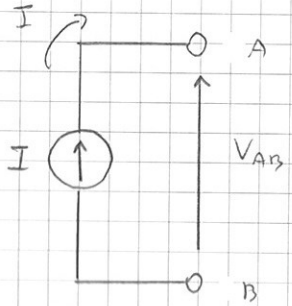
Generatore ideale di tensione

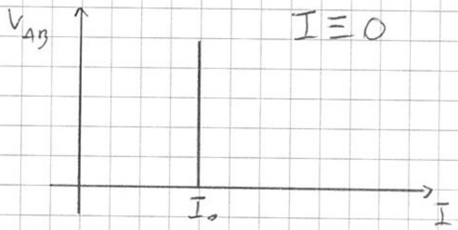




E = tensione del generatore ideale di tensione (non è un campo elettrico).

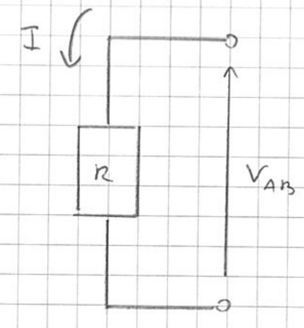
Generatore ideale di corrente

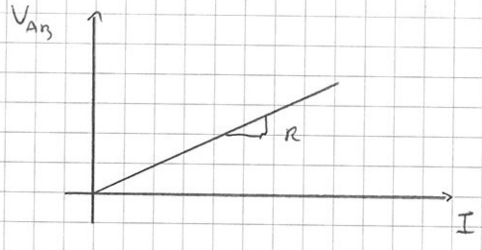




Indipendentemente dalla tensione che applico dall'esterno il dispositivo forza la corrente ad avere sempre il valore I_0

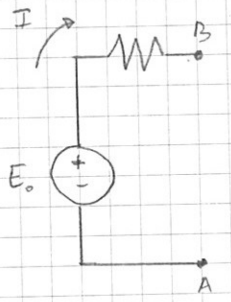
Rappresentazione grafica della legge di Ohm

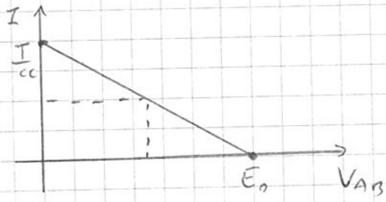




Generatori reali di tensione

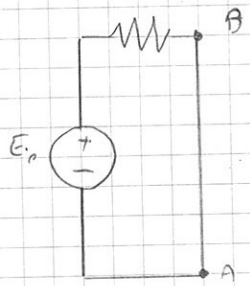
Lo possiamo vedere come la serie di un generatore ideale di tensione e di una resistenza che chiamiamo RESISTENZA INTERNA del generatore.





La retta non passa per l'origine.

Quando $V_{AB}=0$ significa che mettiamo in cortocircuito i due morsetti A e B.

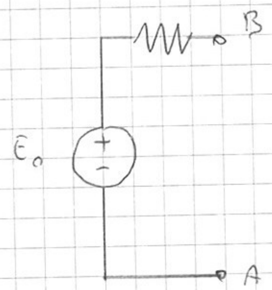


Siccome è una maglia chiusa vale la legge di Kirchoff.

$$I\Big|_{V_{AB}=0} = \frac{E_0}{R_0} = I_{cc}$$

In condizioni di cortocircuito ho la massima corrente che il generatore può generare. Si parla di CORRENTE DI CORTOCIRCUITO.

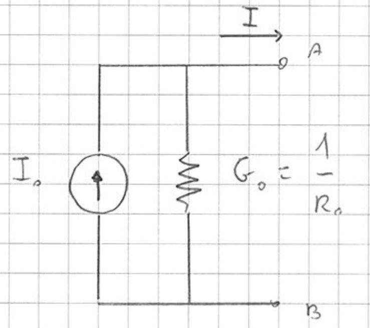
Ottengo $I=0$ quando non metto il filo tra A e B, lascio il circuito aperto.

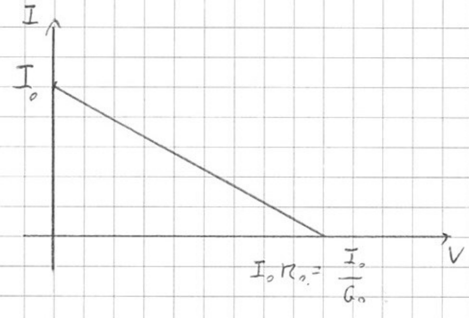


$$V_{AB}\Big|_{I=0} = E_0$$

Il generatore si comporta come un generatore ideale. Quando metto un qualsiasi carico comincia a scorrere corrente e la tensione ai suoi capi mano a mano diminuisce.

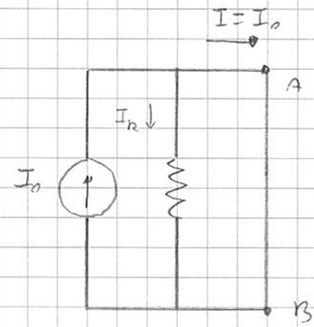
Generatore reale di corrente





È un generatore ideale con in parallelo una conduttanza. I è la corrente che esce dal morsetto A, che può essere diversa da I_0.

Mettiamoci nel caso di tensione nulla (cortocircuito). Tutta la corrente I_0 finirà nella maglia esterna: essendoci conduttanza infinita (resistenza nulla) la corrente preferirà andare di lì.



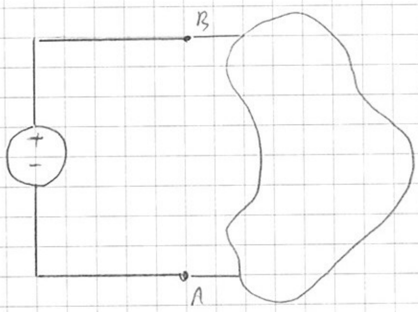
Dal morsetto A esce la corrente I_0. Possiamo vederlo anche con la legge di Ohm.

$$I_R = \frac{V_{AB}}{R_0} = 0$$

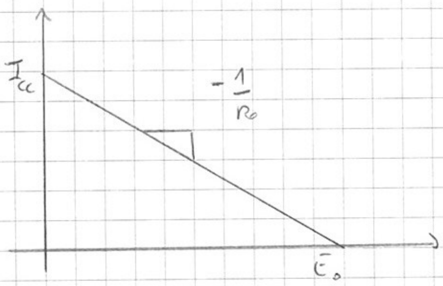
A circuito aperto tutta la corrente passa per la conduttanza (quella che esce da A è nulla.

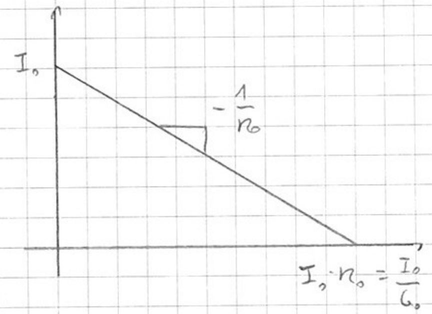
$$V_{AB}\big|_{I=0} = I_0 R_0 = \frac{I_0}{G_0}$$

Se in un circuito ho un generatore reale di tensione posso farlo diventare un generatore reale di corrente.

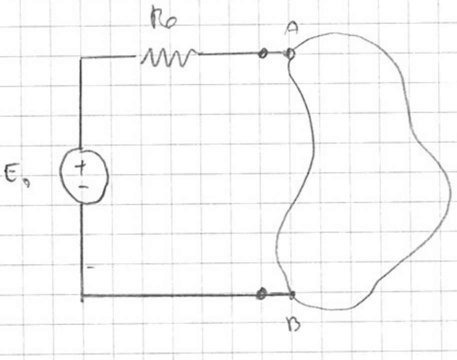


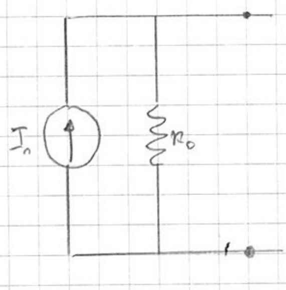
Quello che mi interessa è la legge costitutiva (legame tra A e B). Se lo sostituisco con un'altra cosa con la stessa legge costitutiva il circuito non si accorge di niente.
Come ottenere due generatori equivalenti?





Devono avere la stessa resistenza e in più $I_o = \frac{E_o}{R_o}$. I due generatori hanno stessa pendenza e stesse intercette.



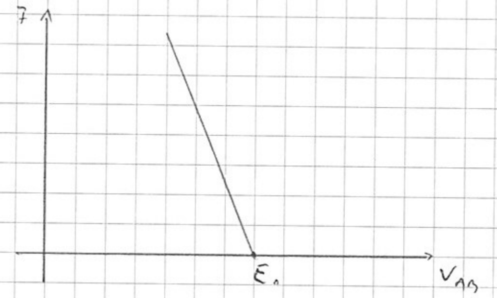


$$I_o = \frac{E_o}{R_o}$$

sono equivalenti

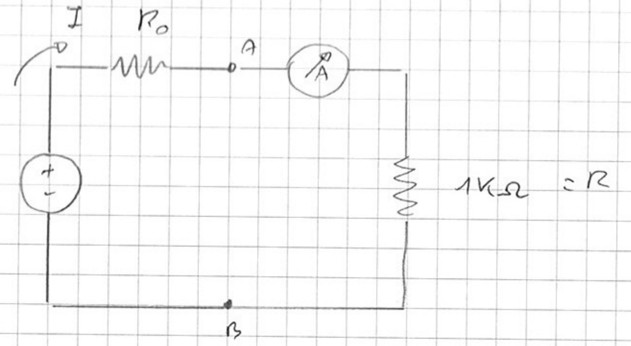
Calcolo della resistenza interna.

Vogliamo determinare la resistenza interna di un generatore di tensione. Per farlo identificheremo due punti. Mettiamoci nella condizione in cui la corrente è nulla (circuito aperto).



$E_0 = 8,07\ V$

Ora collego la resistenza in serie alla pila.

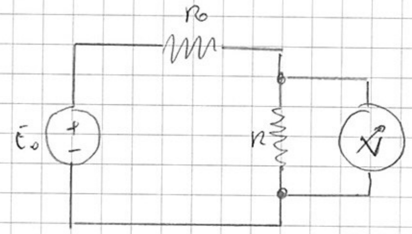


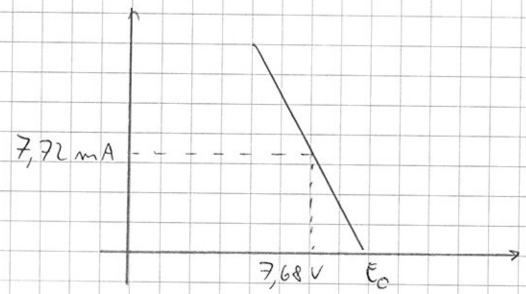
Ora misuro la corrente che passa per l'amperometro.

$I = 7,72\ mA$

Ora mi manca l'informazione di qual è ora V_{AB}.

$V_{AB} = 7,68\ V$

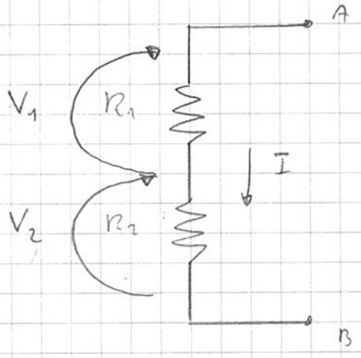




$$r_0 = \frac{\Delta V}{\Delta I} = \frac{0,39}{7,72 \cdot 10^{-3}} = 50,51\ \Omega$$

Questa batteria è molto scarica, infatti la resistenza interna è molto alta. È aumentata tanto la resistenza interna che anche se richiedo una piccola corrente tutta la tensione cade sulla resistenza interna.

Resistenze



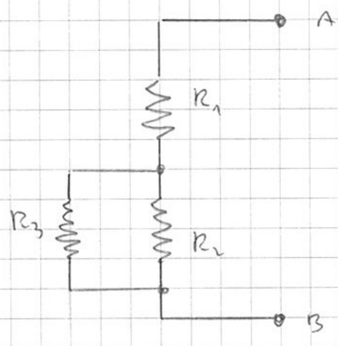
Due bipoli si dicono in SERIE quando hanno un capo in comune e stessa corrente che scorre.
Immaginiamo che in questo ramo scorra la corrente I. Quanto valgono le ~~da~~ cadute di potenziale V_1 e V_2?

$$V_1 = R_1 I$$
$$V_2 = R_2 I$$
$$V_{AB} = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I = I(R_1 + R_2)$$

Questo ci dimostra che la serie di due resistenza è uguale a una resistenza equivalente che è uguale alla somma delle due resistenze di partenza.

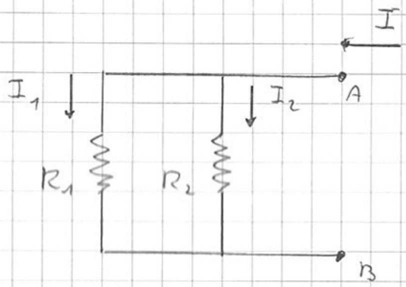
$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2}$$

nota:



In questo caso R_1 e R_2 non sono più in parallelo, perché al loro interno non scorre più la stessa corrente.

Resistenze in parallelo



Due bipoli sono in PARALLELO ogni qual volta i morsetti siano in comune. La conseguenza è che su entrambi i bipoli è applicata la stessa d.d.p.

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2}$$

$$I = I_1 + I_2 = V_{AB} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = V_{AB} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

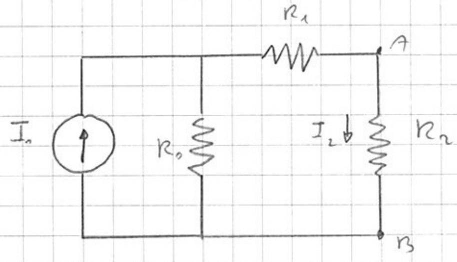
Il parallelo di due resistenze è equivalente a un'unica resistenza di valore R_{eq} tale che

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Se considerassi il parametro conduttanza

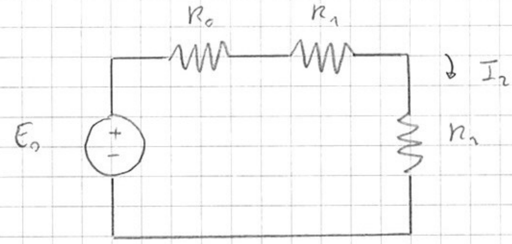
$$G_{eq} = G_1 + G_2$$

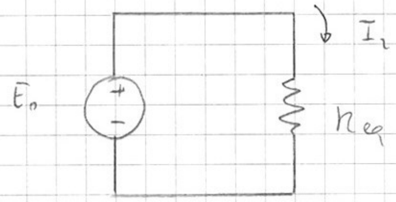
Può venire utile sostituire un generatore con il suo duale. Immaginiamo di avere questo circuito e di volerlo semplificare.



I_0 ?

Noto che se sostituissi il generatore con l'equivalente generatore di tensione il circuito si semplificherebbe (avrei solo resistenze in serie).



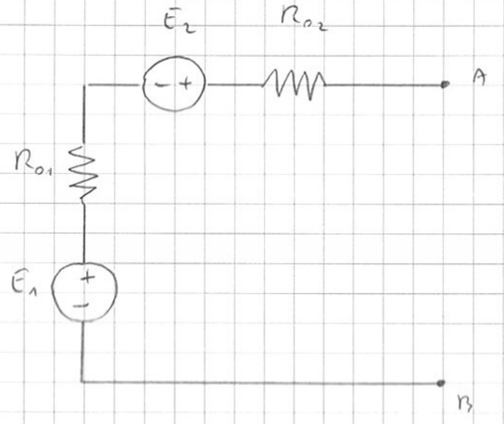


$$E_0 = I_0 \cdot R_0$$

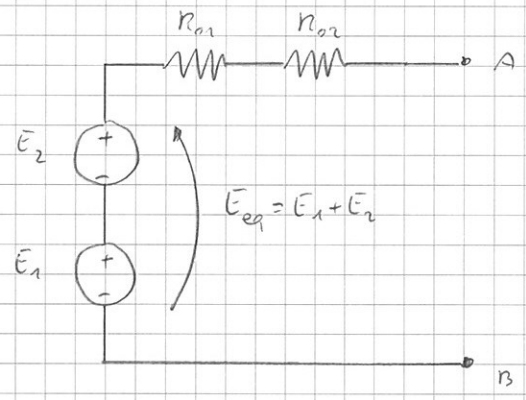
$$R_{eq} = R_0 + R_1 + R_2$$

$$I_2 = \frac{E_0}{R_{eq}} = \frac{I_0 \cdot R_0}{R_0 + R_1 + R_2}$$

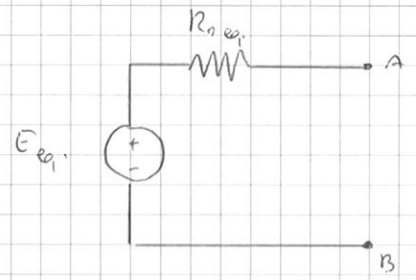
Generatori reali di tensione in serie



Consideriamo questo circuito, che presenta 2 generatori reali di tensione in serie. Quando ho dei componenti in serie posso cambiarli di ordine senza che cambi la caratteristica ai morsetti.



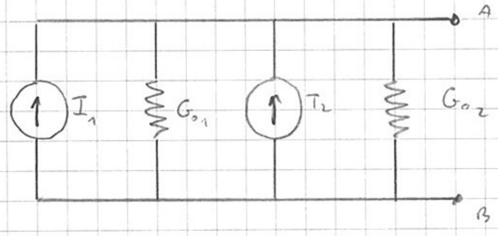
Generatori reali in serie si sommano.

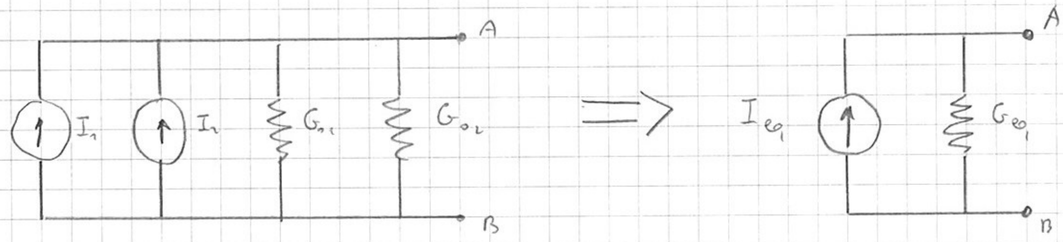


$$\boxed{\begin{aligned} E_{eq} &= E_1 + E_2 \\ R_{0eq} &= R_{01} + R_{02} \end{aligned}}$$

Generatori reali di corrente in parallelo

In modo analogo i generatori reali di corrente si sommano quando sono in parallelo.



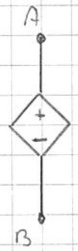


$$I_{eq} = I_1 + I_2$$

$$G_{eq} = G_{01} + G_{02}$$

Generatori pilotati:

Tutti i generatori visti prima erano indipendenti. I generatori dipendenti sono quelli il cui valore, di tensione e di corrente, dipende ad esempio dalla tensione o dalla corrente in un'altra parte del circuito. Ad es. se ho un generatore di tensione la cui tensione V_H dipende, tramite il parametro a, dalla tensione V_K che ho in un'altra parte del circuito, il parametro a è adimensionale. Questo è un "generatore ideale di tensione pilotato in tensione".



$$V_H = a\, V_K$$

- Generatore ideale di tensione pilotato in corrente.

$$V_H = R \cdot I_K$$

R assume le dimensioni di una corrente.

- Generatore ideale di corrente pilotato in tensione

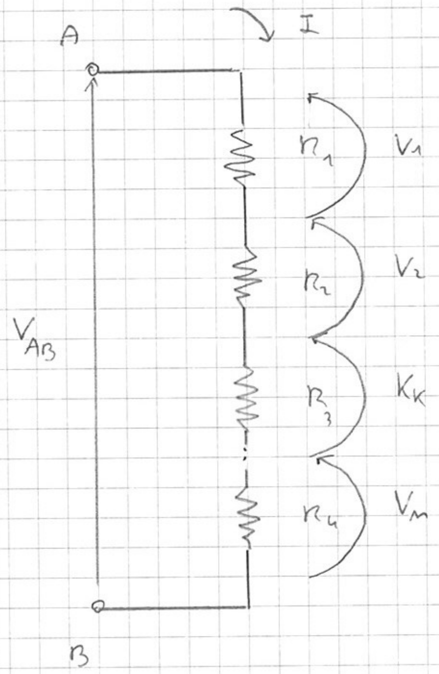
$$I_H = G\, V_K$$

G assume le dimensioni di una conduttanza.

- Generatore ideale di corrente pilotato in corrente

$$I_H = a\, I_K$$

Partitore di Tensione

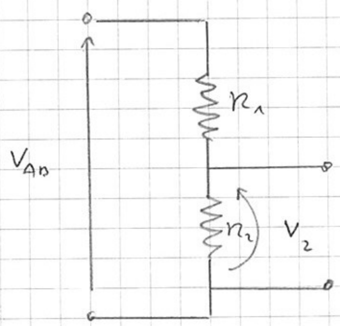


$$I = \frac{V_{AB}}{\sum_{j=1}^{m} R_j}$$

$$\boxed{V_K = V_{AB} \cdot \frac{R_K}{\sum_{j=1}^{m} R_j}}$$

Permette di calcolare come la tensione viene suddivisa su una serie di resistenze

esempio:

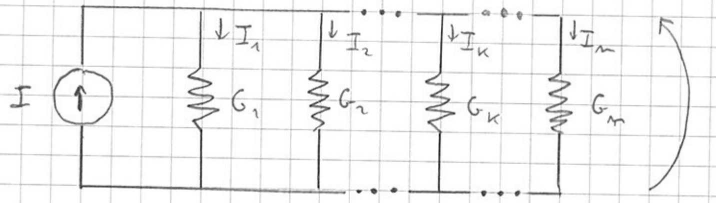


$$V_2 = V_{AB} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Posso usarlo se ho a disposizione una tensione alta e me ne serve una più bassa.

Partitore di corrente

↳ rappresentiamo con un parallelo di conduttanze.

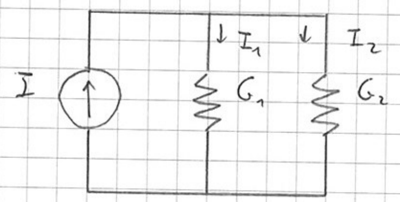


$$V = \frac{I}{\sum_{j=1}^{m} G_j}$$

$$\boxed{I_k = I \cdot \frac{G_k}{\sum_{j=1}^{m} G_j}}$$

$$I_k = I \cdot \frac{\frac{1}{R_k}}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{R_j}}$$

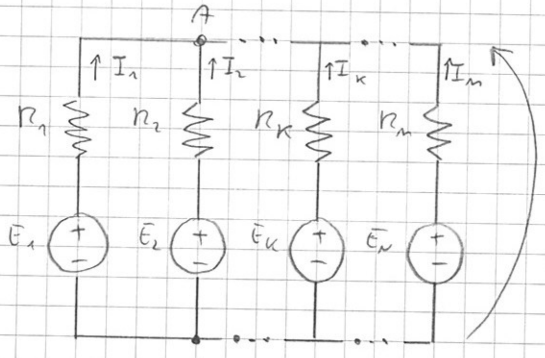
esempio:



$$I_1 = I \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$

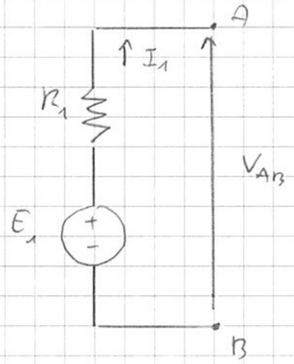
Teorema di Millman.

Si usa per risolvere esercizi che prevedono il parallelo di generatori reali di tensione.



$V_{AB} = ?$

Focalizziamo la nostra attenzione sul ramo E_1



NB: I_1 negativa

Applichiamo la legge di Kirchoff a questa maglia.

$$V_{AB} - E_1 = -R_1 I_1$$

Analogamente

$$V_{AB} - E_2 = -R_2 I_2$$

$\vdots$

Ricaviamo le correnti associate ai rami.

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - V_{AB}}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{E_2 - V_{AB}}{R_2} \\ \vdots \\ I_k = \dfrac{E_k - V_{AB}}{R_k} \end{cases}$$

Applicando la legge del nodo di Kirchoff

$$\sum_{k=1}^{m} I_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{m} \frac{E_k - V_{AB}}{R_k} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{m} \frac{E_k}{R_k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{V_{AB}}{R_k} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_{AB} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k}{R_k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R_k}}}$$

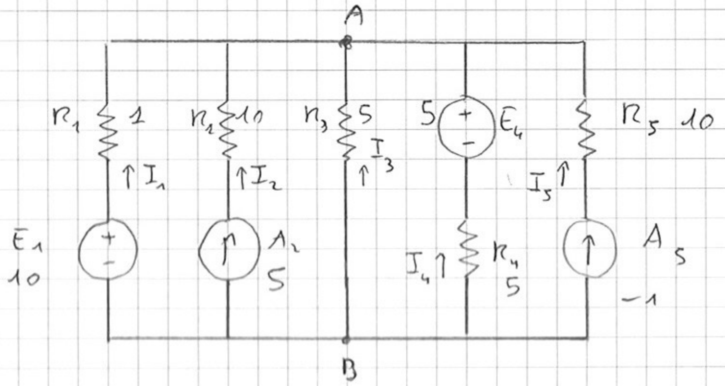
$\dfrac{E_k}{R_k}$ = corrente di cortocircuito del ramo k-esimo

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\sum \text{CORR. DI C.C.}}{\sum \text{CONDUTTANZE}}$$

Posso applicare Millman al caso in cui al posto del generatore di tensione io abbia un generatore di corrente

Esercizio



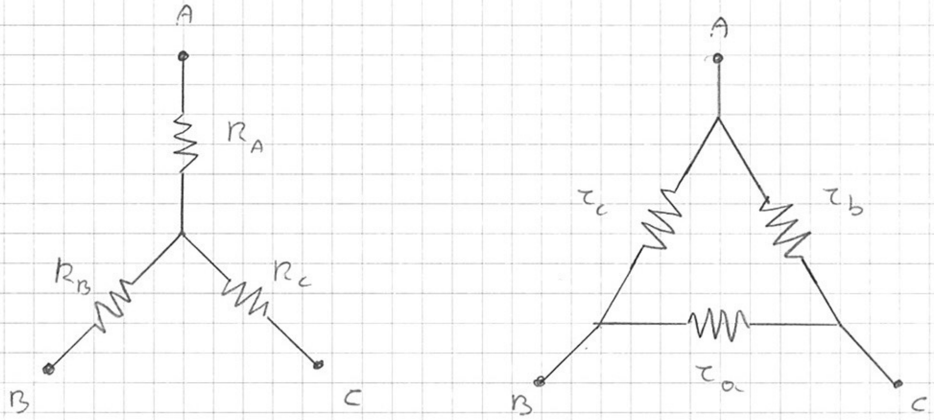
$V_{AB} = ?$

Posso immaginare che ci sia un generatore E_3 di $V_3 = 0\,V$

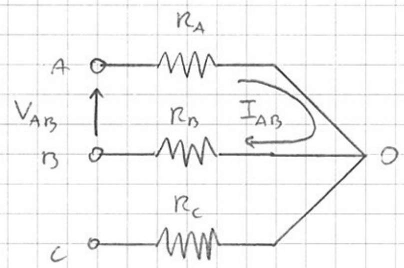
$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + A_2 + 0 + \frac{E_4}{R_4} + A_5}{\frac{1}{R_1} + \cancel{\frac{1}{R_2}}_{0} + \frac{1}{R_4} + \cancel{\frac{1}{R_5}}_{0} + \frac{1}{R_3}} = \frac{10+5+0+1-1}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}} = \frac{15}{\frac{7}{5}} = \frac{75}{7} = 10,71\ V$$

Nei rami col generatore di corrente è come se la resistenza sia 0, perché il generatore fornisce comunque sempre la stessa corrente. Al posto di $\frac{1}{R_2}$ e $\frac{1}{R_5}$ metto zero. Al posto di $\frac{E_2}{R_2}$, $\frac{E_5}{R_5}$ metto A_2 e A_5

Trasformazioni stella - triangolo



RESISTENZE A STELLA → RESISTENZE A TRIANGOLO

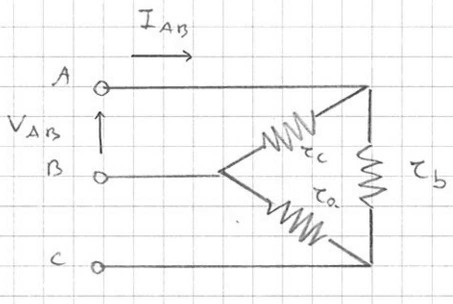


Applico una V_{AB} → scorre una I_{AB} in R_A e in R_B.

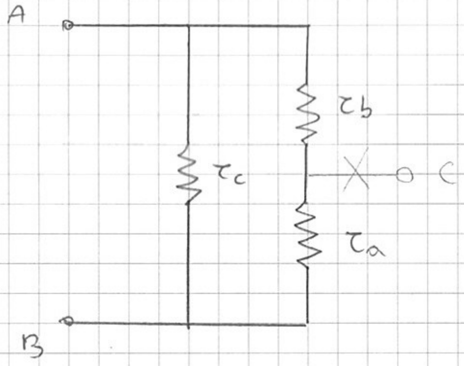
$$V_{AB} = I_{AB} \cdot \underbrace{(R_A + R_B)}_{R_{eq\,1}}$$

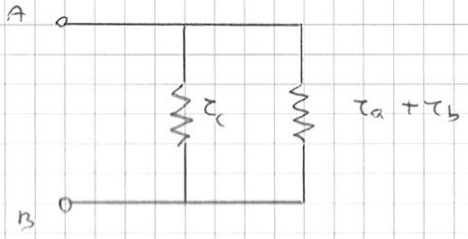
[$R_{eq\,1} = R_A + R_B$

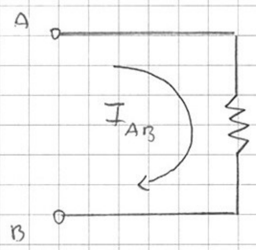
Adesso considero la configurazione a triangolo



Applico V_{AB}: si genera una I_{AB} che si divide in r_b e r_a.







$$\frac{r_c\,(r_a + r_b)}{r_A + r_B + r_c}$$

$$I_{AB} = \frac{V_A}{\dfrac{r_c\,(r_A + r_b)}{r_A + r_B + r_c}}$$

$$V_{AB} = I_{AB} \cdot \underbrace{\frac{r_c\,(r_A + r_B)}{r_A + r_B + r_c}}_{R_{eq2}}$$

$$\left[\; R_{eq2} = \frac{r_c\,(r_A + r_B)}{r_A + r_B + r_c} \right.$$

è la resistenza vista dai morsetti A e B.

Posso dire che la stella e il triangolo siano equivalenti se $R_{eq1} = R_{eq2}$. Dovrei fare la stessa cosa per i morsetti A e C e B e C: ottengo però la stessa cosa. Quindi, affinché i circuiti a stella e triangolo siano equivalenti:

$$\begin{cases} R_A + R_B = \dfrac{r_c\,(r_A + r_B)}{r_A + r_B + r_c} \\[2ex] R_B + R_C = \dfrac{r_A\,(r_B + r_c)}{r_A + r_B + r_c} \\[2ex] R_C + R_A = \dfrac{r_B\,(r_A + r_c)}{r_A + r_B + r_c} \end{cases}$$

Conosco $R_A, R_B, R_C \Rightarrow$ Trovo r_A, r_B, r_C

Conosco $r_A, r_B, r_C \Rightarrow$ Trovo R_A, R_B, R_C

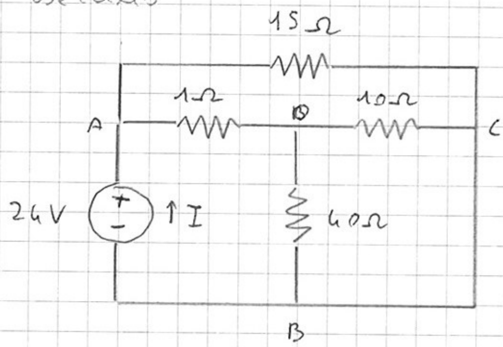
$$\boxed{\begin{cases} r_A = \dfrac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_A} \\ r_B = \dfrac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_B} \\ r_C = \dfrac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_C} \end{cases}}$$

STELLA → TRIANGOLO

$$\boxed{\begin{cases} R_A = \dfrac{r_B r_C}{r_A + r_B + r_C} \\ R_B = \dfrac{r_A r_C}{r_A + r_B + r_C} \\ R_C = \dfrac{r_A r_B}{r_A + r_B + r_C} \end{cases}}$$

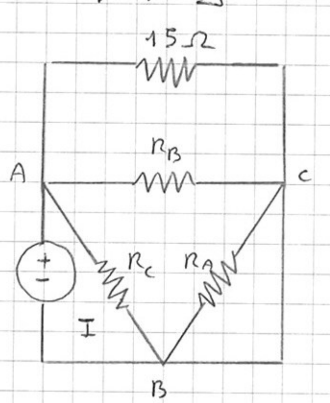
TRIANGOLO → STELLA

Esercizio



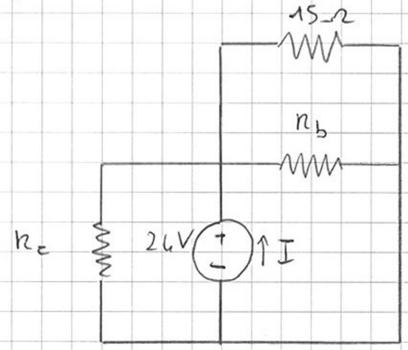
$I = ?$

1 - Y → Δ



R_A è in parallelo a un cortocircuito: tutta la corrente passa nel corto ⇒ è come se R_A non ci fosse.

Ottengo un nuovo circuito equivalente



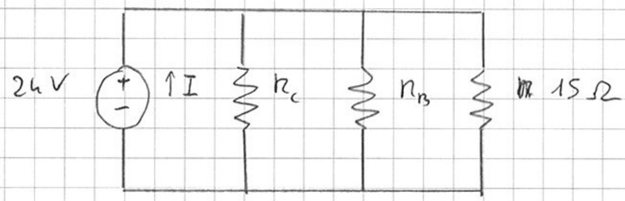
$$\begin{cases} R_B = \dfrac{45}{4}\ \Omega \\[2ex] R_C = 45\ \Omega \end{cases}$$

?

$$R_B = \frac{r_A \cdot r_C}{r_A + r_B + r_C} = \frac{1 \cdot 10}{1+10+40} = \frac{10}{51}$$

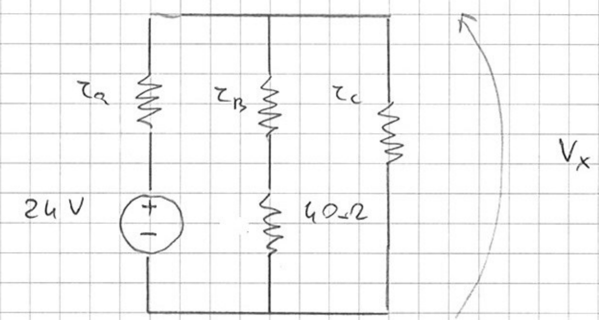
$$R_C = \frac{r_B \cdot r_A}{r_A + r_B + r_C} = \frac{40 \cdot 1}{51} = \frac{40}{50}$$

$\downarrow$



$$I = \frac{24}{R_B \,//\, R_C \,//\, 15\,\Omega} = \frac{24}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_B} + \dfrac{1}{R_C} + \dfrac{1}{15}}} = 4{,}27\ A$$

2 - $\Delta \rightarrow Y$



$$\begin{cases} r_A = \dfrac{15}{26}\ \Omega & R_A? \\[2ex] r_B = \dfrac{5}{13}\ \Omega & R_B? \\[2ex] r_C = \dfrac{75}{13}\ \Omega & R_C? \end{cases}$$

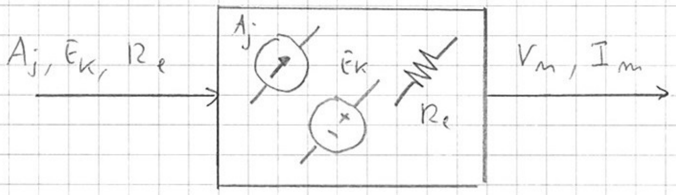
Ora applico Millman

legge di Ohm

$$V_x = \frac{\dfrac{24}{r_A} + 0 + 0}{\dfrac{1}{r_A} + \dfrac{1}{r_B + 40} + \dfrac{1}{r_C}} \longrightarrow I = \frac{V_x - 24}{r_A} = 4{,}27\ A$$

Principio di sovrapposizione degli effetti

Immaginiamo di avere un circuito (che rappresentiamo con una scatola) nella quale ci sono vari generatori di corrente, generatori di tensione e resistenze. Come ingressi abbiamo gli ingressi dei vari componenti. A seconda di tali valori avremo in uscita diverse tensioni e correnti corrispondenti ai vari nodi e rami.



$$S = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_p \\ I_1 \\ \vdots \\ I_r \end{bmatrix}$$

$p = \#$ nodi

$r = \#$ rami

$n = \#$ generatori di tensione

$m = \#$ generatori di corrente

$y = D \cdot S$ D ha dimensioni $(P+R)\cdot(N+M)$

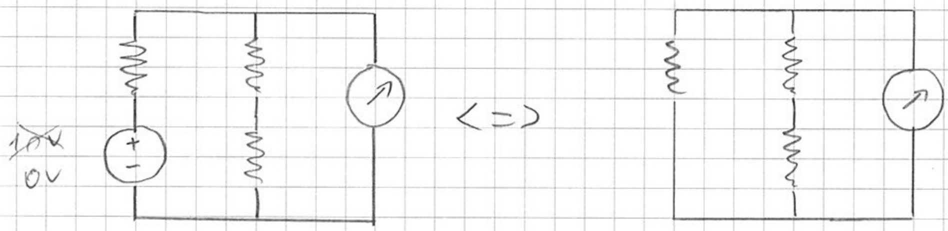
$$V_1 = d_{11} \cdot E_1 + d_{12} \cdot E_2 + \dots + d_{1n} E_n + d_{1\,n+1} A_1 + \dots + d_{1\,n+m} A_m$$

$$V_2 = d_{21} E_1 + d_{22} E_2 + \dots + d_{2n} E_n + d_{1\,n+1} A_1 + \dots + d_{1\,n+m} A_m$$

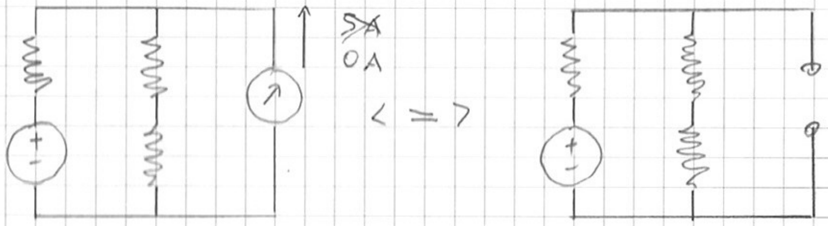
ecc.

Per calcolare, ad es. V_1, posso prendere la rete, annullare tutti i generatori tranne E_1 e calcolare $d_{11} E_1$. Poi lo annullo e attivo solo E_2 e ricavo $d_{12} E_2$. Continuando così trovo tutti i contributi parziali dei diversi generatori. Sommandoli trovo V_1.

Ma cosa significa annullare un generatore? Non significa semplicemente togliere il generatore, ma significa togliere i suoi effetti (di tensione o di corrente).

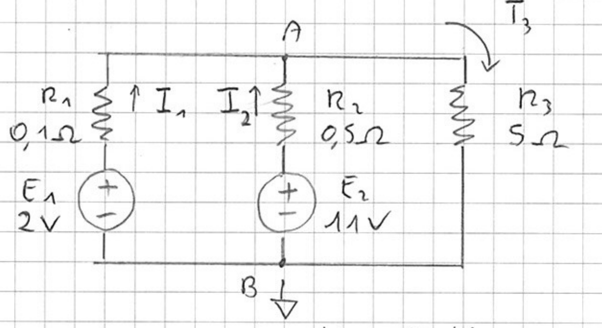


Annullare un generatore di tensione significa mettere il suo potenziale a 0V. Un potenziale a 0V corrisponde a un cortocircuito



Annullare un generatore di corrente significa portare a 0A la sua corrente. Ciò è equivalente ad aprire il circuito.

esempio:



I_3 ?

$V_B = 0$ V $\Rightarrow$ $V_A = V_{AB}$

Per comodità mettiamo il nodo B a massa. Il valore delle ddp è definito a meno di una costante. Per comodità si prende un nodo e lo si pone a massa (potenziale di 0V).
Se in una rete ci sono n nodi i nodi indipendenti saranno n−1 (conoscendo n−1 tensioni posso conoscere quella dell'n-esimo nodo).

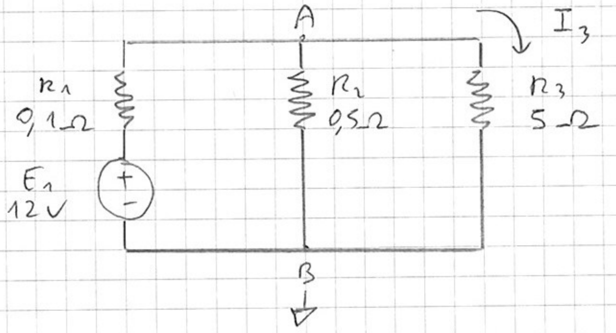
- Calcoliamo I_3 usando Millman

$$V_A = \frac{\frac{12}{0,1} + \frac{11}{05} + 0}{10 + 2 + 0,2} = \frac{142}{12,2} = 11,64 \text{ V} = V_{AB}$$

$$I_3 = \frac{V_A}{R_3} = \frac{11,64}{5} = 2,328 \text{ A}$$

- Ora usiamo la sovrapposizione degli effetti:

Annulliamo E_2

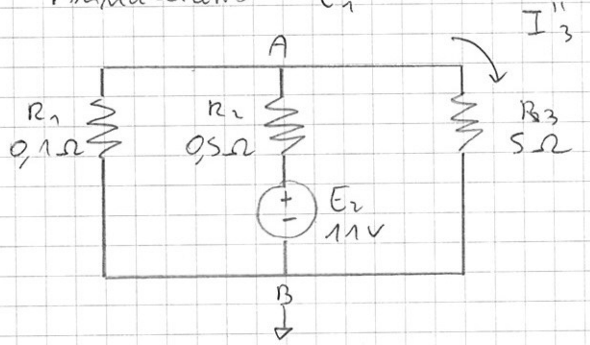


$$V_A' = \frac{\frac{12}{0,1} + 0 + 0}{12,2} = \frac{120}{12,2} = 9,84 \text{ V} \qquad \text{(Millman)}$$

Questo è il contributo alla V_{AB} dato dal solo generatore V_{AB}.

$$I_3' = \frac{V_A'}{R_3} = \frac{9,84}{5} = 1,97 \text{ A}$$

Annulliamo E_1



$$V_A'' = \frac{\frac{11}{0,5}}{12,2} = \frac{22}{12,2} = 1,8 \text{ V} \qquad \text{(Millman)}$$

$$I_3'' = \frac{V_A''}{R_3} = \frac{1,8}{5} = 0,36 \text{ A}$$

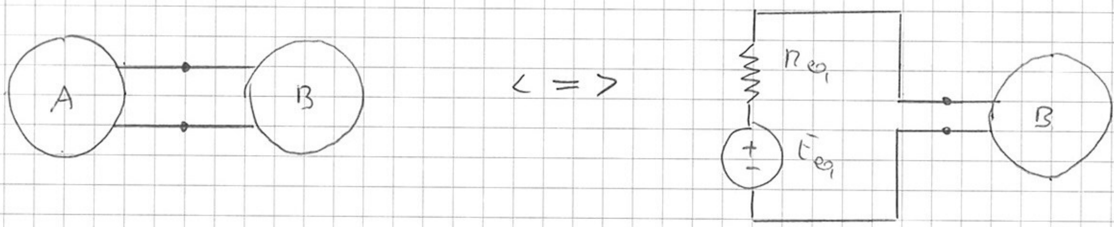
Ora non resta che sommare i contributi che ho calcolato singolarmente.

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 1,97 + 0,36 = 2,33 \text{ A}$$

Teorema di Thevenin

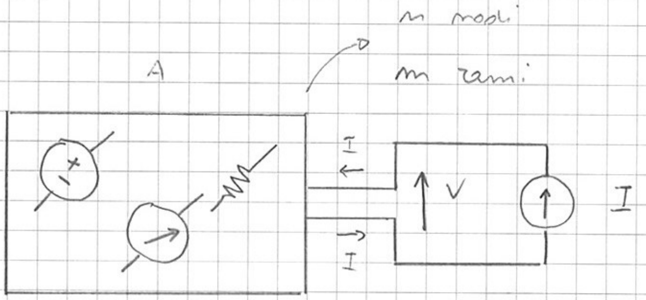
Discende dalla sovrapposizione degli effetti.

Prendiamo due reti (ognuna costituita da più generatori e resistenze) A e B collegate solo da due morsetti.



Presa una rete qualsiasi formata solo da generatori ideali e resistenze è possibile sostituirla con una rete equivalente formata da un generatore di tensione ideale con in serie una resistenza.

Dimostrazione:



Colleghiamo i morsetti del circuito A ad un generatore ideale di corrente. Tra i due morsetti si genera una ddp V. La corrente che esce da un morsetto è la stessa che entra nell'altro (I).
Esplicitiamo il valore della tensione V.

$$V = \boxed{\sum_{K=1}^{n} H_K V_K + \sum_{K=1}^{m} K_K I_K} + \underbrace{I K_0}_{} \quad \text{(sovrapp. effetti)}$$

interno ad A

contributo del generatore che ho messo all'esterno più un opportuno coefficiente K_0.

Se ora annulliamo il generatore di corrente esterno I (lasciamo i morsetti di A a vuoto), V è dato dal solo contributo dei componenti interni ad A.

$$V = \sum_{K=1}^{n} H_K V_K + \sum_{K=1}^{m} K_K I_K \qquad \text{TENSIONE A VUOTO GENERATA DA A.}$$

Ora annulliamo tutti i generatori interni ma non quello esterno. Ottengo:

$$V = K_0 I$$

Vedo che dal punto di vista dimensionale K_0 è una resistenza. In particolare vedo che K_0 è la resistenza vista dai morsetti una volta annullati tutti i generatori di A.

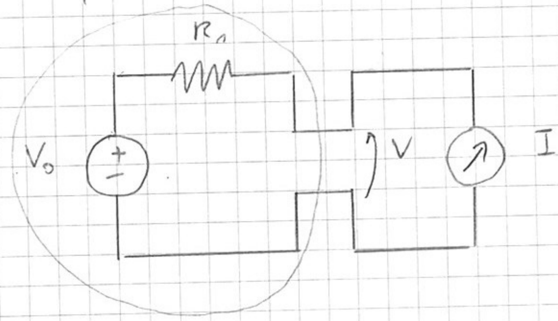
$$R_0 = K_0$$

$$V = R_0 I$$

Se chiamo la tensione a vuoto V_0 e applico il principio di sovrapposizione degli effetti ottengo

$$V = V_0 + R_0 I$$

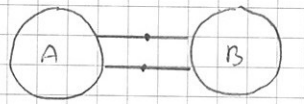
Questa formula mi dice la relazione costitutiva di un bipolo fatto in questo modo:

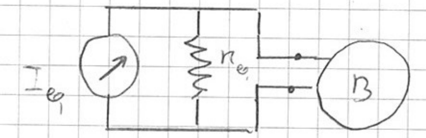


CIRCUITO EQUIVALENTE DI THEVENIN

Teorema di Norton

Il teorema di Norton deriva dal Teorema di Thevenin ricordando che un generatore reale di tensione può essere sostituito da un equivalente generatore reale di corrente.

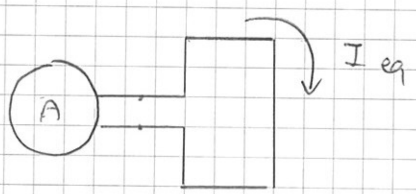




Per passare dall'equivalente Thevenin all'equivalente Norton.

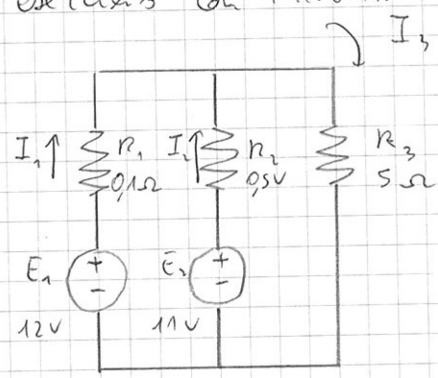
$$\boxed{\begin{array}{l} G_{eq} = \dfrac{1}{R_{eq}} \\[2ex] I_{eq} = \dfrac{E_{eq}}{R_{eq}} \end{array}}$$

Se non voglio passare per Thevenin: la resistenza eq. la calcolo come prima, annullando tutti i generatori ~~eq~~ della rete A e determinare la conduttanza (o la resistenza) vista dai morsetti di uscita.
Per trovare la I_{eq} prendo i morsetti di A, li metto in cortocircuito e vedo qual è la corrente che vedo scorrere in questo ramo di corto.



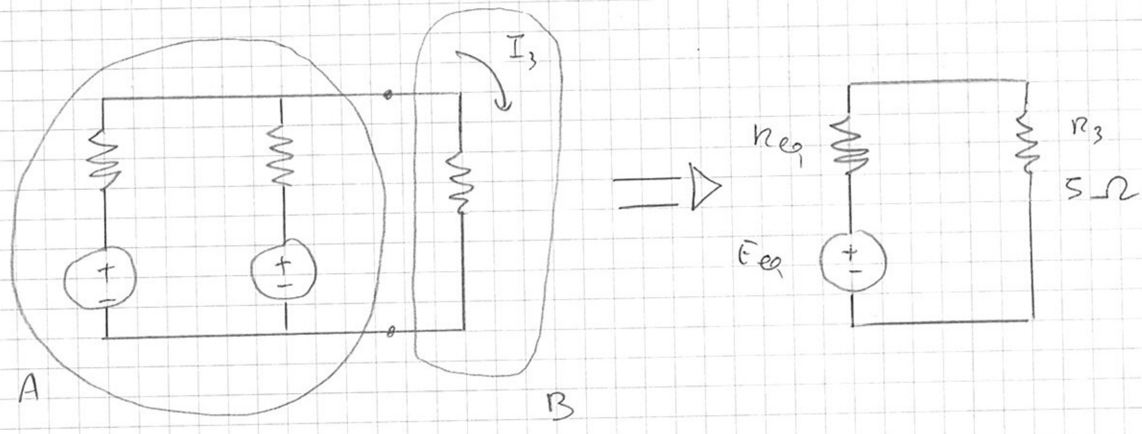
I_{eq} = corrente di corto circuito ai terminali
R_{eq} = resistenza equivalente ai terminali quando tutti i generatori indipendenti sono spenti.

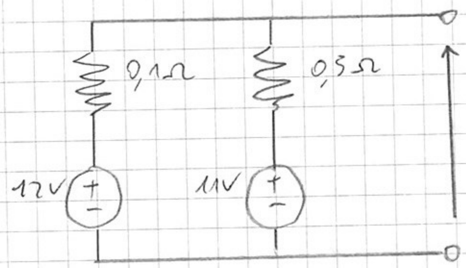
esercizio con Thevenin



I_3?

Dobbiamo decidere rispetto a quale ramo risolverla. Il resto della rete diventerà la nostra rete A

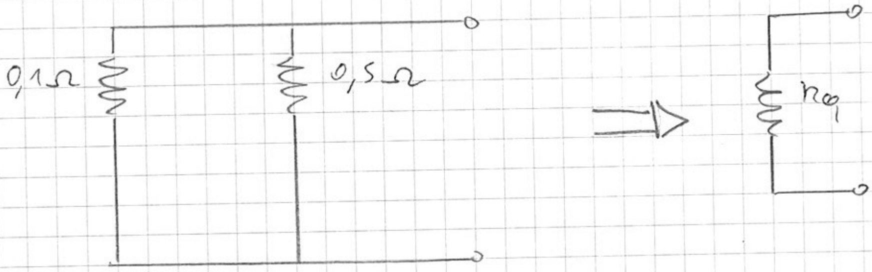




E_{eq}

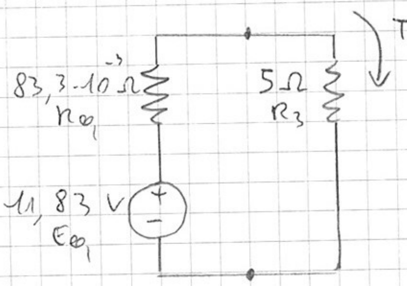
$$E_{eq} = \frac{\frac{12}{0,1} + \frac{11}{0,5}}{10 + 2} = \frac{142}{12} = 11,83 \text{ V}$$

↑ Millman



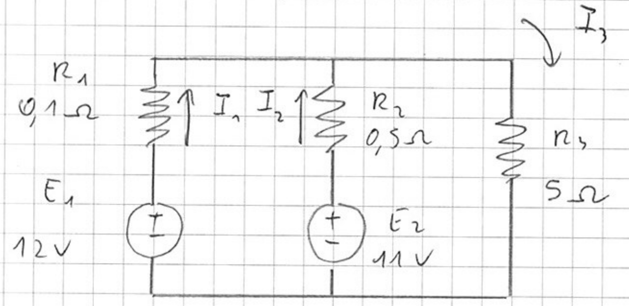
$$R_{eq} = 0,1 \,//\, 0,5 = \frac{0,1 \cdot 0,5}{0,1 + 0,5} = 83,3 \cdot$$

Ottengo un circuito così fatto:

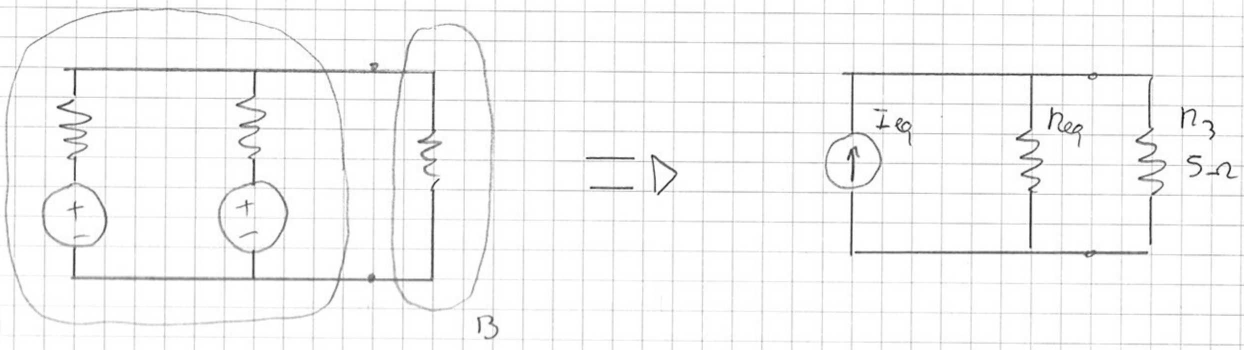


$$I_3 = \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_3} = \frac{11,83}{5 + 83,3 \cdot 10^{-3}} = 2,328 \text{ A}$$

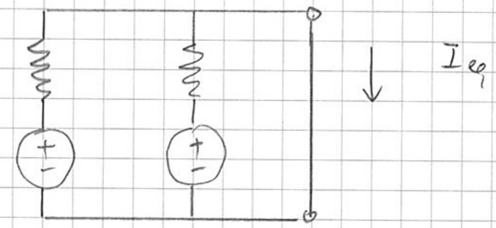
esercizio con Norton



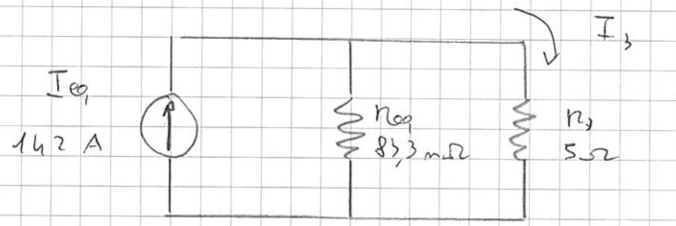
I_3 ?



$$I_{eq} = I_1 + I_2 = \frac{12}{0,1} + \frac{11}{0,5} = 142\ A$$

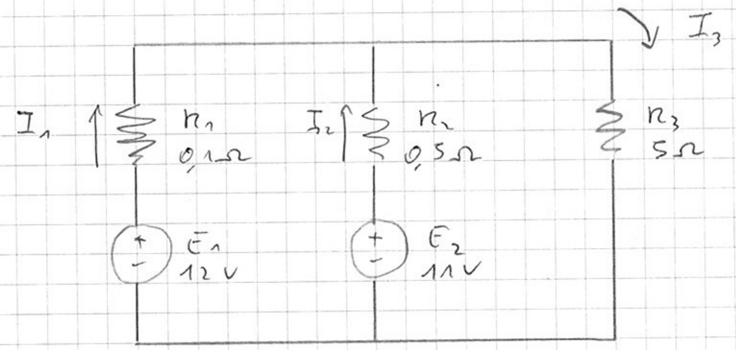


$R_{eq} = 83,3 \cdot 10^{-3}\ \Omega$ (calcolata prima)



Per calcolare I_3 applico il partitore di corrente

$$I_3 = \frac{I_{eq}}{G_n + G_3} \cdot G_3 = \frac{142}{\frac{1}{83,3 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{5} = 2,328\ A$$



Immaginiamo che i 2 generatori siano due batterie, una più scarica (E_2, poiché ha tensione più bassa e resistenza più alta) e una più carica. Supponiamo che R_3 sia un carico (ad es. una torcia). Abbiamo calcolato che la tensione ai capi di R_3 è:

$$V_{R_3} = 11,64 \ V$$

NB.

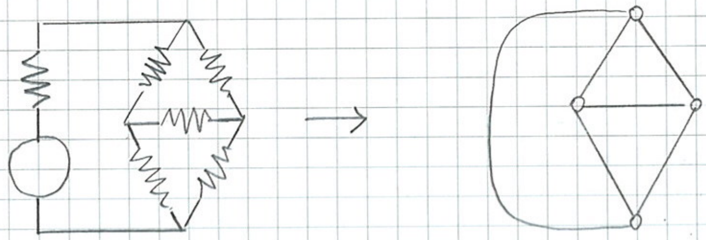
$$I_1 = \frac{E_1 - V_{R_3}}{R_1} = \frac{0,36}{0,1} = 3,6 \ A$$ ← corrente fornita dalla prima batteria

$$I_2 = \frac{E_2 - V_{R_3}}{R_2} = -\frac{0,64}{0,5} = -1,28 \ A$$ ← corrente assorbita " seconda "

Dei 3,6 A di E_1 una parte va sul carico e va ad accendere la torcia, mentre una parte viene assorbita dalla seconda batteria. Quindi <u>mai</u> mettere in parallelo due batterie.

Teoria dei grafi

Data una rete qualsiasi è sempre possibile associare ad essa un grafo fatto da un certo numero di lati e di nodi.



l LATI

n NODI

grafo irriducibile

I rami diventano linee.

I nodi   pallini.

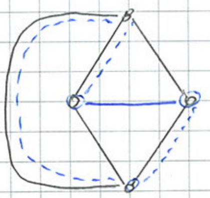
Def. Un grafo si dice IRRIDUCIBILE quando non è più possibile accorpare ulteriormente lati in parallelo o in serie

Dati due nodi si definisce CAMMINO una serie di lati e di nodi che li unisce.

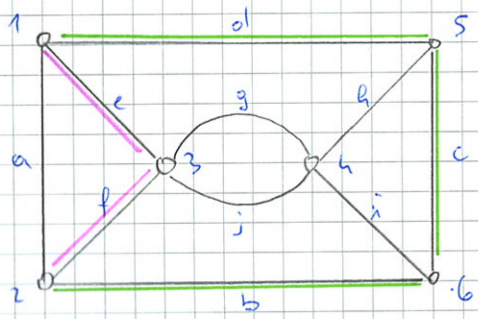
- Nessun nodo può essere punto terminale di più di due lati del cammino
- Ai nodi di partenza e di arrivo deve far capo al non più di un lato del cammino

$\Downarrow$

Un lato non deve avere né percorsi chiusi né diramazioni.



Prendiamo un grafo fatto così:



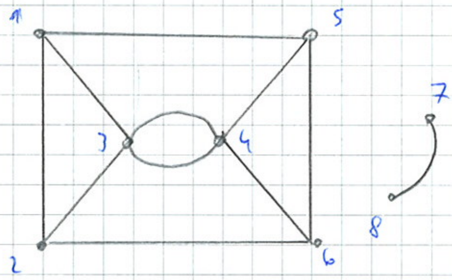
$n = 6$

$l = 10$

/// = possibile cammino per 1 e 2

/// = " " " "

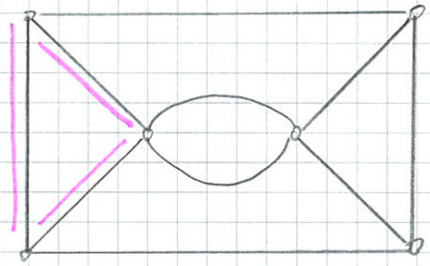
Un grafo si dice TOTALMENTE CONNESSO se, presa una qualsiasi coppia di nodi esiste sempre un cammino che li unisce.
Quello disegnato prima è connesso



questo è ← non connesso

Si definisce MAGLIA un sottografo connesso in cui ogni nodo fa capo a <u>due</u> lati del sottografo. Es:

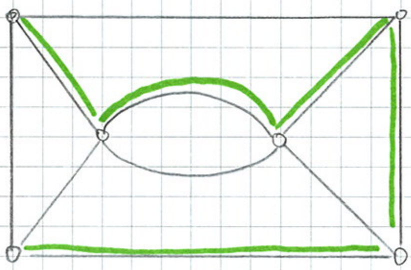
/// = maglia

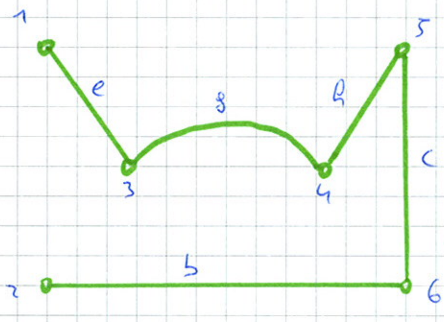


Ad ogni maglia posso applicare il II principio di Kirchoff.

Si definisce ALBERO un sottografo connesso che contenga tutti i nodi del grafo di partenza e che non presenti maglie (in altre parole, che non contenga percorsi chiusi).

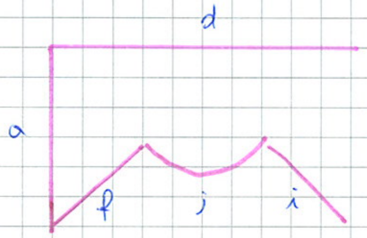
/// = albero





Tutti i lati tolti dal grafo di partenza sono detti CO-ALBERO associato all'albero

= Coalbero

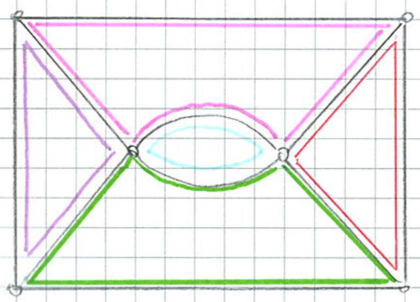


I lati del coalbero si chiamano anche CORDE

LATI DELL'ALBERO $P = m - 1$

LATI DEL COALBERO $C = l - m + 1$

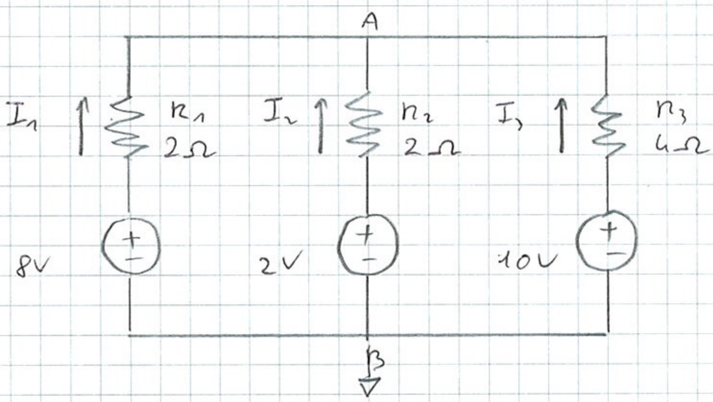
Si definisce TAGLIO di un grafo un insieme di lati che, tolti tutti quanti dal grafo di partenza, lo rendono non connesso. Inoltre rimettendo anche uno solo di questi lati, il grafo deve tornare connesso. Sostanzialmente un Taglio è un insieme di lati che fanno tutti capo ad un solo nodo. Un possibile Taglio è quello formato dai lati a, e, d.
Il numero totale di Tagli è pari al numero totale di nodi.
A un Taglio si può applicare la I legge di Kirchoff.
MAGLIA FONDAMENTALE (MAGLIA LINEARMENTE INDIPENDENTE) = si ottiene prendendo un albero nel grafo di partenza e aggiungendo una qualsiasi delle corde che avevo tolto. Ottengo così dei percorsi chiusi. Le maglie fondamentali sono pari al numero di corde (nel nostro caso 5).
Per questo a volte C si indica con m (maglia)
$C = m$
Scrivendo la II legge di Kirchoff a un insieme di maglie fondamentali ottengo m equazioni linearmente indipendenti fra di loro.
Un altro modo di trovare un insieme di maglie indipendenti è prendere delle maglie che mi diano una copertura semplice del circuito.

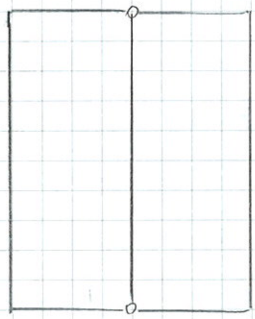


Una rete elettrica si dice RISOLTA quando si conoscono tutte le correnti di ramo e tutte le tensioni di nodo. Ovviamente le correnti di ramo saranno l e le tensioni di nodo saranno $n - 1$ (un nodo lo prendo come riferimento da mettere a massa). Il numero di incognite da trovare è dunque

$$\boxed{l + n - 1}$$

esempio:



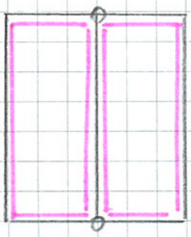


$l = 3$

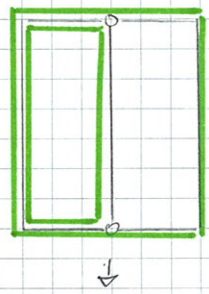
$n = 2$

$P = n - 1 = 1$

$m = l - n + 1 =$



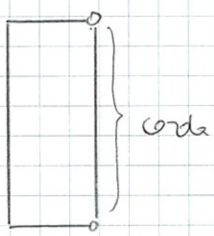
Insieme di maglie linearmente indipendenti



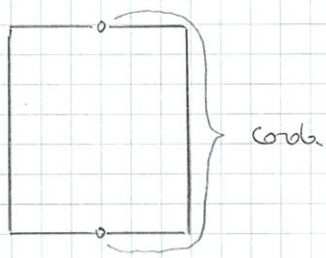
" " " " "

(non è però quello che mi dà la copertura semplice

albero



maglia di sx



maglia interna

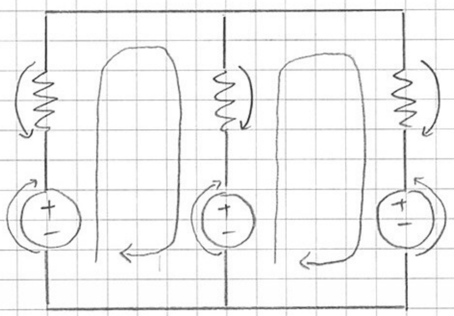
$l + m - 1 = 4$ incognite

Possibile insieme di incognite:

$$\begin{cases} V_A \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{cases}$$

Un possibile insieme di eq. da cui ricavare tali incognite è:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 & \text{I Kirchoff per nodo A} \\ 8 - 2I_1 + 2I_2 - 2 = 0 & \text{II Kirchoff} \\ 2 - 2I_2 + 4I_3 - 10 = 0 & \text{II Kirchoff} \\ V_A - 10 = -4I_3 & \text{legge di Ohm a } R_3 \text{ (ramo di dx)} \end{cases}$$



<- per come ho messo la direzione di I_k.
(convenzione dell'utilizzatore)

Per applicare la II legge di Kirchoff scelgo un verso di percorrenza della maglia. Le ddp che incontro avranno segno + se vanno nello stesso verso in cui vado io, − altrimenti.

$$\begin{cases} I_1 = 1\ A \\ I_2 = -2\ A \\ I_3 = 1\ A \\ V_A = 6\ V \end{cases}$$

n nodi

l lati

p nodi lin. indip $(p = n-1)$

m maglie lin. indip. $(m = l-n+1)$

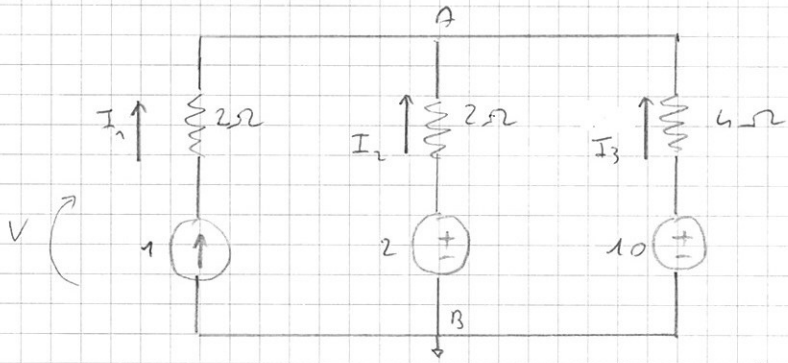
Anziché $l+n-1$ equazioni potrebbero bastarmi le l eq. necessarie a trovare tutte le correnti di ramo.

$l = p + m$ → poi ricavo le tensioni con Ohm

Scriviamo le p eq. ai nodi indipendenti e le m eq. alle maglie indipendenti. Scrivo solo le leggi di Kirchoff.

Ci sono dei casi particolari in cui bisogna stare attenti. Può succedere che in certi circuiti uno o più potenziali di nodo o una o più correnti di ramo siano già note. Quindi il # di maglie lin. indip. diventa minore.

es:



$l = 3$

$n = 2$

$p = 1$

$m = 2$

La particolarità è che c'è un generatore di corrente in serie a un ramo. Esso mi fissa la corrente in ramo. Quindi I_1 non è incognita ma è $I_1 = 1$. Mi sparisce un'incognita, ma mi compare una nuova incognita V pari alla tensione ai capi del generatore di corrente. Il resto del circuito non modifica il valore di I_1 bensì V ai capi del generatore di corrente.

In questo caso il numero di maglie linearmente indipendenti non è 2.

Caso duale sarebbe un generatore di tensione ai capi A e B (saprei già V_{AB}). In tal caso mi cala di 1 il # di nodi linearmente indipendenti.

Nel nostro esempio potrei scrivere le equazioni:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ V - 2I_1 + 2I_2 = 0 \\ 2 - 2I_2 + 4I_3 - 10 = 0 \end{cases}$$

I Kirchoff

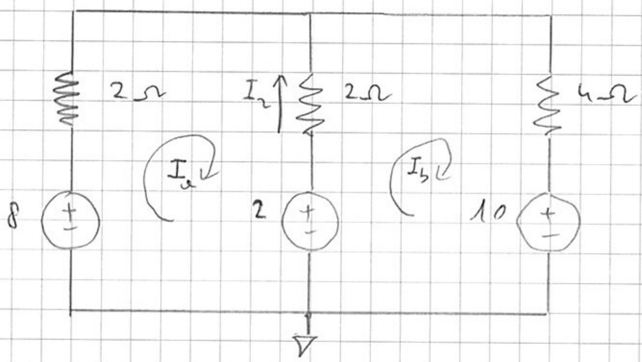
II "

II "

$$\begin{cases} 1 + I_2 + I_3 = 0 \\ 2 - 10 = 2I_2 - 4I_3 \end{cases}$$

Non scrivo l'eq. delle maglia che contiene V perchè V non mi importa

Metodo di Maxwell alle maglie



Bisogna suddividere il circuito in maglie linearmente indipendenti. Ipotizzo in ciascuna delle due maglie la presenza di una corrente fittizia (I_a e I_b). Scelgo come verso convenzionale di percorrenza quello orario.

Per la sovrapposizione degli effetti

$$I_2 = I_a - I_b$$

Anzichè 3 correnti devo calcolarne solo 2: trovo I_a sommando i risultati tra di loro. Quando calcolo I_a suppongo esista solo I_a, quando calcolo I_b suppongo esista solo I_b.

$$\begin{cases} 8 - 2I_a + 2(I_b - I_a) - 2 = 0 \\ 2 + 2(I_a - I_b) - 4I_b - 10 = 0 \end{cases}$$

II Kirchoff alla maglia A

" " " " B

Scriviamo il sistema in forma matriciale. Prima separo i termini noti dalle incognite.

$$\begin{cases} 6 = 4I_a - 2I_b \\ -8 = -2I_a + 6I_b \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 6 \\ -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_a \\ I_b \end{vmatrix}$$

è una matrice simmetrica.
In assenza di generatori pilotati deve sempre venire così.

Risultati:

$$\begin{cases} I_a = 1\ A \\ I_b = -1\ A \end{cases}$$

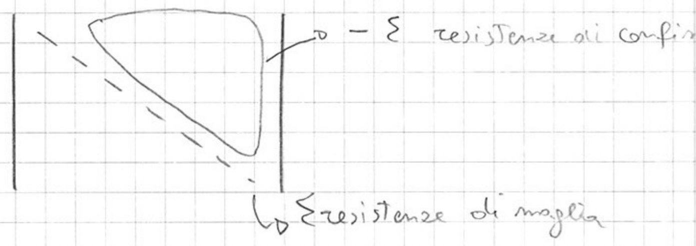
$$I_2 = I_a - I_b = 2\ A$$

Il metodo di Maxwell non richiede di scrivere tutto il sistema, ma si può anche scrivere direttamente la matrice tramite ispezione del circuito. Una riga sarà relativa alla maglia A e una alla maglia B. Nella diagonale principale vado a mettere la somma di tutte le resistenze che compaiono nella maglia. Nelle restanti posizioni della maglia metto la somma delle resistenze dei soli rami indicati dagli indici cambiata di segno.

$$\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$$

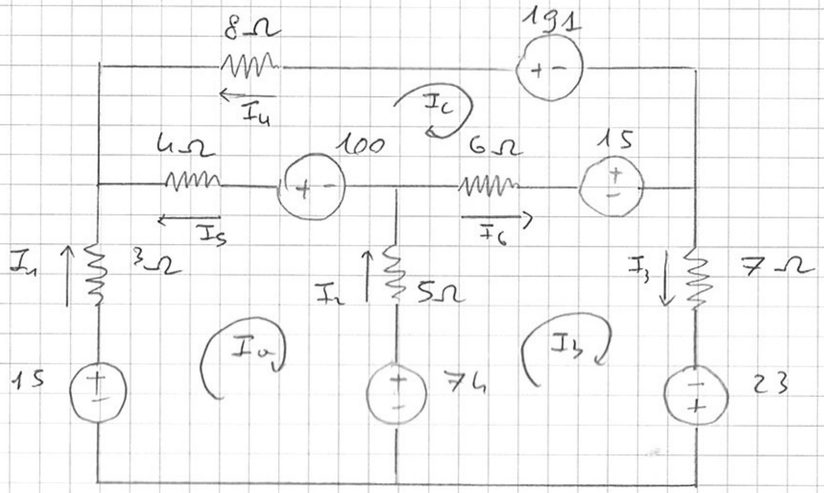
$i_{1,2}$

$i_{2,1}$



$$\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{vmatrix} 6 \\ 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_a \\ I_b \end{vmatrix}$$

somma ddp incontrate percorrendo la maglia esempio:



$$
\begin{array}{r c}
 & \\
a & \\
74+15+23 \quad b & \\
c &
\end{array}
\begin{vmatrix} -24 \\ 112 \\ -106 \end{vmatrix}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\
\begin{vmatrix} 12 & -5 & -4 \\ -5 & 18 & -6 \\ -4 & -6 & 18 \end{vmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{vmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{vmatrix}
$$

$I_1 = I_a = -2\ A$

$I_2 = I_b - I_a = 6\ A$

$I_3 = I_b = 4\ A$

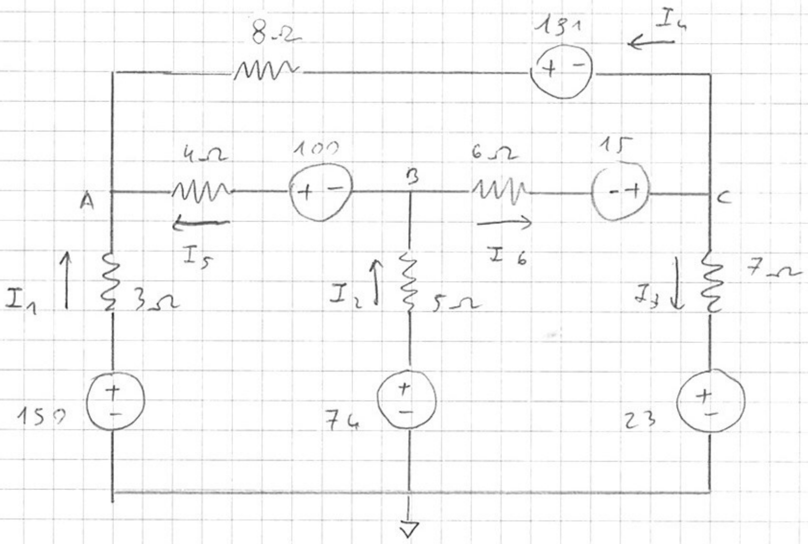
$I_4 = -I_c = 5\ A$

$I_5 = I_c - I_A = -3\ A$

$I_6 = I_b - I_c = 9\ A$

Metodo di Maxwell ai nodi

Le incognite sono i p potenziali dei nodi linearmente indipendenti



Il metodo si basa sull'applicazione del 1° principio di Kirchoff a tutti i nodi lin. indip.

$$\begin{cases} I_1 + I_4 + I_5 = 0 & A \\ I_2 - I_5 - I_6 = 0 & B \\ I_6 - I_3 - I_4 = 0 & C \end{cases}$$

Ora scrivo le correnti in funzione di V_A, V_B e V_C (potenziali di nodo).

$$V_A - 150 = -3 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{150 - V_A}{3}$$

$$V_{BA} = V_B - V_A \qquad V_{BA} + 100 = 4 I_5 \Rightarrow I_5 = \frac{V_B - V_A + 100}{4}$$

$$I_2 = \frac{74 - V_B}{5}$$

$$I_3 = \frac{V_C + 23}{7}$$

$$I_4 = \frac{V_C - V_A + 131}{8}$$

$$I_6 = \frac{V_B - V_C + 15}{6}$$

Sostituiamo questi valori nel sistema di partenza. Ci restano le 3 incognite V_A, V_B, V_C.

$$
\begin{array}{l}
A \\ \\ B \\ \\ C
\end{array}
\begin{cases}
\dfrac{150 - V_A}{3} + \dfrac{V_C - V_A + 131}{8} + \dfrac{V_B - V_A + 100}{4} = 0 \\
\\
\\
\\
\end{cases}
$$

Questi passaggi si possono saltare e si può scrivere direttamente il sistema con i valori ~~delle~~ dei potenziali ai nodi per ispezione del circuito.

3 nodi indip. → matrice 3×3

Associamo ad ogni riga ed ogni colonna dei nodi.

Termini noti: somma delle correnti di cortocircuito entranti nei nodi.

→ ΣI_{cc} ENTRANTI

→ simmetrica se non ci sono generatori pilotati

→ $-$(conduttanze tra i nodi)

segno meno

$$
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}
\begin{vmatrix} \; \\ \; \\ \; \end{vmatrix}
=
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}
\begin{array}{c} A \quad B \quad C \\ \begin{vmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{vmatrix} \end{array}
\cdot
\begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix}
$$

→ conduttanze che puntano al nodo

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{100}{4} + \dfrac{150}{3} + \dfrac{131}{8} \\[2ex]
\dfrac{74}{5} - \dfrac{100}{4} - \dfrac{11}{6} \\[2ex]
\dfrac{15}{6} - \dfrac{23}{7} - \dfrac{131}{8}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}\right) & -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{8} \\[2ex]
-\dfrac{1}{4} & \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{4}\right) & -\dfrac{1}{6} \\[2ex]
-\dfrac{1}{8} & -\dfrac{1}{6} & \left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7}\right)
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix} V_A \\[2ex] V_B \\[2ex] V_C \end{vmatrix}
$$

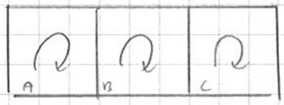
$$
\begin{vmatrix} 98{,}875 \\ -12{,}7 \\ -24{,}66 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
0{,}7083 & -0{,}25 & -0{,}125 \\
-0{,}25 & 0{,}616 & -0{,}16 \\
-0{,}125 & -0{,}16 & 0{,}4345
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix}
$$

almeno 3 cifre decimali dopo la virgola

$$
\begin{cases}
V_A = 156\ V \\
V_B = 44\ V \\
V_C = 5\ V
\end{cases}
$$

NOTA SUL METODO ALLE MAGLIE:

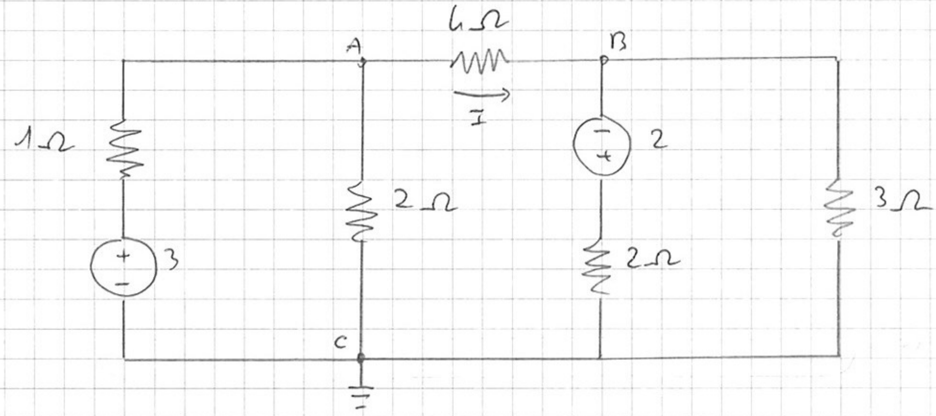
Se ho un circuito così:



ottengo sempre una matrice 3x3: i termini misti tra A e C verranno nulli perchè non c'è nessun ramo che li collega.

esempio (metodo di Maxwell ai nodi):

I ?



$$\begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{13}{12} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \end{vmatrix}$$

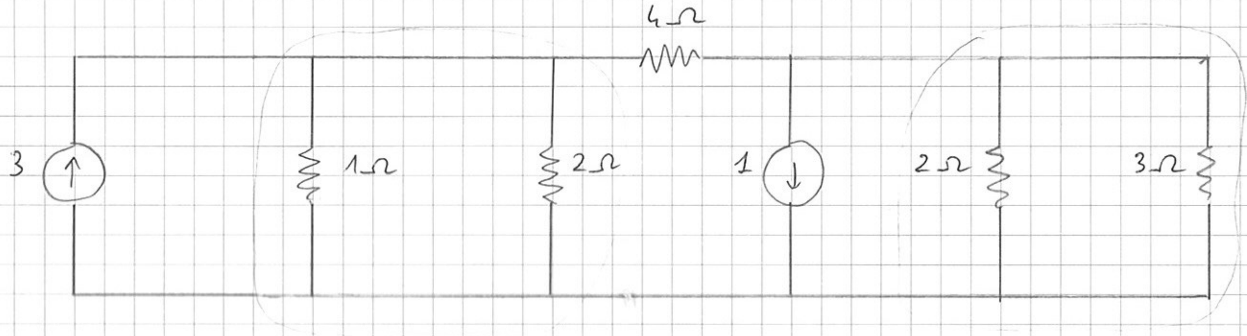
$$\begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,75 & -0,25 \\ -0,25 & 1,08 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \end{vmatrix}$$

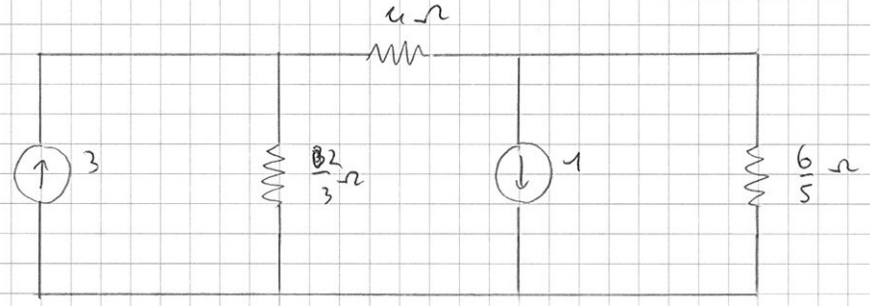
$$\begin{cases} V_A = 1,636 \text{ V} \\ V_B = -0,547 \text{ V} \end{cases} \qquad I = \frac{V_B - V_A}{4} = 0,546 \text{ A}$$

Facciamo una verifica del risultato.

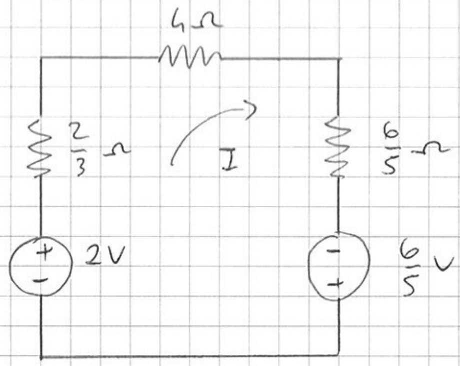
Convertiamo il generatore da 3V in un generatore reale di corrente.

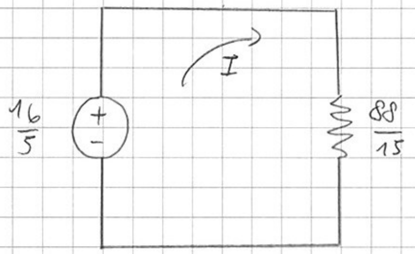
" " " " 2V " " " " "





Equivalente Thevenin

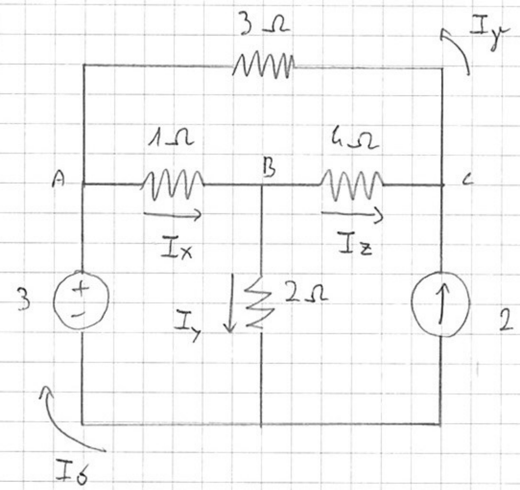




$$\frac{10+18+60}{15} = \frac{88}{15}$$

$$I = \frac{16}{5} \cdot \frac{15}{88} = \frac{6}{11} = 0{,}546 \text{ A}$$

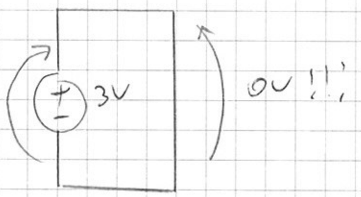
Esercizio



Metodo di Maxwell ai nodi

Devo scrivere le LKC. Consideriamo ad es. il nodo A:

- il ramo x non dà contributo perché non contiene generatori
- " " γ " " " " " "
- " " δ contiene un generatore di tensione ma nessuna resistenza: questo ramo non lo posso chiudere in corto: dovrei porre agli estremi una ddp di 0V, ma il generatore fissa ai suoi estremi un potenziale di 3V. È assurdo.

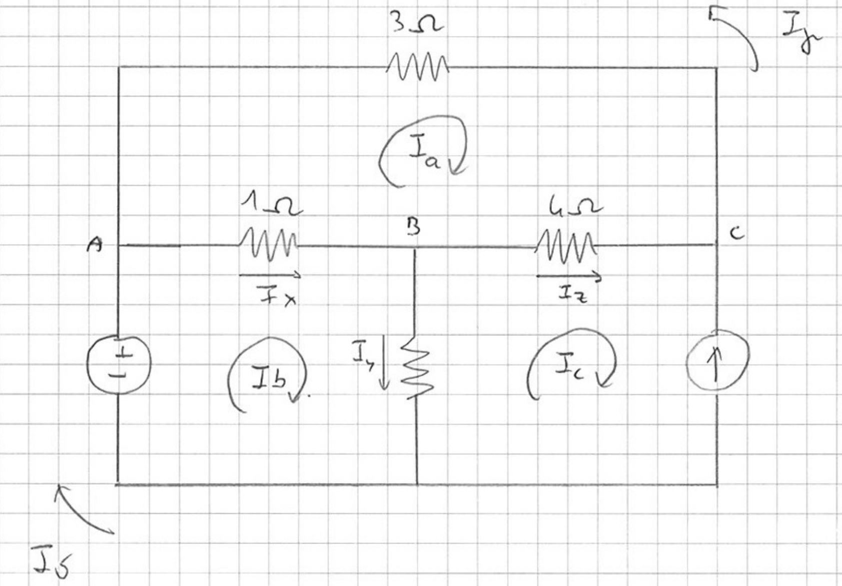


Il metodo di Maxwell alle maglie non si può applicare così meccanicamente per ispezione. Il problema è sempre che V_A è già noto ($V_A = 3\,V$). Quindi mi conviene scrivere il sistema di Maxwell ai nodi solo ai nodi B e C.

$$\begin{array}{l} B \\ C \end{array} \begin{cases} I_x - I_y - I_z = 0 \\ I_z + 2 - I_\gamma = 0 \end{cases}$$

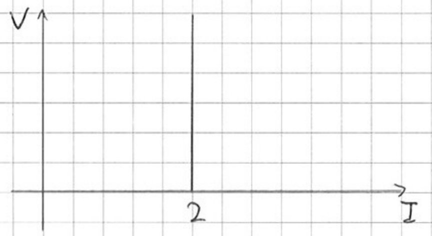
$$\begin{cases} \dfrac{3 - V_B}{1} - \dfrac{V_B}{2} + \dfrac{V_C - V_B}{4} = 0 \\ \dfrac{V_B - V_C}{4} + 2 + \dfrac{3 - V_C}{3} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_B = \dfrac{60}{23}\ V \\ V_C = \dfrac{144}{23}\ V \end{cases}$$

Metodo di Maxwell alle maglie



$$\begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ ? \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{vmatrix}$$

→ Non so che valore di tensione c'è ai capi del generatore di corrente.



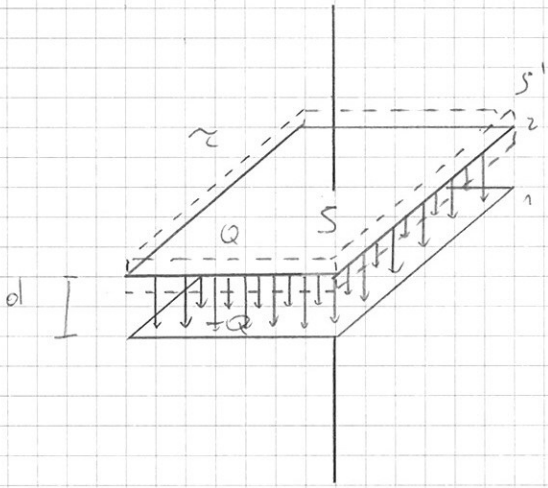
Non riesco nemmeno a convertirlo in un generatore di tensione perché non ho una resistenza in parallelo

La presenza di un generatore ideale di CORRENTE → Impedisce di usare il metodo di Maxwell alle MAGLIE

La presenza di un generatore ideale di TENSIONE → Impedisce di usare il metodo di Maxwell ai NODI

CONDENSATORI

Prendiamo due lastre di materiale conduttore parallele con due fili di materiale conduttore che escono. Le lastre hanno una superficie S e sono separate da una distanza d.



Consideriamo la superficie chiusa S', che ha volume τ e contiene l'armatura superiore.

Dalle leggi di Maxwell so che

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$$

$$\int_\tau \mathrm{div}\,\vec{D}\, d\tau = \oint_{S'} \vec{D}\cdot\hat{n}\cdot dS' \qquad \text{Th. divergenza}$$

$$\int_\tau \rho\, d\tau = \oint_{S'} \vec{D}\cdot\hat{n}\, dS'$$

$$Q = \varepsilon \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS'$$

Immaginiamo di aver messo una carica Q su una armatura e una −Q sull'altra. Si crea un campo elettrico E fra le due armature.

L'unico lato da cui escono linee di forza del campo elettrico è la faccia inferiore del parallelepipedo. E siccome il campo è uniforme sulla superficie della lastra

$$Q = \varepsilon E\cdot S$$

Per cui se so quale carica ho accumulato nel condensatore posso sapere il valore del campo elettrico fra le armature.

$$\boxed{E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S}}$$

Per accumulare la carica Q ho spostato elettroni da una armatura e li ho messi sull'altra. Spostando delle cariche ho creato una differenza di potenziale fra le due armature.

$$V_c = \int_1^2 \overset{\text{cost.}}{E} \cdot dl = E \cdot d \qquad \boxed{V = E \cdot d}$$

Si definisce CAPACITÀ del condensatore la quantità

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_c}}$$

Capacità di un condensatore piano:

$$C = \frac{Q}{V_c} = \frac{Q}{E\,d} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{\varepsilon S}\,d} = \varepsilon \cdot \frac{S}{d} \qquad \boxed{C = \varepsilon \frac{S}{d}}$$

Ogni mezzo ha un suo valore di rigidità dielettrica. È una misura di quanta ddp posso applicare al materiale per unità di lunghezza. Si misura in V/m o $\frac{kV}{m}$.

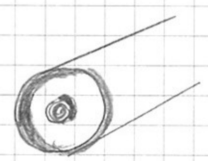
$$R_{d\,ARIA} = 30 \; kV/cm$$ → questo per l'aria secca, minore per l'aria umida

Quando supero la rigidità dielettrica del mezzo il mezzo da isolante diventa improvvisamente un conduttore. Do talmente tanta carica ~~al~~ agli elettroni che questi scappano dagli atomi e danno una scarica. Nell'aria abbiamo un fulmine, ad esempio. Di un condensatore viene sempre indicata capacità e rigidità dielettrica.

Non posso aumentare la capacità avvicinando all'infinito le armature perché a un certo punto supero la ~~ri~~ rigidità dielettrica e il condensatore si brucia.

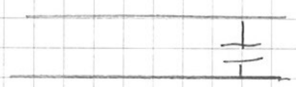
Capacità parassita

Componenti che non sono condensatori possono avere una certa capacità parassita. Per esempio se compro un cavo coassiale (come quelli per la TV, che hanno un conduttore centrale, uno strato isolante e una guaina metallica) è chiaro che questo conduttore avrà una resistenza molto bassa (funge, appunto da conduttore), ma avrà anche una certa capacità parassita.



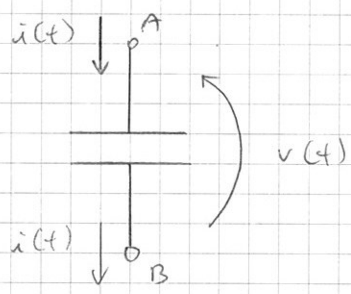
Quindi il cavo va rappresentato non così

Ma con la sua capacità parassita

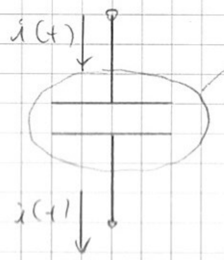


Ad elevate frequenze questo può diventare non trascurabile.
Allo stesso modo si può parlare di resistenze parassite o di capacità parassite. Anche in questo caso sono non volute.

Caratteristica di un condensatore ai morsetti

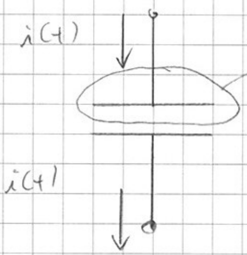


Immaginiamo di buttare una certa corrente nel condensatore. Com'è possibile avere la stessa corrente dall'altra parte se in mezzo al condensatore c'è un isolante? Suppongo che quando entra corrente (positiva) dal morsetto A esce una stessa corrente (negativa) dall'altra parte. C'è un circuito intorno per cui se un elettrone entra da una parte uno esce dall'altra. In questo caso viene rispettata la solenoidalità div $\vec{J} = 0$



Il flusso attraverso la sup. chiusa è nullo.

Il condensatore si sta caricando: gli elettroni arrivano sull'armatura del condensatore e si fermano



il flusso non è più nullo

All'interno del condensatore la condizione di RQS non è più verificata. Ma questo non ci preoccupa perché considereremo sempre il condensatore come insieme delle due armature. In questo caso è rispettata la solenoidalità.

Qual è il rapporto tra tensione e corrente?

Quando entra corrente da una parte ed esce dall'altra la tensione ai capi del condensatore aumenta.

$$v_c(t) = \frac{1}{c} \int dq =$$ ← ho buttato dentro una carica dq

$$= \frac{1}{c} \int i \, dt$$

Allo stesso modo

$$i(t) = C \frac{d\,v(t)}{dt}$$

Da notare che il condensatore segue la convenzione dell'utilizzatore (se la corrente entra da A la d.d.p va da B ad A).

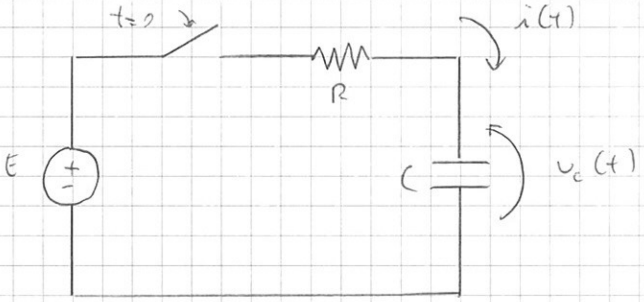
Per accumulare la carica nel condensatore devo fornire dell'energia. Tale energia non viene dissipata, ma viene immagazzinata per poi essere restituita in un secondo tempo.

$$E_c = \int dE = \int_0^Q v_c(t)\, dQ = \int_0^Q \frac{q(t)}{C}\, dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C v_c^2(t)$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \qquad E = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

Come avviene nel tempo la carica di un condensatore

Immaginiamo di avere un circuito fatto così



$t \leq 0 \qquad Q_0 = 0$

$\qquad\qquad V_{c_0} = 0$

All'istante $t=0$ immagino di chiudere l'interruttore: comincia a scorrere una corrente $i(t)$ finché la ddp ai capi del condensatore è uguale alla tensione ai capi del generatore. Si dice che è finita la fase di transitorio.

$t \to \infty \qquad V_{c\infty} = E$

$\qquad\qquad Q_\infty = C \cdot E$

In questo momento nessuna corrente scorre più all'interno del circuito.
Ho di nuovo una condizione stazionaria.
Ma com'è fatto questo transitorio?

Scriviamo la legge di Kirchoff alla maglia.

$$E = v_c(t) + R\,i(t) = v_c(t) + R \cdot C \cdot \frac{d v_c}{d t}$$

È un'eq. differenziale del primo ordine a coeff. costanti.

$0 = RC\alpha + 1$ eq. omogenea associata

$$\Downarrow$$

$$\alpha = -\frac{1}{RC}$$

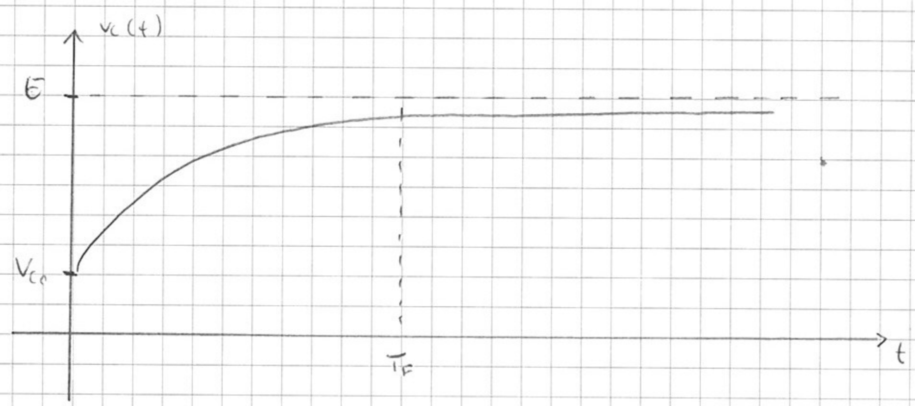
$$v_c(t) = K_v e^{-\frac{1}{RC}t} + \underbrace{E}_{}$$

Sol. particolare dell'eq. completa

Dobbiamo determinare il valore di K_v. Per farlo si prendono in considerazione le condizioni iniziali del sistema.

$t = 0 \quad V_{c0} = K_v + E \quad \Rightarrow \quad K_v = V_{c0} - E$

$$\boxed{v_c(t) = (V_{c0} - E)\, e^{-\frac{1}{RC}t} + E}$$



Quindi in realtà ~~la carica~~ il transitorio non si esaurisce mai. Però individuo un istante T_F di fine carica in cui dico che la carica è completata. Per es. quando $v_c(t) =$ 99% di E

$$T_F = t \Big|_{v_c(t) = 0{,}99\,E}$$

$\tau = RC$ COST. DI TEMPO

c'è un tempo che mi dice quanto velocemente il condensatore si carica.
Quando $t = \tau$

$$t = \tau \Rightarrow v_c(t) = (V_{c0} - E)\underbrace{e^{-1}}_{\simeq 0{,}63} + E$$

Questo significa che dopo un tempo τ la tensione ai capi del generatore è pari al 63% della sua escursione. Posso variare il tempo di carica variando R oppure C. Solitamente si considera

$$\boxed{T_F \simeq 5 \cdot \tau = 5RC}$$

Come varia nel tempo la corrente ai capi del condensatore

$$E = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt + R\,i(t) \quad \text{derivo}$$

$$0 = R\frac{di(t)}{dt} + i(t)\cdot\frac{1}{C}$$

$$i(t) = K_i\, e^{-\frac{1}{RC}t}$$

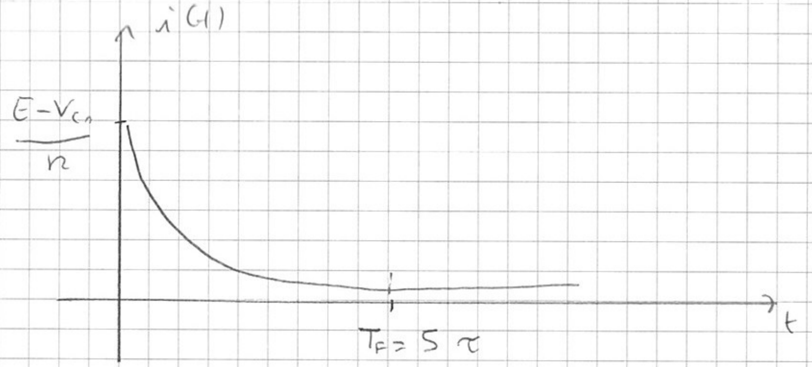
$$t = 0 \qquad i(0) = \frac{E - V_{c0}}{R} = I_0$$

La tensione ai capi del condensatore, essendo legata all'energia immagazzinata non può avere variazioni istantanee.

$$\frac{E - V_{c0}}{R} = K_i$$

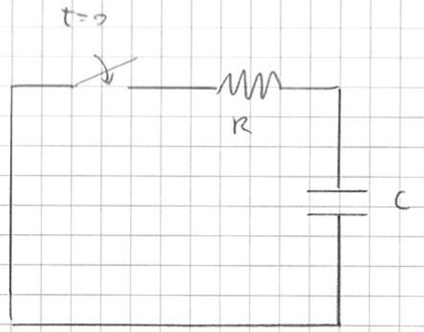
$$\Downarrow$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E - V_{c0}}{R}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}$$



Mano a mano che il condensatore si carica la corrente diminuisce fino a diventare trascurabile. Al tempo T_F essa si è ridotta del 99%. Ecco perché si dice che il transitorio si esaurisce dopo 5τ

Scarica di un condensatore
Ho il condensatore carico e lo voglio scaricare. Sostituisco il generatore con un cortocircuito e chiudo l'interruttore.

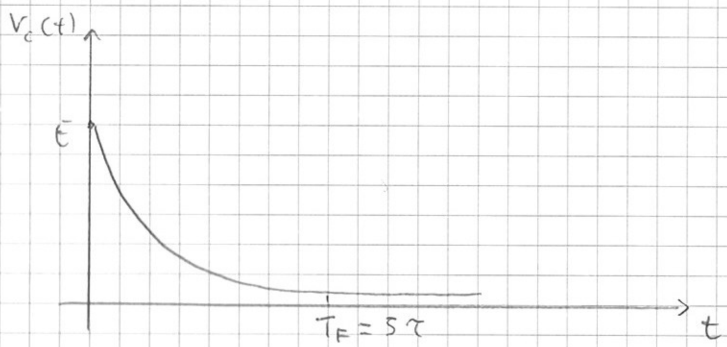


$V_c(0) = V_{c_0} = E$

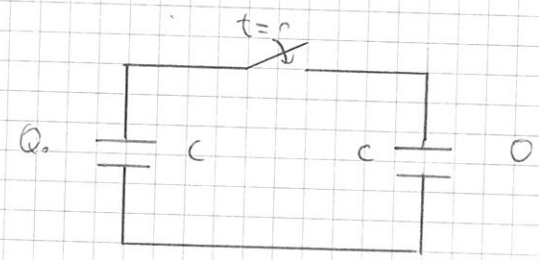
Ora all'istante t=0 il condensatore è già carico (immaginiamo di averlo già caricato). E non c'è più, quindi

$$0 = RC \frac{dv_c}{dt} + v_c(t)$$

$$\boxed{v_c(t) = E \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

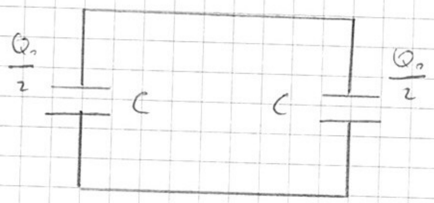


Dov'è finita l'energia?



energia immagazzinata : $E = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} + 0$

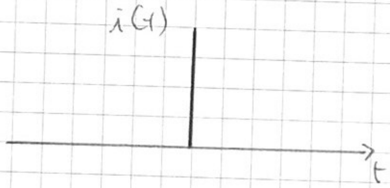
Ho due condensatori di uguale capacità C. Sul primo c'è una carica Q_0, sul secondo carica nulla. All'istante t_0 chiudo l'interruttore. La carica si ridistribuisce sui due condensatori.



energia immagazzinata : $E = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2\frac{1}{C} + \frac{1}{2}\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{C} =$

$= \frac{Q_0^2}{4} \cdot \frac{1}{C}$

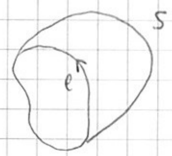
L'energia finale è la metà di quella che avevo all'inizio. Dove si è dissipata? Siccome il transitorio che ho quando chiudo l'interruttore è infinitesimo, la corrente è una delta di Dirac: va da 0 a ∞ poi torna a 0.



Ha una frequenza tale da diventare confrontabile col tempo di transito. Non sono più in regime RQS. Posso irradiare energia. L'energia scomparsa viene irradiata come campo elettromagnetico.

Induttori

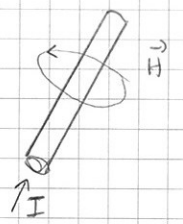
$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$ $\qquad \int_S \mathrm{rot}\,\vec{H} \cdot \hat{n} \cdot dS = \oint_l \vec{H}\, d\vec{l}$ $\qquad \underbrace{\int_S \vec{j} \cdot \hat{n} \cdot dS}_{I_c} = \oint_l \vec{H}\, d\vec{l}$



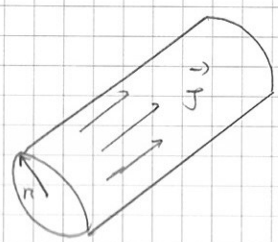
corrente concatenata alla linea chiusa l. (flusso di j attraverso S)

$$I_c = \oint_l \vec{H}\, d\vec{l}$$ legge della circuitazione di Ampere.

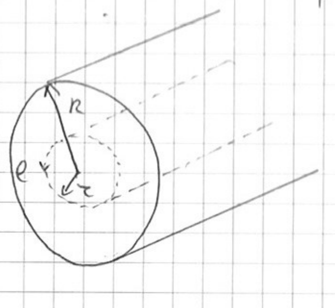
Tutte le volte che ho un filo percorso da una corrente i intorno al filo si vanno a creare delle linee di forza del campo H.



Immaginiamo che il filo conduttore sia un cilindro di raggio R. lungo questo cilindro in direzione assiale avremo una densità di corrente ~~costante~~ uniforme $\vec{J}$.



Calcoliamo l'intensità del campo all'interno del conduttore.



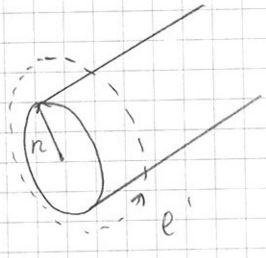
$$\oint_l \vec{H}\, d\vec{l} = I_c \Rightarrow H \cdot 2\pi r = J \cdot \pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 ,$$

corrente totale nel filo

area filo

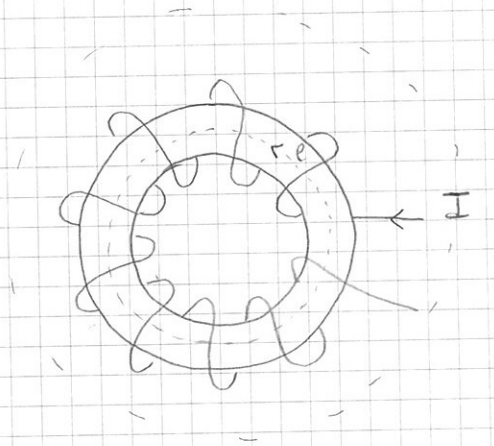
$$H_I = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot r$$

Se ora prendo una nuova linea l' concentrica al filo ma che passa all'esterno



$$H_E \cdot 2\pi r = I \quad \Rightarrow \quad H_E = \frac{I}{2\pi r}$$

A noi interessa solo questa, perchè tanto i fili che consideriamo hanno sezione piccolissima.



Consideriamo ora un nucleo toroidale intorno al quale è avvolto un filo percorso da corrente

$I_c = N \cdot I$ la corrente concatenata alla linea l è I per il # di spire

Applico il teorema della circuitazione di Ampere

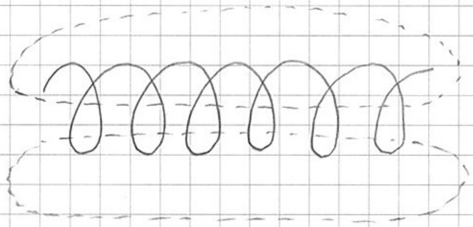
$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c \quad \Rightarrow \quad H L = N \cdot I$$

$$H_I = \frac{N \cdot I}{L} \qquad H_1 = H \text{ interno}$$

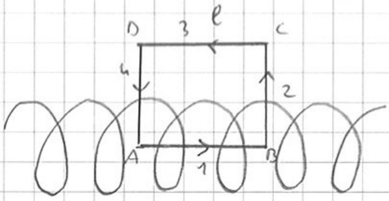
Se ora prendo una curva chiusa che sta all'esterno essa vede entrare tanta corrente quanta ne esce, quindi esternamente il campo è nullo.

Poiché H_I dipende da L esso sarà più intenso verso il centro del Toroide.

Ora immaginiamo di far tendere a infinito R esterno e R interno del toroide. Quello che otteniamo è una bobina.



Il problema è che io vorrei che tutto il campo magnetico fosse all'interno, ma se il mio induttore non è infinito il campo magnetico si deve chiudere anche all'esterno. Abbiamo degli effetti di bordo



Approssimiamo dicendo che il campo magnetico è tutto all'interno (Solenoide infinito)

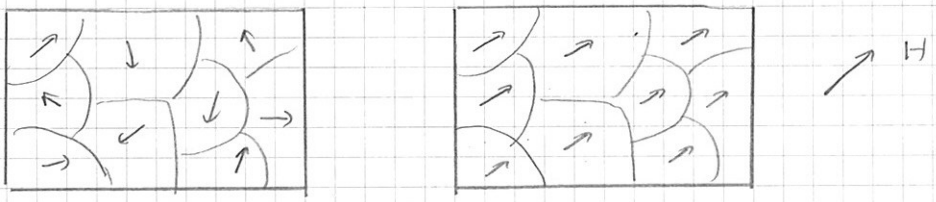
$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = \int_1 \vec{H}\, d\vec{l} + \int_2 \vec{H}\, d\vec{l} + \int_3 \vec{H}\, d\vec{l} + \int_4 \vec{H}\, d\vec{l} =$$

$$= H\, L_{AB} + 0 + 0 + 0 = N_{AB} \cdot I$$

$$H = \frac{N_{AB}\, I}{L_{AB}} = I \cdot \frac{N}{l}$$ $[As/m]$ As: Ampere per spire

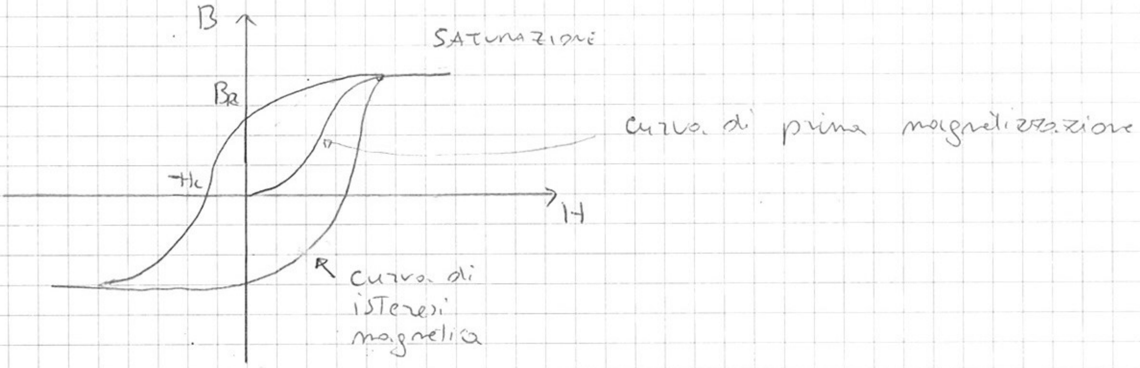
$$\boxed{H = I\, \frac{N}{l}}$$

I materiali ferromagnetici sono materiali con una permeabilità magnetica molto elevata. Sono costituiti da domini ferromagnetici con dipoli magnetici orientati a caso.



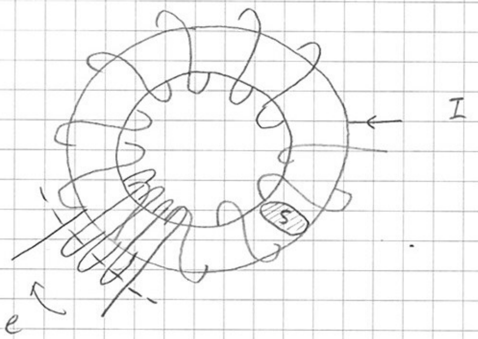
Se applico un campo magnetico esterno H quasi tutti i dipoli si orientano secondo H.

Ma non c'è una dipendenza ~~da~~ tra H e μ.



Quando tutti i domini si sono orientati anche aumentando H B non può più aumentare, il materiale è saturo. Ora se diminuisco H ottengo una curva un po' diversa. Quando H=0 B non si annulla, ma assume un valore B_R detto magnetizzazione residua. Se voglio annullare B devo applicare un campo magnetico H_c detto coercitivo.
Una cosa analoga la ottengo aumentando di nuovo H.

Immaginiamo che la struttura toroidale di prima sia composta di materiale ferromagnetico. Facciamo scorrere nel filo una corrente I. Ora immaginiamo di ~~avere~~ mettere in una parte del toroide un secondo avvolgimento.

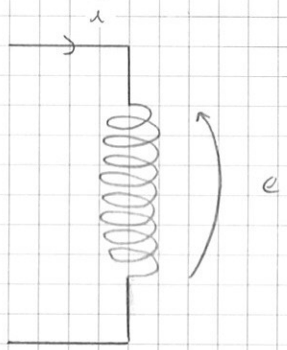


Attraverso tali spire si crea una forza elettromotrice indotta e

$$\text{f.e.m.} \quad e = -\frac{dI_c}{dt} = S\frac{dB}{dt}$$

legge dell'induzione di Faraday

Ma anche il filo primario raccoglie una f.em. e contromotrice.

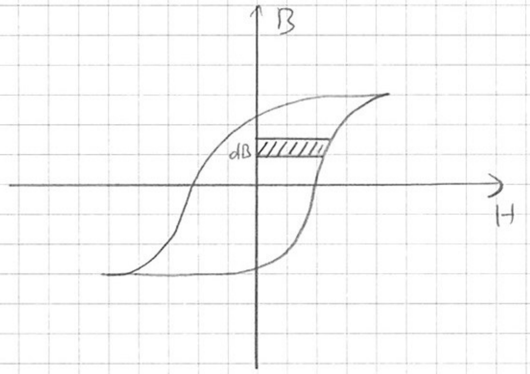


Per questo agli estremi della bobina in figura si genera una differenza di potenziale, che sappiamo da Faraday avere verso opposto alla corrente.
Quindi la bobina si comporta come un utilizzatore.
Più rapida è la variazione di corrente più grande è la ddp con cui mi devo scontrare.

$$dL = e \cdot i \cdot dt = i \cdot d\Phi = i \cdot N \cdot S \, dB = \underbrace{L\,S}_{\tau} H \, dB = \tau \, (H\,dB)$$

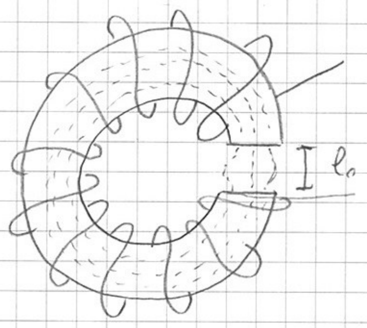
volume interno del materiale ferromagnetico

Quindi per far variare di $d\Phi$ il flusso del campo magnetico all'interno del mio Toroide ho speso un'energia $\tau \, (H\,dB)$



Quindi l'area interna alla curva di isteresi magnetica mi dice il lavoro che spendo per far fare un ciclo completo al mio materiale.
Se prendo un materiale con la curva più piccola avrò perdite minori.
Di solito i costruttori danno una cifra di perdita, espressa però in unità di peso.

$c \; [W/Kg] \qquad 1{,}5 - 3 \quad W/Kg$

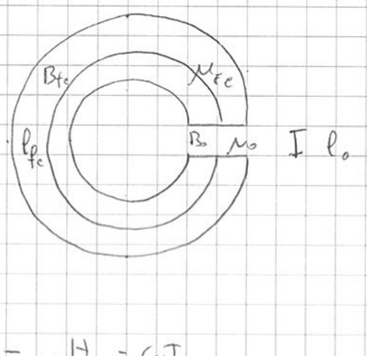


l_0 = TRAFERRO

Quando le linee di flusso passano in aria si divaricano un po'. Se il traferro è piccolo posso dire che tutto il campo resta all'interno. Posso dire che c'è un'analogia tra la densità di carica e la densità di campo magnetico.

EL.	MAGN.
$J \longleftrightarrow$	B
$I \longleftrightarrow$	Φ
$V \longleftrightarrow$	$N \cdot I$
$R \longleftrightarrow$	$\mathcal{R}$
$\rho \longleftrightarrow$	μ

f. e. m.



B_{fe} = valore di B all'interno

B_0 = " " B nel traferro

$B = \mu H = 6,T$

μ = grande all'interno del ferro $\Rightarrow$ H piccolo

μ = piccolo all'esterno del ferro $\Rightarrow$ H grande

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H_{fe}\, l_{fe} + H_0\, l_0 = N \cdot i$$

Questo è un caso particolare in cui ho solo un traferro costituito da aria.

Generalizzando:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum H_i l_i = NI$$

$$\sum H_i l_i \cdot \frac{S_i \mu}{S \mu} = N \cdot I$$

$$\sum \Phi_i \frac{l_i}{S \mu} = N \cdot I$$

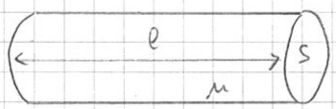
ma il flusso è costante in ogni parte del circuito

$$\Phi \sum \frac{l_i}{\mu S_i} = N \cdot I$$

"resistenza" magnetica.

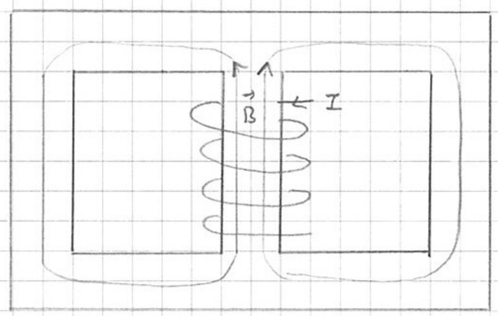
In realtà si parla di

RILUTTANZA MAGNETICA $\mathcal{R}$



$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu \cdot S}$$

Immaginiamo di costruire un circuito magnetico a più maglie.



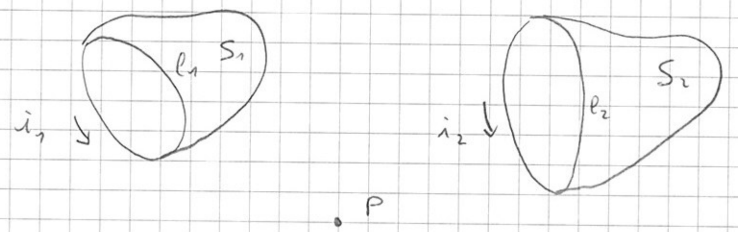
I flussi si dividono nei due rami come se fossero due correnti.

$\sum \Phi = 0$ analogo 1° legge di Kirchoff

$\sum \Phi \mathcal{R} = \sum N \cdot I$ analogo 2° legge di Kirchoff

Mutua induzione

Prendiamo due circuiti sui quali si appoggiano due ~~su~~ superfici S_1 e S_2.



Posso immaginare che fissato un punto P qualsiasi nello spazio esso sarà interessato da un campo di induzione magnetica generato dal circuito 1 e da un campo di induzione magnetica generato dal circuito 2.

$\vec{B}(P) = \vec{B}_1(P) + \vec{B}_2(P)$

Il circuito 1 si induurà da solo del flusso e poi sarà interessato dal flusso generato dal circuito 2.

$\Phi_{c11} \doteq \int_{S_1} \vec{B}_1 \hat{n}\, dS$ $\quad \Phi_{c22} = \int_{S_2} \vec{B}_2 \hat{n}\, dS$ ← componenti di flusso generati dai circuiti su se stessi

$\Phi_{c12} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \hat{n}\, dS$ $\quad \Phi_{c21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \hat{n}\, dS$ ← componenti del flusso generato da un circuito sull'altro.

$\Phi_{c1} = \Phi_{c11} + \Phi_{c12}$

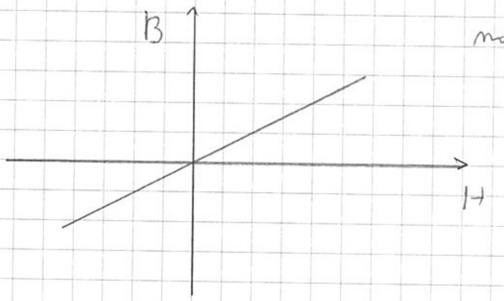
$\Phi_{c2} = \Phi_{c22} + \Phi_{c21}$

← flusso totale concatenato a ciascuno dei due circuiti

Se non siamo in presenza di materiali ferromagnetici il legame tra corrente e campo magnetico è costante, non dipende dal materiale

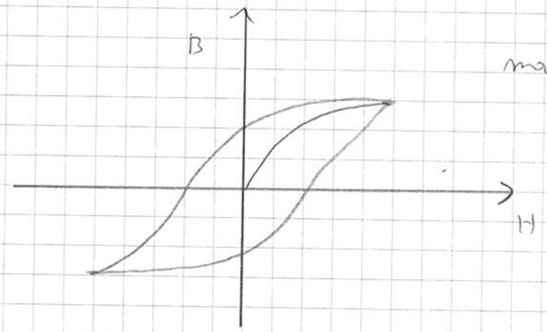
$H \propto I$

$B = \mu H$



materiali normali

Invece per i materiali ferromagnetici μ non è costante, infatti il grafico non è una retta.



materiali ferromagnetici.

Quindi se nello spazio che stiamo considerando ci sono solo materiali normali B è proporzionale a I.

$$B = K \cdot I$$

Se la geometria non cambia perché il punto è fermo allora anche il flusso è proporzionale alla corrente.

$$\Phi = K' I$$

$$K' = \text{INDUTTANZA } L$$

$$\Phi = L \cdot I$$

L'INDUTTANZA di un circuito elettrico è la costante di proporzionalità tra la corrente che circola nel circuito e il flusso che attraversa il circuito stesso.

Riprendendo i circuiti dell'inizio definiamo

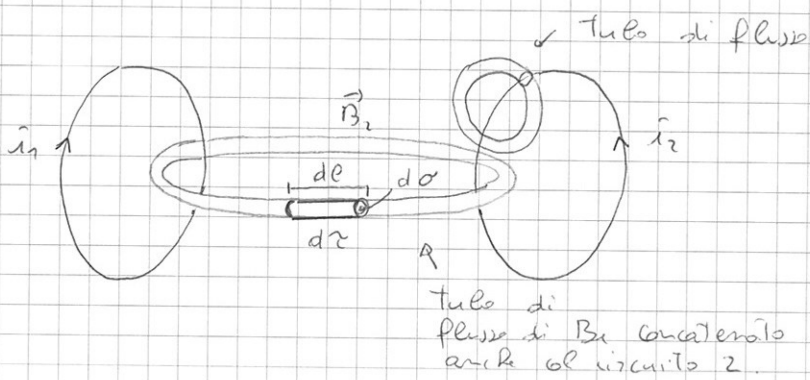
$\Phi_{c11} = L_1 I_1$ $\Phi_{c22} = L_2 I_2$

Per adesso stiamo considerando le induttanze proprie.

Ma ogni circuito indurrà un flusso anche sull'altro circuito.

$$\Phi_{C12} = M_{12} I_2 \qquad \Phi_{C21} = M_{21} I_1 \qquad M = \text{mutua induttanza.}$$

Che legame c'è tra M_{12} e M_{21}. Prima di tutto c'è da dire che le induttanze proprie saranno maggiori di quelle mutue (a causa della distanza).



Consideriamo un segmentino di questo tubo di flusso con:

lunghezza dl

volume $d\tau$

sezione $d\sigma$

$$d\tau = d\sigma \cdot dl$$

Prendiamo una grandezza Ψ che definiamo come

$$\Psi = \int_\tau \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2 \, d\tau = \int_\sigma \int_l \vec{B}_1 \vec{H}_2 \, d\sigma \, dl = \int_\sigma \int_l \vec{B}_1 \hat{n} \, d\sigma \, \vec{H}_2 \, dl =$$

$$= \int_\sigma d\Phi_1 \underbrace{\int_l \vec{H}_2 \, dl}_{\text{legge della circuitazione di Ampere}} = \Phi_{C21} \, i_2 = M_{21} \cdot i_1 \cdot i_2$$

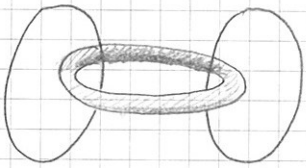
Se invece avessi fatto

$$\Psi = \int_\tau \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2 \, d\tau = \int_\sigma \int_l \vec{B}_2 \vec{H}_1 \, d\sigma \, dl = \Phi_{C12} \cdot i_1 = M_{12} \, i_1 i_2$$

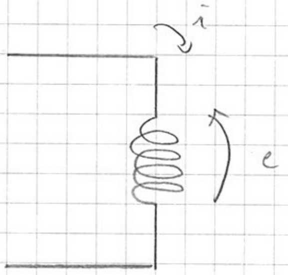
$\Psi = M_{21} \, i_1 \, i_2 = M_{12} \, i_1 \, i_2 \implies M_{21} = M_{12} = M$

Si definisce M la mutua induzione dei due circuiti.

Se voglio aumentare la mutua induzione fra due circuiti un modo è incanalare il flusso di un circuito in modo che vada a finire dentro all'altro.
Possiamo mettere un circuito magnetico a bassa riluttanza che concateni i due circuiti. Metto un toroide di bassa riluttanza magnetica.
Poiché la riluttanza dei materiali ferromagnetici è minore di quella dell'aria la maggioranza del flusso passerà per di qui.



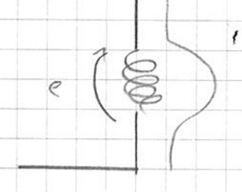
Induttore

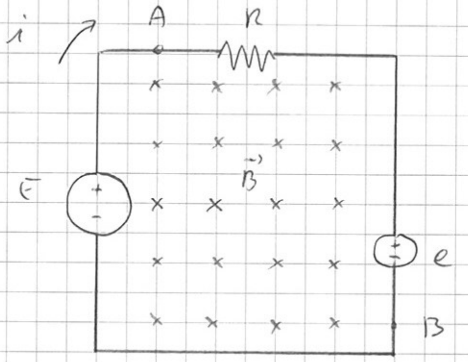


Un induttore è un componente che, quando al suo interno passa una corrente i, genera al suo interno una f.e.m e che si oppone alla variazione di corrente.
Abbiamo detto che in R.Q.S. ~~trasc~~ trascuriamo le variazioni di campo magnetico

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\cancel{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=0}$$

All'interno di un'induttanza questo non è più vero.
Se però passiamo intorno all'induttanza non ci accorgiamo di niente: vediamo solo una differenza di potenziale. I principi dell'elettrotecnica sono salvi.

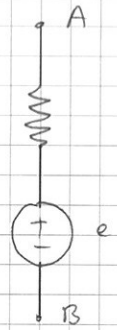




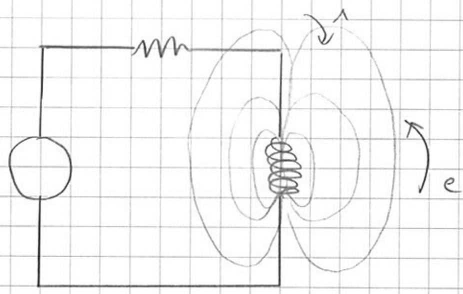
Immaginiamo che ci sia un campo magnetico concatenato con questa spira. Se il flusso varia si genera una f.e.m. indotta (nasce un generatorino di f.e.m. e).

$E - Ri - e = 0$

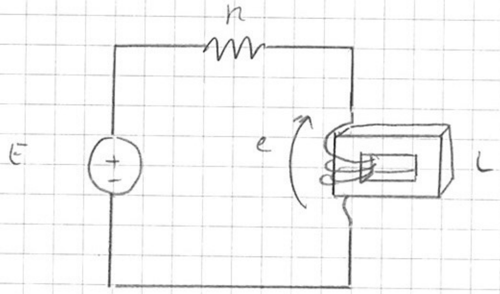
Concentriamoci sul ramo AB



Poiché e è legato al flusso è difficile studiare questo ramo estrapolandolo dalla maglia, perché non so bene quanto vale il flusso. Non so qual è il contributo del campo su questa sola parte AB che ho tolto.
Di solito faccio un mucchio di avvolgimenti molto vicini tra loro. All'interno si genera un forte campo elettromagnetico. La maggior parte delle linee di forza saranno interne all'induttanza mentre qualcuna si concatenerà anche col circuito. Queste ultime però saranno molto poche. Siccome il campo magnetico è tutto concentrato in questa zona la fem è concentrata tutta qui.



Di solito le induttanze sono costruite con molto filo avvolto intorno a un toroide di materiale ferromagnetico. La maggior parte del campo è tutta qua dentro.



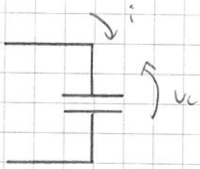
L'utilità di queste induttanze è opporsi alle variazioni di corrente.

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

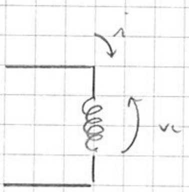
L'induttore è un componente che autoinduce molto e mutuo induce poco.
Quindi possiamo dire che e dipende solo da L.
La tensione V_L ai capi di un'induttanza è

$$V_L = L\frac{di}{dt}$$

Se utilizzo la convenzione dell'utilizzatore il segno è più.
L'induttore è un po' il duale del condensatore

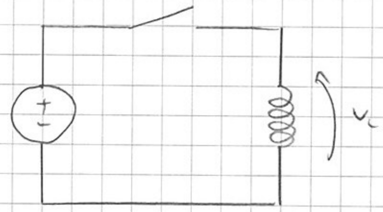


$$i_L = C\cdot\frac{dv_C}{dt}$$



$$v_L = L\cdot\frac{di_L}{dt}$$

Più rapidamente varia la corrente più alta è la forza contro elettromotrice ai capi dell'induttanza.



Se apro improvvisamente un interruttore la corrente varia molto velocemente. Può anche generarsi una scintilla.

Energia immagazzinata in un induttore

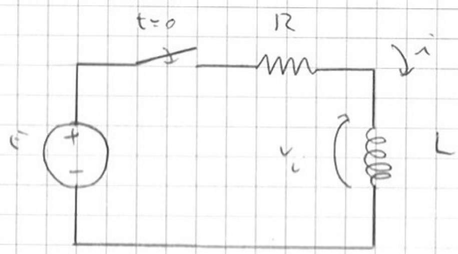
Quando voglio creare una ddp ai capi di un'induttanza devo fare del lavoro che poi verrà accumulato nell'induttore sotto forma di campo magnetico. Come il condensatore l'induttanza è un componente reattivo (libera energia solo se in precedenza è stato caricato).

Immaginiamo che a $t=0$ l'induttanza sia scarica.

$$\int dL = \int_0^T e \cdot i \cdot dt = \int_0^{\Phi_c} i \, d\Phi_c = \int_0^i i L \, di = \frac{1}{2} L i^2$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} L i^2}$$

Energia necessaria per caricare l'induttore. Questa è l'energia immagazzinata in un'induttanza di valore L all'interno della quale circola una corrente i.



Immaginiamo che all'inizio l'induttanza sia scarica. All'istante $t=0$ chiudiamo l'interruttore.

$$E = L \cdot \frac{di}{dt} + R i \qquad \Rightarrow \qquad i = \frac{E}{R} + K_1 e^{-\frac{R}{L} t}$$

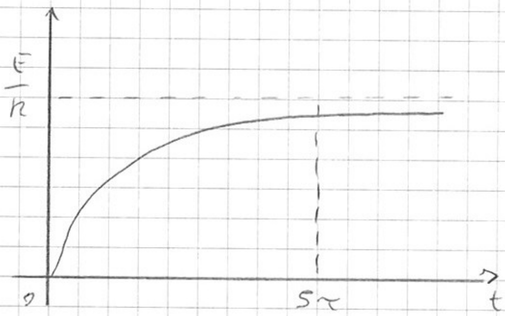
Per $t \to \infty$ il valore della corrente si sarà stabilizzato. Sarà una corrente data solo dalla presenza della resistenza. Poiché la corrente non varia più v_L si annulla.

$$i_\infty = \frac{E}{R}$$

Mentre per $t=0$ posso imporre la condizione iniziale

$$t=0 \Rightarrow \underset{\overset{\parallel}{0}}{i_0} = \frac{E}{R} + K_i \Rightarrow K_i = -\frac{E}{R}$$

$$\boxed{i = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$



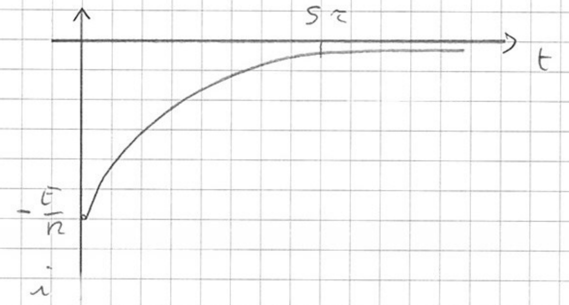
$$\tau = \frac{R}{L}$$

Posso dire che dopo un tempo pari a 5τ l'induttore è praticamente carico (il flusso all'interno dell'induttore ha raggiunto il 99% del valore finale).
Se ora vado a scaricare l'induttore (tolgo il generatore, l'induttore si scarica sulla resistenza)

$$0 = L \cdot \frac{di}{dt} + Ri \qquad \text{eq. diff. omogenea}$$

$$i = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

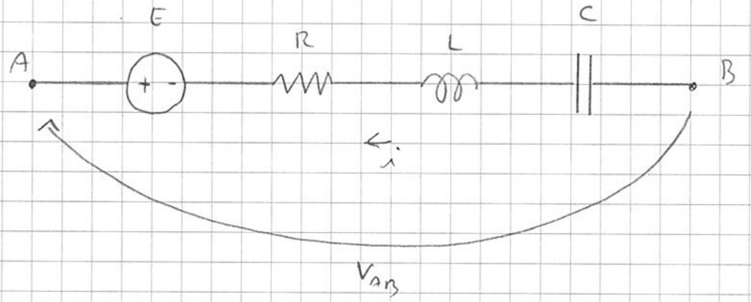
$$\boxed{i = -\frac{E}{R}\, e^{-\frac{R}{L}t}}$$



Dopo 5τ la corrente sarà 1% di quella iniziale

TRANSITORI

Un transitorio è un fenomeno che ha un istante di inizio e un istante di fine.
È una cosa che inizia e piano piano finisce.
Immaginiamo di prendere un generico ramo di un circuito che comprende anche componenti di tipo reattivo.



$$V_{AB}(t) = E(t) - L\frac{di(t)}{dt} - Ri(t) - \frac{1}{C}\int i\,dt$$

Se ~~seg~~ facciamo lo stesso bilancio per tutti i rami del circuito e applichiamo le leggi di Maxwell otteniamo un sistema di eq. differenziali. Facendo varie sostituzioni ottengo un'equazione di ordine n (Σ ordine singole equazioni).
L'ordine dell'eq. che ottengo è pari al numero di componenti reattivi presenti nel circuito.

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \quad a_n \frac{d^n i_i}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} i_i}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di_i}{dt} + a_0 = 0$$

In generale se i generatori non sono costanti nel tempo a secondo membro può comparire anche una funzione $b(t)$ => l'eq. non è più omogenea

$$a_n \frac{d^n i_i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_i}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d i_i}{dt} + a_0 = b(t)$$

Applicati i metodi di risoluzione delle eq. differenziali si ottiene una funzione che è la somma di due contributi

IP = integrale particolare

SOA = soluzione omogenea associata

$$i_i(t) = \underbrace{i_{SOA}(t)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{i_{IP}(t)}_{\text{contributo a regime}}$$

Transitorio = contributo che si annulla per $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} i_{SOA}(t) = 0$$

A regime (quando il transitorio si è esaurito) rimane solo l'integrale particolare. Esso sarà dello stesso tipo dei generatori (gen. costanti → int. costante, gen. sinusoidali → int. sinusoidale).

$$i_i(t) = \sum_{1}^{n} K_{\alpha_h} e^{\alpha_h t} + i_p(t)$$

α_h = sol. dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata

$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha = 0$ EQ. CARATTERISTICA

Se anche uno solo di questi α_h è un numero positivo, per $t > 0$ questa sommatoria diverge. Quindi, per la stabilità del circuito, tutti gli α_h devono venire negativi. Se viene $\alpha_h > 0$ c'è un errore.

Immaginiamo di avere un'eq. diff. di 2 ordine. Possiamo avere:

- sol. reali distinte
- sol. complesse coniugate
- sol. reali coincidenti

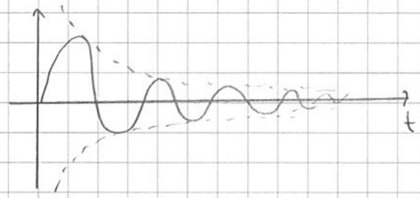
Se una delle sol. è complessa coniugata

$\alpha_j = \alpha_r + j\,\alpha_i$

$\alpha_{j+1} = \alpha_r - j\,\alpha_i$

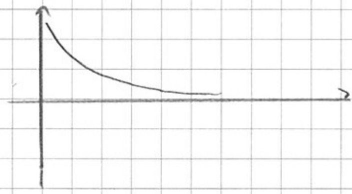
Posso invece, grazie alle formule di Eulero, che il contributo delle due soluzioni messe insieme è

$K e^{\alpha_R t} \operatorname{sen}(\alpha_I t + \varphi)$

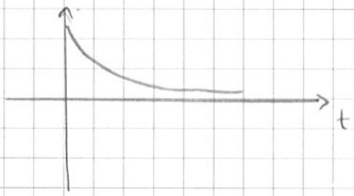


È una sinusoide smorzata da un'esponenziale.

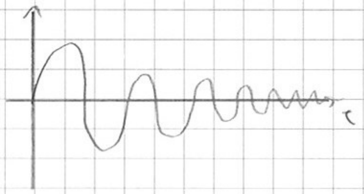
Ogni soluzione reale mi da un contributo di questo tipo



SOL. REALI



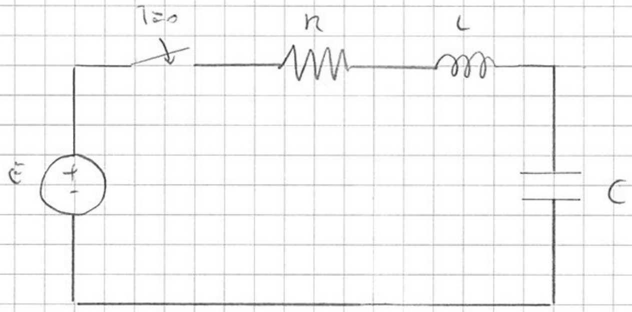
SOL. COMP. CONIUGATE



Ogni sol. reale mi da luogo a un coeff. da calcolare K_{α_h} $\qquad \sum_{h=1}^{n} K_{\alpha_h} e^{\alpha_h t}$

Ogni coppia di sol. comp. con. mi da da calcolare K e φ $\qquad K e^{\alpha_R t} \operatorname{sen}(\alpha_I t + \varphi)$

Esempio



$$E(t) = L \cdot \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i \, dt$$

derivo per togliere l'integrale

$$\frac{dE(t)}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t)$$

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

$$L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0$$ eq. caratteristica

Sol. dell'eq. caratt.

$$\alpha = -\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\alpha_2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{k_2}}$$

k_2 è il determinante

$$\alpha = -\alpha_2 \pm \sqrt{k_2}$$

$k_2 > 0 \Rightarrow$ 2 sol. reali distinte

$k_2 < 0 \Rightarrow$ 2 sol. complesse coniugate

$k_2 = 0 \Rightarrow$ 2 sol. reali coincidenti

<u>Soluzioni reali distinte</u> $\Rightarrow$

$$i(t) = K_1 e^{[-\alpha_2 + \sqrt{k_2}]t} + K_2 e^{[-\alpha_2 - \sqrt{k_2}]t}$$

Per trovare K_1 e K_2 dobbiamo considerare le condizioni iniziali.

$$t = 0 \qquad E(0) = L\left(\frac{di}{dt}\right)_0 + R i_0 + v_{C0}$$

$\rightarrow$ non è detto che il condensatore sia scarico

$i_0 = i_{L0} = 0$

$\uparrow$

corrente nell'induttanza.
Ma la corrente nell'induttanza
non può variare istantaneamente.
Se i_{L0} era 0 (interruttore aperto)
allora è ancora 0

Anche v_{C0} non può variare istantaneamente

	$t=0^-$	$t=0^+$	$t\to\infty$
$i=i_L$	0	0	
v_C	v_{C0}	v_{C0}	

$\left(\frac{di}{dt}\right)_0$ la possiamo calcolare dall'espressione $E(0) = L\left(\frac{di}{dt}\right)_0 + Ri_0 + v_{c_0}$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{1}{L}E_0 - \cancel{\frac{R}{L}i_0} - \frac{1}{L}v_{c_0}$$

Ora prendo la soluzione $i(t) = K_1 e^{[-\alpha_2 + \sqrt{K_2}]t} + K_2 e^{[-\alpha_2 - \sqrt{K_2}]t}$ e sostituisco $t=0$.

Poi derivo questa stessa espressione e la eguaglio a $\left(\frac{di}{dt}\right)_0$

$$\begin{cases} i_0 = 0 = K_1 + K_2 \\ \left(\frac{di}{dt}\right)_0 = [-\alpha_2 + \sqrt{K_2}]K_1 + [-\alpha_2 - \sqrt{K_2}]K_2 = \frac{E_0}{L} - \frac{1}{L}v_{c_0} \end{cases}$$

Da questo sistema ricavo

$$K_1 = -K_2 = \frac{1}{2L}(E - v_{c_0}) \cdot \frac{1}{\sqrt{K_2}}$$

Quindi posso scrivere che

$$i(t) = \frac{E_0 - v_{c_0}}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{K_2}} \cdot \left[e^{(-\alpha_2 + \sqrt{K_2})t} + e^{(-\alpha_2 - \sqrt{K_2})t}\right] \qquad (= i_{SOA}(t))$$

Se E fosse costante l'eq. di partenza sarebbe stata omogenea e questa sarebbe già l'eq. di tutto. Se invece il generatore non è costante c'è da sommare un integrale particolare. Inoltre diventa più complicato il calcolo dei coeff. K_i. Per il momento consideriamo il generatore costante.

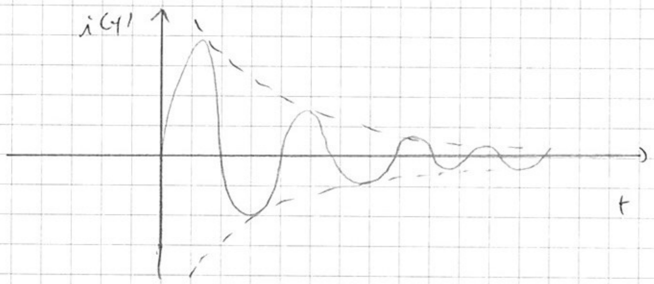
Soluzioni complesse coniugate $\Rightarrow$

$$i(t) = K e^{-\alpha_2 t} \cdot sen\left[\sqrt{-K_2}\, t + \gamma\right]$$

se le sol. son complesse è $K_2 < 1$. Per calcolare la radice devo mettere un $-$

Questa espressione deriva dalla somma di esponenziali

$$K_1 e^{(-\alpha_2 + j\alpha_i)t} + K_2 e^{(-\alpha_2 - j\alpha_i t)} = K_1 e^{-\alpha_2 t} + K_2 e^{-\alpha_2 t}\left(e^{j\alpha_i t} + e^{-j\alpha_i t}\right)$$



velocità (cost. di tempo)

$$i(t) = K e^{-\alpha_2 t} sen\left[\sqrt{-K_2}\, t + \gamma\right]$$

pulsazione

Cerchiamo di calcolare le costanti K e γ. Anche in questo caso ci vuole un sistema.

$$\begin{cases} i_0 = 0 = K\, sen\,\gamma \\ \left(\dfrac{di}{dt}\right)_0 = \dfrac{R}{2L} K\, sen\,\gamma + \sqrt{-K_2} \cdot K \cos\gamma = \dfrac{1}{L} E - \dfrac{1}{L} v_{C0} \end{cases}$$

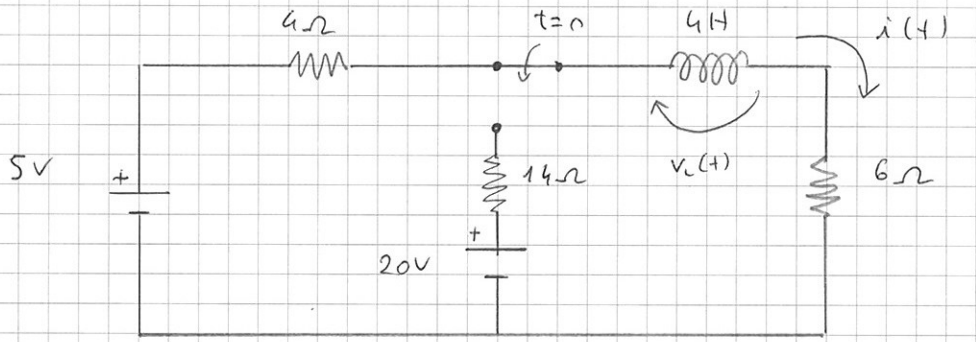
$i_0 = 0$ perché corrente su un'induttanza

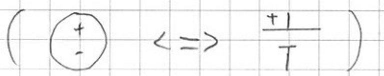
condizioni iniziali nulle $\Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ K = \dfrac{1}{L\sqrt{-K_2}} E \end{cases} \Rightarrow i(t) = \dfrac{1}{L\sqrt{-K_2}} E \cdot e^{-\alpha_2 t} sen\left[\sqrt{-K_2}\, t\right.$

Soluzioni reali coincidenti

$$i(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{-\alpha_2 t}$$

Esercizio





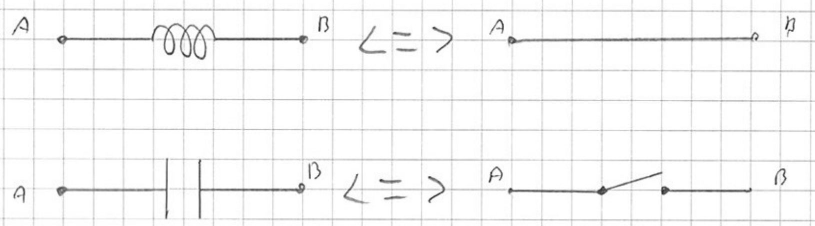
Vogliamo conoscere $v_L(t)$ e $i(t)$

Conviene sempre fare una tabellina dove abbiamo la situazione per $t=0^-, 0^+, +\infty$

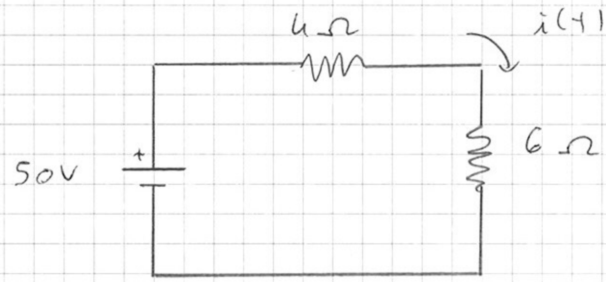
	$t=0^-$	$t=0^+$	$t\to+\infty$
$i(t)$	5	5	1
$v_L(t)$	0	-80	0

Immaginiamo di arrivare a $t=0^-$ dopo aver già atteso un tempo sufficientemente lungo affinché il transitorio precedente si sia esaurito. Supponiamo di essere in condizioni stazionarie. Tutte le derivate temporali sono nulle. Quando siamo a regime i condensatori si comportano come circuiti aperti, le induttanze come cortocircuiti.

A REGIME

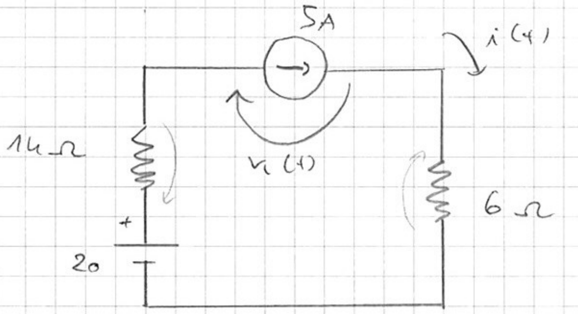


Disegnamo il circuito semplificato.



Per $t=0^-$ $i(t) = 5\,A$, $v_L(t)=0\,V$

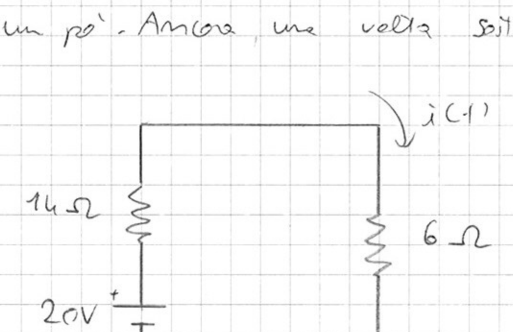
Sappiamo anche che la corrente in un' induttanza non può variare istantaneamente. Quindi per $t=0^+$ $i(t)=5$. La tensione sull'induttanza non è detto che rimanga 0. Posizioniamoci nel caso di $t=0^+$. Per $t=0^+$ ~~il c~~ l'interruttore è già scattato. L'induttanza si comporta come un componente che mantiene fissa la corrente. Posso schematizzarla come un generatore di corrente.



Legge di K. :

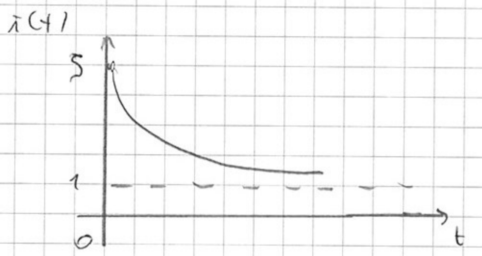
$$20 = 20 \cdot i(t) + v_L(t)$$
$$20 = 100 + v_L(t)$$
$$v_L(t) = -80\,V$$

Focalizziamoci sul caso $t \to \infty$. Anche in questo caso siamo in regime dc un po'. Ancora una volta sostituiamo induttanze e condensatori.

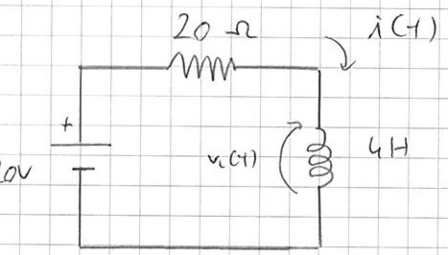


$i(t) = 1\,A = \dfrac{V}{R}$

Ci aspettiamo un transitorio (per la corrente) del 1° ordine decrescente con un andamento esponenziale fatto così:



Per $t > 0$



Dobbiamo studiare il transitorio di questo circuito conoscendo le condizioni iniziali che abbiamo ricavato dalla tabella di prima.

$$20 = 20\,i(t) + 4\,\frac{di(t)}{dt}$$ (2ª legge di Kirchhoff)

$$\frac{di(t)}{dt} + 5\,i(t) = 5$$

eq. caratteristica: $\alpha + 5 = 0 \Rightarrow \alpha = -5$

$$i(t) = A \cdot e^{-5t} + i_{1p}(t)$$

L'integrale particolare è una qualsiasi soluzione dell'eq. di partenza che vale per una qualche condizione iniziale

$i_{1p}(t) = 1$ ($i(t) = 1$ per $t \to +\infty$. Prendo questo valore perché sono nel caso $t > 0$).

verifichiamo

$$\cancel{\frac{di_{1p}(t)}{dt}} + 5\,i_{1p}(t) \overset{?}{=} 5 \quad \text{sì}$$

$d\,i_{1p} = 0$
perché cost.

Potevo anche dire:

- mi serve $i_{1p}(t) = \text{cost} \Rightarrow \frac{di_{1p}(t)}{dt} = 0$

$5\,i_{1p}(t) = 5 \Rightarrow i_{1p}(t) = 1$

(anche senza guardare la tabella)

$i(t) = A \cdot e^{-5t} + 1$

Ora dobbiamo determinare A. Devo mettermi nella condizione t=0 e riscrivere l'eq.

$i(0) = A + 1$

ma $i(0) = 5$, quindi

$5 = A + 1 \Rightarrow A = 4$

Soluzione:

$i(t) = 4e^{-5t} + 1$

Quanto vale $i(t)$ per $t = 4s$? Basta sostituire qui.

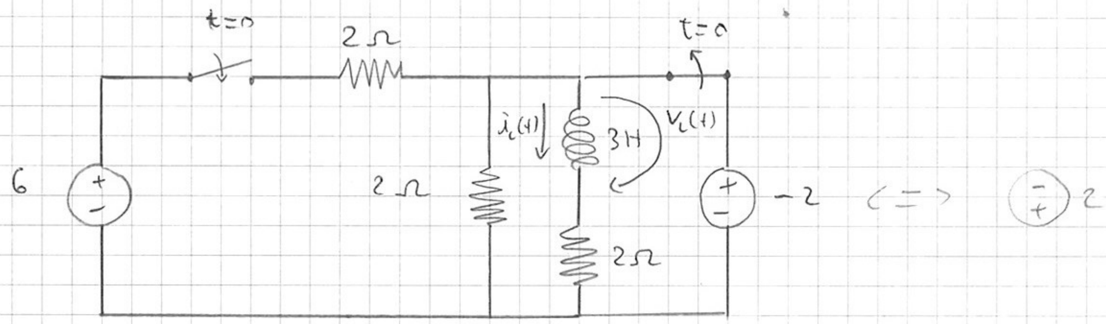
Ora dobbiamo concentrarci su $v_L(t)$. Possiamo risolvere l'eq. diff. o usare la relazione costitutiva dell'induttanza (conosciamo già $i(t)$).

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt}\left[4e^{-5t}+1\right] = 4 \cdot 4 \cdot (-5)\, e^{-5t} + 1 = -80\, e^{-5t}$$

La tabella iniziale può essere usata come verifica del risultato.

$v_L(0) = -80 \cdot e^0 = -80$ (come ci aspettavamo).

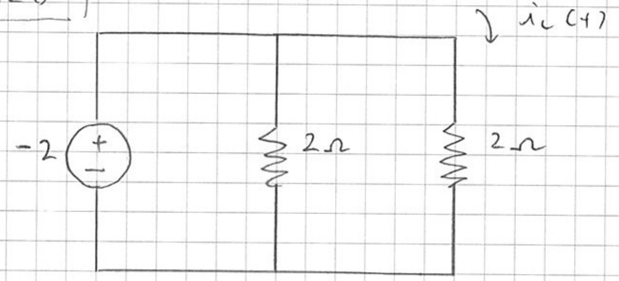
Esercizio



	$t=0^-$	$t=0^+$	$t\to+\infty$
$i_L(t)$	−1	−1	
$v_L(t)$	0	6	0

Disegnamo il circuito per $t=0^-$

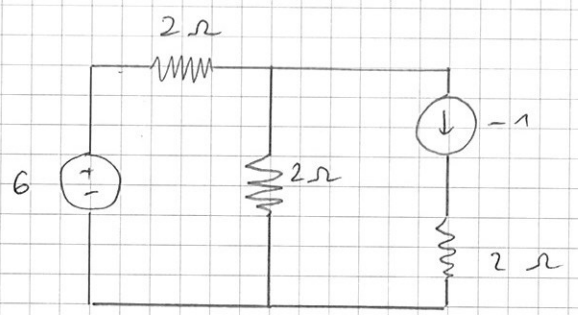
$\boxed{t=0^-}$



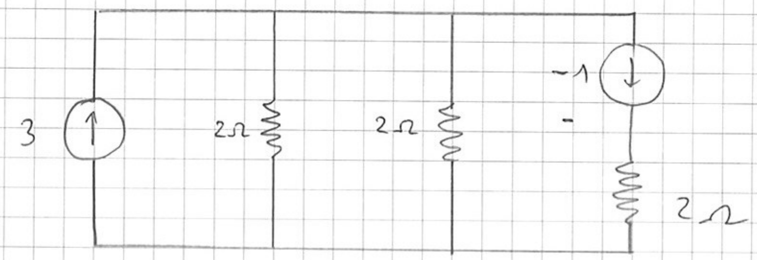
$$i_L(0^-) = \frac{V}{R} = \frac{-2}{2} = -1$$

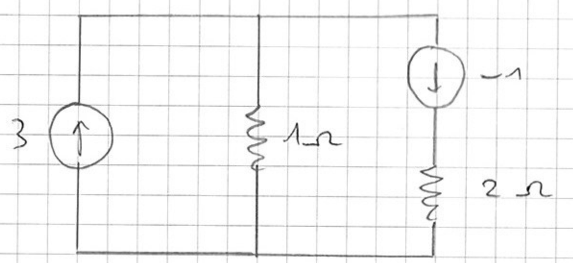
$\boxed{t=0^+}$

Intanto scambio gli interruttori (elimino il generatore da 2 V e metto quello da 6



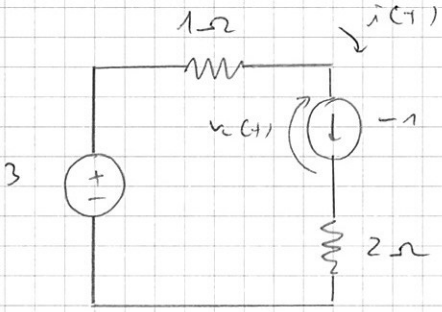
Sostituisco il generatore reale di tensione con un generatore reale di corrente e applico il partitore.





- 1° metodo

Sostituisco il gen. reale di corrente con uno di tensione.



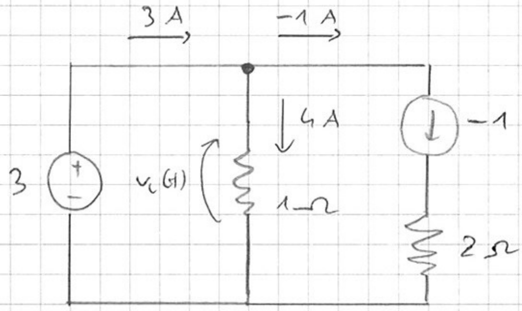
Ora ho una maglia sola.

$3 = 1 \cdot i + 2 \cdot i + v_c(t)$

$3 = -3 + v_c(t) \Rightarrow v_c(t) = 6\ V$

- 2° metodo

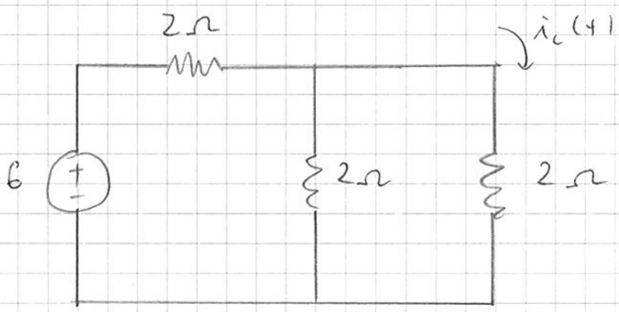
Applico la legge di K. ai nodi

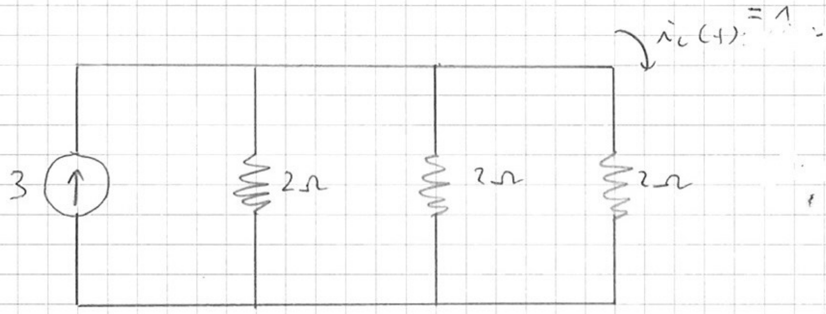


$v_c(t) = 1 \cdot 4 = 4\ V$

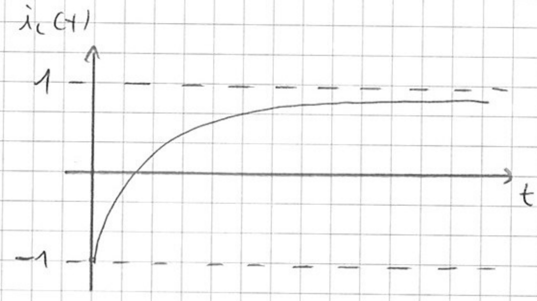
$4 = 2 \cdot (-1) + v_c(t) \qquad v_c(t) = 6V$

$\boxed{t \to +\infty}$

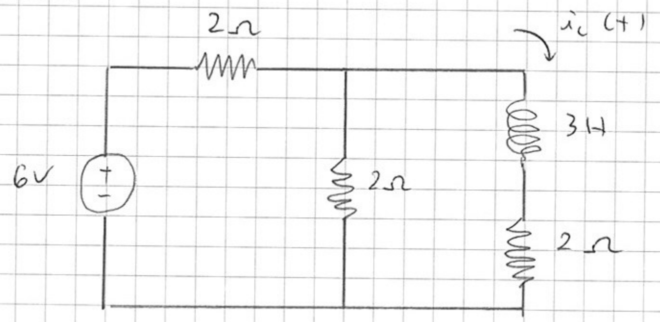




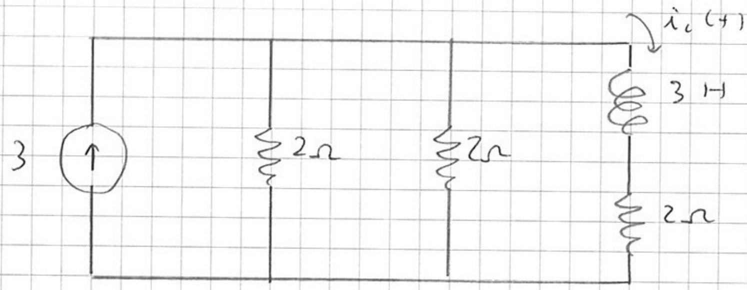
Mi aspetto per la corrente un andamento così

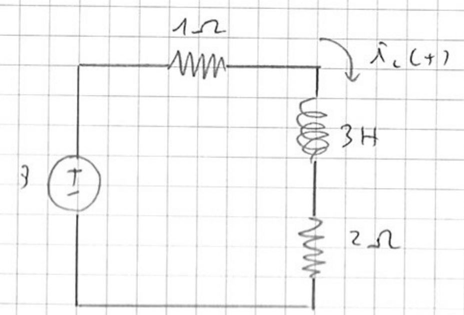


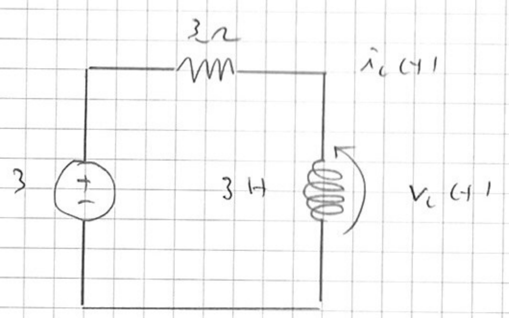
$\boxed{t > 0}$



Anche qui potrei applicare diversi metodi di risoluzione.







Applico la 2° legge di K. a questa maglia.

$$3 = 3 i_L(t) + 3 \frac{d i_L(t)}{dt}$$

$$\frac{d i_L(t)}{dt} + i_L(t) = 1$$

eq. caratt. $\alpha + 1 = 0$ $\alpha = -1$

$$i_L(t) = A \cdot e^{-t} + i_{lp}(t)$$

Posso scegliere come integrale particolare il valore della corrente per $t \to +\infty$

$$i_{lp}(t) = 1$$

$$\cancel{\frac{d i_{lp}(t)}{dt}} + i_{lp}(t) \overset{?}{=} 1 \qquad \text{sì}$$

$$i_L(t) = A \cdot e^{-t} + 1$$

Per determinare A applico le condizioni iniziali $(t=0)$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ -1}}{i_L(0)} = A \cdot 1 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = -2$$

Concludendo

$$i_L(t) = -2 e^{-t} + 1$$

Ora determiniamo $v_L(t)$ applicando la relazione costitutiva

$$v_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt} = 3 \cdot (-2)(-1) e^{-t} = 6 e^{-t}$$

Torna? Verifichiamo coi valori della tabella.

$$v_L(0) = 6$$

Quanto vale la costante di tempo?

$$\tau = \frac{L}{R}$$

So che devo andare da -1 a 1. Dopo aver determinato le condizioni iniziali potevo già scrivere

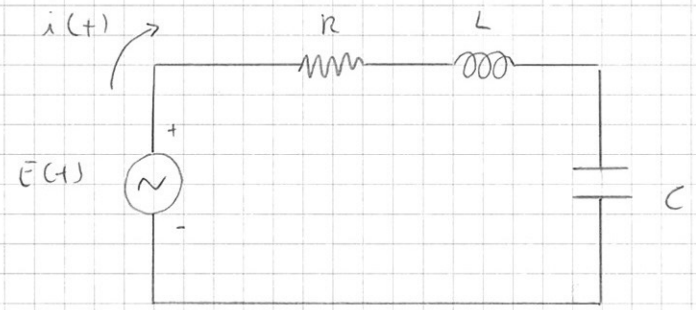
$$i_L(t) = \underset{\text{valore finale}}{1} - \underset{\text{escursione}}{2}\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{3}{3} = 1\,s$$

$$i_L(t) = 1 - 2\,e^{-t}$$

Circuiti in regime sinusoidale

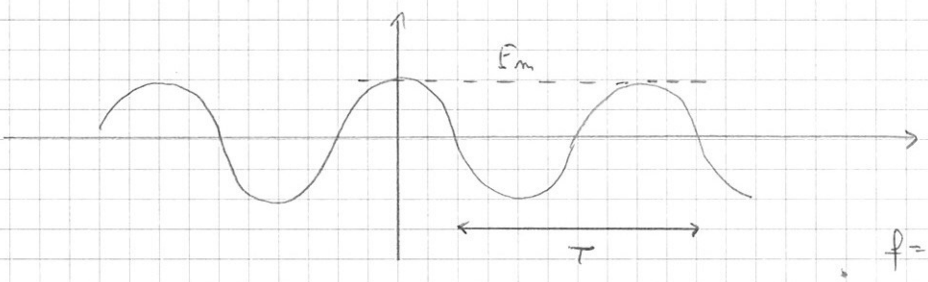
I generatori sono generatori di corrente alternata, in particolare di forma sinusoidale.



$E(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha)$ E_M = ampiezza massima

$\omega = 2\pi f$ pulsazione

es. $f = 50\ Hz \longrightarrow \omega \simeq 314\ rad/s$



$(\varphi = 0)$

$f = \frac{1}{T}$

Tutte le altre tensioni e correnti del circuito saranno di tipo sinusoidale. Quindi possiamo ipotizzare un andamento di questo tipo

$i(t) = I_M \cos(\omega t + \beta)$

Il valore di ω è uguale per tutte le grandezze che stanno nel circuito.

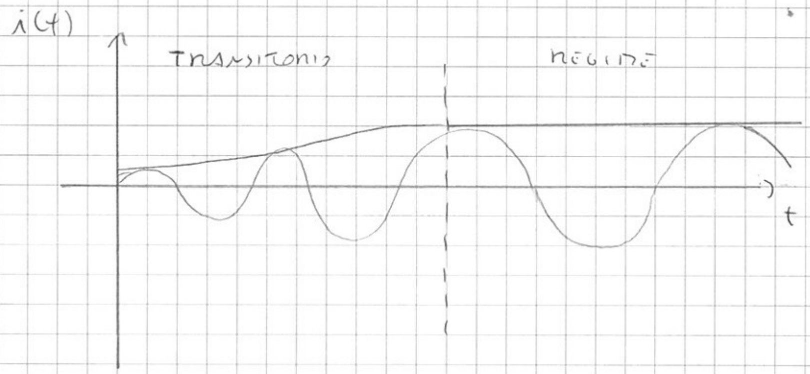
Posso applicare la legge di Kirchoff alla maglia

derivata della funz. corrente

$$E_m \cos(\omega t + \alpha) = R I_M \cos(\omega t + \beta) + \left[- L I_M \cdot \omega \operatorname{sen}(\omega t + \beta) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\omega C} I_M \operatorname{sen}(\omega t + \beta)$$

Si tratta di un bilancio di seni e coseni, quindi questa relazione e' risolvibile. Il fatto di aver scelto questa espressione per la corrente ci permette di avere delle soluzioni. Quindi possiamo supporre che se la forzante (insieme dei generatori) e' sinusoidale anche la corrente sia di tipo sinusoidale.
Essendo un'eq. trigonometrica e' pero' abbastanza complicata da risolvere. Devo trasformare o tutto in seno o tutto in coseno. Non la sto a fare. Esiste una trasformazion detta trasformata di Steinmetz, che permette di risolvere i circuiti in regime sinusoidale come se fosse in corrente continua.
In realta' le cose saranno un po' piu' complicate perche' saltano fuori i numeri complessi. La trasformata di Steinmetz permette di risolvere i circuiti a regime, cioe' quando le grandezze sono stabilizzate. In realta' esse continuano a oscillare, ma da un periodo all'altro non cambia piu' nulla. Ad es. i picchi massimi delle correnti sono sempre quelli. Posso supporre che quando accendo il generatore la corrente vari cosi

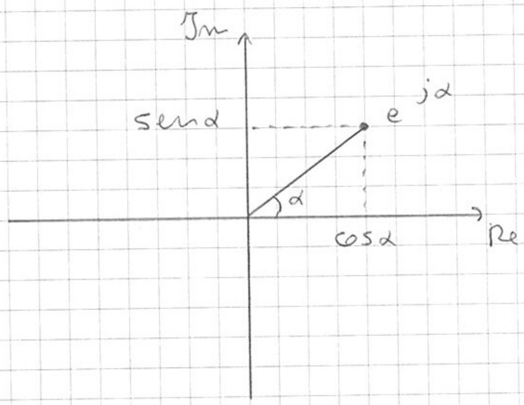


Per specificare $i(t)$ devo trovare I_M e β (non ω perche' e' la stessa della forzante).

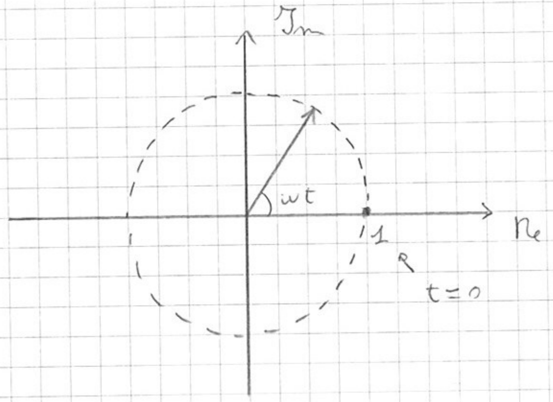
Trasformata di Steinmetz

Formula di Eulero

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\text{sen}\,\alpha$$

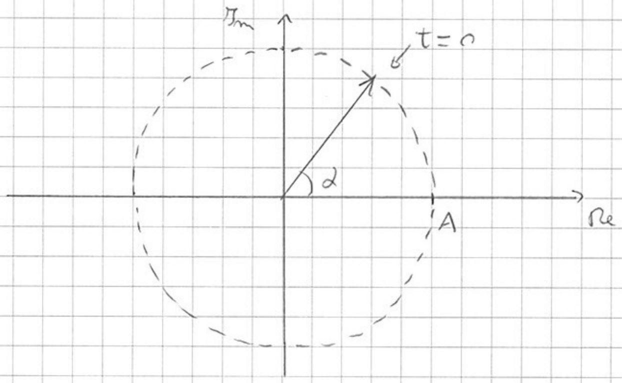


$$e^{j(\omega t)} = \cos(\omega t) + j\,\text{sen}(\omega t)$$ funz. complessa di variabile reale



Mano a mano che t aumenta il vettore percorre questo cerchio con pulsazione ω.

$A \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}$



$$A \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} = A\cos(\omega t + \alpha) + jA\,\text{sen}(\omega t + \alpha)$$

Ora riprendiamo le formule relative al nostro circuito e riscriviamole alla luce di quanto visto

$$E_M \cos(\omega t + \alpha) = E(t) = \text{Re}\left[e^{j(\omega t + \alpha)}\right] \cdot E_M = \text{Re}\left[E_M \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}\right]$$

$$\frac{d\,i(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[I_M \cos(\omega t + \beta)\right] = \underset{j\omega}{j\omega} \cdot \underbrace{I_M \,\text{Re}\left[e^{j(\omega t + \beta)}\right]}_{i(t)}$$

posso scambiare l'operazione di derivata con quella di prendere la parte reale

$$\int I_M \cos(\omega t + \beta)\,dt = \underset{\frac{1}{j\omega}}{\frac{1}{j\omega}} \cdot \underbrace{I_M \,\text{Re}\left[e^{j(\omega t + \beta)}\right]}_{i(t)}$$

Derivazione e integrazione diventano delle semplici moltiplicazioni per costante.

Ora riscriviamo il bilancio del circuito usando gli esponenziali complessi.

$$E_M \,\text{Re}\left[e^{j(\omega t + \alpha)}\right] = R\, I_M \,\text{Re}\left[e^{j(\omega t + \beta)}\right] - L\, I_M\, j\omega \,\text{Re}\left[e^{j(\omega t + \beta)}\right] +$$

$$+ \frac{1}{C} \cdot I_M \cdot \frac{1}{j\omega} \,\text{Re}\left[e^{j(\omega t + \beta)}\right]$$

è la somma di parti reali di esponenziali complessi. Si può dimostrare che questa relazione vale anche se considero non solo la parte reale ma l'intero vettore rotante.

$$E_M \cdot e^{j(\omega t+\alpha)} = R I_M e^{j(\omega t+\beta)} + L I_M j\omega e^{j(\omega t+\beta)} + \frac{1}{j\omega C} I_M e^{j(\omega t+\beta)}$$

$$E_M e^{j(\omega t)} e^{j\alpha} = R I_M e^{j\omega t} e^{j\beta} \overset{j\omega}{+} L I_M e^{j\omega t} e^{j\beta} + \frac{1}{j\omega C} I_M e^{j\omega t} e^{j\beta}$$

$$E_M e^{j\alpha} \cancel{e^{j\omega t}} = \left[R I_M e^{j\beta} + j\omega L I_M e^{j\beta} + \frac{1}{j\omega C} I_M e^{j\beta} \right] \cancel{e^{j\omega t}}$$

$$E_M e^{j\alpha} = \left[j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} \right] I_M e^{j\beta}$$

$j^2 = -1$ (Ho moltiplicato per j sopra e sotto)

$$\boxed{E_M e^{j\alpha}} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \boxed{I_M \cdot e^{j\beta}}$$

VETTORE RAPPRESENTATIVO DI $E(t)$

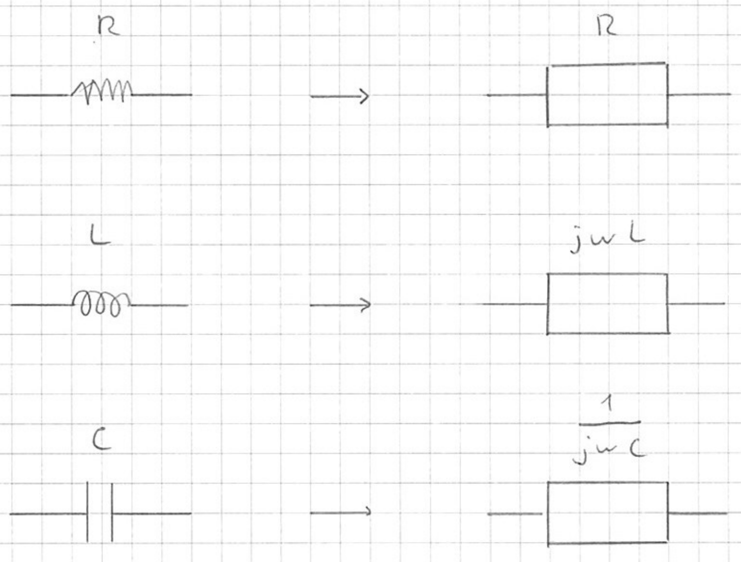
VETTORE RAPPRESENTATIVO DI $i(t)$

Il vettore rappresentativo di una grandezza è un vettore che ha per ampiezza l'ampiezza della grandezza e per argomento j per la fase iniziale della grandezza.

Questi vettori vengono anche detti "trasformate di Steinmetz" della relativa grandezza. Vengono spesso rappresentati col segno di vettore

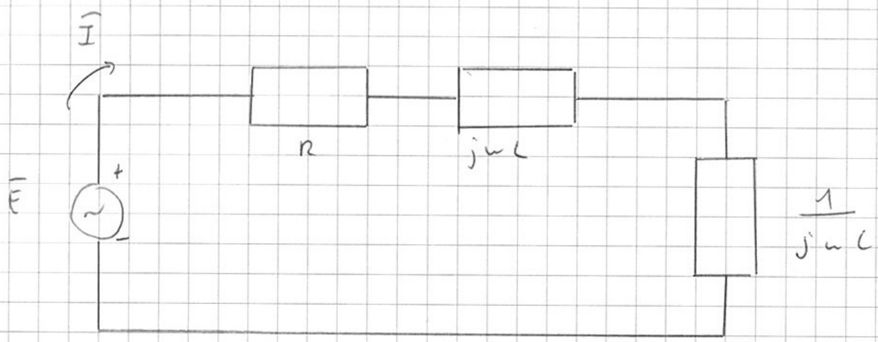
$$\bar{E}_M = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \bar{I}_M$$

Quando voglio fare la trasformata di Steinmetz di un circuito



resistenza di valore immaginario

" " " "



Trasformata di Steinmetz del circuito

Applico Kirchoff

$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} + \frac{1}{j\omega C}\bar{I}$$

1) Trasformare il circuito secondo Steinmetz
2) Risolvere il circuito, quindi ricavare i vettori rappresentativi delle grandezze di interesse.
3) Sostituire i valori di ampiezze e fasi iniziali in seni e coseni. (ritorniamo nel dominio del tempo).

$\bar{E} = E_M \cos(\omega t + \alpha)$ VETTORE RAPPRESENTATIVO DI $E(t)$

$\omega L = X_L$ REATTANZA INDUTTIVA

$\frac{1}{\omega C} = X_C$ REATTANZA CAPACITIVA

$X_L - X_C = X$ REATTANZA

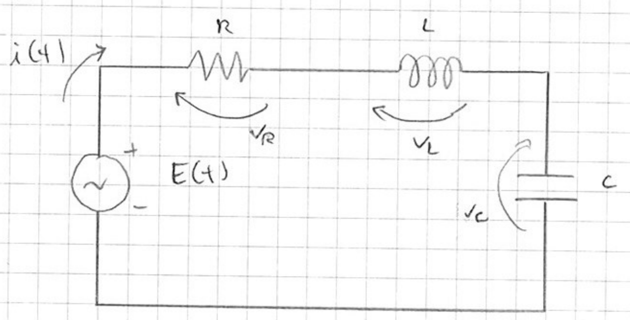
$$\bar{E} = \underbrace{\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}_{\substack{R+jX \\ \bar{Z}}} \bar{I}$$

$R + jX = \bar{Z}$ IMPEDENZA

$\frac{1}{\bar{Z}} = \bar{Y} = G + jB$ AMMETTENZA

CONDUTTANZA SUSCETTANZA

$\left(\text{nb.}\ G \neq \frac{1}{R}\right)$



$E(t) = 100 \cos(\omega t)$

$R = 10\,\Omega$

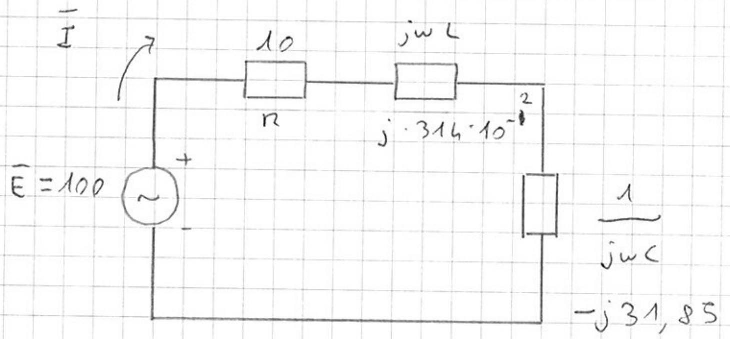
$L = 10\,mH$

$C = 100\,\mu F$

$i(t) = ?$

$\omega = 314\ rad/s$

Il primo passo è ridisegnare il circuito



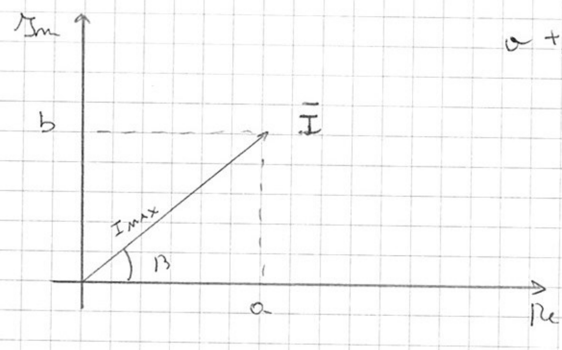
▭ = impedenze: funzionano come resistenze (in serie si sommano)

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{100}{10 - j\,28{,}71} =$$

razionalizziamo perché poi è più facile trovare la parte reale

$$= \frac{100}{10 - j\,28{,}71} \cdot \frac{10 + j\,28{,}71}{10 + j\,28{,}71} = 1{,}08 + j \cdot 3{,}1$$

$$a + j\,b$$



$a + jb \leftrightarrow I_M e^{j\beta}$

Con la trigonometria è facile, conoscendo a e b, trovare I_{MAX} e β.

$I_{MAX} = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\qquad a = I_M \cos\beta$

$\beta = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ $\qquad b = I_M \operatorname{sen}\beta$

$I_M = \sqrt{1{,}08^2 + 3{,}1^2} = 3{,}3$

$\beta = \operatorname{arctg} \dfrac{3{,}1}{1{,}08} = 1{,}24 \text{ rad.} = 71{,}05°$

Ora posso scrivere il vettore rappresentativo della corrente in forma polare

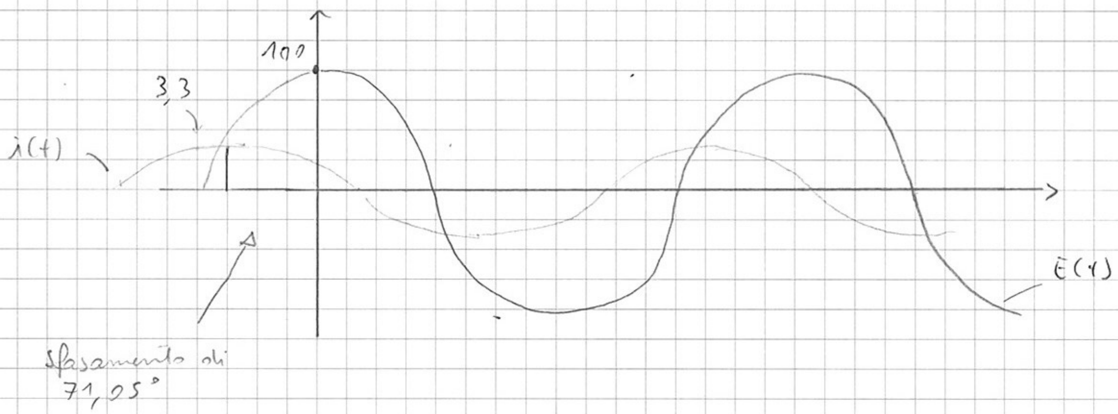
$\bar{I} = 3{,}3 \cdot e^{j\,71{,}05°}$

Ora torno indietro e cerco di scrivere $i(t)$ nel dominio del tempo.

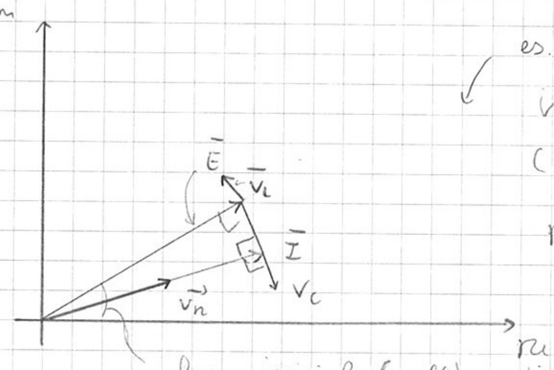
$i(t) = 3{,}3 \cos(\omega t + 71{,}05°)$

posso usare gradi o radianti

La corrente risulta in anticipo rispetto alla Tensione.



Immaginiamo che la tensione abbia un vettore rappresentativo messo in questo modo:



es. prevalentemente induttivo (l'es. di prima era prevalentemente capacitivo)

fase iniziale (nell'es. di prima = 0)

Gli sfasamenti dei due vettori sono sfasati a causa della presenza di componenti reattivi. Andiamo a valutare le cadute di tensione sui vari componenti del circuito.

$\bar V_R$ avrà la stessa direzione (sarà sovrapposto) di quella $\bar I$. Sono complanari perché $\bar V_R$ è la tensione di un componente di resistenza R. Ra $\cos(\omega t + \varphi)$ R è un numero reale. Quindi l'angolo non viene modificato $V = iR$

NOTA

$$\overrightarrow{\quad\quad}\;\bar x$$

$$j\bar x = e^{j\frac{\pi}{2}}\bar x \quad \rightarrow \text{equivale a ruotare il vettore di } \frac{\pi}{2}$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = j$$

Moltiplicando un vettore per $j \left(= e^{j\frac{\pi}{2}}\right)$ ~~equ~~ lo ruoto di $\frac{\pi}{2}$ (in anticipo)

$$\bar X = X_M e^{j\alpha}$$

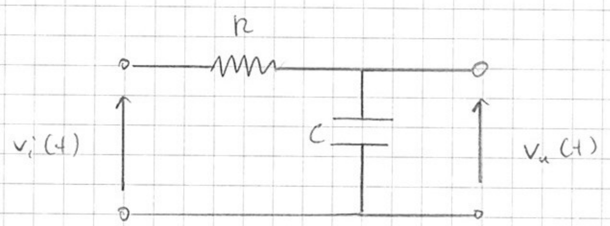
$$e^{j\frac{\pi}{2}}\bar x = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot X_M \cdot e^{j\alpha} = X_M e^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\bar V_L = \bar I \cdot j\omega L = \omega L \bar I \cdot j$$

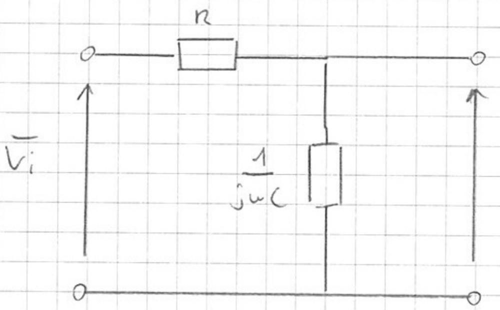
Nelle induttanze la tensione è sempre in anticipo rispetto alla corrente di 90°. Nei condensatori l'inverso.
Possiamo ora vedere se il circuito è prevalentemente induttivo o capacitivo.
Se ad es. risulta la corrente in anticipo rispetto alla tensione allora il risultato è prevalentemente capacitivo. Un circuito completamente capacitivo avrebbe una rotazione di fase di 90. Vedendo se la corrente è in anticipo o in ritardo rispetto alla tensione posso capire se il circuito è prevalentemente induttivo o capacitivo.
La reattanza capacitiva è sempre di segno negativo. Ciò che importa è il confronto fra i due moduli.

L'impedenza della resistenza non dipende dalla pulsazione ω, come invece accade per l'induttanza. Lo stesso circuito alimentato in modo diverso da origine a impedenze diverse. Il comportamento del circuito non dipende solo dai componenti ma anche dalla frequenza che applico.
Possiamo costruire componenti più resistenti a certe frequenze che ad altre (filtri)

Filtro RC passa-basso



Facciamo la trasformata di Steinmetz



V_i = v in entrata
V_2 = v in uscita

$$\frac{|V_u|}{|V_i|}$$

voglio sapere il rapporto che c'è tra la sinusoide in ingresso e quella in uscita

Studiamo il circuito come fosse in continua. Consideriamo ad es. un partitore.

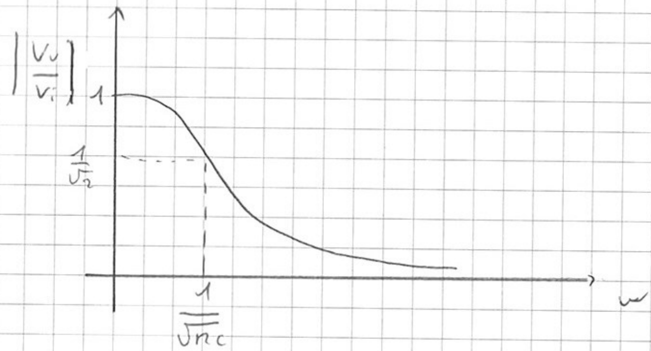
$$\overline{V_u} = \overline{V_i} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\frac{\overline{V_u}}{\overline{V_i}} = \frac{\frac{1}{\cancel{j\omega C}}}{\frac{j\omega RC+1}{\cancel{j\omega C}}} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

$$\left|\frac{V_u}{V_i}\right| = \left|\frac{1}{1+j\omega RC}\right| = \frac{1}{|1+j\omega RC|} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

In questo modo data l'ampiezza della sinusoide in ingresso posso trovare quella della sinusoide in uscita in funzione di ω.

Facciamo uno studio di funzione



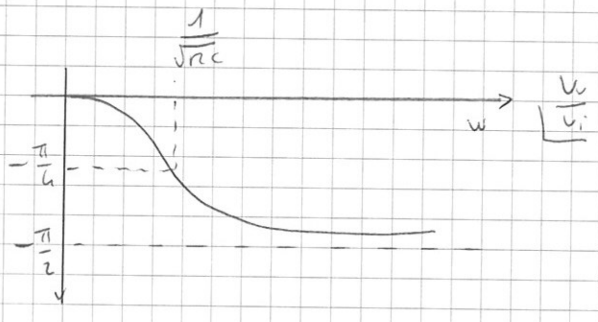
Passano meglio le frequenze più ~~alte~~ basse.
C'è una frequenza fondamentale che si ha quando

$$\omega RC = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{V_u}{V_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{RC}}$$ PULSAZIONE (FREQUENZA) DI TAGLIO

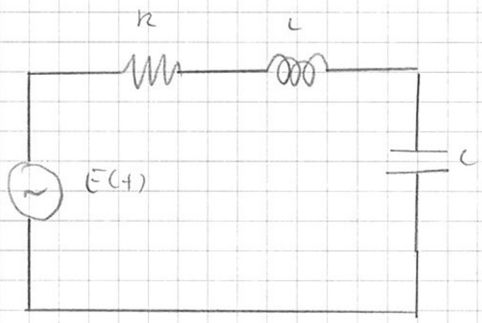
La corrente continua passa indisturbata.
Convenzionalmente diciamo che il filtro lascia passare bene le pulsazioni inferiori a $\frac{1}{\sqrt{RC}}$ e taglia quelle più alte di $\frac{1}{\sqrt{RC}}$. Attenua sempre di più i segnali che arrivano con frequenze più elevate.
Se vado a studiare l'andamento dell'argomento (fase) di $\frac{V_u}{V_i}$

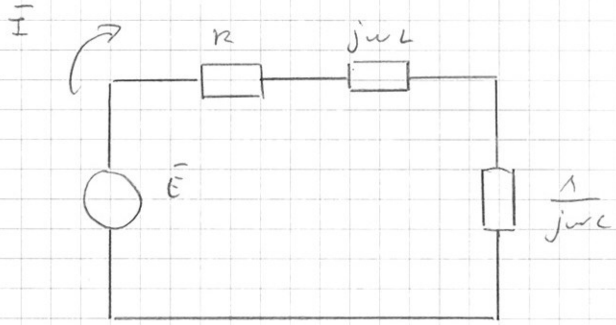


(sfasamento)
La fase è esattamente $-\frac{\pi}{4}$ in corrispondenza della pulsazione di taglio

Il significato di questi grafici è valutare la variazione di ampiezza e fase dei segnali che entrano in ingresso al filtro.

Risonanza serie





$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{E}}{R+j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\bar{E}}{R+j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Siccome queste due reattanze dipendono da ω ci sarà un valore di ω per cui $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. In questo caso l'impedenza sarà solo di tipo resistivo. Questa condizione viene detta CONDIZIONE DI RISONANZA. In questo caso in cui tutti i componenti sono in serie si parla di risonanza serie.

Parlo di risonanza serie quando le induttanze si annullano tra di loro.

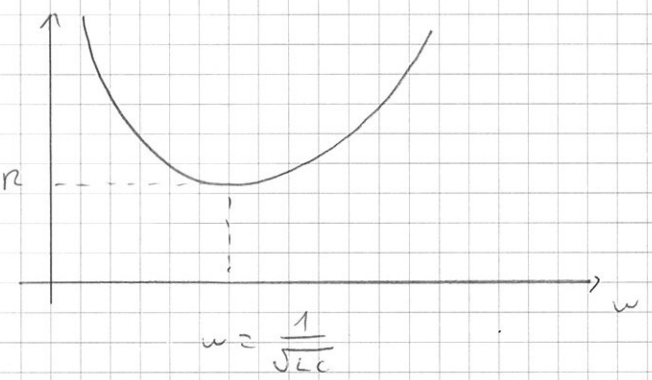
$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Cosa avviene quando siamo in condizioni di risonanza? Calcoliamo il modulo di $\bar{Z}$

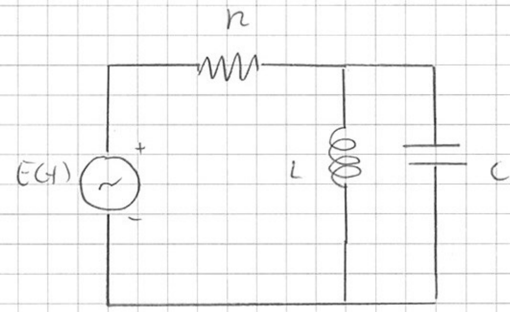
$$|\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

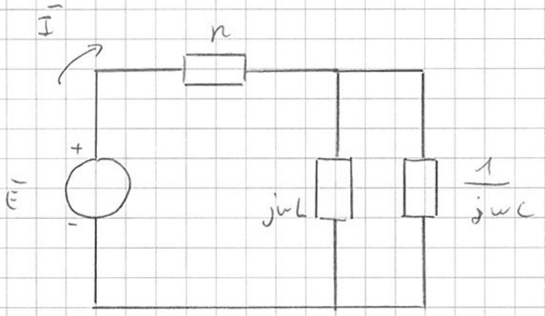
Quando la parte immaginaria si annulla il modulo raggiunge il valore più basso possibile.



In particolare in questo caso l'impedenza è puramente resistiva $\Rightarrow$ tensione e corrente risultano in fase.

Antirisonanza (o risonanza parallelo)



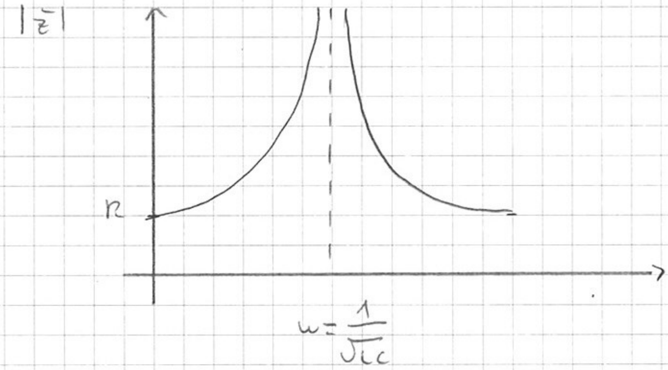


$$\bar{Z} = R + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = R + \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

Se $\omega^2 LC = 1$ il secondo termine tende ad infinito. Questa si chiama condizione di antirisonanza. Ce l'ho quando

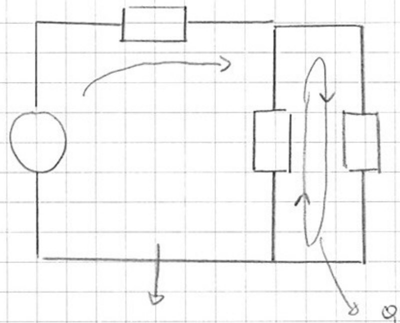
$$\omega^2 LC = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

In questo caso l'impedenza diventa massima (tende all'infinito)



FREQUENZA DI ANTIRISONANZA

Il fatto che la impedenza tenda all'infinito significa che qualsiasi sia la tensione applicata dal generatore non riesco a far passare corrente nel circuito. Induttanza e condensatore si passano una corrente (anche molto alta) dall'una all'altro.

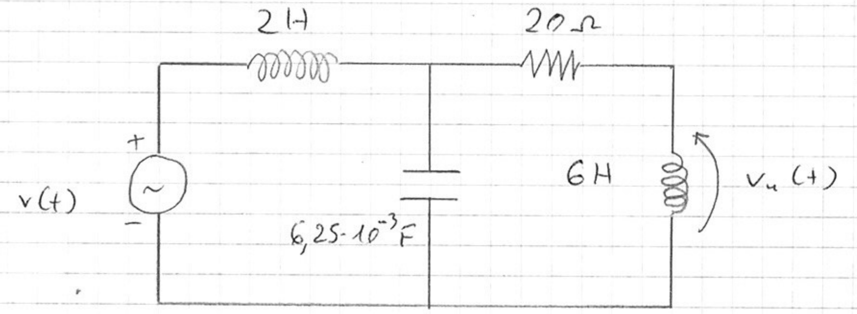


qua scorre una forte corrente

ma la corrente non riesce a passare qui.

La condizione di antirisonanza può essere usata per costruire filtri che eliminino certe frequenze (quelle vicine alla frequenza di antirisonanza).

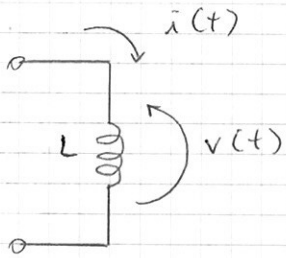
Esercizio



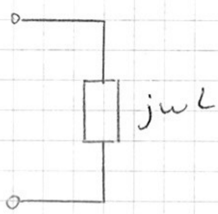
$$v(t) = 40 \cdot \cos\left(\underset{\downarrow}{10 \cdot t} - \frac{\pi}{2}\right)$$

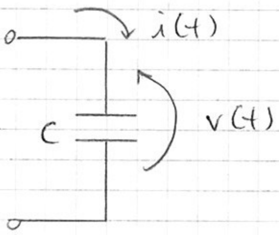
$$w = 10 \ \text{rad}/\text{s}$$

Vogliamo trovare $v_u(t)$ a regime.
La prima cosa da fare è sostituire gli equivalenti Steinmetz.

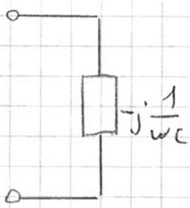


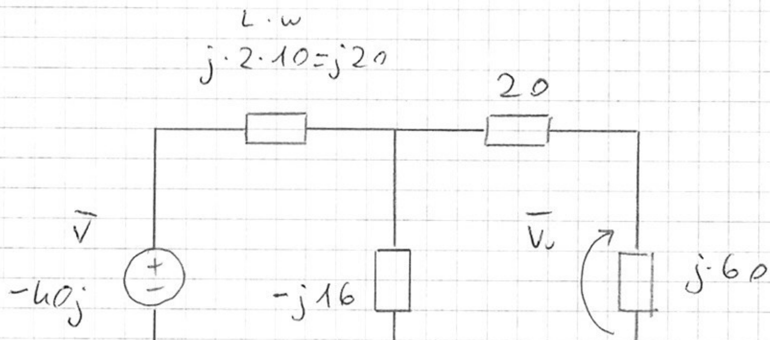
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow \bar{V} = jwL \cdot \bar{I}$$





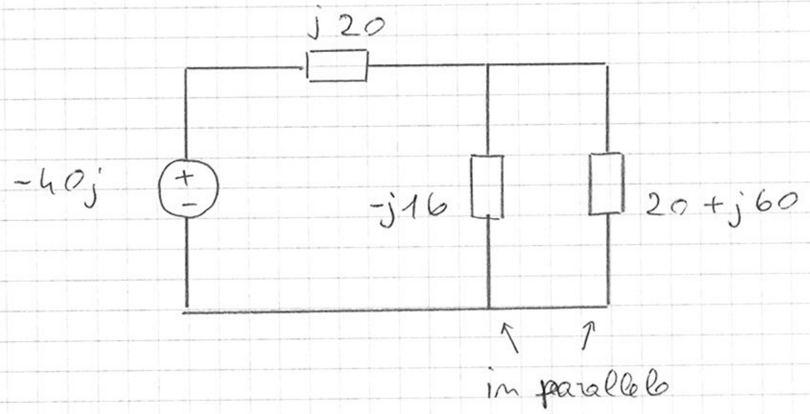
$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt \rightarrow \bar{V} = \frac{1}{jwC}\bar{I} = -j\frac{1}{wC}\bar{I}$$



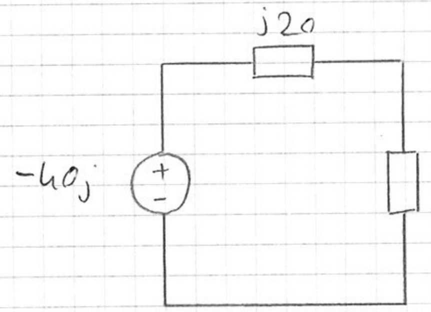


Ricordiamoci che a noi serve $v_u(t)$, quindi ci serve il vettore rappresentativo $\bar{V_u}$.

Semplifichiamo un po' lo schema, osservando che due impedenze risultano in serie.



Voglio ricavare la corrente che esce dal generatore. Applicando poi la formula del partitore di corrente troverò $v_u(t)$.



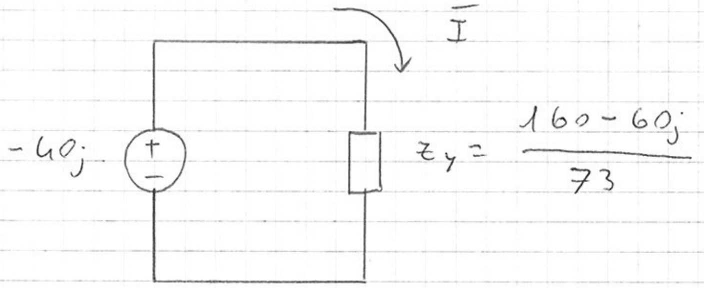
$$Z_x = \frac{160 - 1520j}{73}$$

$$Z_x = \frac{(20+60j)(-16j)}{20+44j} = \frac{960-320j}{20+44j} \overset{\text{divido per 4}}{=} \frac{240-80j}{5+11j} \overset{\text{razionalizzo}}{=}$$

$$= \frac{240-80j}{5+11j} \cdot \frac{5-11j}{5-11j} = \frac{1200-880+j(-400-2640)}{5^2+11^2} =$$

$$= \frac{320-3040j}{146} = \frac{160-1520j}{73}$$

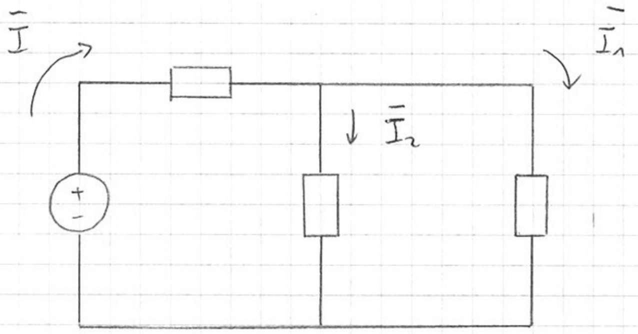
Ora sommo le due impedenze, che risultano in serie tra loro.



$$z_y = j20 + z_x = \frac{160 - 1520j + 1460j}{73} = \frac{160-60j}{73}$$

$$\bar{I} = \frac{-40j}{z_y} = \frac{-40j}{\dfrac{160-60j}{73}} = 6 - 16j$$

Ho calcolato il vettore rappresentativo della corrente uscente dal generatore. Per trovare $\bar{V}_v$ voglio calcolare quanta corrente va a finire nel ramo di interesse (voglio I_1).



$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

Applico la formula del partitore di corrente.

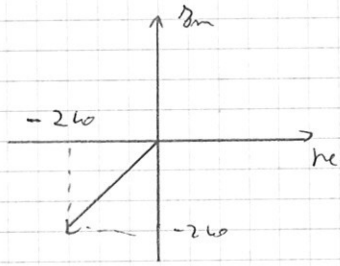
$$\bar{I}_1 = \bar{I} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{-j16} + \dfrac{1}{20+60j}} \cdot \frac{1}{20+60j} = (6-16j) \cdot \frac{\dfrac{1}{20+60j}}{\dfrac{1}{-j16} + \dfrac{1}{20+60j}} = -4+4j$$

Ora applico la legge di Ohm

$$\bar{V}_v = \bar{I}_1 (j60) = (-4+4j)(j60) = -240 - 240j$$

Ma io voglio scrivere V_u nella forma $A \cdot e^{j\varphi}$

$$A = \sqrt{240^2 + 240^2} = 339,2$$



Graficamente vedo $\varphi = -135° = -\frac{3}{4}\pi$

Potevo calcolare $\varphi = \arctg\left(\frac{-240}{-240}\right)$, ma avrei ottenuto 45°. Invece l'angolo giusto è $-135°$. Poichè $\underbrace{Re<0 \text{ e } Im<0}_{\text{III quadrante}}$ e 45° indica un angolo che sta nel I quad. capisco che devo sommare o sottrarre π.

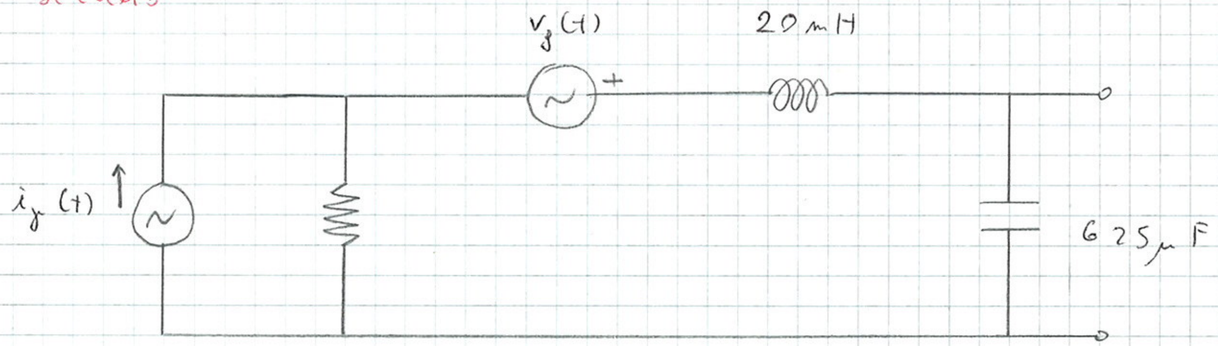
$$v_u(t) = 333,2 \cdot \cos\left(10t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

Un'altra cosa che può semplificare i calcoli è, se ho un generatore solo, come in questo caso, effettuare una traslazione degli assi in modo che la fase iniziale del generatore sia 0.

$$v(t) = 40\cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow v(t) = 40\cos(10t) \Rightarrow \bar{V} = 40$$

Una volta che ho risolto il mio circuito risommo all'argomento della grandezza d'interesse $(v_u(t))$ $-\frac{\pi}{2}$.

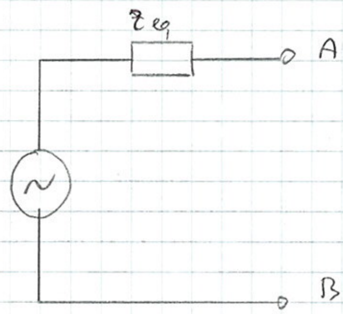
Esercizio



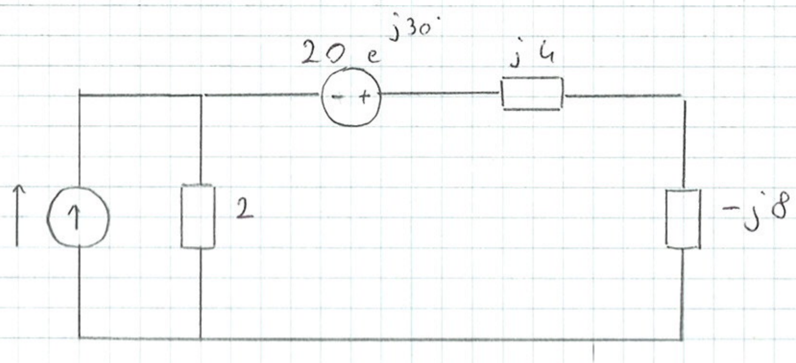
$i_g(t) = 10 \cos(200t)$

$v_g(t) = 20 \cos(200t + 30°)$

Ho due generatori (uno di corrente e uno di tensione). Ovviamente devono essere isofrequenziali. Ci viene chiesto di trovare l'equivalente Thevenin visto dai morsetti A e B.



Per prima cosa trasformiamo il circuito secondo Steinmetz.

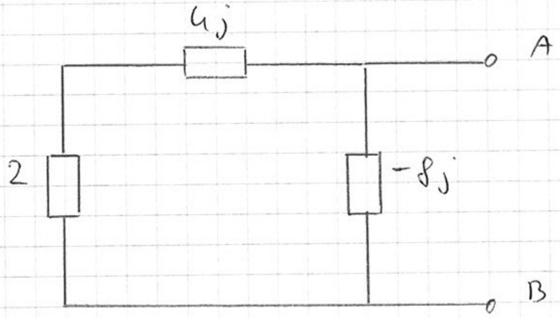


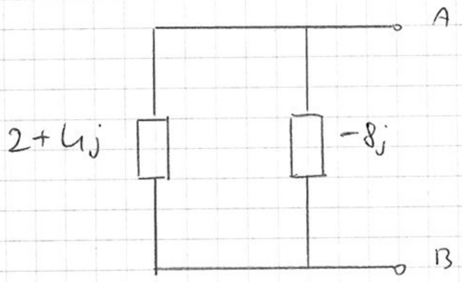
Ma mi è più comodo avere una rappresentazione cartesiana del generatore di tensione.

$20e^{j30} = a + jb$ $\quad$ $a = 20\cos 30° = 10\sqrt{3}$, $\; b = 20 \operatorname{sen} 30° = 10$ $\quad \Rightarrow \quad 20e^{j30} = 10\sqrt{3} + 10j$

Dobbiamo calcolare z_{eq} annullando tutti i generatori e guardando l'impedenza vista da A e B. Poi dobbiamo calcolare la tensione a vuoto.
Partiamo dalla z_{eq}. Annullo tutti i generatori di corrente e di tensione

$\downarrow$ circuito aperto $\quad \downarrow$ filo

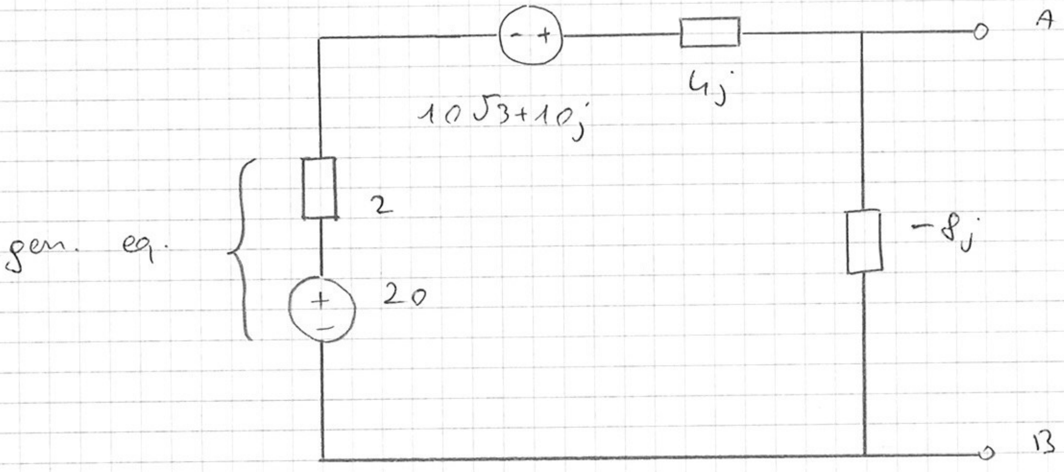




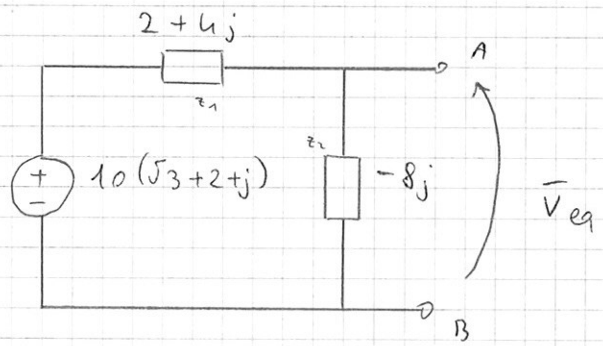
$\bar{z}_{eq}$ sarà il parallelo delle due impedenze.

$$\bar{z}_{eq} = \frac{(2+4j)\,(-8j)}{2-4j} = \frac{32+24j}{5}$$

Proseguo calcolando la tensione a vuoto. Mi conviene trasformare il generatore di corrente reale nell'equivalente generatore di tensione.



Sommo i generatori e la resistenza in serie.



Mi interessa $\bar{V}_{eq}$. Posso ad es. applicare la formula del partitore di tensione.

$$\bar{V}_{eq} = \frac{V}{z_1+z_2}\cdot z_2$$

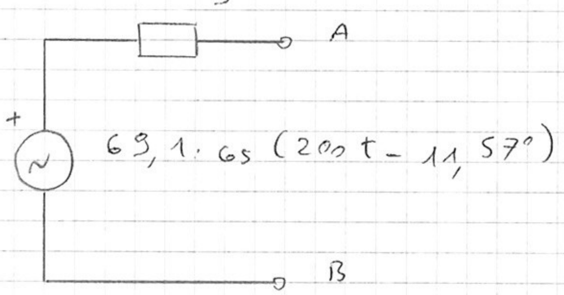
$$\bar{V}_{eq} = \frac{10(\sqrt{3}+2+j)}{\underbrace{2-4j}} \cdot (-8j) = \underbrace{67,7-13,86j} = 69,1\cdot e^{-j11,57°}$$

$2+4j-8j = 2-4j$

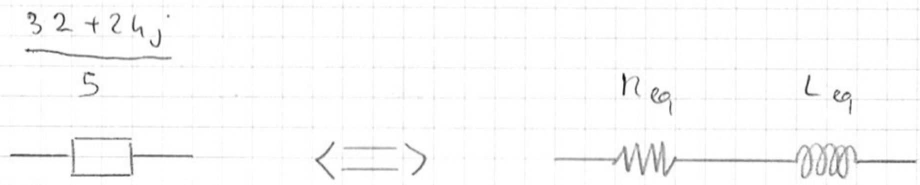
IV quadrante: la calcolatrice ci dà il risultato giusto

Ho quindi calcolato l'equivalente Thevenin del circuito.

$$z_{eq} = \frac{32+24j}{5}$$



Questa impedenza complessa z_{eq} la posso sostituire come la serie di una resistenza e di una induttanza.



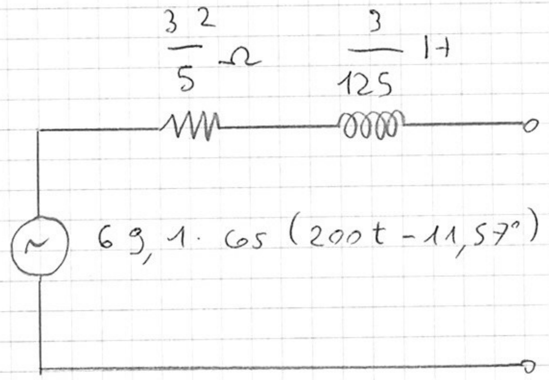
$$\frac{32}{5} + j\frac{24}{5} = R_{eq} + j\omega L_{eq}$$

Per confronto scopro che:

$R_{eq} = \frac{32}{5}\ \Omega$

$$L_{eq} = \frac{\frac{24}{5}}{\omega} = \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{200} = \frac{24}{1000} = \frac{3}{125}\ H$$

Quindi il nostro equivalente Thevenin è



Nota:
Il fatto che

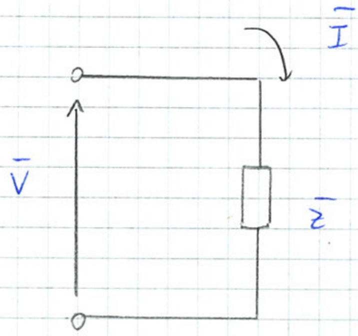
$\frac{32}{5} + j\ \frac{24}{5}$

positivo $\Rightarrow$ mi dice che ho un'induttanza

Se ottenevo un valore negativo per l'impedenza allora avevo un condensatore.

Potenza in alternata

Consideriamo una generica impedenza $\bar{Z}$ percorsa da una corrente $\bar{I}$ e ai cui capi cade una tensione $\bar{V}$.

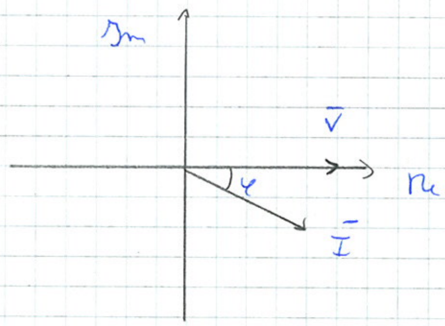


Scegliamo l'origine dei tempi in modo che lo sfasamento iniziale della tensione sia nullo.

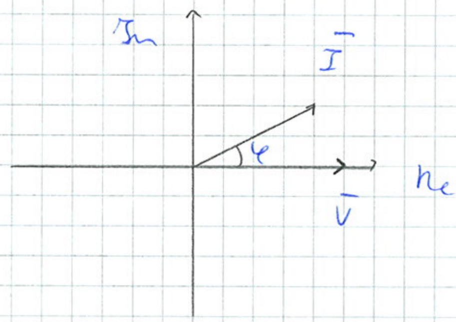
$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi)$$

$\rightarrow$ per comodità indico la fase iniziale della corrente come negativa.



$\varphi > 0$



$\varphi < 0$

La corrente è in ritardo rispetto alla tensione. Quindi la reattanza induttiva è maggiore di quella capacitiva. $X_L > X_C$
Ho un comportamento ohmico induttivo. Il fatto che φ non sia esattamente 90° significa che ho sia componente ohmica sia resistiva.

È la tensione ad essere in ritardo rispetto alla corrente. $X_C > X_L$
La componente capacitiva di questo componente è maggiore di quella induttiva, quindi potrebbe essere un circuito RC.

Vogliamo calcolare la potenza dissipata o immagazzinata dall'impedenza. La potenza istantanea, funzione del tempo, sarà

$$\boxed{P(t) = v(t) \cdot i(t)} \qquad \text{POTENZA ISTANTANEA}$$

$$P(t) = V_M I_M \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} V_M I_M \Big[\underbrace{\cos\varphi}_{\text{coseno della differenza}} + \underbrace{\cos(2\omega t - \varphi)}_{\text{coseno della somma}} \Big] =$$

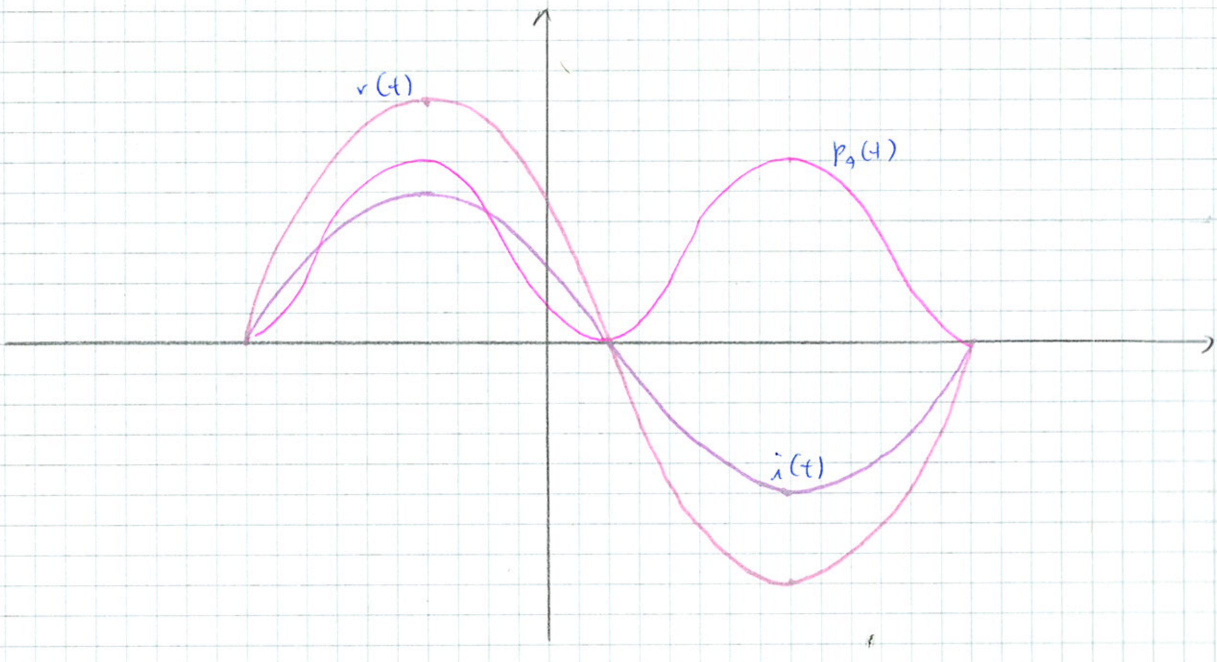
$$= \frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi + \frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t - \varphi)$$

Ho due contributi alla potenza. Uno non dipende dal tempo: POTENZA ATTIVA. Il secondo è una funzione che dipende dal tempo e ha valor medio nullo: POTENZA FLUTTUANTE.

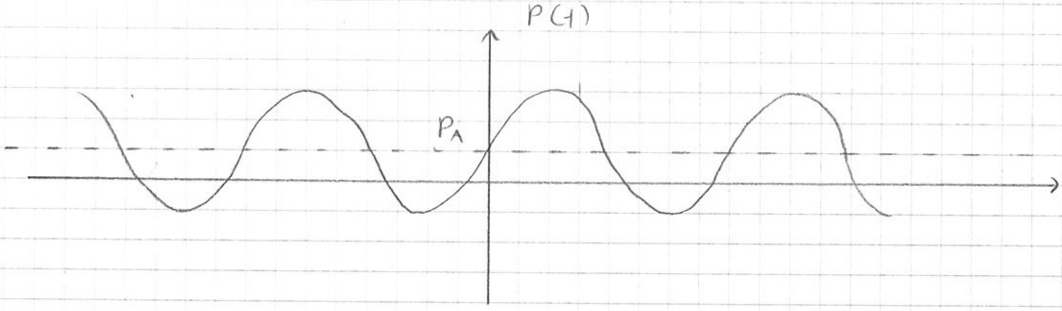
$$P_A = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi \qquad \text{POTENZA ATTIVA}$$

$$P_F = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t - \varphi) \qquad \text{POTENZA FLUTTUANTE}$$

oscilla tra $\frac{1}{2} V_M I_M$ e $-\frac{1}{2} V_M I_M$



Ottengo, facendo il prodotto, una sinusoide di frequenza doppia. Ho un off-set che mi sposta la potenza verso l'alto (potenza attiva, sempre positiva), poi ho una sinusoide di frequenza relativamente alta.
$P(t)$ è una sinusoide di frequenza doppia rispetto a tensioni e correnti.



Nella bolletta non paghiamo la potenza fluttuante, perché non è effettivamente consumata. Per un semiperiodo è il generatore che la produce e per l'altro semiperiodo sono i componenti reattivi che la liberano. Ciò che paghiamo è la potenza attiva.

Possiamo vedere anche un'altra possibile scomposizione:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi) = I_M \left(\cos(\omega t)\cos\varphi + \mathrm{sen}(\omega t)\cdot \mathrm{sen}\,\varphi \right)$$

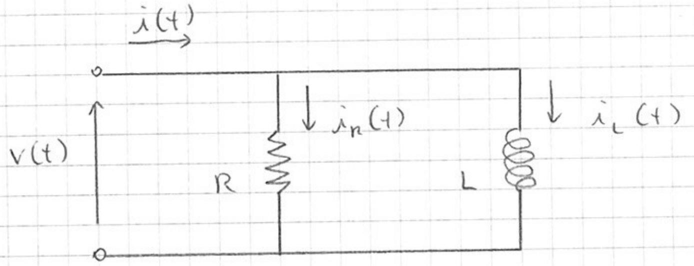
Ho applicato le formule di sottrazione del coseno.

$$P(t) = v(t)\cdot i(t) = V_M I_M \cos(\omega t)\cdot \left[\cos(\omega t)\cdot \cos(\varphi) + \mathrm{sen}(\omega t)\cdot \mathrm{sen}(\varphi) \right] =$$

$$= V_M I_M \cos^2(\omega t)\cos\varphi + V_M I_M\, \mathrm{sen}\frac{2\omega t}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi \qquad \cos(\omega t)\cdot \mathrm{sen}(\omega t)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi) = I_M \Big(\underbrace{\cos(\omega t)\cdot \cos\varphi}_{\text{componente della corrente in fase con la tensione}} + \underbrace{\mathrm{sen}(\omega t)\,\mathrm{sen}\,\varphi}_{\text{componente della corrente in quadratura con la tensione}} \Big)$$

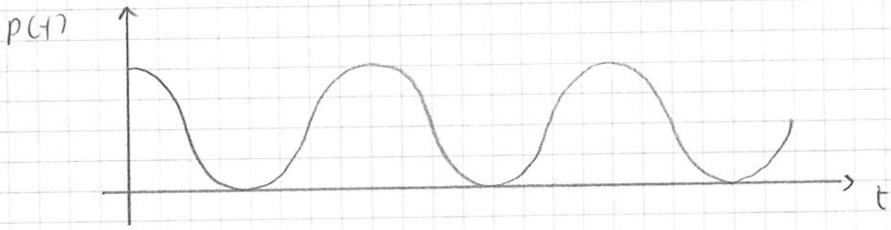
È come se avessi considerato il dipolo come parallelo di una resistenza e di una induttanza.



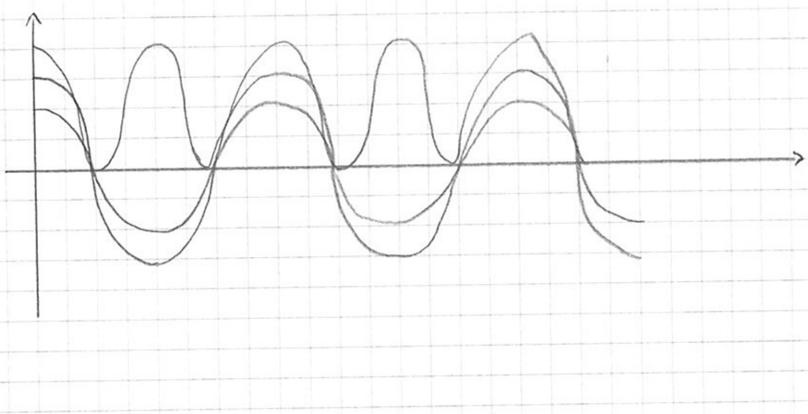
La componente in fase è quella che va sulla resistenza, quella in quadratura va sull'induttanza.
Ho quindi anche separato la potenza che va sulla resistenza da quella che va sull'induttanza.

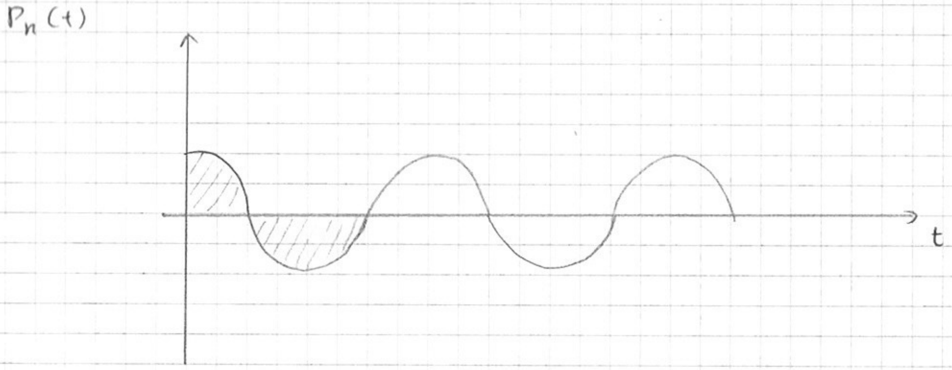
$$p(t) = \underbrace{V_M I_M \cos^2(\omega t)\cos(\varphi)}_{\text{POT. ATTIVA ISTANTANEA}} + \underbrace{V_M I_M \frac{\operatorname{sen}(2\omega t)}{2} \operatorname{sen}(\varphi)}_{\text{POT. REATTIVA ISTANTANEA}}$$

La funzione $\cos^2 x$ è ≥ 0, quindi ha media non nulla.



Quando la tensione ha un picco anche la potenza attiva ha un picco.
Analogamente quando la tensione passa per lo zero anche la potenza attiva è nulla. La potenza attiva ha frequenza doppia rispetto a tensione e corrente.



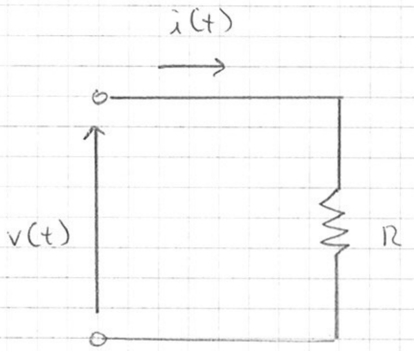


La parte reattiva della potenza non fa altro che accumulare e cedere energia, accumularla e cederla, accumularla e cederla... Rimpalla energia e basta. Il valor medio è nullo. C'è uno scambio continuo di energia tra componenti reattive e generatori.

$$P(t) = \begin{cases} P_A(t) + P_F(t) \\ P_A(t) + P_R(t) \end{cases}$$

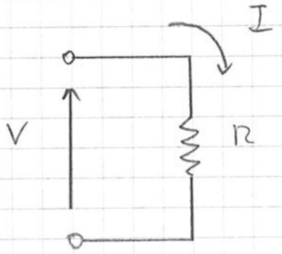
La prima scomposizione mi fa vedere quanta della potenza istantanea viene effettivamente usata e quanta rimpallata. La seconda mi fa vedere quale parte della potenza va sulla parte ohmica e quale sulla parte reattiva.

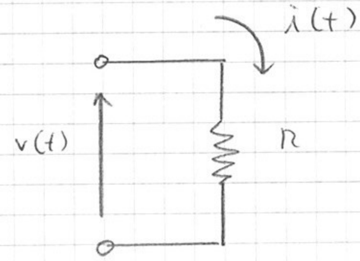
Facciamo ora un passo indietro e immaginiamo di avere come carico solo una resistenza. (un'impedenza puramente ohmica). In questo caso possiamo scrivere:



$$i(t) = I_M \cos(\omega t)$$

Facciamo due casi: in alternata e in continua.



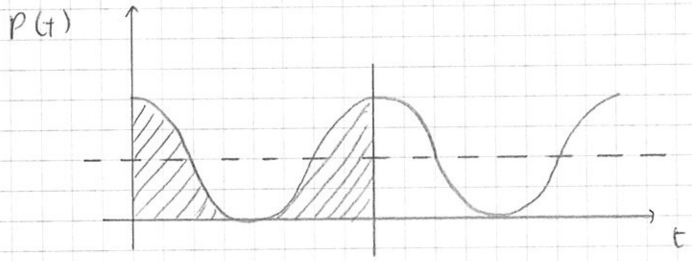


$P = R \cdot I^2$

$P(t) = v(t) \cdot i(t) = V_M \cdot I_M \cdot \cos^2(\omega t)$

In entrambi i casi la resistenza si scalderà, cioè convertirà una parte di energia in energia termica. Qual è il valore di corrente in continua che mi dà lo stesso riscaldamento che ottengo in alternata? Per saperlo devo calcolare il valor medio di $P(t)$, detto POTENZA MEDIA o anche POTENZA EFFICACE.

$P_M = P_{EFF}(t) = R \cdot i^2(t)$



Calcolo la potenza media su un periodo.

$$P_{EFF} = \frac{1}{T}\int_T R \cdot i^2(t)\, dt = \frac{R}{T}\int_T i^2(t)\, dt$$

CORRENTE CONTINUA

$P = R I^2$

CORRENTE ALTERNATA

$$P_{EFF} = R \cdot \frac{1}{T}\int_T i^2(t)\, dt$$

Se questi termini sono uguali la potenza che dissipo in continua è la stessa che dissipo in alternata.

Definisco "corrente efficace" quel valore di corrente che applicato in continua mi dà lo stesso riscaldamento che avrei in alternata.

$$\boxed{I_{EFF} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T i^2(t)\,dt} = I_{RMS}}$$

(RMS = Root Mean Square)

Se $i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi) \Rightarrow \boxed{I_{RMS} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}}$

Tutte le volte che l'alimentazione è sinusoidale il valore di I_{RMS} è uguale al valore di picco diviso $\sqrt{2}$.
Il valore efficace è molto utile in elettrotecnica, al punto che si preferisce dare le grandezze con il loro valore efficace piuttosto che con il loro valore di picco. Se ad es. ci viene detto:

"Ho un'alternata da 50 A" $\Rightarrow$ $i(t) = \sqrt{2} \cdot 50 \cdot \cos(\omega t)$

$$\boxed{I_M = I \cdot \sqrt{2}}$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

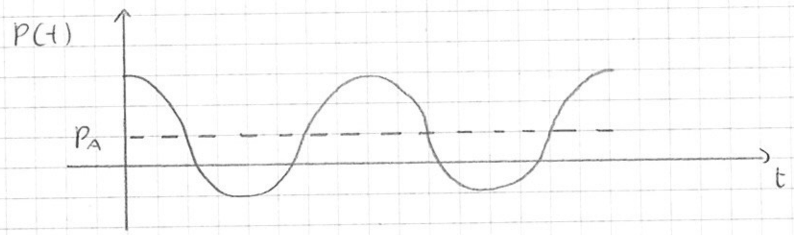
Il valore efficace è utile perchè mi permette di calcolare le potenze un pò come se fossi in continua.

$$P = R \cdot I^2_{RMS}$$

Utilizzando il concetto di valore efficace posso riscrivere alcune delle grandezze viste prima.

$$\boxed{P_A = P = \frac{1}{T}\int_T p(t)\,dt = V \cdot I \cdot \cos\varphi}$$

POTENZA ATTIVA



Mano a mano che φ aumenta P diminuisce (è massima quando $\varphi = 0$).
$\cos\varphi$ viene detto

$$\boxed{\cos\varphi = \text{FATTORE DI POTENZA}}$$

Possiamo riscrivere anche la potenza fluttuante.

$$\boxed{P_F(t) = V \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)}$$

POTENZA FLUTTUANTE

Potenza attiva istantanea

$$\boxed{P_A(t) = 2 V I \cos^2(\omega t) \cos(\varphi)}$$

POTENZA ATTIVA ISTANTANEA

Potenza reattiva istantanea

$$\boxed{P_R(t) = V \cdot I \cdot \operatorname{sen}(2\omega t)\operatorname{sen}(\varphi)}$$

Potenza istantanea → tutto ciò che entra nel dipolo
Potenza attiva → valor medio della potenza che viene convertita in altre forme di energia
Potenza fluttuante → quella rimpallata avanti e indietro tra componenti reattivi e generatori.

Per semplificare i calcoli conviene fare un'astrazione. Abbiamo definito una potenza attiva dipendente dal tempo e una indipendente. Stessa cosa si può fare per la potenza reattiva. Parlo di "potenza reattiva" e basta (non più "istantanea"). È definita come valore di picco della potenza reattiva istantanea.

$$P_R(t) = VI \operatorname{sen}(\omega t) \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

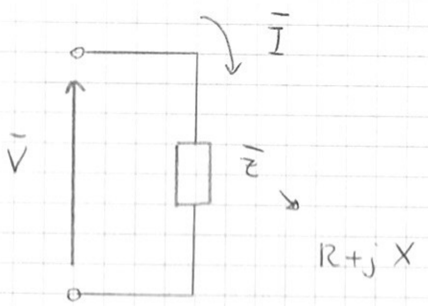
$$\boxed{Q = V \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi}$$ POTENZA REATTIVA

Potenza attiva → ampiezza della potenza attiva istantanea
Potenza reattiva → ampiezza della potenza reattiva istantanea

Posso definire una nuova grandezza che chiamo

POTENZA COMPLESSA $\boxed{\bar{A} = P + jQ}$

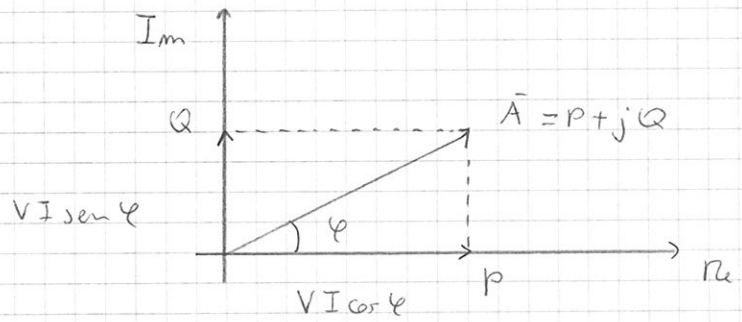
Queste potenze non hanno alcun significato fisico, ma mi permettono di calcolare facilmente le potenze a partire da valori RMS e sfasamenti. Se ad esempio ho un dipolo alimentato in alternata



$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

$$Q = X \cdot I^2 = \frac{V^2}{X}$$

Se vado a disegnare la potenza complessa sul piano di Gauss



Se $\varphi = 0$ (ho solo una resistenza) la potenza complessa è tutta potenza attiva. Se $\varphi = 90°$ non ho nessuna componente attiva ma solo potenza reattiva. (tutta la potenza emessa dal generatore viene rimandata indietro nel semiperiodo successivo).

Vediamo un altro modo di calcolare $\bar{A}$ (* = complesso coniugato)

$$\bar{V} \cdot \bar{I}^* = V(I\cos\varphi - jI\,\mathrm{sen}\,\varphi) = VI\cos\varphi - jVI\,\mathrm{sen}\,\varphi = P + jQ = \bar{A}$$

Quindi posso calcolare $\bar{A}$ come

$$\boxed{\bar{A} = \bar{V} \cdot \bar{I}^*}$$

Tra l'altro, se voglio calcolare il modulo della potenza complessa

$$|\bar{A}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{V^2 I^2 \cos^2\varphi + V^2 I^2 \mathrm{sen}^2\varphi} = \sqrt{V^2 I^2} = VI = \frac{P}{\cos\varphi}$$

valori eff.

infatti $P_A = P = V \cdot I \cdot \cos\varphi$

$$\boxed{|\bar{A}| = V \cdot I = \frac{P}{\cos\varphi} = A}$$

POTENZA APPARENTE
o
POTENZA DI DIMENSIONAMENTO

Nonostante io utilizzi solo una parte della potenza P fornita dai generatori, quando dimensiono trasformatori, cavi, ecc. devo tener conto che i valori efficaci di tensione e corrente sono V e I. I fili devono essere in grado di trasportare anche la P massima potenza, anche se poi ne userò solo una parte.

Il fatto di prendere molta energia e poi ridarla è uno svantaggio. L'ENEL non me la conteggia, ma se la potenza reattiva è molto elevata affinché io abbia 1 KW di potenza attiva l'ENEL mi deve dare più di 1KW di potenza e quindi mi deve mettere dei carichi dimensionati in modo che da trasportare tutta la potenza apparente.

La differenza tra potenza apparente e potenza attiva è un'energia che io non dissipo (non la butto via), ma che continuo ad accumulare e ridare via. È energia che va avanti e indietro fra generatori e componenti reattivi.

Esistono delle normative sul valore minimo che può assumere $\cos\varphi$. Se vado al di sotto di questo valore l'ENEL può applicare una penale o addirittura sospendere la fornitura.

Potenza

✓ APPARENTE (DI DIMENSIONAMENTO)

$A = V \cdot I$

modulo

COMPLESSA $\overline{A} = P + jQ$

ISTANTANEA $v(t) \cdot i(t) =$

FLUTTUANTE $P_F(t)$ + ✓ ATTIVA $V \cdot I \cdot \cos\varphi = P$ ✓ POTENZA REATTIVA $Q = VI \cdot \operatorname{sen}\varphi$

ampiezza

media o ampiezza

ampiezza

ATTIVA IST. $2VI\cos\varphi\cos^2\omega t$ + REATT. IST $VI\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}2\omega t$

(media nulla)

✓ = sono le più utili

Potenze attive, reattive e apparente sono le più utili. Per loro sono state coniate appositamente nuove unità di misura diverse dai Watt

$P\,[W]$

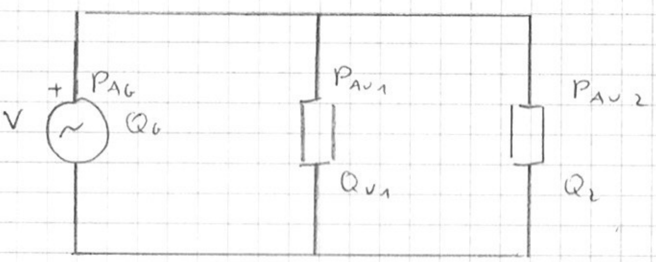
$Q\,[VAR]$

$A\,[VA]$

Teorema di Buckerot

Dato un circuito in regime sinusoidale con utilizzatori di tipo lineare (resistenze, capacità, induttanze) la somma delle potenze attive generate è uguale alla somma delle potenze attive utilizzate; la somma delle potenze reattive generate è uguale alla somma delle potenze reattive utilizzate.

$$\boxed{\begin{aligned}\sum P_{AG} &= \sum P_{AU} \\ \sum Q_G &= \sum Q_U\end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\bar{A}_G = \sum \bar{A}_U}$$

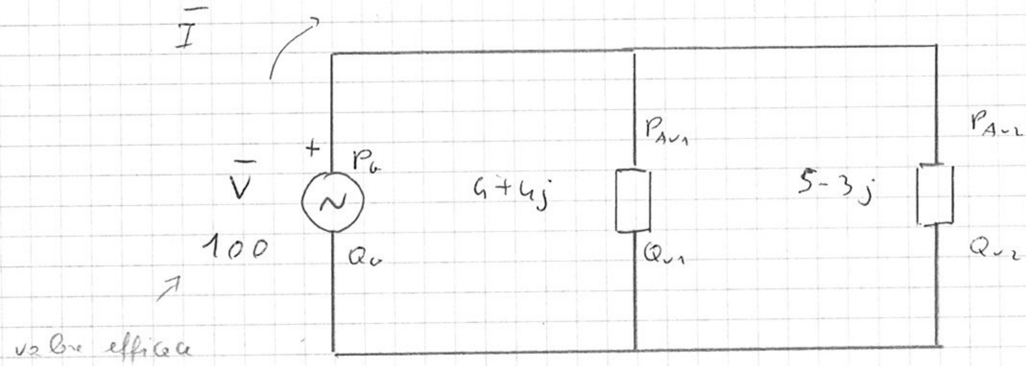


Varrebbe anche per n generatori e m utilizzatori

$P_{AG} = P_{AU1} + P_{AU2}$

$Q_G = Q_{U1} + Q_{U2}$

esempio:



$\bar{V} = 100$

$\bar{Z}_1 = 4+4j$

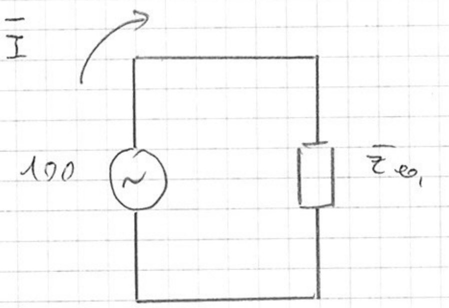
$\bar{Z}_2 = 5-3j$

Voglio calcolare

$P_{AG} = ?$

$Q_G = ?$

Dobbiamo calcolare $\bar{I}$. Per farlo la cosa più semplice è accorpare le due impedenze.



$$\bar{Z}_{eq_1} = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{(4+4j)(5-3j)}{9-j} = \frac{32+8j}{9-j} \cdot \frac{9+j}{9+j} = \frac{280+104j}{82} =$$

$$= 3,415 + 1,27j$$

Tipicamente mi porto dietro 3, 4 cifre decimali

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{100}{3,415 + 1,27j} \cdot \frac{3,415 - 1,27j}{3,415 - 1,27j} = \frac{341,5 + 127j}{13,28 + 127j} =$$

$$= \frac{341,5 + 127j}{13,28} = 25,72 + 9,56j$$

Per calcolare la potenza ho due vie: potrei calcolare valori efficaci e sfasamento φ, ma qui la strada più comoda è fare

$$\bar{A} = \bar{V} \cdot \bar{I}^* = 100(25,72 - 9,56j) = \overset{P}{2572} - \overset{Q}{956j}$$

Quindi la soluzione è

$$P_{AG} = 2572 \text{ W}$$

$$Q_G = -956 \text{ VAR}$$

Se voglio calcolare anche la potenza apparente del generatore

$$A_G = \sqrt{P_{AG}^2 + Q_G^2} = 2744 \text{ VA} \qquad \text{(Volt Ampere)}$$

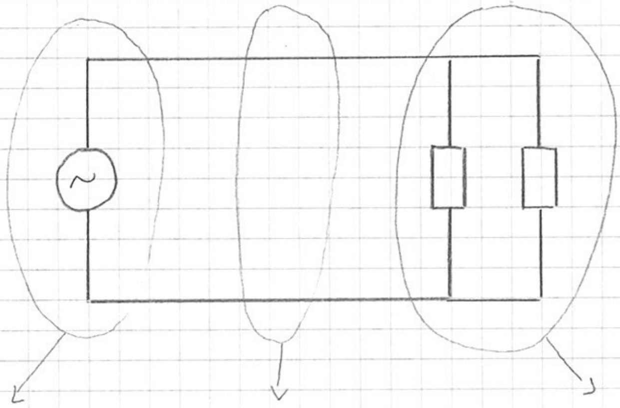
A fronte di 2744 VA messi a disposizione dal generatore solo 2572 vengono utilizzati (trasformati in energia luminosa, termica, ecc.). C'è una potenza fluttuante che va avanti e indietro che ha un'ampiezza di 956 W

$$\cos\varphi = \frac{P}{A} = 0,93$$ è un caso abbastanza favorevole ($\cos\varphi$ vicino a 1)

Osserviamo poi che $Q_G < 0$, quindi il comportamento della rete è complessivamente capacitivo. Complessivamente la rete si comporta come un condensatore più una resistenza.

Rifasamento

Immaginiamo che sia



Una parte della potenza fluttuante, che l'ENEL non darebbe conteggiare in realtà viene dispersa lungo i fili. Il fornitore ha perciò fissato dei parametri minimi per $\cos\varphi$

$$\boxed{\cos\varphi_{MIN} > 0,9}$$

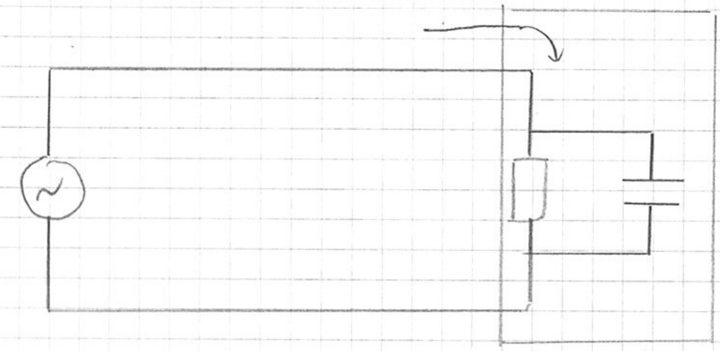
C'è poi un'altra fascia in cui l'ENEL fornisce energia ma fa pagare una penale.

$$\boxed{0,7 < \cos\varphi < 0,9}$$

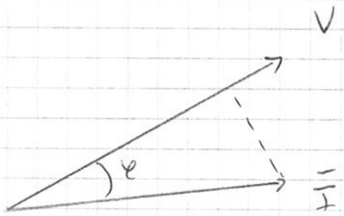
Al di sotto di 0,7 l'ENEL si rifiuta di fornire corrente.

ci sono motori elettrici

Spesso le utenze, soprattutto quelle industriali, sono fortemente induttive.
Si inserisce vicino ai motori un condensatore che fa calare la potenza reattiva complessiva che si vede a monte.

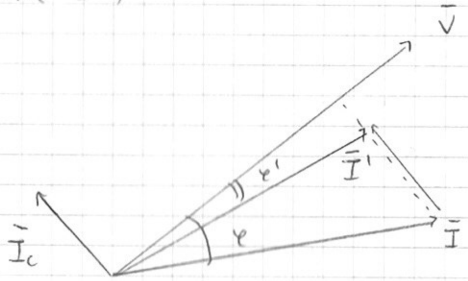


A parità di potenza attiva posso far calare la potenza reattiva inserendo in parallelo un condensatore che si chiama CONDENSATORE DI RIFASAMENTO, che fa variare lo sfasamento visto dall'ENEL. Sta al proprietario vedere se gli costa di più pagare la penale o comprare un opportuno condensatore.
Ci sono due modi per studiare il rifasamento.
Consideriamo tensioni e correnti.



Corrente in ritardo rispetto alla tensione ⇒ comportamento prevalentemente induttivo.

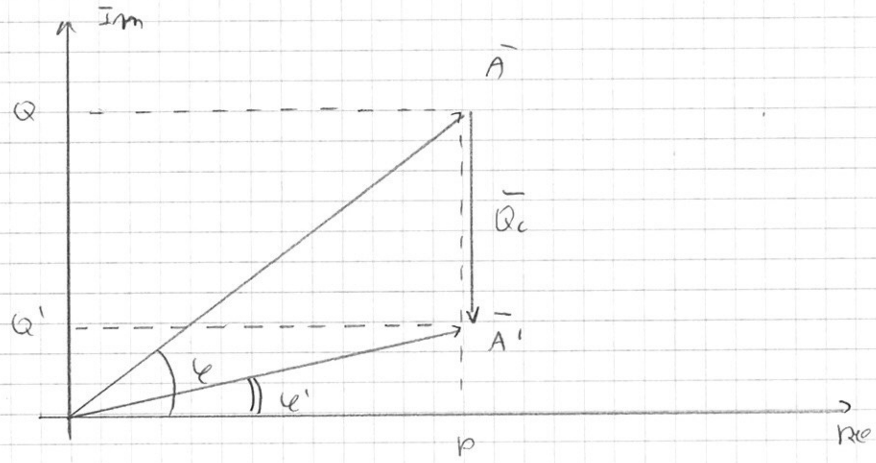
Voglio mantenere la stessa potenza attiva pur riducendo φ. (voglio un vettore corrente I')



Solitamente, per stare sicuri, si cerca di portare lo sfasamento a 0,95 (non porto a 1 perché sarebbe più costoso).

Devo sottrarre a $\bar{I}$ un vettore $\bar{I}_c$ in modo da avere I'. Il calcolo è però più semplice con le potenze.

Facciamo un diagramma delle potenze



All'inizio ho un φ grande (troppo: lo voglio ridurre).

$Q' = Q - Q_c$

Q_c = potenza (reattiva) che deve essere assorbita dal condensatore per rifasare l'impianto.

Conoscendo φ, φ', Q posso facilmente calcolare Q_c.
Trovato Q_c, come faccio a calcolare il valore di C ?

$$Q = VI \cdot \operatorname{sen}\varphi = VI \operatorname{sen}\varphi \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi} = VI \cos\varphi \, tg\,\varphi = P \, tg\,\varphi$$

$$Q' = P \, tg\,\varphi'$$

$$Q_c = Q - Q' = P(Tg\,\varphi - Tg\,\varphi')$$

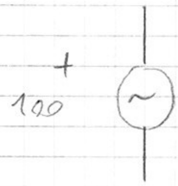
$$Q_c = X_c \cdot I^2$$ X_c = reattanza condensatore

$$X_c = \frac{V^2}{Q_c} = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{C = \frac{Q_c}{\omega V^2}}$$

Una volta che so la potenza reattiva che deve essere mangiata dal condensatore, la tensione data dall'enel e gli sfasamenti posso calcolare la capacità che mi serve

— . — . — . — . —

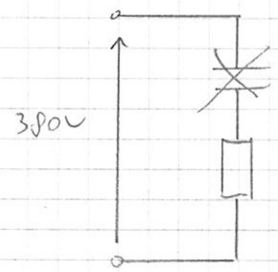
Nota Quando si fanno gli esercizi sulla potenza in alternata, es. $P = VI\cos\varphi$, si parla di valori efficaci.



→ è già valore efficace $100\sqrt{2}\cos(\omega t)$

— . — . — . —

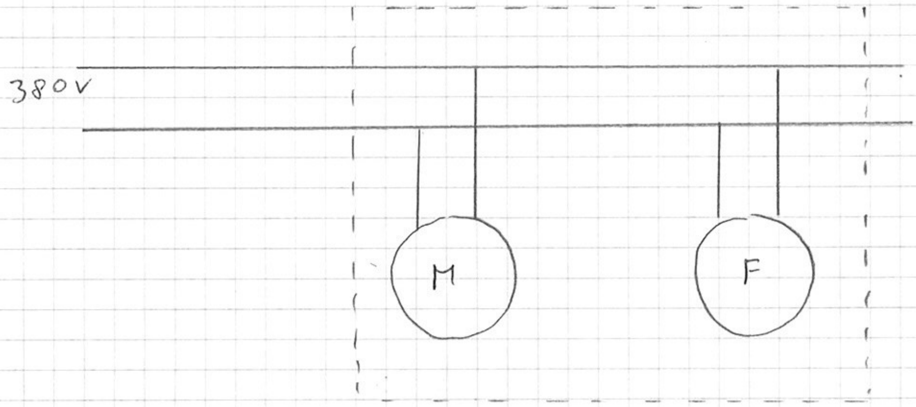
Il condensatore di rifasamento è messo in parallelo perché:
- dal punto di vista pratico è più facile montarlo
- l'impianto, ad es. un motore elettrico, è fatto per funzionare bene ad es. a 380V. Se metto il condensatore in parallelo vario la tensione.



l'enel fornisce una tensione fissa e quella deve essere tenuta fissa

Esercizio rifasamento

Supponiamo che ci sia un fornaio, che ha un'impastatrice (la rappresentiamo come un motore elettrico M) e un forno (F) messi in parallelo.



$P_1 = P = 3\,KW$ $\qquad$ $P = 2\,KW$

$\cos\varphi = 0,6$ $\qquad$ $\cos\varphi = 1$

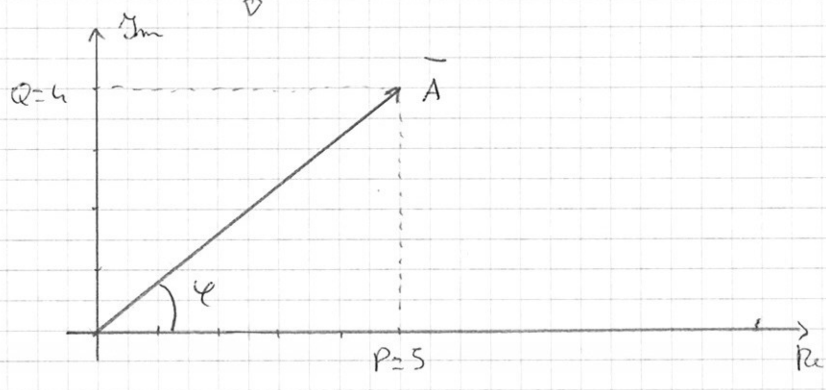
Guardiamo qual è il fattore di potenza complessivo dell'impianto. Scriviamo una tabella in cui mettiamo la potenza in KW, l'angolo φ la potenza reattiva in KVAR e il $\cos\varphi$.

	P [KW]	φ	Q [KVAR]	$\cos\varphi$
M	3	53°	4	0,6
F	2	0°	0	1
TOT	5	38,7°	4	0,78

$Q = P\,tg\,\varphi$

Th Boucherot

Facciamo un diagramma delle potenze

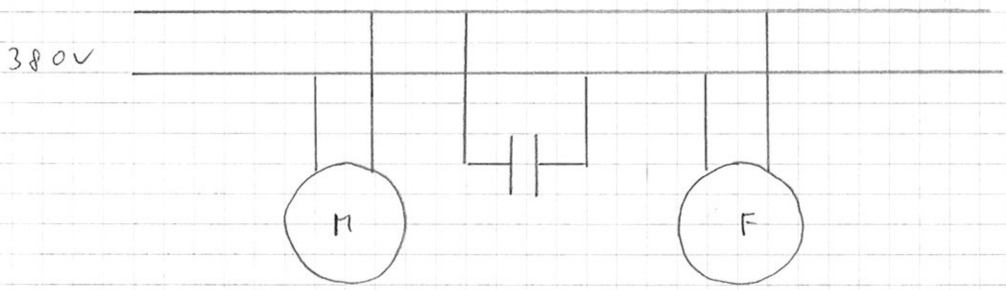


0,78 non è accettabile a meno di non pagare la penale. Il rifasatore, per sicurezza, decide di fissare un $\cos\varphi' = 0,95$

$\Downarrow$

$\varphi' = 18°$

Dobbiamo inserire un condensatore che abbassi la potenza reattiva fino a portare l'angolo a $\varphi = \varphi'$



Ci vogliamo portare a una nuova condizione in cui

	$\cos\varphi'$	φ'	P	Q'	Q_c
Tot	0,95	18°	5	1,62	2,38

$Q' = P\,tg\,\varphi' = 1,682$ kVAR

potenza reattiva che deve essere assorbita dal condensatore

$$C = \frac{Q_c}{\omega V^2} = \frac{2,38 \cdot 10^3}{314 \cdot 380^2} = 52,5 \cdot 10^{-6}$$

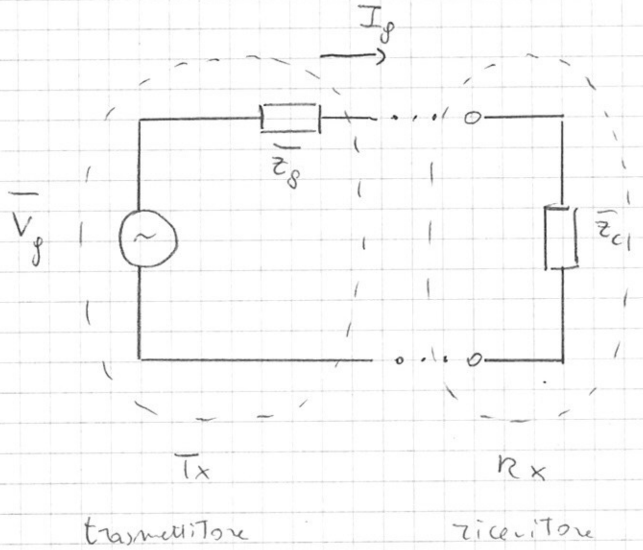
NB: di solito nelle nostre case $f = 50$ Hz $\Rightarrow \omega = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 314$

Quando rifaso l'impianto gli effetti benefici sono visti dalla rete, dal generatore. Ma il motore deve comunque scambiare potenza reattiva di 4kVAR con qualcuno. Anziché scambiarla col generatore ora la scambia col condensatore.

Teorema del massimo trasferimento di potenza

I cavi devono essere "terminati". Il trasferimento tra chi emette e chi riceve deve essere fatto con delle Terminazioni per ridurre la possibilità di errore.

Immaginiamo di avere un generatore, un'impedenza, una linea di Trasmissione e un ricevitore, che possiamo vedere come un carico di impedenza $\bar{z}_c$.



$$\bar{z}_g = R_g + j X_g$$

$$\bar{z}_c = R_c + j X_c$$

Trasliamo l'asse dei tempi in modo che V_g sia reale (Tensione in fase)

$$\bar{V}_g = V_g$$

Nella maglia circolerà una corrente I_g

$$\bar{I}_g = I_g \cdot e^{j\varphi_i}$$ → la ~~ten~~ corrente in generale sarà sfasata (complessa)

Calcoliamo la potenza complessa generata dal generatore V_g

$$\bar{A}_g = V_g \bar{I}_g^* = V_g I_g e^{-j\varphi_i} = P_g + j Q_g$$

Calcoliamo la potenza attiva P_g, che è l'unica che potrà essere raccolta dall'altra parte

$P_g = Re\{\bar{A}_g\} = Re[V_g I_g e^{-j\varphi_i}] = V_g I_g \cos\varphi$

Ora vogliamo massimizzare la frazione di questa potenza che viene ricevuta. Quanta invece cade sul generatore (quanta cade su $\bar{Z}_g$?)?

$P_{R_g} = R_g I_g^2$ ← potenza dissipata su $\bar{Z}_g$

$P_{Rc} = P_g - P_{R_g} = V_g I_g \cos\varphi_i - R_g I_g^2$

$P_{Rc} = f(\varphi_i, I_g)$ La funzione rilevata dal ricevitore è funzione sia di φ_i sia di I_g. Per massimizzarla devo massimizzarli entrambi

Per avere il max trasferimento di potenza:

1) $\boxed{\varphi_i = 0}$ $(\cos\varphi = 1)$

questo significa mettermi in condizione di risonanza

$X_g + X_c = 0 \Rightarrow X_c = -X_g$ Reattanza ricevitore uguale all'opposto della reattanza del trasmettitore

$\varphi_i = 0 \Rightarrow P_{Rc} = V_g I_g - R_g I_g^2$

2) Devo richiedere che la derivata di questa funzione rispetto alla corrente sia nulla (è rimasta funzione sol di I, perché φ è stato fissato).

$$\frac{d P_{Rc}}{d I_g} = 0 \Rightarrow V_g - 2 R_g I_g = 0$$

$$I_g = \frac{V_g}{2R_g} \Rightarrow \boxed{R_c = R_g}$$ questa è la seconda condizione fondamentale

Pongo una resistenza sul ricevitore uguale a quella che ho nel generatore.

Questo non è da fare quando voglio trasmettere il massimo di potenza. Invece qui, che voglio trasmettere informazioni, posso permettermi di perdere potenza ma di avere il massimo di tensione sul ricevitore.

Si dice che i cavi vanno terminati per avere una migliore trasmissione dei ~~m~~ segnali ($\Rightarrow$ minore possibilità di errore nella decodifica).

Sistemi trifase

Immaginiamo di prendere 3 generatori di tensione.

$e_1(t) = \sqrt{2}\, E \cdot \cos(\omega t)$

120° in anticipo rispetto a e_1

$e_2(t) = \sqrt{2} \cdot E \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$

120° in ritardo rispetto a e_1

$e_3(t) = \sqrt{2}\, E \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{2}\, E \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$

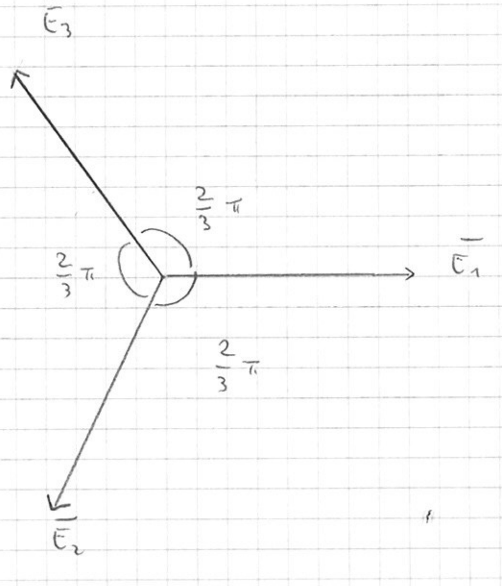
Sono generatori sinusoidali con stessa ampiezza e sfasamento diverso.

Se passo ai vettori rappresentativi

$\overline{E}_1 = E$

$\overline{E}_2 = E \cdot e^{-j\frac{2}{3}\pi}$

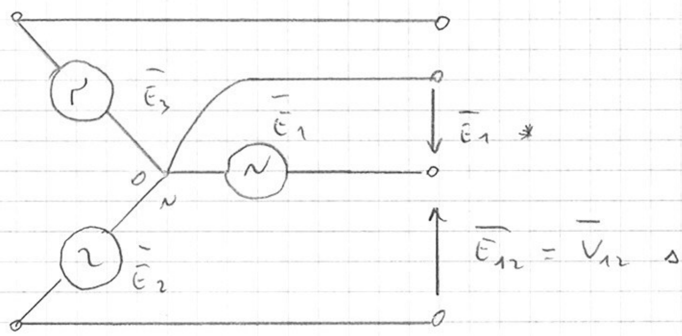
$\overline{E}_3 = E \cdot e^{+j\frac{2}{3}\pi}$



$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$

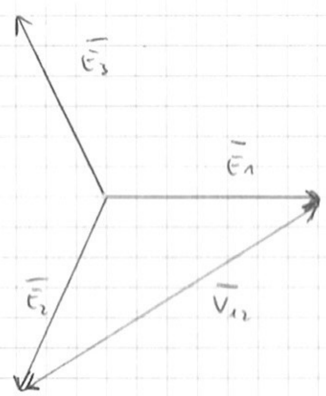
La somma dei 3 vettori risulta nulla.

Questi 3 generatori potrebbero ad esempio essere 3 turbine. Per buttare fuori quei 3 segnali dalla mia centrale dovrei avere 6 cavi. Però posso inventarmi dei collegamenti affinché mi servano meno cavi. Il collegamento A STELLA mi permette di collegare i terminali dei 3 generatori in un unico punto ("centro stella" o "terminale neutro").



Le tensioni rispetto al centro stella sono dette "tensioni stellate"*. Se invece mi chiedo la tensione tra le terminazioni di 2 generatori parlo di "tensioni di linea"Δ o "tensioni concatenate".

$\bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2$



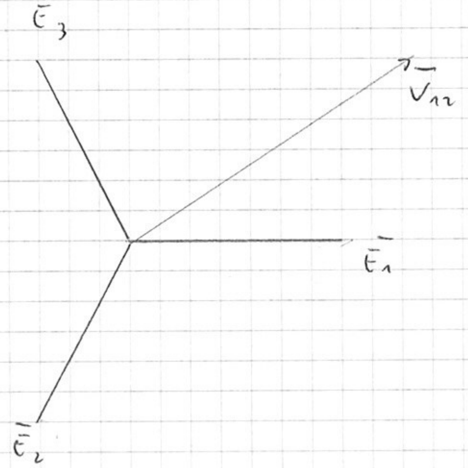
Facendo rapide considerazioni geometriche su angoli e vettori osserviamo che

$|V_{12}| = \sqrt{3}\,|E_1|$

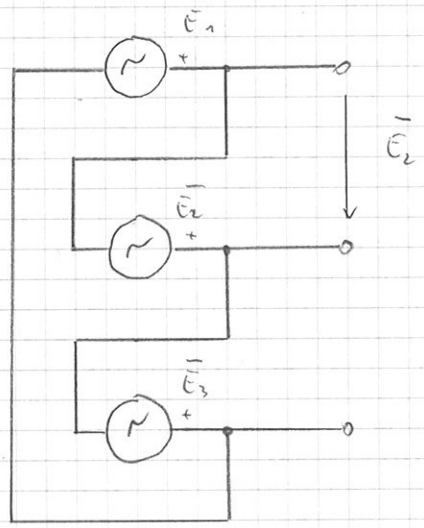
$\left[V = \sqrt{3}\, E \right]$

Le tensioni concatenate sono maggiori delle tensioni dei generatori di un fattore $\sqrt{3}$. Anche esse formano una terna trifase equilibrata.

$$\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0$$



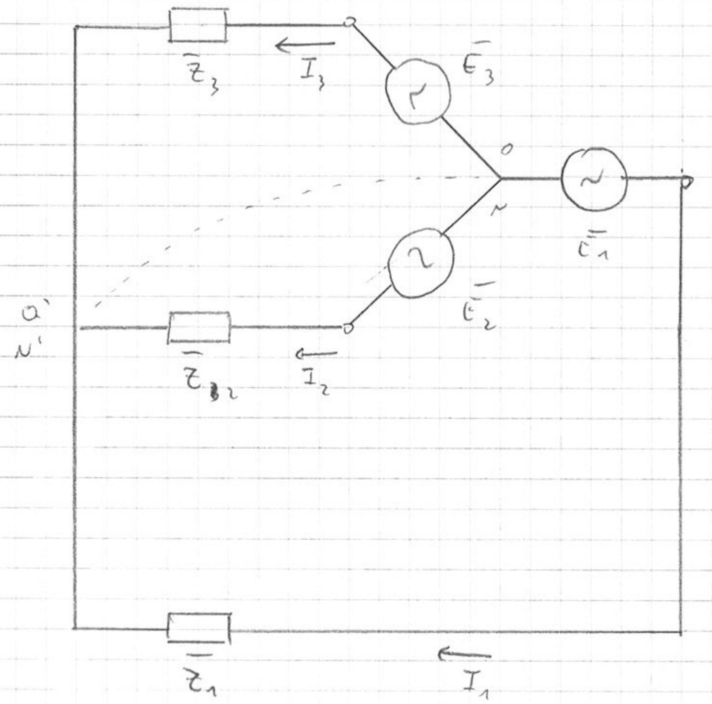
Colleghiamo i generatori a coppie: collegamento A TRIANGOLO



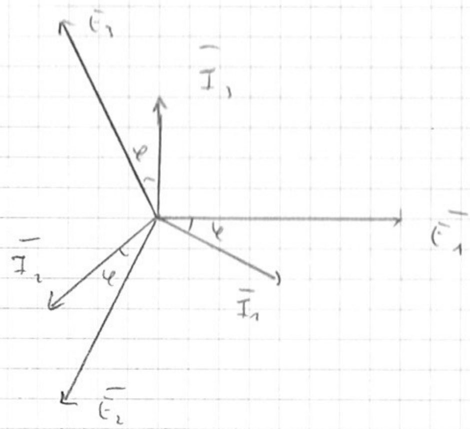
Ora esistono solo le tensioni concatenate (non ho il centro stella), che sono uguali alle tensioni dei generatori

A triangolo o stella, posso con questo tipo di collegamenti portare fuori la tensione dei 3 generatori non con 6, ma solo 3 conduttori. Quando si va su motori industriali ad alta potenza questi motori sono solitamente trifase. Un motore trifase si costruisce con meno fili. Sopra a una certa potenza i fili che dovrei usare sarebbero molto costosi.

Guardiamo com'è fatto un carico trifase. Immaginiamo di prendere una terna di generatori trifase collegati a stella e 3 impedenze, alimentate dai generatori, anch'esse messe a stella.



Se le impedenze sono uguali anche la terna delle correnti è equilibrata.



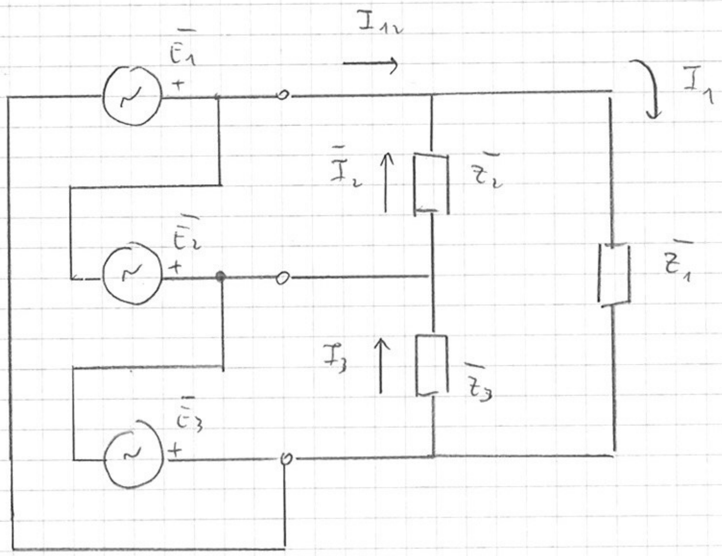
$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

Evito di tirare il filo fuori dal centro stella, perché il potenziale del centro stella O' dei carichi sarà uguale a quello del centro stella dei generatori.

Carichi equilibrati: $\Rightarrow \quad V_0 = V_0'$

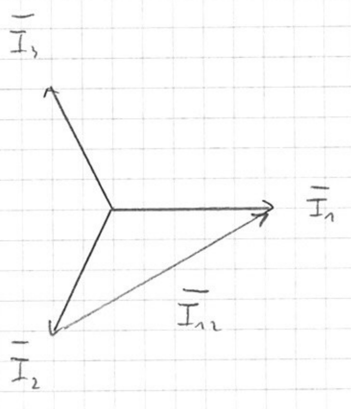
Se invece i carichi non sono equilibrati mi conviene portare fuori e collegare anche il centro stella in modo che il potenziale del centro stella dei carichi sia nullo. Se il carico è squilibrato il motore si può rompere.

E se prendo i carichi messi a TRIANGOLO?



Attenzione al verso delle correnti: escono dai + dei rispettivi generatori

Non ho problemi di squilibratura perché ogni carico vede ai propri morsetti un solo generatore.

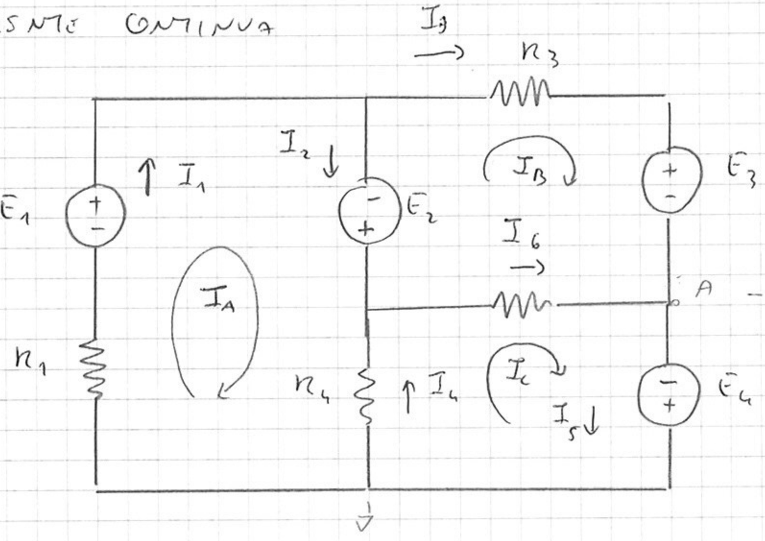


$|I_{12}| = \sqrt{3}\,|I|$

le correnti che escono dai morsetti dei generatori sono $\sqrt{3}$ volte più elevate delle correnti che vanno sui carichi (per le considerazioni geometriche viste prima).
Uno decide di collegare a stella o a triangolo a seconda che voglia che le correnti di linea siano più piccole o più elevate. (di $\sqrt{3}$ volte, nel caso del collegamento a triangolo).
Di solito l'enel collega i generatori a stella e ~~collega~~ fornisce anche il centro stella. Uno dei fili che arrivano è il neutro, mentre l'altro è collegato a uno dei 3 generatori del sistema trifase. Tra una fase e l'altra ci sono sempre 380 V (ora 400 V). Le zone sono solitamente divise in zone ognuna delle quali è collegata a uno dei 3 generatori, in modo da bilanciare i carichi sui generatori che stanno in centrale.

Luglio 2006 — 16/11/2005 — Continua, Transitorio, Alternata

1) CORRENTE CONTINUA



- E_4 e il pot. del nodo A è fissato. Per risolvere con Maxwell ai anelli dovrei mettere al suo posto un'altra incognita, es. corrente di ramo I_5. Quando ci sono generatori di tensione conviene Maxwell alle maglie

? = Trovare le correnti di ramo

Dati:

$E_1 = 32\,V$

$E_2 = 24\,V$

$E_3 = 63\,V$

$E_4 = 31\,V$

$R_1 = 75\,\Omega$

$R_2 = 93\,\Omega$

$R_3 = 7\,\Omega$

$R_4 = 77\,\Omega$

Usiamo Maxwell alle maglie. Prendo le maglie lin. indip. e introduco le correnti fittizie I_A, I_B, I_C. Non ci sono generatori ideali, scrivo la matrice risolutiva.

discordi col verso di rotazione

$$
\begin{array}{c}
A \\ B \\ C
\end{array}
\begin{vmatrix}
E_1 + E_2 \\
-E_2 - E_3 \\
E_4
\end{vmatrix}
=
\begin{array}{ccc}
A & B & C \\
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix}
R_1 + R_4 & 0 & -R_4 \\
0 & R_2 + R_3 & -R_2 \\
-R_4 & -R_2 & R_2 + R_4
\end{vmatrix}
\begin{array}{c}
A \\ B \\ C
\end{array}
\cdot
\begin{vmatrix}
I_A \\
I_B \\
I_C
\end{vmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} 32+24 \\ -24-69 \\ 31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 75+77 & 0 & -77 \\ 0 & 93+7 & -93 \\ -77 & -93 & 93+77 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} I_A = 59{,}7 \cdot 10^{-3}\ A \\ I_B = -1{,}5\ A \\ I_C = -0{,}609\ A \end{cases}$$

$I_1 = I_A = 59{,}7 \cdot 10^{-3}\ A$

$I_2 = I_A - I_B = 1{,}56\ A$

$I_3 = I_B = -1{,}5\ A$

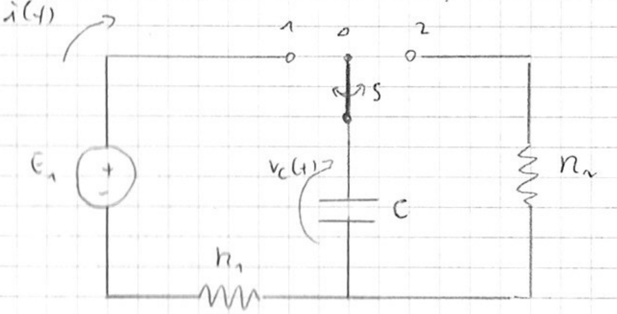
$I_4 = I_C - I_A = -0{,}669\ A$

$I_5 = I_C = -0{,}609\ A$

$I_6 = I_C - I_B = 0{,}887\ A$

2) TRANSITORIO

l'interruttore ha 3 possibili posizioni 0, 1, 2



Dati:

$v_c(0) = 0$ ⟸ cond. inizialmente scarico

$$S \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t < T_1 \\ 2 & T_1 \le t < T_1 + T_2 \\ 0 & t \geq T_1 + T_2 \end{cases}$$

⟵ NB: non $T_1 \le t \le T_2$

$E_1 = 32\ V$

$R_1 = 75\ \Omega$

$R_2 = 93\ \Omega$

$T_1 = 32\ \mu s$

$T_2 = 71\ \mu s$

$C = 10\ \mu F$

$v_c(T_1) = ?$

$v_c(T_1 + T_2) = ?$

$v_c(T_1 + T_2 + 10) = ?$

Ragiono sulla prima parte del transitorio

	$t=0^-$	$t=0^+$	$t\to+\infty$
v_c	0	0	E_1

nell'ipotesi S immobile (resta nella posizione 1 per tempo indefinito).

a regime il condensatore è un circuito aperto (cade ai suoi estremi tutta la tensione del generatore).

$$E_1 = R_1\, i(t) + v_c(t)$$ ← II legge di Kirchoff alla maglia

$$E_1 = R_1 C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{R_1 C} v_c(t) = \frac{E_1}{R_1 C}$$ ← ho riordinato e diviso per RC in modo da avere la derivata senza coeff.

$$\alpha + \frac{1}{R_1 C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{R_1 C}$$

$$v_c(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C}} + \underbrace{v_{cp}(t)}_{E_1}$$ ← soluzione particolare (termine a regime) ↓ valore di $v_c(t)$ per $t\to+\infty$

$$v_c(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C}} + E_1$$

Dobbiamo determinare A, servendoci delle condizioni iniziali

$$v_c(0)=0 \qquad A+E_1=0 \quad \Rightarrow \quad A=-E_1$$

$$v_c(t) = E_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}\right)$$ ← ho raccolto E_1

l'esponenziale non viene percorso completamente perchè all'istante T_1 stacco l'interruttore

Quando ho un transitorio del primo ordine ho un'esponenziale. So dove inizia, so dove finisce, quanto va veloce (conosco A). Anziché usare le eq. differenziali potevo dire

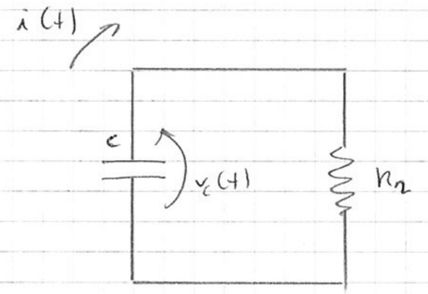
$$\begin{cases} \tau = R_1 C \\ E_1 = \text{valore finale} \end{cases}$$

$$\tau = R_1 C$$

$$v_c(t) = E_1 - E_1 e^{-\frac{t}{\tau}} = E_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}} \right)$$

Se ho dei dubbi provo a sostituire (es. $t=0$, $t=+\infty$).

Guardiamo ora cosa succede quando S va nella posizione 2.
Per $T_1 \leq t < T_1 + T_2$



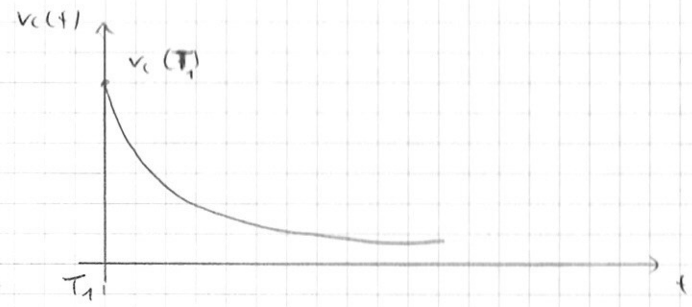
La resistenza scarica progressivamente il condensatore (ho un esponenziale decrescente)

H_p: S immobile

	$t = T_1^-$	$t = T_1^+$	$T \to +\infty$
$v_c(t)$	$v_c(T_1)$	$v_c(T_1)$	0

← il condensatore si scarica completamente

Uso direttamente il secondo metodo.



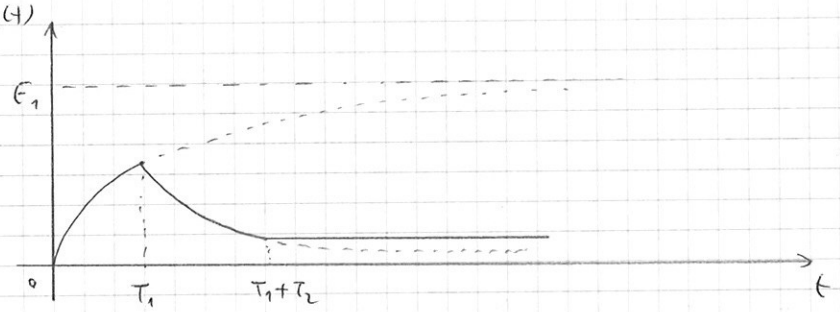
NB. →

Devo scrivere l'eq. di un'esponenziale che parte da $v_c(T_1)$ e arriva a 0.

$$v_c(t) = v_c(T_1)\, e^{-\frac{t - T_1}{R_2 C}}$$

→ perché ho traslato l'origine dei tempi

Torniamo al grafico di prima



Da T_1+T_2 in poi ~~non serve~~ $v_c(t)$ rimane costante (stacca il condensatore dal resto del mondo).

$$v_c(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ E_1\left(1-e^{-\frac{t}{R_1C}}\right) & 0 \le t < T_1 \\ v_c(T_1)\cdot e^{-\frac{t-T_1}{R_2C}} & T_1 \le t < T_1+T_2 \\ v_c(T_2+T_1) & t \geq T_1+T_2 \end{cases}$$

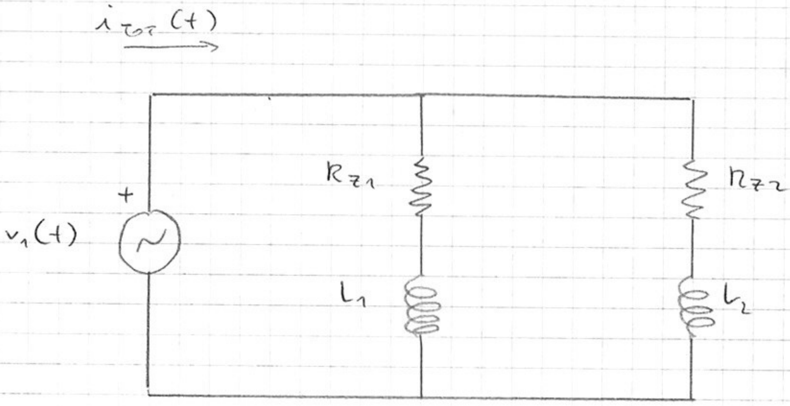
Sostituendo i valori otteniamo: è tanto molto prima di 32 V. T_1 è molto più piccolo di τ

$$v_C(T_1) = 32\left(1-e^{-\frac{32\cdot10^{-6}}{75\cdot10\cdot10^{-6}}}\right) = 1{,}337 \text{ V}$$

$$v_c(T_1+T_2) = v_c(T_1)\cdot e^{-\frac{71\cdot10^{-6}}{93\cdot10\cdot10^{-6}}} = 1{,}238 \text{ V}$$

$$v_c(T_1+T_2+10) = 1{,}238 \text{ V}$$

3) CORRENTE ALTERNATA



Dati:

$v_1(t) = 66 \cos(2\pi \cdot 50 t + 67°)$

$R_{Z1} = 8 \,\Omega$

$R_{Z2} = 38,81 \,\Omega$

$L_1 = 32,61 \, mH$

$L_2 = 30,83 \, mH$

Trovare

$|i_{TOT}(t)| = ?$ ← modulo

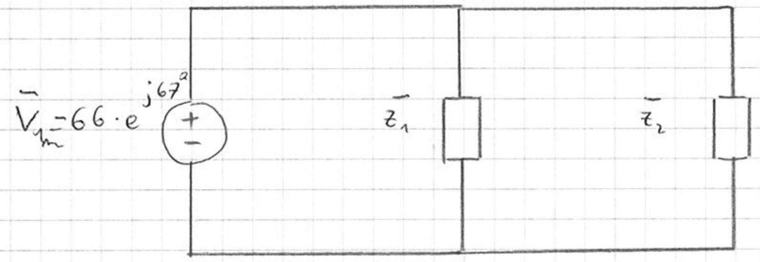
$\angle i_{TOT}(t) = ?$ ← fase

$P = ?$ attiva

$Q = ?$ reattiva ← potenza

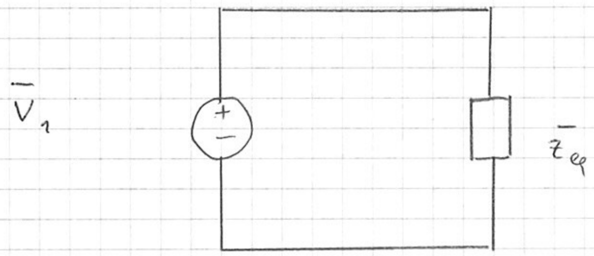
$A = ?$ apparente

Cerchiamo di accorpare tra di loro le impedenze. Possiamo accorpare i rami senza perdere informazioni su $i_{TOT}(t)$



$$\overline{Z}_1 = R_{Z_1} + j\omega L_1 = 8 + j\,\overset{50\,Hz}{314} \cdot 32{,}61 \cdot 10^{-3} = 8 + j\,10{,}24$$

$$\overline{Z}_2 = R_{Z_2} + j\omega L_2 = 38{,}81 + j\,9{,}68$$



$$\overline{Z}_{eq} = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = 10{,}22 \cdot e^{j42{,}36°}$$

Ho due strade: continuo a mantenere le lunghezze dei vettori pari ai valori di picco (in questo caso devo dividere i valori che ottengo per le potenze per $\sqrt{2}$); oppure sostituisco al vettore di tensione lo stesso accorciato di $\sqrt{2}$. In questo caso scelgo la 2° opportunità.

$$\overline{V}_{1\,eff} = \frac{\overline{V}_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{66}{\sqrt{2}} \cdot e^{j67°} = \overline{V}_1$$

NB: Questa operazione va fatta solo per tensioni e correnti, non per le impedenze.

$$\overline{I}_{TOT} = \frac{\overline{V}_1}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{66}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{10{,}22} \cdot e^{j(67° - 42{,}36°)} = 4{,}57 \cdot e^{j24{,}64°}$$

Avendo usato $\overline{V}_{1eff}$ ho ottenuto il valore efficace della corrente.

$|i_{TOT}(t)| = 4,57 \cdot \sqrt{2} = 6,458\ A$

$\angle i_{TOT}(t) = 24,04°$

differenza di fase tra tensione e corrente

$P = V_1 \cdot I_{TOT} \cdot \cos\varphi = \frac{66}{\sqrt{2}} \cdot 4,57 \cdot \cos(42,57°) = 156 W$

$Q = V_1 \cdot I_{TOT} \cdot \operatorname{sen}\varphi = \frac{66}{\sqrt{2}} \cdot 4,57 \cdot \operatorname{sen}(42,56°) = 145,2\ VAR$

$A = V_1 \cdot I_{TOT} = \frac{66}{\sqrt{2}} \cdot 4,57 = 213,1\ VA$

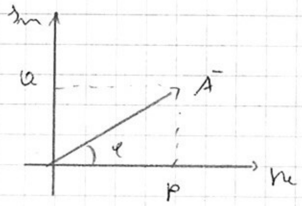
Questo è un metodo risolutivo, ma una volta calcolato $\bar{V}_1$ e $\bar{I}_{TOT}$ un metodo alternativo poteva essere questo:

$\bar{A} = \bar{V}_1 \cdot \bar{I}_{TOT}^{*} = 156 + j\,145,2$ o in questo caso è più comodo la notazione cartesiana

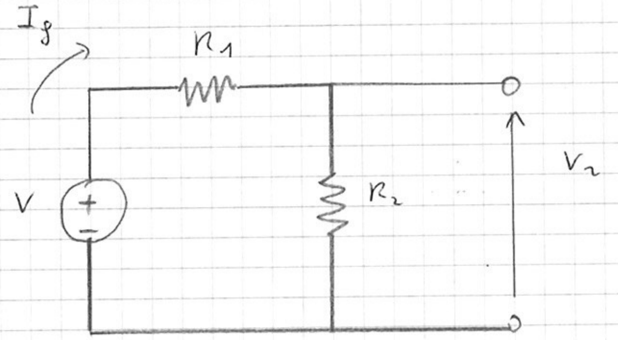
$P = Re[\bar{A}] = 156\ W$

$Q = Im[\bar{A}] = 145,2\ VAR$

$A = |\bar{A}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = 213,1\ VA$



Esercizio – dimensionamento del partitore



$V = 500V$

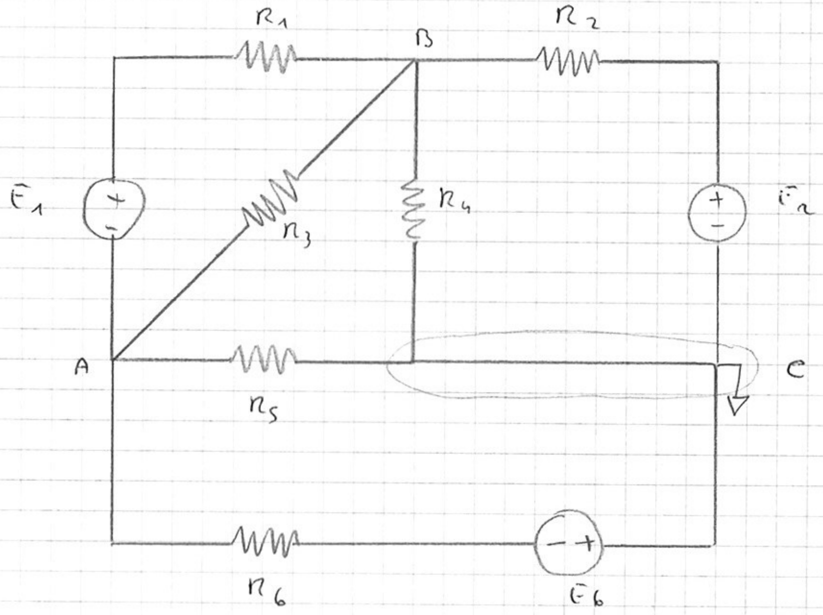
$$R_1 = ? \quad R_2 \; ? \quad \Big\} \quad V_2 = 50V, \quad I_g = 10mA$$

Dobbiamo ridimensionare il partitore in modo che $V_2 = 50V$. Dobbiamo variare il rapporto fra le due resistenze. La corrente I_g deve rimanere la stessa

$$\begin{cases} V \cdot \dfrac{R_2}{R_1+R_2} = 50V \\ \dfrac{V}{R_1+R_2} = 10mA \end{cases} \qquad \begin{cases} 500 \dfrac{R_2}{R_1+R_2} = 50 \\ \dfrac{500}{R_1+R_2} = 10^{-2} \end{cases} \qquad \begin{cases} '' \\ R_1+R_2 = \dfrac{500}{10^{-2}} = 5\cdot 10^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{\overset{2}{\cancel{10}}}{\cancel{500}} \cdot \dfrac{R_2}{5\cdot 10^4} = \cancel{50} \\ R_1+R_2 = 5\cdot 10^4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2R_2 = 10^4 \\ R_1+R_2 = 5\cdot 10^4 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_2 = 5 \; K\Omega \\ R_1 = 45 \; K\Omega \end{cases}$$

Esercizio – Maxwell ai nodi



Circuito risolvibile con Maxwell ai nodi, perché ci sono 4 maglie indip. e solo 2 nodi indip.

$R_1 = 2\ \Omega$ $\qquad V_{AC} = ?$ $\qquad$ ← anche per questo circuito Maxwell ai nodi

$R_2 = 1\ \Omega$ $\qquad V_{BC} = ?$

$R_3 = 2\ \Omega$

$R_4 = 1\ \Omega$

$R_5 = 1\ \Omega$

$R_6 = 1\ \Omega$

$E_1 = 24\ V$

$E_2 = 8\ V$

$E_6 = 24\ V$

uscenti da A

$$\begin{vmatrix} -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_6}{R_6} \\ \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \end{vmatrix}$$

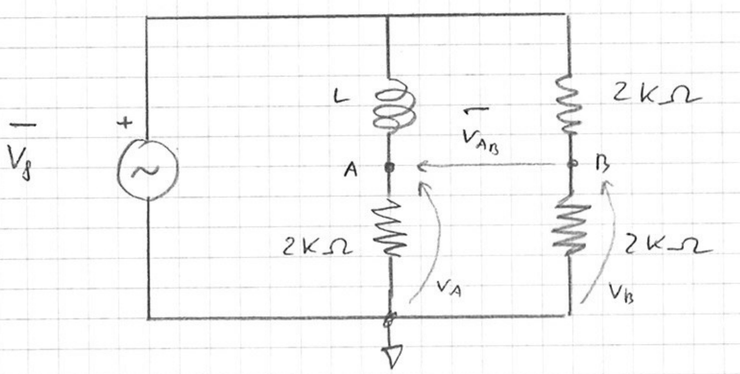
$$\begin{vmatrix} -36 \\ 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \end{vmatrix}$$

$\Delta = 9 - 1 = 8$

$$V_A = \frac{\det \begin{vmatrix} -36 & -1 \\ 20 & 3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-108+20}{8} = -11\,V$$

$$V_B = \frac{\det \begin{vmatrix} 3 & -36 \\ -1 & 20 \end{vmatrix}}{8} = \frac{60-36}{8} = \frac{24}{8} = 3\,V$$

Esercizio $\underline{\text{NO}}$ all'esame ... $\underline{\text{MAI}}$!!



L?

Determinare L in modo che

$\angle \overline{V}_{AB} = \angle \overline{V}_g - 60°$ (V_{AB} sfasata di 60° rispetto a V_g)

$f = 50\,Hz \rightarrow \omega = 314\ rad/s$

Risoluzione: ho applicato sempre il partitore

$$\overline{V}_{AB} = \overline{V}_A - \overline{V}_B = \frac{\overline{V}_g}{2000 + j\omega L} \cdot 2000 - \frac{\overline{V}_g}{2} = V_g = V_g\left(\frac{2000}{2000+j\omega L} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \overline{V}_g \frac{4000 - 2000 - j\omega L}{2(2000 + j\omega L)} \cdot \frac{2000 - j\omega L}{2000 - j\omega L} = \frac{\overline{V}_g}{2(4 \cdot 10^6 + \omega^2 L^2)} \cdot (\underbrace{4 \cdot 10^6 - \omega^2 L^2}_{A} \underbrace{- 4000 j\omega L}_{jB}) =$$

$$= \overline{V}_g \cdot \underset{\text{cost., non sfasa nulla}}{K} \cdot (A + jB)$$

Voglio che   Voglio che il vettore $A+jB$ sfasi V_g di 60°

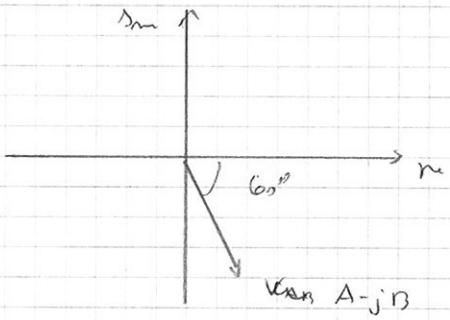
$\angle A+jB = -60°$

$$\frac{B}{A} = tg\,60° = \sqrt{3}$$

$$\frac{4000\,\omega L}{4\cdot 10^6 - \omega^2 L^2} = \sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}\,\omega^2 L^2 + 4\cdot 10^6\sqrt{3} = 4000\,\omega L \quad (1)$$

← 2° grado => 2 soluzioni, mettiamo dei paletti



siamo nel IV quadrante => deve essere $-B<0$

↓

$B>0$

$4\cdot 10^6 - \omega^2 L^2 > 0 \Rightarrow L < 6{,}37\ H$

Riprendiamo ora l'eq. (1)

$$(\omega L)_{1,2} = \begin{cases} -3461 \rightarrow L = -10{,}9\ H & \leftarrow \text{N.A.: un'induttanza negativa non } \exists \\ +1151 \rightarrow L = 3{,}67\ H & \leftarrow \text{accettabile!} \end{cases}$$

↑

avrei potuto ottenere 2 valori N.A.
In questo caso dicevo che con questo
circuito era impossibile ottenere
lo sfasamento richiesto