

Appunti di Elettrotecnica Parte A

**per i Corsi di Laurea in Ingegneria
Elettronica, Informatica e delle
Telecomunicazioni**

C. Concari – C. Tassoni

A.A. 2008/2009

1 - RICHIAMI DI ELETTROMAGNETISMO

1.1 - SORGENTI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

Carica elettrica dq con distribuzione uniforme per cui è definibile una **densità di carica** ρ (teoria macroscopica)

Carica elettrica con velocità v $v dq$ (v velocità media)

1.2 - DEFINIZIONI

• Vettore campo elettrico

$$\vec{E} = \frac{d\vec{F}_e}{dq} \quad (1.1)$$

$d\vec{F}_e$ forza elettrica agente sulla carica dq

In **elettrostatica** $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ il campo è conservativo: $\oint \vec{E} \times d\vec{l} = 0$ $\text{rot} \vec{E} = 0$

si può definire lo scalare **potenziale elettrico** (fra due punti e quindi **differenza di potenziale**)

$$V_A - V_B = -\int_A^B \vec{E} \times d\vec{l} \quad (1.2)$$

$$\text{E quindi} \quad \vec{E} = -\text{grad } V \quad (1.3)$$

• Vettore induzione magnetica

$$B = \frac{dF_{m_{\max}}}{dq v} = \frac{dF_{m_{\max}}}{i dl} \quad (1.4)$$

dalla forza di Lorentz $d\vec{F}_m = dq \vec{v} \wedge \vec{B} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$ (1.5)

$d\vec{F}_m$ forza magnetica sulla carica $dq = i dt$ che si muove con velocità $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$

$i d\vec{l}$ visto come causa di \vec{B} si chiama **elemento di corrente**

Flusso magnetico per una superficie S $\phi = \int_S \vec{B} \times d\vec{S}$ (1.6)

• Scalare corrente di conduzione

in un conduttore di sezione S $i = \frac{dq}{dt}$ (1.7)

Vettore **densità di corrente di conduzione** \vec{J} : definito da $i = \int_S \vec{J} \times d\vec{S}$ (1.8)

$J = \frac{i}{S}$ se \vec{J} è costante e perpendicolare ad \vec{S}

1.3 - DAL VUOTO AI MATERIALI

Materiali dielettrici

Vettore **spostamento elettrico**

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.9) \quad \epsilon = \epsilon_o \epsilon_r \quad \epsilon \text{ costante dielettrica}$$

ϵ_o costante dielettrica del vuoto
 ϵ_r costante dielettrica relativa

Materiali magnetici

Vettore **intensità di campo magnetico**

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \vec{M}}{\mu_o} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad (1.10) \quad \vec{M} \text{ vettore magnetizzazione}$$

$\mu = \mu_o \mu_r$ μ permeabilità magnetica
 μ_o permeabilità magnetica del vuoto
 μ_r permeabilità magnetica relativa

Materiali conduttori (ohmici)

$$\vec{J} = c \vec{E} \quad (\vec{E} = \rho \vec{J}) \quad (1.11) \quad c \text{ conducibilità specifica}$$

(ρ resistività, stesso simbolo di densità di carica)

1.4 - PROPRIETA' DEL CAMPO ELETTTRICO E DEL CAMPO MAGNETICO

$$\oint_S \vec{E} \times d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \oint_\tau \rho d\tau \quad (1.12)$$

teorema di **Gauss** in forma integrale: il flusso di \vec{E} (o di \vec{D}) attraverso la superficie S è uguale alla carica nel volume τ interno ad S (diviso ϵ per il campo \vec{E})

$$\oint_S \vec{D} \times d\vec{S} = Q = \oint_\tau \rho d\tau$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{div} \vec{D} = \rho \quad (1.13) \quad \text{teorema di Gauss in forma locale}$$

$$\oint_S \vec{B} \times d\vec{S} = 0 \quad (1.14) \quad \text{il flusso magnetico attraverso una superficie}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.15) \quad \text{chiusa è sempre nullo}$$

1.5 - PRINCIPIO DI CONTINUITA' DELLA CARICA ELETTRICA

$$(dQ)_{\text{interna}} + (dQ)_{\text{entrante}} = 0$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{\text{interna}} + \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{\text{entrante}} = 0 \quad \text{con riferimento alla variazione nel tempo}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, d\tau = - \int_S \vec{J} \times \vec{dS} \quad (1.16)$$

ρ densità di carica nel volume τ racchiuso dalla superficie S

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \vec{J} \quad \text{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \text{div} \left(\vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{densità di corrente di spostamento}$$

1.6 - LEGGI FONDAMENTALI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

• Induzione elettromagnetica (legge di Faraday)

$$e = \oint \vec{E} \times \vec{dl} = - \frac{d\phi_e}{dt} \quad (1.18) \quad \text{forma integrale: } e \text{ forza elettromotrice indotta}$$

lungo una linea l con cui si concatena il flusso magnetico ϕ_e

$$\text{rot} \vec{E}_i = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.19) \quad \text{forma locale}$$

\vec{E}_i campo elettrico indotto in un punto dalla variazione di \vec{B}

Da $\oint \vec{E} \times \vec{dl} = e$ ovviamente $\oint \vec{E}_i \times \vec{dl} \neq 0$ e $\text{rot} \vec{E}_i \neq 0$

• Circuitazione magnetica (legge di Ampere)

$$\oint \vec{H} \times \vec{dl} = i_c \quad (1.20) \quad \text{forma integrale: la circuitazione di } \vec{H} \text{ lungo la linea}$$

chiusa l è uguale alla corrente concatenata con la linea

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.21) \quad \text{forma locale: compaiono sia la densità di corrente}$$

di conduzione, sia quella di spostamento.

1.7 - POTENZIALI ELETTRICO E MAGNETICO RITARDATI

(mezzi in quiete)

Dalle equazioni di Maxwell

$$\text{rot} \vec{E}_i = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.22)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.23)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.24) \quad \implies \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (1.26) \quad \vec{A} \text{ pot. vettore magnetico}$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (1.25)$$

$$\text{Sostituendo (1.26) in (1.22)} \quad \text{rot} \left(\vec{E}_i + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.27)$$

Si può definire un nuovo **potenziale scalare elettrico U**

$$\vec{E}_i + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} U \quad \vec{E}_i = -\text{grad} U + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.28)$$

Sostituendo (1.26) e (1.28) in (1.23) e (1.25)

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \mu \vec{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad} U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (1.29)$$

$$\text{div} \left(\text{grad} U + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = - \frac{\rho}{\varepsilon}$$

e sostituendo $\text{div} \text{grad}(\) = \Delta(\)$ e $\text{rot} \text{rot}(\) = \text{grad} \text{div}(\) - \Delta(\)$

$$\text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad} U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (1.30)$$

$$\Delta U + \text{div} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = - \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Con la “**scelta di Lorentz**”: $\text{div} \vec{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} = 0$ si ottiene

$$\Delta \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (1.31)$$

$$\Delta U - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\varepsilon}$$

soluzione di queste equazioni sono i così detti **potenziali ritardati**:

$$\vec{A}(P_2, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(P_1, t - \frac{r}{c})}{r} d\tau \quad (1.32)$$

$$U(P_2, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon} \int_V \frac{\rho(P_1, t - \frac{r}{c})}{r} d\tau$$

Le sorgenti \vec{J} e ρ sono date nel punto P_1 del dominio τ a distanza r da P_2 .

L'effetto dei termini $\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$ e $\mu\epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ è che i potenziali in P_2 sono ritardati nel tempo

di r/c $\left(c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right)$.

1.8 - EQUAZIONI DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

Sempre dalle equazioni di Maxwell si può ricavare il campo elettromagnetico senza introdurre i potenziali. Per semplicità si considerano le equazioni nel vuoto (\vec{J} e ρ nulle):

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{div} \vec{D} &= 0 \\ \text{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \Delta \vec{H} &= \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.34)$$

con $c_o = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}}$ velocità della luce nel vuoto

Una soluzione periodica particolarmente semplice (onda polarizzata rettilinearmente, x direzione di propagazione, quindi campo longitudinale H_x , E_x nullo, x - y piano di oscillazione, x - z piano di polarizzazione) è

$$\begin{aligned} E_y &= E_M \sin \omega \left(\frac{x}{c_o} - t \right) & \text{periodo } T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} & \text{lunghezza d'onda } \lambda &= c_o T = \frac{c_o}{f} \\ E_z &= 0 \\ H_x &= -\frac{1}{\mu_o c_o} E_M \sin \omega \left(\frac{x}{c_o} - t \right) \\ H_y &= 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

1.9 - CAMPO ELETTRICO STAZIONARIO

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \vec{J} = 0$$

ρ unica sorgente

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= 0 & \text{div} \vec{D} &= \rho \\ \text{rot} \vec{H} &= 0 & \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

1.10 - CAMPO MAGNETICO STAZIONARIO

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \rho = 0$$

\vec{J} unica sorgente

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= 0 & \text{div} \vec{D} &= 0 & \text{nei conduttori } \vec{J} &= c \vec{E} & \text{e quindi } \text{div} \vec{J} &= 0 \\ \text{rot} \vec{H} &= \vec{J} & \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

1.11 - CAMPI ELETTRICO E MAGNETICO QUASI STAZIONARI

$$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$$

Nello spazio si distinguono tre domini in base alle possibili ipotesi semplificative:

a) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

Il campo elettrico dovuto a cariche funzioni del tempo è indipendente da \vec{B} :
 $\text{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{div} \vec{D} = \rho(t)$ (1.38)

Per poter trascurare $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ deve essere dalla (1.28) $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \ll \text{grad} U$

Se le grandezze variano sinusoidalmente ($f = F \cos \omega t \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -F \omega \sin \omega t$)

$$|\omega A| \ll |\text{grad} U| \quad (1.39)$$

b) $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$

Il campo magnetico dovuto a correnti funzioni del tempo è indipendente da \vec{D} :
 $\text{rot} \vec{H} = \vec{J}(t) \quad \text{div} \vec{B} = 0$ (1.40)

Per poter trascurare $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ deve essere dalla (1.23) $\vec{J} \gg \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Se le grandezze variano sinusoidalmente $|J| \gg |\omega D|$ (1.41)

c) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ Si ricade nel caso di campo elettrico stazionario (1.37)

Per la verifica delle ipotesi dei casi a) e b) con riferimento alla soluzione dei campi tramite i potenziali si deve poter considerare istantanea la creazione dei potenziali a distanza r :

$$t - \frac{r}{c} \approx t$$

quindi nelle formule (1.32) si deve ipotizzare:

$$\rho\left(P_1, \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) - \rho(P_1, t) \ll \rho(P_1, t) \quad (1.42)$$

$$\vec{J}\left(P_1, \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) - \vec{J}(P_1, t) \ll \vec{J}(P_1, t)$$

Sviluppando in serie le differenze come derivate per l'intervallo di variazione

$$\left| \frac{\partial \rho(t) r}{\partial t c} \right| \ll |\rho(t)| \quad (1.43)$$

$$\left| \frac{\partial J(t) r}{\partial t c} \right| \ll |J(t)|$$

Considerando grandezze sinusoidali

$$\left| \omega \rho \frac{r}{c} \right| \ll |\rho| \quad (1.44)$$

$$\left| \omega J \frac{r}{c} \right| \ll |J|$$

quindi $\left| \omega \frac{r}{c} \right| \ll 1$ $|\omega r| \ll |c|$ $|2\pi f r| \ll |c|$ $\left| 2\pi \frac{r}{T} \right| \ll |c|$

Introducendo la lunghezza d'onda $\lambda = cT$ si ha in sintesi $r \ll \lambda$ (1.45)

Alcuni valori: nel vuoto $c_0 = 300 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

f	T	λ
1kHz	10^{-3} s	$3 \cdot 10^5 \text{ m} = 300 \text{ km}$
1MHz	10^{-6} s	$3 \cdot 10^2 \text{ m} = 300 \text{ m}$
1GHz	10^{-9} s	$3 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 300 \text{ mm}$

2 - ELETTRODINAMICA STAZIONARIA (CIRCUITI ELETTRICI IN CORRENTE CONTINUA)

2.1 – BIPOLI ELETTRICI

Valgono le equazioni $\text{rot } \vec{E} = 0$ $\text{div } \vec{J} = 0$.

Si possono definire come variabili del sistema a due poli A e B:

tensione V (opp. **differenza di tensione** $V_A - V_B$) e

corrente I

Nel piano V, I è data una **caratteristica volt-ampermetrica**. In Elettrotecnica la curva viene schematizzata con una retta.

Se passa per l'origine \Rightarrow **bipolo passivo**, se non passa per l'origine \Rightarrow **bipolo attivo**

Sensi di V ed I coordinati secondo la:

convenzione da utilizzatore: tensione $V_A - V_B$, corrente I da A verso B

convenzione da generatore: tensione $V_A - V_B$, corrente I da B verso A

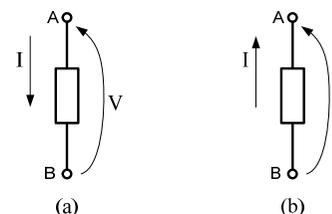


Fig. 2.1 – Convenzione dell'utilizzatore (a) e del generatore (b).

2.1.1 – Bipoli passivi (convenzione da utilizzatore)

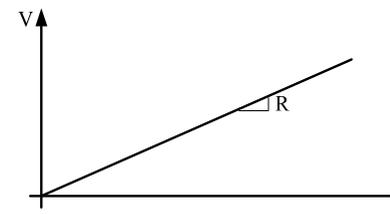


Fig. 2.2 – Caratteristica V/I di una resistenza.

Definizione del parametro **resistenza** (tg della retta) $R = \frac{V_A - V_B}{I} \quad (2.1)$

Equazione del bipolo $V_A - V_B = RI \quad (2.2)$

Un bipolo realizzato per avere una opportuna resistenza prende il nome di resistore. Oltre al valore della resistenza è data la potenza dissipabile.

Per geometrie particolari il parametro R può essere espresso in funzione dei parametri geometrici e della conducibilità c (o resistività ρ) del materiale.

Esempio 1: resistenza longitudinale di un filo conduttore di lunghezza l , sezione S :

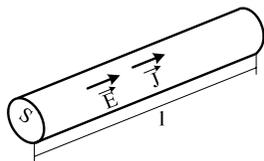


Fig. 2.3 – Esempio 1.

$$R = \frac{\int_A \vec{E} \times d\vec{l}}{\int_S \vec{J} \times d\vec{S}} = \frac{El}{JS} = \frac{\rho l}{JS} = \rho \frac{l}{S} \quad (2.3)$$

Alcuni valori di ρ : $\rho_{Cu} = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega m$ $\rho_{Al} = 2.8 \cdot 10^{-8} \Omega m$.

Il valore della resistività dei conduttori varia con la temperatura:

$$\rho_T = \rho_{T_0} (1 + \alpha \Delta T) \quad \alpha = \frac{1}{270} = 0.4\%$$

Se il conduttore è percorso da corrente si dissipa la potenza RI^2 , che inizia ad innalzare la temperatura Θ del conduttore stesso rispetto alla temperatura ambiente Θ_a . La temperatura si stabilizza ($\Theta = \Theta_\infty$) quando la potenza dissipata viene trasmessa tutta all'ambiente circostante. Dal bilancio di energia termica:

$$RI^2 dt = cM d(\Theta - \Theta_a) + \lambda S_T (\Theta - \Theta_a) dt$$

(c calore specifico, M massa, S_T superficie di scambio termico, λ coefficiente globale di trasmissione del calore), a regime termico si ha:

$$RI^2 = \lambda S_T (\Theta_\infty - \Theta_a) \quad \text{e quindi} \quad \Theta_\infty - \Theta_a = \frac{RI^2}{\lambda S_T}$$

La temperatura del conduttore, dipendente dal valore di corrente, è limitata dal tipo di materiale che lo isola. Questo fa sì che la corrente abbia un valore limite (**portata del conduttore**).

Si osservi che la sovra-temperatura rispetto all'ambiente è proporzionale alla potenza dissipata e alla superficie di scambio. Utilizzando i parametri r raggio del conduttore e J densità di corrente, la sostituzione di R con la (2.3) porta alla proporzionalità:

$$\Theta_\infty - \Theta_a = \frac{\rho \frac{l}{\pi r^2} (\pi r^2 J)^2}{\lambda l 2\pi r} \propto r J^2$$

Questo significa che la densità di corrente a cui i conduttori possono lavorare dipende dal loro raggio e precisamente $J \propto 1/\sqrt{r} \propto 1/\sqrt[3]{S}$. Qualche esempio:

$$\begin{aligned} S=1 \text{ mm}^2 & \quad I_{MAX}=9 \text{ A}; \\ S=4 \text{ mm}^2 & \quad I_{MAX}=30 \text{ A}; \\ S=10 \text{ mm}^2 & \quad I_{MAX}=52 \text{ A}. \end{aligned}$$

Esempio 2: resistenza trasversale di un cavo schermato di lunghezza l , raggio interno R_1 , esterno R_2 , resistività dell'isolante ρ :

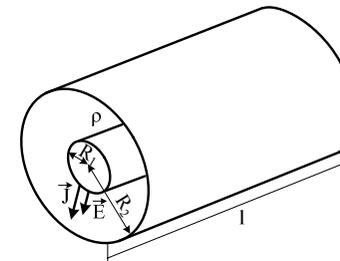


Fig. 2.4 – Esempio 2.

$$\begin{aligned} I &= \int_S \vec{J}_r \times d\vec{S} = J_r 2\pi r l & J_r &= \frac{I}{2\pi r l} \\ R &= \frac{\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_r \times dr}{I} = \frac{\int_{R_1}^{R_2} \rho \vec{J}_r \times dr}{I} = \frac{\rho \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{2\pi r l} dr}{I} = \frac{\rho}{2\pi l} \lg \frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Valori di ρ di isolanti: $\rho = 10^{10-14} \Omega m$

Esempio 3: resistenza fra due semisfere, raggio interno R_1 , esterno R_2 , resistività del terreno fra le due semisfere ρ (schematizzazione di una **presa di terra**). R_2 viene poi fatto tendere all'infinito:

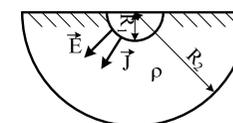


Fig. 2.5 – Esempio 3.

$$\begin{aligned} I &= \int_S \vec{J} \times d\vec{S} = J_r 2\pi r^2 & J_r &= \frac{I}{2\pi r^2} \\ R &= \frac{\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_r \times dr}{I} = \frac{\int_{R_1}^{R_2} \rho \vec{J}_r \times dr}{I} = \frac{\rho \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{2\pi r^2} dr}{I} = \frac{\rho}{2\pi} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \\ R &= \frac{\rho}{2\pi R_1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

La resistività del terreno dipende dal grado di umidità. Per le norme CEI $R < 20 \Omega$

2.1.2 – Bipoli attivi (convenzione da generatore)

Intersezione della retta con l'asse V $I=0$ $V=E$ **fem a vuoto**

Intersezione della retta con l'asse I $V=0$ $I=I_{cc}$ **corrente di corto circuito**

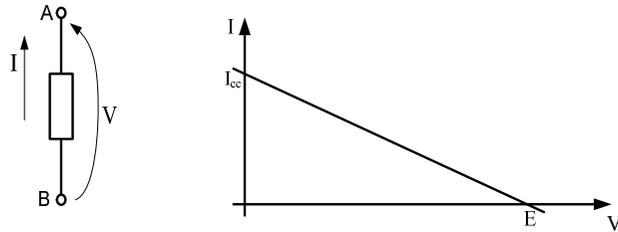


Fig. 2.6 – Convenzione del generatore e caratteristica I/V di un bipolo attivo.

Equazione con I come asse delle ascisse $V = E - \frac{E}{I_{cc}} I$ (2.6)

Equazione con V come asse delle ascisse $I = I_{cc} - \frac{I_{cc}}{E} V$ (2.7)

Definizione dei parametri **resistenza** e **conduttanza** (tg e cotg della retta)

$$R = \frac{E}{I_{cc}} \quad G = \frac{I_{cc}}{E} \quad (2.8)$$

Equazioni

$V = E - RI$ (2.9) rappresentazione del bipolo come **generatore equivalente indipendente di tensione**

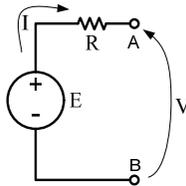


Fig. 2.7 – Generatore equivalente indipendente di tensione.

$I = I_{cc} - GV$ (2.10) rappresentazione del bipolo come **generatore equivalente indipendente di corrente**

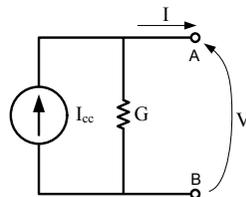


Fig. 2.8 – Generatore equivalente indipendente di corrente.

Bipoli attivi degeneri: $V=E$ (2.11) **generatore ideale di tensione**

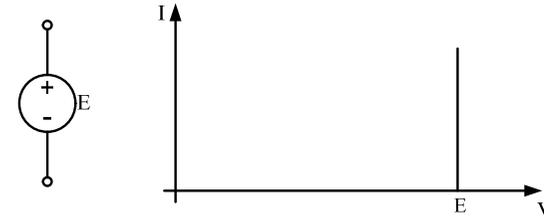


Fig. 2.9 – Generatore ideale di tensione e la sua caratteristica I/V.

$I=I_{cc}$ (2.12) **generatore ideale di corrente**

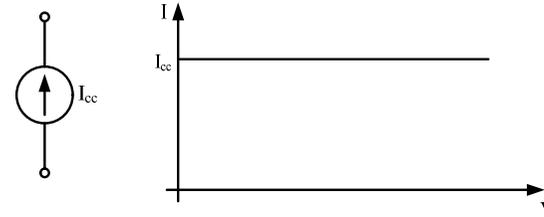


Fig. 2.10 – Generatore ideale di corrente e la sua caratteristica I/V.

2.2 – COMPORTAMENTO ENERGETICO DEI BIPOLI

Dalle definizioni di tensione e campo elettrico $V_A - V_B = -\int_A^B \vec{E} \times \vec{dl} = -\int_A^B \frac{dF_e}{dq} \times \vec{dl}$

si ha l'energia $(V_A - V_B) dq = \int_B^A dF_e \times \vec{dl} = dW$ (2.13)

e la potenza $(V_A - V_B) \frac{dq}{dt} = (V_A - V_B) I = \frac{dW}{dt} = P$ (2.14)

Per i **bipoli passivi** (conv. utilizzatore)

$$(V_A - V_B) I = VI = RI^2 = GV^2 \quad (2.15)$$

$(V_A - V_B) I = VI$ potenza entrante nel bipolo

$RI^2 = GV^2$ potenza utilizzata nel bipolo

Per i **bipoli attivi** (conv. generatore)

$$(V_A - V_B) I = VI = EI - RI^2 = I_{cc} V - GV^2$$

VI potenza uscente dal bipolo (se $VI > 0$)

EI potenza fornita al bipolo dal generatore eq. di tensione (se $EI > 0$)

RI^2 potenza che rimane nel bipolo (sempre > 0)

$$\eta = \frac{VI}{EI} = \frac{V}{E}$$

rendimento della trasformazione energetica (valore massimo 1 a vuoto)

$I_{cc}V$ potenza fornita al bipolo dal generatore eq. di corrente (se $VI_{cc}>0$)
 GV^2 potenza che rimane nel bipolo (sempre >0)
 $\eta = \frac{VI}{I_{cc}V} = \frac{I}{I_{cc}}$ rendimento di trasformazione energetica (valore massimo 1
 in corto circuito)

I bipoli rappresentati con generatore di tensione e di corrente non sono equivalenti rispetto alle potenze interne.

2.3 – COLLEGAMENTI PARTICOLARI FRA BIPOLI – BIPOLI EQUIVALENTI

Due o più bipoli possono essere collegati in **serie (stessa corrente)** o in **parallelo (stessa tensione)**. Il **bipolo equivalente** ha la stessa caratteristica volt-amperometrica. Se passivi $R_{eq}=R_1+R_2$ (2.16) in serie

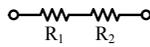


Fig. 2.11 – Collegamento serie di due bipoli passivi.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad G_{eq} = G_1 + G_2 \quad (2.17) \quad \text{in parallelo}$$

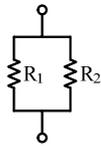


Fig. 2.12 – Collegamento parallelo di due bipoli passivi.

Se attivi $V_1 = E_1 - R_1I$ $V_2 = E_2 - R_2I$
 $V = V_1 + V_2 = (E_1 + E_2) - (R_1 + R_2)I = E_{eq} - R_{eq}I$ (2.18) in serie

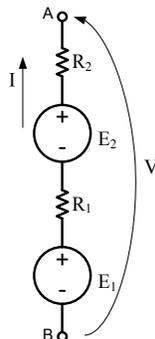


Fig. 2.13 – Collegamento serie di due bipoli attivi.

$$I_1 = I_{cc1} - G_1V \quad I_2 = I_{cc2} - G_2V$$

$$I = I_1 + I_2 = (I_{cc1} + I_{cc2}) - (G_1 + G_2)V = I_{cc,eq} - G_{eq}V \quad (2.19) \quad \text{in parallelo}$$

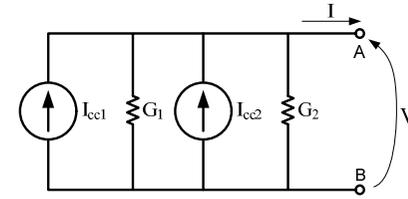


Fig. 2.14 – Collegamento parallelo di due bipoli attivi.

2.4 – COLLEGAMENTI FRA BIPOLI (RETI ELETTRICHE)

Si definiscono **lati** (o rami, in numero di l) della rete i singoli bipoli, **nodi** (in numero di n) i punti in cui si uniscono più bipoli, **tagli** le superfici chiuse che tagliano più bipoli. La superficie chiusa può comprendere un solo nodo. Date le caratteristiche dei bipoli, l'**analisi della rete** consiste nel determinare le incognite **tensioni (o potenziali)** e **correnti** degli l lati.

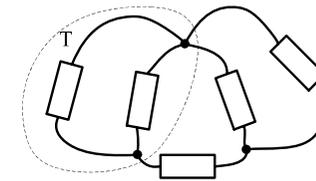


Fig. 2.15 – Rete elettrica e taglio generico T.

Equazioni topologiche delle reti:

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \text{da cui per un percorso chiuso (maglia)} \quad \sum V_i = 0$$

$$\text{div } \vec{J} = 0 \quad \text{da cui per una superficie chiusa (taglio)} \quad \sum I_i = 0 \quad (2.20)$$

a) Analisi generale

Se la seconda equazione è applicata ai nodi e non a generici tagli, si ha il metodo generale di analisi delle reti per cui le equazioni che legano le $2l$ incognite sono:

$$V_i = E_i - R_i I_i \quad l \text{ equazioni di bipolo (a)}$$

$$\sum V_i = 0 \quad m \text{ equazioni di maglia (b)} \quad (2.21)$$

$$\sum I_i = 0 \quad n-1 \text{ equazioni di nodo (c)}$$

se i bipoli sono rappresentati come generatori di tensione;

$$\begin{aligned}
I_l &= I_{ccl} - G_l V_l && l \text{ equazioni di bipolo (a)} \\
\sum V_l &= 0 && m \text{ equazioni di maglia (b)} \\
\sum I_l &= 0 && n-1 \text{ equazioni di nodo (c)}
\end{aligned}
\tag{2.22}$$

se i bipoli sono rappresentati come generatori di corrente.

Le equazioni di nodo sono $n-1$ poiché dopo $n-1$ tagli rimane la superficie esterna ai tagli precedenti, le equazioni di maglia sono $m=l-(n-1)$ per l'unicità della soluzione del sistema lineare che deve avere un numero di equazioni uguale al numero delle incognite.

d) Analisi con i potenziali di nodo

Se le incognite potenziali di lato si esprimono attraverso i potenziali di nodo riferiti ad un nodo (0) preso come riferimento: $V_l = V_{nH0} - V_{nK0}$ le equazioni di maglia (b) $\sum V_l = \sum (V_{nH0} - V_{nK0})$ sono automaticamente verificate e le incognite potenziali di nodo sono $n-1$:

$$\begin{aligned}
V_{nH0} - V_{nK0} &= E_l - R_l I_l && l \text{ equazioni di bipolo (a)} \\
\sum I_l &= 0 && n-1 \text{ equazioni di nodo (c)}
\end{aligned}
\tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
I_l &= I_{ccl} - G_l (V_{nH0} - V_{nK0}) && l \text{ equazioni di bipolo (a)} \\
\sum I_l &= 0 && n-1 \text{ equazioni di nodo (c)}
\end{aligned}
\tag{2.24}$$

c) Analisi su base nodi

Sostituendo nelle (2.24) le equazioni dei bipoli (a) nelle equazioni di nodo (c) si ottengono $n-1$ equazioni nelle incognite V_{H0}

$$\begin{aligned}
\sum (I_{ccl} - G_l (V_{nH0} - V_{nK0})) &= 0 \\
\sum I_{ccl} &= \sum G_l (V_{nH0} - V_{nK0}) && n-1 \text{ equazioni di nodo (c)}
\end{aligned}
\tag{2.25}$$

CASO PARTICOLARE (PRINCIPIO DI MILLMANN): rete a due nodi H e 0

$$\sum I_{ccl} = (V_H - V_0) \sum G_l \quad 1 \text{ sola equazione di nodo } (V_H - V_0) = \frac{\sum I_{ccl}}{\sum G_l}
\tag{2.26}$$

d) Analisi con le correnti di lato (principi di Kirchhoff)

Sostituendo nelle (2.21) le equazioni dei bipoli (a) nelle equazioni di maglia (b) si ottengono $m+(n-1)=l$ equazioni nelle incognite I_l

$$\begin{aligned}
\sum (E_l - R_l I_l) &= 0 && \sum E_l = \sum R_l I_l \quad m \text{ equazioni di maglia (b)} \\
\sum I_l &= 0 && n-1 \text{ equazioni di nodo (c)}
\end{aligned}
\tag{2.27}$$

e) Analisi su base maglie

Se alle incognite correnti di lato si sostituiscono le m incognite correnti di maglia $I_l = I_{mH} - I_{mK}$ le equazioni di nodo (c) $\sum I_m = 0$ sono automaticamente verificate:

$$\sum E_l = \sum R_l I_m \quad m \text{ equazioni di maglia (b)}
\tag{2.28}$$

CASO PARTICOLARE rete a una sola maglia:

$$\sum E_l = I_m \sum R_l \quad 1 \text{ sola equazione di maglia} \quad I_m = \frac{\sum E_l}{\sum R_l}
\tag{2.29}$$

f) Analisi con scrittura automatica delle equazioni

Le equazioni ai nodi $\sum I_l = 0$ si esplicitano tramite la **matrice di incidenza** $\|C\|$ che ha $n-1$ righe ed l colonne (con coefficienti 1 per correnti entranti nel nodo, -1 uscenti, 0 se la corrente non interessa il nodo):

$$\|C\| \|I_l\| = 0
\tag{2.30}$$

Le equazioni alle maglie $\sum V_l = 0$ si esplicitano tramite la **matrice di appartenenza** $\|M\|$ che ha m righe ed l colonne (con coefficienti 1 per tensioni appartenenti alla maglia percorsa destroyed, -1 in senso inverso, 0 se non appartenente alla maglia):

$$\|M\| \|V_l\| = 0
\tag{2.31}$$

La matrice che moltiplicata per il vettore colonna della correnti di maglia permette di ottenere le correnti di lato è la trasposta della matrice di appartenenza. La matrice che moltiplicata per il vettore colonna della tensioni di nodo permette di ottenere le tensioni di lato è la trasposta della matrice di incidenza.

$$\|I_l\| = \|M^T\| \|I_m\|
\tag{2.32}$$

$$\|V_l\| = \|C^T\| \|V_n\|$$

Le l equazioni dei bipoli espresse con generatori di tensione o di corrente portano alla trascrizione automatica delle equazioni su base maglie o delle equazioni su base nodi:

$$\|V_l\| = \|E_l\| - \|R_l\| \|I_l\| \quad \|R_l\| \text{ matrice diagonale } l \times l \text{ delle resistenze di lato}$$

$$\text{Sostituendo nella } \|M\| \|V_l\| = 0 \text{ e ponendo } \|I_l\| = \|M^T\| \|I_m\|$$

$$\|M\| \|E_l\| = \|M\| \|R_l\| \|I_l\| = \|M\| \|R_l\| \|M^T\| \|I_m\|
\tag{2.33}$$

$$\|M\| \|E_l\| = \|E_m\| \quad \text{fem di maglia}$$

$$\|M\| \|R_l\| \|M^T\| = \|R_m\| \quad \text{nuova matrice } m \times m \text{ di resistenze}$$

$$\|E_m\| = \|R_m\| \|I_m\|$$

La matrice simmetrica di resistenze $\|R_m\|$ ha come diagonale le resistenze di maglia, gli altri termini a_{hk} sono, con segno -, le resistenze comuni alle maglie h e k .

$$|I_i| = |I_{ccl}| - \|G_i\| |I_i| \quad \|G_i\| \text{ matrice diagonale } l \times l \text{ delle conduttanze di lato}$$

$$\text{Sostituendo nella } \|C\| |I_i| = 0 \text{ e ponendo } |V_i| = \|C^T\| |V_n|$$

$$\|C\| |I_{ccl}| = \|C\| \|G_i\| |V_i| = \|C\| \|G_i\| \|C^T\| |V_n| \quad (2.34)$$

$$\|C\| |I_{ccl}| = \|I_{ccn}\| \quad \text{correnti di corto circuito di nodo}$$

$$\|C\| \|G_i\| \|C^T\| = \|G_n\| \quad \text{nuova matrice } (n-1) \times (n-1) \text{ di conduttanze}$$

$$\|I_{ccn}\| = \|G_n\| |V_n|$$

La matrice simmetrica di conduttanze $\|G_n\|$ ha come diagonale le conduttanze di nodo, gli altri termini a_{HK} sono, con segno -, le conduttanze comuni ai nodi H e K .

g) Casi degeneri

Se sono presenti generatori ideali di tensione (equazione di lato $V_i = E_i$) è indeterminata I_i e manca una incognita tensione. Non si può eseguire l'analisi su base nodi. Se sono presenti generatori ideali di corrente (equazione di lato $I_i = I_{ccl}$) è indeterminata V_i e manca una incognita corrente. Non si può eseguire l'analisi su base maglie.

2.5 – BIPOLI CON GENERATORI DIPENDENTI

Si possono avere

- Voltage Controlled Voltage Source (VCVS) $V_h = aV_k$ a parametro adimen.
- Current Controlled Voltage Source (CCVS) $V_h = RI_k$ $R[\Omega]$
- Voltage Controlled Current Source (VCCS) $I_{cch} = GV_k$ $G[\Omega^{-1}]$
- Current Controlled Current Source (CCCS) $I_{cch} = aI_k$ a parametro adimen.

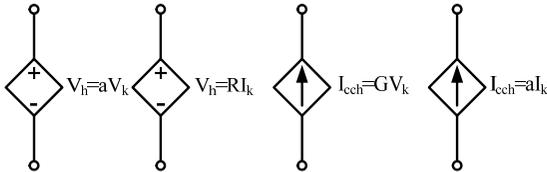


Fig. 2.16 – Generatori dipendenti.

Se il bipolo h con generatore non è degenere, al generatore di corrente si può sostituire il generatore equivalente di tensione e viceversa. Alla corrente o tensione del bipolo k che controlla il generatore si può sostituire la sua espressione in funzione della tensione o della corrente del bipolo stesso. Si può avere quindi un generatore dipendente con i parametri più adatti al metodo di analisi prescelto (generatore di tensione controllato in corrente per l'analisi su base maglie, generatore di corrente controllato in tensione per l'analisi su base nodi). Non è applicabile il metodo automatico f). Se il bipolo h è degenere valgono le esclusioni già viste.

2.6 – BIPOLO EQUIVALENTE AD UNA RETE A UNA PORTA

Una porzione della rete facente capo a due poli A e B è equivalente ad un bipolo attivo che ha la stessa caratteristica volt-amperometrica, quindi con la stessa tensione a vuoto E_{AB} (niente corrente fra A e B) e la stessa corrente di corto circuito I_{ccAB} (corrente fra A e B cortocircuitati).

Se non vi sono generatori dipendenti invece dei due valori E_{eqAB} e $I_{ccecqAB}$ si può calcolare uno dei due valori e la resistenza o la conduttanza equivalente R_{eqAB} o G_{eqAB} (resistenza o conduttanza fra A e B calcolata cortocircuitando i generatori indipendenti di tensione e togliendo quelli di corrente).

2.7 – TEOREMI DI THEVENIN E DI NORTON

Sono un'applicazione del bipolo equivalente. Se invece dell'analisi completa della rete interessa la corrente o la tensione di un particolare bipolo h , si vede la rete come sovrapposizione del ramo stesso e della rimanente parte di rete. Questa viene sostituita dal bipolo equivalente con generatore di tensione se interessa la corrente, con generatore di corrente se interessa la tensione.

$$I_h = \frac{E_h - E_{eqAB}}{R_h + R_{eqAB}} \quad (\text{Thevenin}) \quad (2.35)$$

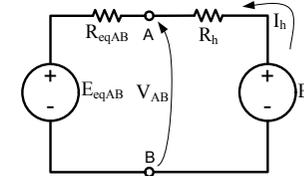


Fig. 2.17 – Bipolo equivalente di Thevenin.

$$V_h = \frac{I_{cch} + I_{ccqAB}}{G_h + G_{eqAB}} \quad (\text{Norton}) \quad (2.36)$$

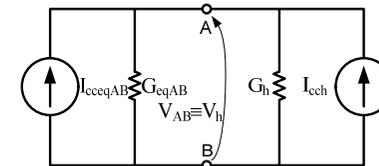


Fig. 2.18 – Bipolo equivalente di Norton.

3 – BIPOLO CAPACITA'

3.1 - DEFINIZIONE

Dati due conduttori (**armature del condensatore**) separati da un dielettrico con costante dielettrica ϵ , l'applicazione di una d.d.p. fra i due conduttori fa affluire cariche uguali ed opposte oppure la presenza di due cariche uguali ed opposte causa una d.d.p.. Il **parametro capacit ** viene definito sulla base delle equazioni dell'elettrostatica (1.36):

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (3.1)$$

Per alcune geometrie particolari la (3.1) pu  essere esplicitata in funzione della geometria delle armature e di ϵ .

Esempio 1: armature piane e parallele di superficie S a distanza d .

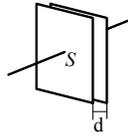


Fig. 3.1 – Armature piane e parallele.

$$C = \frac{\int_S \vec{E} \times d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E} \times d\vec{d}} = \frac{\epsilon ES}{El} = \epsilon \frac{S}{d} \quad (3.2)$$

Alcuni valori di ϵ : $\epsilon_r = 1 \div 5$ $\epsilon_o = 8.86 \cdot 10^{-12}$ F/m
 di S $S = 0.1 \div 10$ m²
 di d $d = 1 \div 100$ μ m

Esempio 2: capacit  di un cavo schermato di lunghezza l , raggio interno R_1 , esterno R_2 :

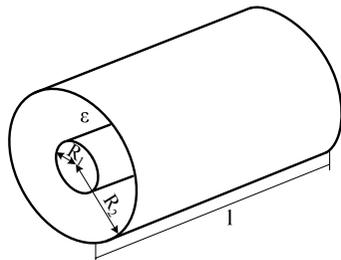


Fig. 3.2 – Cavo schermato coassiale.

$$Q = \epsilon \int_S \vec{E}_r \times d\vec{S} = \epsilon E_r 2\pi r l \quad E_r = \frac{Q}{2\pi \epsilon r l} \quad (3.3)$$

$$C = \frac{Q}{\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_r \times d\vec{r}} = \frac{Q}{\epsilon \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi \epsilon r l} dr} = \frac{2\pi \epsilon l}{\lg \frac{R_2}{R_1}}$$

per unit  di lunghezza $c = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon}{\lg \frac{R_2}{R_1}} \quad (3.4)$

possibili valori del rapporto $R_2/R_1 = 2 \div 10$ $c = 80 \div 24$ pF/m ($\epsilon = \epsilon_o$).

Esempio 3: capacit  fra due sfere, raggio interno R_1 , esterno R_2

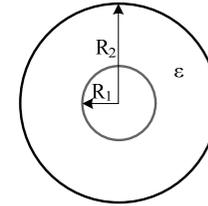


Fig. 3.3 – Condensatore sferico.

$$Q = \epsilon \int_S \vec{E} \times d\vec{S} = E_r 2\pi r^2 \quad E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \quad (3.5)$$

$$C = \frac{Q}{\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_r \times d\vec{r}} = \frac{Q}{\epsilon \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} dr} = \frac{4\pi \epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

Esempio 4: capacit  fra due conduttori rettilinei (tensione V_1 e V_2 cariche $+Q$ e $-Q$) di raggio R posti a distanza D ($R \ll D$) e lunghezza l

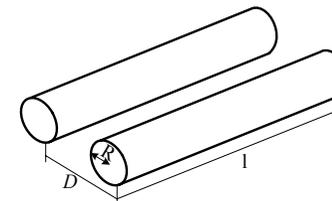


Fig. 3.4 – Conduttori rettilinei paralleli.

Viene usato per il calcolo un punto di riferimento D_o sull'interasse dei due conduttori

Campo elettrico in P a distanza r da uno dei conduttori $E = \frac{Q}{2\pi \epsilon r l}$

Potenziale in P dovuto al conduttore 1 $V_p(1) = \int_1^0 E_1 dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \int_1^0 \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \lg \frac{D_o}{r_1}$

Potenziale in P dovuto al conduttore 2 $V_p(2) = \int_2^0 E_2 dr = \frac{-Q}{2\pi\epsilon l} \int_2^0 \frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon l} \lg \frac{D_o}{r_2}$

Potenziale in P dovuto ai due conduttori $V_p(1+2) = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} (\lg \frac{D_o}{r_2} - \lg \frac{D_o}{r_1}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \lg \frac{r_2}{r_1}$

Potenziale del conduttore 1 $V_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \lg \frac{D}{R}$

Potenziale del conduttore 2 $V_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \lg \frac{R}{D} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon l} \lg \frac{D}{R}$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon l} 2 \lg \frac{D}{R}} = \frac{\pi\epsilon l}{\lg \frac{D}{R}} \quad (3.6)$$

per unità di lunghezza $c = \frac{C}{l} = \frac{\pi\epsilon}{\lg \frac{D}{R}}$ (3.7)

possibili valori del rapporto $D/R=10 \div 100$ $c=12 \div 6$ pF/m ($\epsilon=\epsilon_o$)

3.2 – ISOLAMENTO - RIGIDITA' DIELETTICA

Il condensatore ad armature piane e parallele è il sistema più semplice per introdurre il concetto base dell'isolamento: se si aumenta via via la differenza di tensione il campo elettrico $E = \frac{V_1 - V_2}{d}$ aumenta. Quando il suo valore raggiunge la **rigidità**

dieletrica E_{max} (esempio: aria secca $E_{max}=30kV/cm=3000000V/m=3kV/mm$) il dielettrico perde la sua proprietà di isolare le due armature (numero degli elettroni liberi trascurabile) e passa corrente fra le due armature.

Per questa geometria le relazioni fra campo elettrico, tensione e spessore dell'isolante si possono usare, introdotto un coefficiente di sicurezza $k>1$, come:

progetto $d = k \frac{V_1 - V_2}{E_{max}}$ (3.8)

verifica della tensione $V_1 - V_2 = \frac{d E_{max}}{k}$ (3.9)

verifica del materiale $E_{max} = k \frac{V_1 - V_2}{d}$ (3.10)

Con geometrie tali per cui il capo elettrico non può essere considerato costante, le relazioni sono più complesse.

Esempio cavo schermato: il campo elettrico è massimo sulla superficie del cavo

$E_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon R_1 l}$. Utilizzando la relazione (3.3) è:

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{C} = \frac{\epsilon E_1 2\pi R_1 l}{2\pi\epsilon l} = E_1 R_1 \lg(R_2 / R_1) \quad (3.11)$$

Le formule (3.8)-(3.10) hanno $R_1 \lg(R_2 / R_1)$ al posto di d .

3.3 - CONDENSATORI E CAPACITA' PARASSITE

I condensatori sono bipoli opportunamente costruiti per realizzare un valore di capacità e lavorare ad una tensione (nominale). A seconda della tecnologia si debbono usare con tensioni continue o alternate. Come effetto secondario, avendo il dielettrico una resistività non infinita, il condensatore presenta una piccola conduttanza $G = \frac{S}{\rho d}$ che, come schema circuitale, è da vedersi in parallelo con il

bipolo capacità.

Di capacità parassite si parla se si è in presenza di due conduttori, separati da un dielettrico, fra i quali si ha una differenza di potenziale. Si considerano in regime variabile e quindi andrebbero considerati gli effetti del campo elettromagnetico variabile (perciò anche induttanze parassite, se i conduttori sono sedi di correnti di conduzione, cfr. par. 4.4).

3.4 – CAMPO ELETTRICO QUASI STAZIONARIO: BIPOLO CAPACITA'

Dal par.1.10 a):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx 0$$

Il campo elettrico dovuto a cariche funzioni del tempo è indipendente da \vec{B} :

$$\text{rot} \vec{E}(t) = 0 \quad \text{div} \vec{D}(t) = \rho(t) \quad (1.38)$$

E' ancora definibile lo scalare **potenziale elettrico** (fra due punti A e B e quindi **differenza di potenziale**)

$$v_A - v_B = - \int_A^B \vec{E} \times d\vec{l} \quad (1.2)$$

Nel passaggio dal morsetto di ingresso all'interno del dielettrico la densità di corrente di conduzione \vec{J} diventa densità di corrente di spostamento $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ secondo la relazione:

$$\text{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \text{div} \left(\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.17)$$

Dalla definizione di capacità $C = \frac{q}{v_A - v_B}$, in presenza di una variazione di carica $dq = idt$ si

ha:

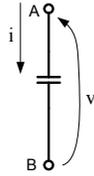


Fig. 3.5 – Bipolo capacità.

$$v_A - v_B = \frac{1}{C} \int dq = \frac{1}{C} \int idt \quad (3.12)$$

$$i = C \frac{d(v_A - v_B)}{dt}$$

Si osservi che se i è diretta da A verso B la tensione, visto il condensatore come un generatore, va da A a B. Se si vede il condensatore come un utilizzatore, la tensione va da B ad A (fig. 3.5).

3.5 – ENERGIA DEL CONDENSATORE

L'energia per caricare un condensatore è data da:

$$\int dE = \int_0^Q (v_A - v_B) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C (V_A - V_B)^2 \quad (3.13)$$

L'energia del condensatore ideale è conservativa. Tenendo conto della conduttanza, l'energia si dissipa sulla conduttanza.

3.6 – CARICA E SCARICA DEL CONDENSATORE

Si studia l'andamento nel tempo di un bipolo attivo, in genere rappresentato con generatore di tensione E e resistenza R chiuso su un condensatore.

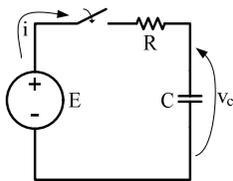


Fig. 3.6 – Circuito di carica del condensatore.

Il principio di conservazione dell'energia implica che la carica e la tensione del condensatore non possano subire discontinuità, per cui se la carica e la tensione iniziale del condensatore sono diverse (rispettivamente V_o e $Q_o = CV_o$) da quelle finali (rispettivamente E e $Q = CE$) nel circuito si avrà un transitorio di corrente e di tensione. L'equazione del circuito è:

$E = v_c + Ri$ con v_c tensione del condensatore visto come utilizzatore. Scegliendo come incognita la tensione del condensatore o la corrente si ha rispettivamente:

$$E = RC \frac{dv_c}{dt} + v_c \quad (3.14)$$

$$E = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt + Ri$$

La prima equazione ha come soluzione:

$$v_c = E + k_v e^{-\frac{t}{RC}}$$

imponendo la condizione iniziale $V_o = E + k_v = V_\infty + k_v$ e chiamata $\tau = RC$ la costante di tempo:

$$v_c = E + (V_o - E)e^{-\frac{t}{RC}} = V_\infty - (V_\infty - V_o)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.15)$$

Con condizione iniziale zero: $v_c = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.

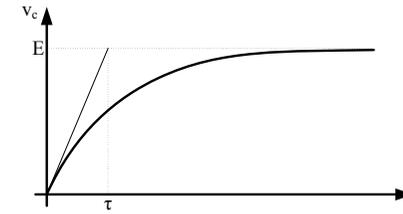


Fig. 3.7 – Andamento della tensione di carica di un condensatore con condizioni iniziali nulle.

La seconda equazione viene derivata e diventa:

$$0 = R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i$$

l'equazione differenziale è omogenea e quindi ha soluzione nulla a regime ($i_\infty = 0$) ed ha come soluzione:

$$i = k_i e^{-\frac{t}{RC}}$$

La condizione iniziale sulla corrente si trova imponendo $\frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 idt = V_o$ da cui

$$I_o = (E - V_o) / R. \text{ Si ha quindi:}$$

$$i = \frac{E - V_o}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_o - (I_o - I_o) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.16)$$

Con condizione iniziale zero: $i = (E / R) e^{-\frac{t}{RC}}$

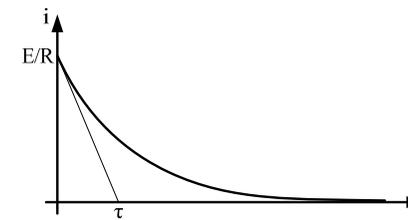


Fig. 3.8 – Andamento della corrente di scarica di un condensatore con condizioni iniziali nulle.

4 - BIPOLO INDUTTANZA

Se si considera la scarica del condensatore carico con tensione E sulla resistenza R le equazioni diventano:

$$0 = RC \frac{dv_c}{dt} + v_c \quad (3.17)$$

$$0 = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt + Ri$$

La seconda ha la soluzione precedente (la corrente fluisce in direzione opposta), la prima ha soluzione analoga (tensione finale $V_{\infty}=0$):

$$v_c = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

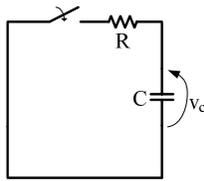


Fig. 3.9 – Circuito di scarica di un condensatore.

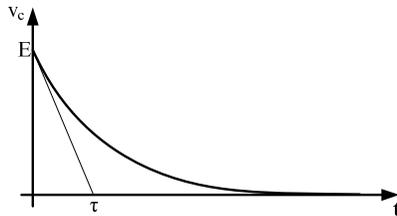


Fig. 3.10 – Andamento della tensione durante la scarica di un condensatore.

Si osservi che, essendo l'energia del condensatore una volta caricato $CE^2/2=QE/2$, durante la carica metà dell'energia QE fornita dal generatore viene dissipata sulla

resistenza, come si può verificare calcolando $\int_0^{\infty} Ri^2 dt = \int_0^{\infty} R \left(\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 dt$.

4.1 – CAMPO MAGNETICO STAZIONARIO

La forma locale della legge della circuitazione magnetica (legge di Ampere) diventa:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

mentre la forma integrale è sempre:

$$\oint_l \vec{H} \times d\vec{l} = I_c$$

con I_c solo corrente di conduzione.

Dall'equazione $\text{div} \vec{B} = 0$ si pone $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ e si ha l'equazione $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$, da cui, per permeabilità costante, il potenziale vettore magnetico stazionario:

$$\vec{A}(P_2, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}(P_1, t)}{r} d\tau \quad (4.1)$$

Per un filo rettilineo percorso da corrente $I=JS$ il potenziale è $\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} I \int_l \frac{d\vec{l}}{r}$ da cui la

$$\text{legge di Biot-Savard } \vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} I \int_l \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}. \quad (4.2)$$

Per alcune geometrie del circuito si calcola il campo magnetico con la legge integrale della circuitazione.

Esempio 1: campo interno ed esterno ad un conduttore rettilineo di raggio R , con densità di corrente $J=I/2\pi R$. Si sceglie una linea circolare con lo stesso asse del conduttore.

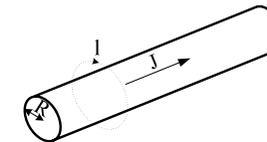


Fig. 4.1 – Conduttore rettilineo.

Campo interno:

$$\oint_l \vec{H} \times d\vec{l} = I_c = H 2\pi r = \int_s J dS = J \pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{I}{R^2} r^2$$

$$\text{e quindi } H = \frac{I}{2\pi R^2} r \quad (4.3)$$

Campo esterno:

$$\oint_l \vec{H} \times d\vec{l} = I_c = H 2\pi r = I$$

$$\text{e quindi } H = \frac{I}{2\pi r} \quad (4.4)$$

Esempio 2: campo interno ad un circuito solenoide ad asse circolare di lunghezza L con N spire. Si sceglie come linea l'asse del solenoide.

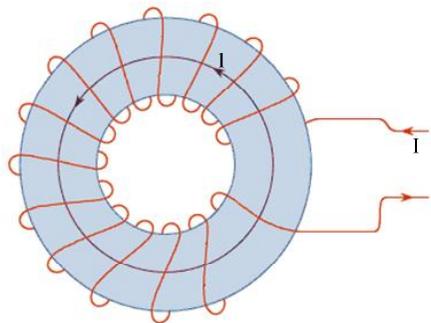


Fig. 4.2 – Solenoide ad asse circolare (toroide).

$$\oint \vec{H} \times d\vec{l} = I_c = Hl = NI$$

$$H = \frac{NI}{l} \quad (4.5)$$

Esempio 3: campo interno ad un circuito solenoide ad asse rettilineo di lunghezza L con N spire. Si sceglie come linea un rettangolo che concatena N_{AB} spire con un lato L_{AB} lungo l'asse del solenoide (1), due lati perpendicolari all'asse (2,3), il quarto lato esterno al solenoide (4).

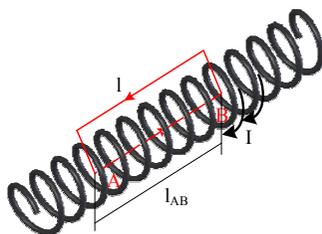


Fig. 4.3 – Solenoide ad asse rettilineo.

$$\oint \vec{H} \times d\vec{l} = \int_1 \vec{H} \times d\vec{l} + \int_2 \vec{H} \times d\vec{l} + \int_3 \vec{H} \times d\vec{l} + \int_4 \vec{H} \times d\vec{l} = Hl_{AB} + 0 + 0 + 0 = N_{AB}I$$

$$H = \frac{N_{AB}I}{l_{AB}} \quad (4.6)$$

Questi esempi evidenziano l'unità di misura di H: Ampere spire/lunghezza [As/m].

4.2 – CIRCUITI MAGNETICI

4.2.1 – Materiali ferromagnetici

La permeabilità magnetica μ non solo non è più costante (saturazione) con B, ma è una funzione di B a più valori (ciclo di isteresi).

Utilizzando un provino a forma di toro, asse l e sezione S , con avvolto un solenoide di N spire percorso da corrente I (geometria dell'**esempio 2**) si può ottenere il ciclo di isteresi: il solenoide è alimentato con corrente sinusoidale ed è $H = \frac{NI}{l}$, l'induzione B è misurata tramite la f.e.m. e indotta in un circuito ausiliario anch'esso avvolto sul provino: $B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1}{S} \int e dt$.

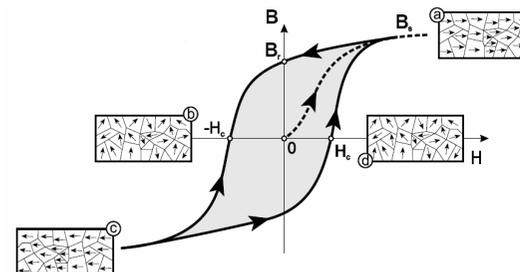


Fig. 4.4 – Ciclo di isteresi magnetica di un materiale ferromagnetico con rappresentazione grafica dei domini magnetici. La linea tratteggiata rappresenta la curva di prima magnetizzazione.

B_r magnetismo residuo e $-H_c$ campo coercitivo.

NOTA: Per far passare corrente nelle N spire si deve spendere energia contro la variazione di flusso concatenato nelle spire stesse, che è N volte la variazione di flusso $d\Phi$ in una sezione S del provino e quindi: $IND\Phi = INSd\Phi = IS HdB = \tau HdB$ (τ volume del provino). L'area del ciclo di isteresi è quindi l'energia per unità di volume spesa per far percorrere al materiale un ciclo di magnetizzazione, e moltiplicata per il numero di cicli al secondo (frequenza) la potenza per unità di volume.

Se al ferro sono aggiunte piccole percentuali di opportuni materiali, la forma del ciclo di isteresi è modificata e resa adatta alle applicazioni.

Materiali dolci: adatti ai regimi alternativi. Con l'aggiunta di Si il ciclo si assottiglia e si alza il valore di B di saturazione (fig. 4.5). Per questi materiali viene data la **curva di magnetizzazione B, H** (luogo dei vertici dei cicli di isteresi) e la cifra di perdita c (watt per unità di peso, invece che per unità di volume, quando $B=1$ T e $f=50$ Hz, valori usuali 1.5 W/kg e 3 W/kg).

Può fare comodo usare ancora in alcune relazioni la permeabilità assoluta μ o relativa μ_r : $\mu = \mu_0 \mu_r = \frac{B}{H}$, anche se non è costante (vedi figura 4.6(a)). Nel punto di massimo la permeabilità relativa è dell'ordine di $10^3 \div 10^4$.

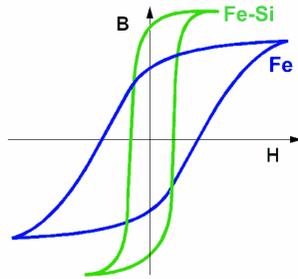


Fig. 4.5 – Confronto qualitativo fra i cicli di isteresi magnetica del ferro e del ferro-silicio.

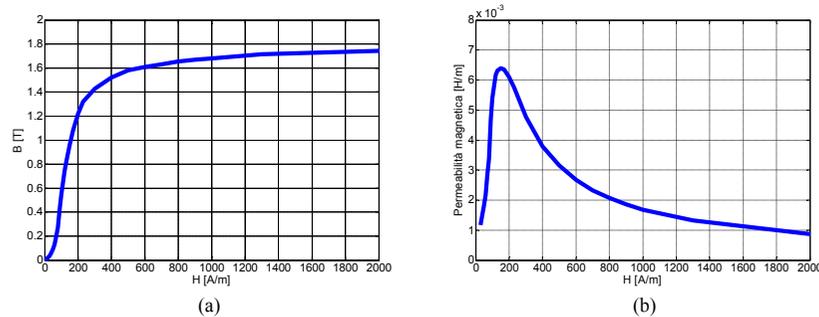


Fig. 4.6 – Curva di magnetizzazione di un tipo di acciaio (a) e relativo andamento della permeabilità magnetica (b).

Materiali duri: per magneti permanenti. Con l'uso di altri metalli il ciclo si ingrossa e si abbassa il valore di B di saturazione. Per questi materiali viene data la **curva di smagnetizzazione $-H, B$** .

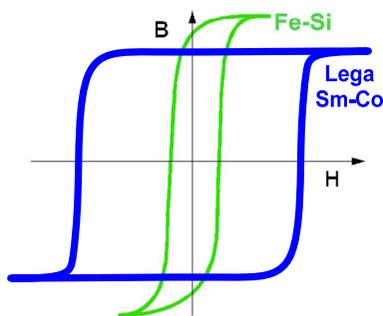


Fig. 4.7 – Confronto qualitativo fra le curve di magnetizzazione del Fe-Si e di una lega Sm-Co per magneti permanenti.

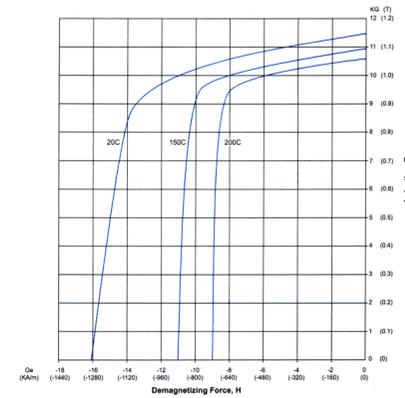


Fig. 4.8 – Curve di smagnetizzazione di una lega Sm-Co.

4.2.2 – Circuito magnetico ad una maglia

Zona di spazio occupata quasi interamente da materiale ferromagnetico per la quale si possa fare l'ipotesi che sia un tubo di flusso del vettore \vec{B} . Il circuito può essere formato da parti in materiale ferromagnetico (**tronchi**) e da parti in aria di lunghezza estremamente più piccola (**traferri**). Spire percorse da corrente (o parti costituite da magneti permanenti) magnetizzano il materiale. Lo schema più semplice è costituito da un toro di materiale ferromagnetico con sezione S , con asse di lunghezza l_{fe} e con un piccolo traferro di lunghezza l_o , su cui sono uniformemente avvolte N spire percorse da corrente I .

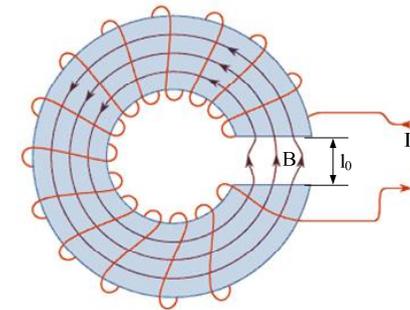


Fig. 4.9 – Circuito magnetico toroidale con traferro.

Si applicano le equazioni del campo magnetico:

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

Con l'ipotesi:

- flusso costante (niente dispersione di flusso) $B_{fe} = B_o = B$
- intensità di campo magnetico costante nel ferro H_{fe} e nel traferro H_o

$$\int \vec{H} \times d\vec{l} = H_{fe} l_{fe} + H_o l_o = NI \tag{4.7}$$

Generalizzando al caso di più tronchi, più traferri e più amperspire:

$$\int \vec{H} \times d\vec{l} = \sum H_{fe} l_{fe} + \sum H_o l_o = \sum Hl = \sum NI \quad (4.8)$$

Moltiplicando e dividendo per il prodotto $S\mu$ relativo a ciascun tronco:

$$\sum Hl \frac{S\mu}{S\mu} = \sum \mu HS \frac{l}{\mu S} = \sum \Phi \frac{l}{\mu S} = \Phi \left[\sum \frac{l}{\mu S} \right] = \sum NI \quad (4.9)$$

Nel circuito magnetico circola il flusso Φ ed in analogia con i circuiti elettrici si chiamano i termini

Ni **forza magnetomotrice**,

$$\frac{l}{\mu S} = R_m \text{ **riluttanza magnetica**}$$

$$\Phi \frac{l}{\mu S} = \Phi R_m \text{ **tensione magnetica**}$$

$$\Phi \left[\sum \frac{l}{\mu S} \right] = \Phi \sum R_m = \sum NI \text{ **legge di Hopkinson dei circuiti magnetici.**}$$

4.2.3 – Circuito magnetico a più maglie

Ogni ramo di circuito magnetico ha un suo flusso e dove confluiscono più rami si ha:

$$\sum \Phi = 0 \text{ insieme a} \quad (4.10)$$

$$\sum \Phi R_m = \sum NI \text{ queste equazioni sono formalmente simili ai principi di Kirchhoff.}$$

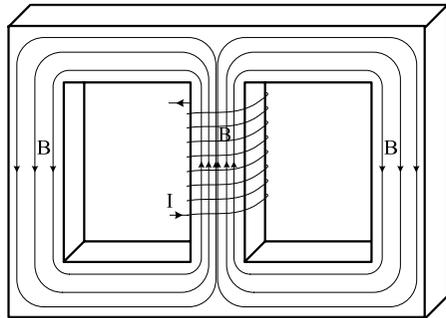


Fig. 4.10 – Circuito magnetico a più maglie.

L'analisi dei circuiti magnetici, per la presenza della permeabilità nei termini riluttanza, non può essere vista come soluzione di equazioni lineari, tramite le quali, assegnati i termini noti (f.m.m.) e note le caratteristiche del circuito (riluttanze) si possono determinare le incognite (flussi). Devono essere date o ipotizzate le grandezze magnetiche per assegnare, usando le curve di magnetizzazione dei materiali, valori attendibili alle riluttanze. Partendo da queste si possono calcolare le amperspire necessarie per la magnetizzazione.

Unica eccezione è il toro con traferro per il quale l'analisi può essere fatta graficamente come intersezione nel piano B_{fe}, H_{fe} fra la caratteristica magnetica e la retta:

$$H_{fe} l_{fe} + H_o l_o = H_{fe} l_{fe} + \frac{B}{\mu_o} l_o = H_{fe} l_{fe} + \frac{B_{fe}}{\mu_o} l_o = NI \quad (4.11)$$

Rispetto al punto di funzionamento senza traferro $H_{fe} = \frac{NI}{l_{fe}}$ (retta verticale), il traferro fa inclinare la retta del coefficiente angolare $-\frac{l_o}{\mu_o l_f}$ (fattore di smagnetizzazione).

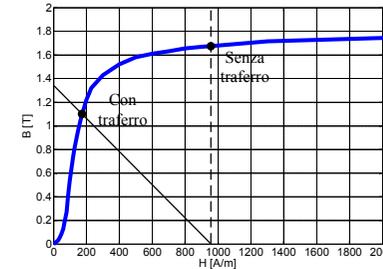


Fig. 4.11 – Smagnetizzazione in presenza di traferro.

4.3 – COEFFICIENTI DI AUTO E MUTUA INDUZIONE

Si definisce flusso magnetico concatenato con un circuito elettrico il flusso magnetico che attraversa una superficie S appoggiata ad una linea chiusa che si appoggia al circuito. Deve potersi ipotizzare che il circuito sia chiuso e filiforme.

$$\Phi_e = \int_S \vec{B} \times d\vec{S}$$

Nel flusso concatenato si distingue un **flusso proprio** Φ_{e11} prodotto dalla corrente del circuito stesso (I_1) e un **flusso mutuo** Φ_{e12} prodotto dalla corrente di un eventuale altro circuito (I_2).

$$\text{Coefficiente di auto induzione} \quad M_{11} = L_1 = \frac{\Phi_{e11}}{I_1} \quad (4.12)$$

$$\text{Coefficiente di mutua induzione} \quad M_{12} = \frac{\Phi_{e12}}{I_2} \quad (4.13)$$

Espressione generale (in assenza di materiali ferromagnetici: **formula di Neumann**)

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\int_{S_1} \vec{B}_2 \times d\vec{S}_1}{I_2} = \frac{\int_{S_1} \text{rot} \vec{A}_2 \times d\vec{S}_1}{I_2} = \frac{\oint_{l_1} \vec{A}_2 \times d\vec{l}_1}{I_2} = \frac{\oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\mu_o I_2 d\vec{l}_2}{4\pi r_{12}} \times d\vec{l}_1}{I_2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_1}{r_{12}} \quad (4.14)$$

Caso di circuiti elettrici sono avvolti su nuclei magnetici: se si usa la riluttanza del circuito magnetico, i coefficienti hanno espressioni semplici:

$$L_1 = \frac{\Phi_{e11}}{I_1} = \frac{N_1 \Phi_{11}}{I_1} = \frac{N_1 \frac{N_1 I_1}{R_m}}{I_1} = \frac{N_1^2}{R_m} \quad (4.15)$$

$$M_{12} = \frac{\Phi_{e12}}{I_2} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \frac{N_2 I_2}{R_m}}{I_2} = \frac{N_1 N_2}{R_m} \quad (4.16)$$

Il valore di questi coefficienti è legato al punto di lavoro del materiale ferromagnetico.

Caso di conduttori rettilinei e paralleli di diametro d e a distanza D percorsi da correnti $I_1=I$ ed $I_2=-I$.

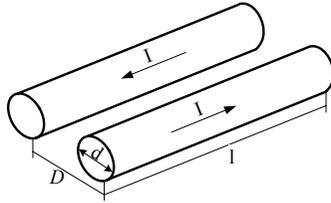


Fig. 4.12 – Conduttori rettilinei paralleli percorsi da correnti opposte.

Il flusso concatenato con un tratto lungo l è la somma dei flussi dovuti alle due correnti. Scelta come superficie appoggiata al circuito la superficie piana compresa fra i due fili (è trascurato il flusso all'interno dei fili), la geometria semplice permette il calcolo di H_1 ed H_2 che sono perpendicolari a questa superficie. Scelto un asse x sulla linea congiungente i due fili, le intensità di campo magnetico sono:

$$H_1 = \frac{I}{2\pi x} \quad H_2 = \frac{I}{2\pi(D-x)}$$

I flussi concatenati dovuti ai due campi sono uguali, quindi il flusso totale è:

$$\Phi_c = 2\Phi_1 = 2 \int_S \mu_0 H_1 dS = 2l \int_{d/2}^D \mu_0 \frac{I}{2\pi x} dx = \frac{l\mu_0 I}{\pi} \lg \frac{D}{d/2}$$

$$L = \frac{\Phi_c}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \lg \frac{D}{d/2} \quad (4.17)$$

Attribuendo a ciascun conduttore metà del coefficiente e per unità di lunghezza:

$$l = \frac{\mu_0}{2\pi} \lg \frac{D}{d/2} = \frac{\mu_0}{2\pi} (\lg 2 + \lg \frac{D}{d})$$

$$\text{Ordine di grandezza: } \frac{1.26 \times 10^{-6}}{2 \times 3.14} (\lg 2 + \lg \frac{D}{d}) = 10^{-6} \left[0.14 + 0.46 \lg \frac{D}{d} \right] \frac{H}{m} = \left[0.14 + 0.46 \lg \frac{D}{d} \right] \frac{mH}{km}$$

$$\text{per } D/d=10 \quad l=0.14+0.46=0.6mH/km, \text{ per } D/d=10^2 \quad l=0.14+0.92=1.06mH/km.$$

4.4– CAMPO MAGNETICO QUASI STAZIONARIO: BIPOLO INDUTTANZA, INDUTTANZE PARASSITE

Si è nel caso b) del cap. 1.11. Il campo magnetico è dovuto a correnti funzioni del tempo, ma si trascurano gli effetti della variazione del campo elettrico. Si considerano valide le relazioni fra campo magnetico e corrente ricavate nel caso di campo magnetico stazionario.

In un circuito con flusso concatenato dovuto alla sola corrente del circuito si ha una f.e.m.:

$$e = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -L \frac{di}{dt}, \quad (4.18)$$

definendo il coefficiente induttanza L come in (4.12).

Il legame fra tensioni e correnti di un sistema elettrico costituito da un generatore ideale di tensione E e da un filo con resistenza complessiva R (fig. 4.13) va scritto tenendo conto di questa f.e.m.:

$$E + e = E - \frac{d\Phi_c}{dt} = E - L \frac{di}{dt} = Ri \quad (4.19)$$

L'induttanza L è un parametro che caratterizza l'intero circuito: si parla di circuito reale con induttanza distribuita in quanto il contributo dell'induttanza non si può localizzare in una regione delimitata del circuito. Ciò deriva dal fatto che \vec{B} è distribuito ovunque all'interno della spira (fig. 4.13). Si osservi che nel circuito reale si perde, pertanto, il concetto di potenziale elettrico funzione del punto: spezzando il filo nei punti A e B , il potenziale v_{AB} non è definito, non essendo definito il flusso concatenato Φ_c (che dipende dalla linea arbitraria l con cui si chiude la linea di concatenamento, fig. 4.13).

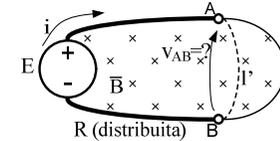


Fig. 4.13 – Circuito reale a parametri distribuiti.

Se il circuito comprende un certo numero di spire ravvicinate avvolte su un nucleo di materiale ferromagnetico (fig. 4.14), è possibile concentrare il campo \vec{B} in una regione ristretta dello spazio. In tal modo il campo di induzione magnetica assume valori elevati all'interno del nucleo rendendo trascurabile la sua entità nella regione di spazio circostante. Si può pensare l'induttanza propria del circuito concentrata nell'avvolgimento.

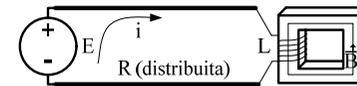


Fig. 4.14 – Circuito elettrico con resistenza distribuita e induttanza concentrata.

Il bipolo **induttore**, componente elettrico ideale caratterizzato dal parametro L e visualizzato in fig. 4.15, è realizzato avvolgendo molte spire su un supporto in genere ferromagnetico. Esso è sede di un flusso magnetico concatenato Φ_c con una linea aperta e non chiusa, poiché qualsiasi chiusura della linea (esterna al bipolo stesso) comporta una differenza trascurabile in Φ_c .

Il circuito di fig. 4.14 si può studiare mediante un modello a parametri concentrati (fig. 4.15): un generatore di tensione ideale E , un bipolo resistivo R che concentra la resistenza del circuito e il bipolo induttivo L .

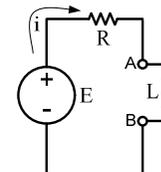


Fig. 4.15 – Circuito equivalente ohmico-induttivo.

Il legame analitico è rappresentato dall'equazione (4.19). Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine nella variabile i che non presenta difficoltà di soluzione (par. 4.5).

Un induttore è, quindi, un bipolo elettrico realizzato appositamente per introdurre nei circuiti elettrici l'effetto dovuto alla variazione di campo magnetico (f.e.m.). Esso è progettato per avere un valore ben definito di induttanza L : per avere alti valori si usano circuiti magnetici, eventualmente con adeguati traferri per diminuire l'effetto della non linearità del materiale ferromagnetico. Il filo percorso da corrente avrà ovviamente una resistenza (parassita) che sarà più o meno trascurabile a seconda dei valori delle altre resistenze del circuito.

Poiché la corrente di un circuito dà sempre luogo ad un campo magnetico, effetti induttivi saranno sempre presenti se il campo non è stazionario. Qualsiasi circuito ha quindi **induttanze parassite**, difficilmente calcolabili tranne in alcuni semplici casi (come per esempio nel caso trattato di fili rettilinei e paralleli). Nell'analisi dei circuiti queste induttanze parassite, così come le capacità parassite, vengono messe in conto o trascurate secondo quanto esposto nel par. 1.11.

4.5 – ENERGIA DELL'INDUTTORE

L'energia di un induttore si può calcolare utilizzando le grandezze integrali (correnti e tensioni). In presenza di una sola corrente:

$$\int dE = \int_0^{\infty} e i dt = \int_0^{\Phi_c} i d\Phi_c = \int_0^I i L di = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} I\Phi_c = \frac{1}{2} \frac{\Phi_c^2}{L} \quad (4.20)$$

In presenza di due correnti:

$$\int_0^{\Phi_c} i_1 d\Phi_{c1} = \int_0^I i_1 (L_1 di_1 + M di_2) = \int_0^I i_1 L_1 di_1 + \int_0^I i_1 M di_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + MI_1 I_2$$

$$\int_0^{\Phi_c} i_2 d\Phi_{c2} = \int_0^I i_2 (L_2 di_2 + M di_1) = \int_0^I i_2 L_2 di_2 + \int_0^I i_2 M di_1 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2$$

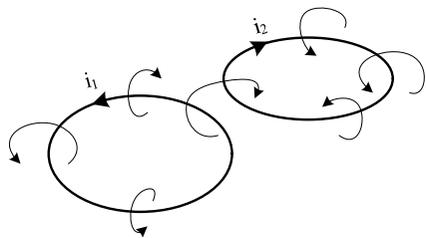


Fig. 4.16 – Flussi concatenati con due circuiti magneticamente accoppiati.

Il termine $MI_1 I_2$ comune alle due espressioni può essere attribuito per metà ad un circuito e per metà all'altro, così si generalizza la (4.20):

$$\left(\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} MI_1 I_2\right) + \left(\frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} MI_1 I_2\right) = \frac{1}{2} I_1 (L_1 I_1 + MI_2) + \frac{1}{2} I_2 (L_2 I_2 + MI_1) = \frac{1}{2} (I_1 \Phi_{c1} + I_2 \Phi_{c2}) = \frac{1}{2} \sum I\Phi \quad (4.21)$$

Nota: Per togliere ogni dubbio sul termine di energia mutua, si può fare il calcolo partendo dall'energia specifica $\int HdB = \frac{1}{2} \mu_o H^2$ integrata al volume τ occupato dai due circuiti:

$$\int \frac{1}{2} \mu_o H^2 d\tau = \int \frac{1}{2} \mu_o (\overline{H_1} + \overline{H_2})^2 d\tau = \int \frac{1}{2} \mu_o (H_1^2 + H_2^2 + 2H_1 H_2 \cos \alpha) d\tau = \int \frac{1}{2} \mu_o H_1^2 d\tau + \int \frac{1}{2} \mu_o H_2^2 d\tau + \int \mu_o H_1 H_2 \cos \alpha d\tau$$

Per il primo termine (dividendo il volume in tubi di flusso di B e linee che si concatenano o no con il circuito, quindi per un tubo di flusso $d\Phi$ è costante e l'integrale di linea è diverso da zero solo se la linea è concatenata con la corrente):

$$\int \frac{1}{2} \mu_o H_1^2 d\tau = \frac{1}{2} \int B_1 H_1 d\tau = \frac{1}{2} \int \int B_1 H_1 dS dl = \frac{1}{2} \int \int B_1 dS H_1 dl = \frac{1}{2} \int d\Phi_1 \oint H_1 dl = \frac{I_1}{2} \int d\Phi_1 = \frac{I_1}{2} \Phi_{c11} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Per il secondo termine:

$$\int \frac{1}{2} \mu_o H_2^2 d\tau = \frac{I_2}{2} \Phi_{c22} = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Per il terzo termine:

$$\int B_1 H_2 \cos \alpha d\tau = \int \int B_1 H_2 \cos \alpha dS dl = \int \int B_1 dS H_2 \cos \alpha dl = \int d\Phi_1 \oint H_2 \cos \alpha dl = I_2 \cos \alpha \int d\Phi_1 = I_2 \cos \alpha \Phi_{c12} = MI_1 I_2$$

4.6 – CARICA E SCARICA DELL'INDUTTORE

Si studia l'andamento nel tempo della corrente sul bipolo induttanza con riferimento al circuito equivalente corrispondente all'equazione (4.19).

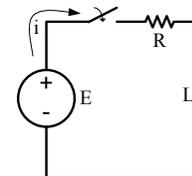


Fig. 4.17 – Circuito di carica dell'induttore.

Il principio di conservazione dell'energia implica che la corrente e il flusso sull'induttore non possano subire discontinuità, per cui se la corrente e il flusso sono diverse (rispettivamente I_o e $\Phi_o = LI_o$) da quelle finali (rispettivamente I e $\Phi = LI$) nel circuito si avrà un transitorio di corrente e di flusso. L'equazione del circuito è:

$$E = \frac{d\Phi_c}{dt} + Ri = L \frac{di}{dt} + Ri \quad \text{con tensione dell'induttore portata al secondo membro e}$$

quindi vedendo l'induttore come utilizzatore. Scegliendo come incognita la corrente, l'equazione è una equazione differenziale non omogenea di primo grado e si ha la soluzione:

$$i = \frac{E}{R} + k_i e^{-\frac{R}{L}t}$$

imponendo la condizione iniziale $I_o = \frac{E}{R} + k_i = I_{\infty} + k_i$ e chiamata $\tau = L/R$ la costante di tempo:

$$i = \frac{E}{R} + (I_o - \frac{E}{R}) e^{-\frac{R}{L}t} = I_{\infty} - (I_{\infty} - I_o) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4.22)$$

Con condizione iniziale zero: $i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$.

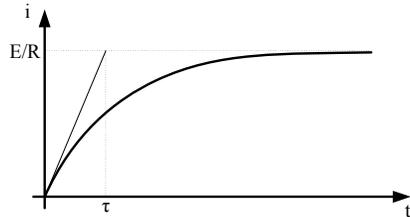


Fig. 4.18 – Andamento della corrente durante la carica di un induttore.

Lo studio precedente può essere visto come chiusura di un circuito ohmico-induttivo nel quale viene accumulata l'energia $\frac{1}{2}LI^2$. Il passo seguente dovrebbe essere l'apertura del circuito: lo studio di questo fenomeno è molto complesso e richiederebbe l'analisi del funzionamento dell'elemento "interruttore".

Per considerare anche per l'induttore l'equivalente della scarica vista per il condensatore, si inserisce nel circuito un ulteriore elemento "diodo di scarica" che permette di staccare il generatore di tensione chiudendo induttore e resistenza su questo nuovo elemento che si può ipotizzare come un corto circuito. La scarica dell'induttore carico con corrente I sulla resistenza R è quindi analizzata con l'equazione:

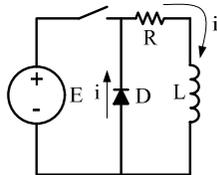


Fig. 4.19 – Circuito di scarica dell'induttore.

$$0 = L \frac{di}{dt} + Ri \quad (4.23)$$

Con soluzione (la corrente fluisce in direzione opposta):

$$i = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4.24)$$

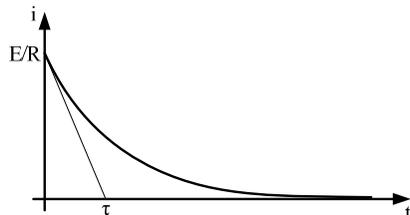


Fig. 4.20 – Andamento della corrente durante la scarica di un induttore.

5 – ANALISI NEL DOMINIO DEL TEMPO DEI CIRCUITI CON BIPOLI INDUTTORI E BIPOLI CONDENSATORI

Per l'analisi nel tempo delle reti con lati, nodi e maglie, in cui sono presenti bipoli induttori e bipoli condensatori, si applicano in genere solo i metodi che utilizzano come incognite le correnti. Infatti l'equazione in tensione di un generico lato in cui siano presenti tutti i generi di bipoli con un generatore rappresentato come generatore di tensione è:

$$v_{AB} = E_{AB}(t) - L_{AB} \frac{di_{AB}}{dt} - R_{AB} i_{AB} - \frac{1}{C_{AB}} \int i_{AB} dt \quad (5.1)$$

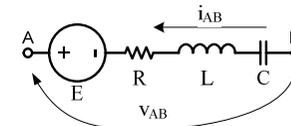


Fig. 5.1 – Circuito rappresentativo dell'equazione (5.1).

La corrente è difficilmente esplicitabile in funzione della tensione come è necessario fare per applicare i metodi che hanno come incognite le tensioni, se non nel caso in cui nel lato ci sia un solo bipolo induttore o condensatore in cui si può avere:

$$v_{AB} = E_{AB}(t) - L_{AB} \frac{di_{AB}}{dt} \rightarrow i_{AB} = \frac{1}{L_{AB}} \int [E_{AB}(t) - v_{AB}] dt$$

$$v_{AB} = E_{AB}(t) - \frac{1}{C_{AB}} \int i_{AB} dt \rightarrow i_{AB} = C_{AB} \frac{d[E_{AB}(t) - v_{AB}]}{dt}$$

Alle (5.1) sono applicabili le relazioni alle maglie $\sum v = 0$ (gli effetti della $\frac{\partial B}{\partial t}$ sono concentrati negli induttori) e le relazioni ai nodi $\sum i = 0$ (si escludono condensatori nei nodi). Si ottiene un sistema di tante equazioni integro-differenziali quante sono le correnti incognite e, tramite derivazione, un sistema di equazioni differenziali. Sostituendo via via le incognite si avrà una sola equazione differenziale di ordine n in una incognita corrente di lato o di maglia i_i :

$$a_n \frac{d^n i_i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_i}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 i_i = b(t) \quad (5.2)$$

con termine noto funzione delle f.e.m. dei generatori.

La soluzione dell'equazione è la somma della soluzione dell'omogenea associata e di un integrale particolare:

$$i_i(t) = i_{s.o.a.} + i_{i.p.} = \sum_h^n k_h \alpha_h e^{\alpha_h t} + i_{i.p.} \quad (5.3)$$

I parametri α_h sono le radici dell'equazione caratteristica

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha = 0 \quad (5.4)$$

e per la stabilità della rete, debbono essere tutti negativi se reali e con parte reale negativa se complessi. Se α_h è reale il termine $k_{\alpha_h} e^{\alpha_h t}$ è un esponenziale decrescente, se α_h è complesso esisterà anche il suo complesso coniugato $\alpha_h \pm j\alpha_n$ (α_n parte reale, α_h parte immaginaria) e la somma dei due termini può essere posta, tramite le formule di Eulero, nella forma $ke^{\alpha t} \text{sen}(\alpha t + \gamma)$.

Per $t \rightarrow \infty$ il termine $\sum_1^n k_{\alpha_h} e^{\alpha_h t}$ tende a zero e prende il nome di termine **transitorio**, quindi il termine $i_{i.p.}$ prende il nome di termine a **regime**.

Le n costanti k_{α_h} si determinano applicando le n condizioni iniziali $i_{i_0}, \left(\frac{di_i}{dt}\right)_o, \left(\frac{d^2i_i}{dt^2}\right)_o, \dots, \left(\frac{d^{n-1}i_i}{dt^{n-1}}\right)_o$

Ciascun bipolo induttore (purchè non in serie con un altro induttore) impone una condizione sulla i_{L_o} e ciascun bipolo condensatore (purchè non in parallelo con un altro condensatore) impone una condizione sulla v_{C_o} (si chiamano elementi con memoria). Si hanno quindi tante condizioni sui valori iniziali delle correnti sugli induttori e delle tensioni sui condensatori quanti sono questi elementi.

Le n condizioni iniziali $i_{i_0}, \left(\frac{di_i}{dt}\right)_o, \left(\frac{d^2i_i}{dt^2}\right)_o, \dots, \left(\frac{d^{n-1}i_i}{dt^{n-1}}\right)_o$ si debbono calcolare

utilizzando i valori iniziali disponibili i_{L_o} e v_{C_o} . Essendo tutte le relazioni lineari, n sarà uguale al numero di induttori e condensatori presenti nella rete. Per calcolare le

$i_{i_0}, \left(\frac{di_i}{dt}\right)_o, \left(\frac{d^2i_i}{dt^2}\right)_o, \dots, \left(\frac{d^{n-1}i_i}{dt^{n-1}}\right)_o$ si sostituiscono i valori i_{L_o} e i_{L_o} nel sistema di equazioni integro-differenziale una volta posto $t=0$.

Si tenga presente che se le f.e.m. sono funzioni del tempo e $t=0$ è stato scelto come tempo di avvio del circuito, i valori delle f.e.m. debbono essere coerenti con questa scelta.

La necessità di determinare le radici α come soluzione di un'equazione algebrica, limita l'analisi in forma esplicita alle equazioni di 3° grado (tre elementi con memoria).

5.1 – CIRCUITO RLC

È il circuito più classico per l'analisi in transitorio. L'equazione del circuito, scelta come incognita la corrente, è:

$$E(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + v_C = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt \quad (5.5)$$

e derivandola diventa:

$$\frac{dE(t)}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i \quad (5.6)$$

Nel caso di f.e.m. del generatore costante, la sua derivata è nulla, l'equazione differenziale è omogenea e la soluzione è data dal solo termine transitorio.

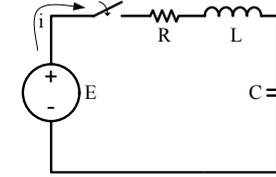


Fig. 5.2 – Circuito RLC.

La soluzione della equazione caratteristica associata $L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0$ è

$\alpha = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$ e quindi la corrente transitoria, se le radici sono reali, è:

$$i(t) = k_1 e^{\left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]t} + k_2 e^{\left[-\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]t} \quad (5.7)$$

cioè si compone di due esponenziali decrescenti.

Se le radici sono complesse coniugate:

$$i(t) = ke^{-\frac{R}{2L}t} \sin\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}t + \gamma\right] \quad (5.8)$$

cioè è una sinusoide smorzata che oscilla con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ chiamata

pulsazione propria del circuito.

Nel caso particolare di radice doppia l'andamento della corrente è del tipo

$$i(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (\text{smorzamento critico}).$$

Per determinare le costanti k_1 e k_2 , oppure k e γ , occorrono le condizioni iniziali

i_o e $\left(\frac{di}{dt}\right)_o$, che a loro volta vengono determinate dai valori della corrente iniziale

dell'induttore e dalla tensione iniziale del condensatore.

Per il circuito in esame si ha già $i_o = i_{L_o}$; per la derivata si esplicita la (5.5) per $t=0$:

$$E = L \left(\frac{di}{dt}\right)_o + Ri_{L_o} + v_{C_o} \quad \text{quindi} \quad \left(\frac{di}{dt}\right)_o = \frac{1}{L} E - \frac{R}{L} i_{L_o} - \frac{1}{L} v_{C_o}.$$

Il sistema che permette di calcolare le costanti è per la (5.7):

$$\begin{cases} i_o = i_{Lo} = k_1 + k_2 \\ \left(\frac{di}{dt}\right)_o = \frac{1}{L}E - \frac{R}{L}i_{Lo} - \frac{1}{L}v_{Co} = \left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]k_1 + \left[-\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]k_2 \end{cases} \quad (5.9)$$

e per la (5.8):

$$\begin{cases} i_o = i_{Lo} = k \sin \gamma \\ \left(\frac{di}{dt}\right)_o = \frac{1}{L}E - \frac{R}{L}i_{Lo} - \frac{1}{L}v_{Co} = \frac{R}{2L}k \sin \gamma + \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} k \cos \gamma \end{cases} \quad (5.10)$$

Nel caso di condizioni iniziali nulle, le (5.9) diventano:

$$\begin{cases} i_o = 0 = k_1 + k_2 \\ \left(\frac{di}{dt}\right)_o = \frac{1}{L}E = \left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]k_1 + \left[-\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]k_2 \end{cases}$$

quindi

$$k_1 = -k_2 = \frac{1}{2L}E \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}$$

e la corrente (5.7):

$$i(t) = \frac{E}{2L} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \left\{ e^{\left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]t} - e^{\left[-\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]t} \right\} \quad (5.11)$$

Nel caso di condizioni iniziali nulle, le (5.10) diventano:

$$\begin{cases} i_o = 0 = k \sin \gamma \\ \left(\frac{di}{dt}\right)_o = \frac{1}{L}E = \frac{R}{2L}k \sin \gamma + \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} k \cos \gamma \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ k = \frac{1}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} E \end{cases}$$

e la corrente (5.8):

$$i(t) = \frac{1}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} E e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sen} \left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right] \quad (5.12)$$

Se la f.e.m. del generatore non è costante, si aggiunge il termine a regime. Ad esempio se la f.e.m. è sinusoidale si avrà una corrente a regime sinusoidale con la stessa pulsazione della f.e.m.. Il calcolo delle costanti si complica notevolmente per la presenza di questo termine.

Per l'analisi del circuito può essere scelta come incognita la tensione del condensatore, potendosi la corrente esprimere come $i = C \frac{dv_c}{dt}$. La (5.5) diventa:

$$E(t) = LC \frac{d^2v_c}{dt^2} + RC \frac{dv_c}{dt} + v_c \quad (5.13)$$

L'equazione omogenea associata ha la stessa equazione caratteristica della (5.6) e quindi le stesse radici, ma l'equazione differenziale non è più omogenea: è presente il termine a regime anche se la f.e.m. è costante. In questo caso si ha:

$$v_c(t) = k_1 e^{\left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]t} + k_2 e^{\left[-\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]t} + E \quad (5.14)$$

per radici reali e

$$\begin{aligned} v_c(t) &= k_3 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t + \gamma_v \right] + E = \\ &= e^{-\frac{R}{2L}t} \left[k_3 \sin \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right) + k_4 \cos \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right) \right] + E \end{aligned} \quad (5.15)$$

per radici complesse. (In questo caso la seconda espressione della (5.15) è più opportuna).

Per il calcolo delle costanti k_1 e k_2 , oppure k_3 e k_4 , occorrono il valore v_c ed il valore della sua derivata $\left(\frac{dv_c}{dt}\right)_o$ che si calcola sostituendo il valore iniziale della corrente nella relazione $i = C \frac{dv_c}{dt}$, quindi $\left(\frac{dv_c}{dt}\right)_o = \frac{i_o}{C}$.

Con valori iniziali nulli, si ha:

$$\begin{cases} v_c = 0 = k_1 + k_2 + E \\ \left(\frac{dv_c}{dt}\right)_o = 0 = \left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]k_1 + \left[-\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]k_2 \end{cases}$$

per radici reali e:

6 – ANALISI DELLE RETI IN REGIME SINUSOIDALE

Si considerano solo le grandezze sinusoidali a regime.

Un circuito che contiene tutti i possibili bipoli è il circuito *RLC* con generatore di tensione sinusoidale $E(t)=E_{max}\cos(\omega t+\alpha)$, la cui equazione in tensione è:

$$E_{max} \cos(\omega t + \alpha) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt \quad (6.1)$$

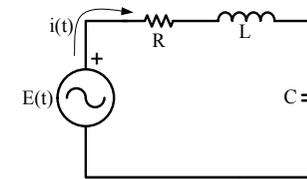


Fig. 6.1 – Circuito RLC con generatore di tensione sinusoidale.

Un integrale particolare dell'equazione integro-differenziale con termine forzante sinusoidale è una funzione sinusoidale $I_{max}\cos(\omega t+\beta)$ con la stessa pulsazione, la cui derivata ed il cui integrale sono ancora funzioni sinusoidali con la stessa pulsazione. Sostituendo in (6.1):

$$E_{max} \cos(\omega t + \alpha) = -L\omega I_{max} \text{sen}(\omega t + \beta) + RI_{max} \cos(\omega t + \beta) + \frac{1}{\omega C} I_{max} \text{sen}(\omega t + \beta) \quad (6.2)$$

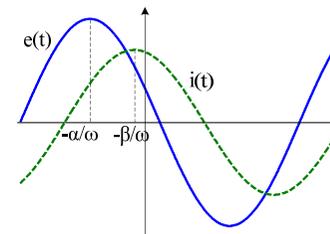


Fig. 6.2 – Andamenti temporali di tensione e corrente.

Uguagliando i termini in $\text{sen}\omega t$ e $\text{cos}\omega t$ si determinano le due incognite I_{max} e β . Esiste una trasformazione delle grandezze sinusoidali che permette di ottenere rapidamente il risultato.

6.1 – Trasformazione di Steinmetz

Usando la formula di Eulero:

$$\cos(\omega t + \alpha) = \text{Re}[e^{j(\omega t + \alpha)}] \quad \cos(\omega t + \beta) = \text{Re}[e^{j(\omega t + \beta)}]$$

(j è l'unità immaginaria, $e^{j(\omega t + \alpha)}$ ed $e^{j(\omega t + \beta)}$ sono vettori di ampiezza 1, rotanti con velocità angolare ω nel piano complesso Re-Im di Gauss), la derivata e l'integrale della funzione diventano:

$$\begin{cases} v_c = 0 = k_4 + E \\ \left(\frac{dv_c}{dt}\right)_0 = 0 = -\frac{R}{2L}k_4 + k_3 \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \end{cases}$$

per radici complesse.

Per cui la tensione è:

$$v_c(t) = \left\{ 1 + \frac{-\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} e^{\left[\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]t} + \frac{\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} e^{\left[\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]t} \right\} E \quad (5.16)$$

per radici reali e:

$$v_c(t) = \left\{ 1 - e^{-\frac{R}{2L}t} \left[\frac{R}{2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}t\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}t\right) \right] \right\} E \quad (5.17)$$

per radici complesse.

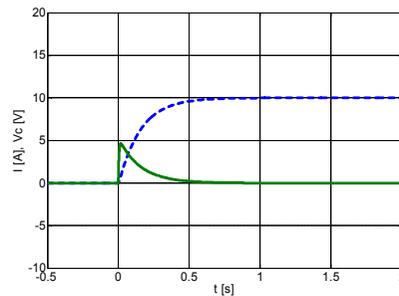


Fig. 5.3 – Transitorio di carica di un circuito RLC con poli reali e distinti. Corrente i (linea continua), tensione v_c (linea tratteggiata).

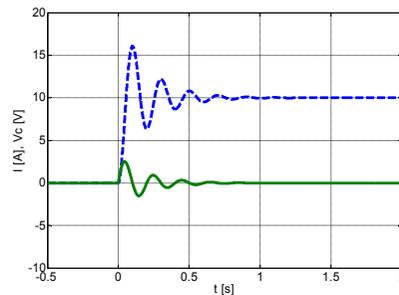


Fig. 5.4 – Transitorio di carica di un circuito RLC con poli complessi e coniugati. Corrente i (linea continua), tensione v_c (linea tratteggiata).

$$\frac{d}{dt} \cos(\omega t + \beta) = j\omega \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \beta)}]$$

$$\int \cos(\omega t + \beta) dt = \frac{1}{j\omega} \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \beta)}]$$

Sostituendo nella (6.2):

$$E_{\max} \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \alpha)}] = j\omega L I_{\max} \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \beta)}] + R I_{\max} \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \beta)}] + \frac{1}{j\omega C} I_{\max} \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \beta)}] \quad (6.3)$$

La (6.3) rappresenta l'uguaglianza fra la somma delle proiezioni sull'asse reale dei tre vettori che danno le cadute di tensione e la proiezione sull'asse reale del vettore tensione del generatore. Nel piano complesso si ha:

$$E_{\max} e^{j(\omega t + \alpha)} = j\omega L I_{\max} e^{j(\omega t + \beta)} + R I_{\max} e^{j(\omega t + \beta)} + \frac{1}{j\omega C} I_{\max} e^{j(\omega t + \beta)}$$

$$E_{\max} e^{j\omega t} e^{j\alpha} = j\omega L I_{\max} e^{j\omega t} e^{j\beta} + R I_{\max} e^{j\omega t} e^{j\beta} + \frac{1}{j\omega C} I_{\max} e^{j\omega t} e^{j\beta} \quad (6.4)$$

$$E_{\max} e^{j\omega t} e^{j\alpha} = [j\omega L I_{\max} e^{j\beta} + R I_{\max} e^{j\beta} + \frac{1}{j\omega C} I_{\max} e^{j\beta}] e^{j\omega t}$$

Il termine $e^{j\omega t}$ che appare in tutti i termini può essere rimosso: questo equivale a togliere la variabile tempo nell'equazione bloccando in una posizione fissa i quattro vettori rotanti (ad es. per $t=0$):

$$\begin{aligned} E_{\max} e^{j\alpha} &= [j\omega L I_{\max} e^{j\beta} + R I_{\max} e^{j\beta} + \frac{1}{j\omega C} I_{\max} e^{j\beta}] \\ &= [j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}] I_{\max} e^{j\beta} = [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})] I_{\max} e^{j\beta} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Si definiscono:

$\bar{E} = E_{\max} e^{j\alpha}$ vettore (non rotante) rappresentativo della tensione del generatore

$\bar{I} = I_{\max} e^{j\beta}$ vettore (non rotante) rappresentativo della corrente

$X_L = \omega L$ reattanza induttiva

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ reattanza capacitiva

$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ reattanza

$\bar{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX$ impedenza (numero complesso)

$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = G + jB$ ammettenza (numero complesso), B suscettanza

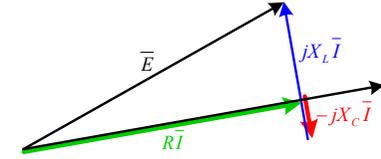


Fig. 6.3 – Equilibrio dei vettori.

Questa trasformazione porta ad una equazione algebrica dell'equilibrio delle tensioni molto semplice in campo complesso:

$$\bar{E} = [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})] \bar{I} = \bar{Z} \bar{I} \quad (6.6)$$

Nei calcoli i vettori rappresentativi di tensioni e correnti ed i numeri complessi rappresentativi delle impedenze possono essere espressi sia nella forma polare ($Ae^{j\alpha}$ con A modulo, α fase) che in quella binomia ($a+jb$ con a componente reale, b componente immaginaria), essendo

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \arctg \alpha = b/a, \text{ oppure } a = A \cos \alpha \quad b = A \sin \alpha.$$

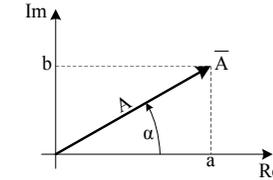


Fig. 6.4 – Scomposizione di un vettore in forma polare e in forma binomia.

Usando la forma polare la (6.6) diventa:

$$E_{\max} e^{j\alpha} = I_{\max} e^{j\beta} Z e^{j\gamma} \quad \text{con } \gamma = \arctg \frac{X}{R} \quad (6.7)$$

Dalla (6.7) (conviene usare la forma polare) si ha:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = I_{\max} e^{j\beta} = \frac{E_{\max} e^{j\alpha}}{Z e^{j\gamma}} = \frac{E_{\max}}{Z} e^{j(\alpha-\gamma)} \quad \text{quindi } I_{\max} = \frac{E_{\max}}{Z} \quad \text{e } \beta = \alpha - \gamma$$

$$i(t) = \frac{E_{\max}}{Z} \cos(\omega t + \alpha - \gamma)$$

Passando dal circuito RLC ad un generico lato di circuito, si ha:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{AB} &= \bar{E}_{AB} - [R_{AB} + j(\omega L_{AB} - \frac{1}{\omega C_{AB}})] \bar{I}_{AB} = \\ &= \bar{E}_{AB} - [R_{AB} + jX_{AB}] \bar{I}_{AB} = \\ &= \bar{E}_{AB} - \bar{Z}_{AB} \bar{I}_{AB} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Essendo per ipotesi gli effetti della variazione del campo elettrico limitate all'interno dei condensatori e quelle della variazione del campo magnetico all'interno degli induttori, si ritengono ancora valide le leggi alle maglie ed ai nodi:

$$\sum \bar{V} = 0 \quad \sum \bar{I} = 0$$

Si applicano quindi per il calcolo delle correnti sinusoidali a regime tutti i metodi di analisi delle reti visti nel caso di correnti stazionarie, sostituendo alle variabili di lato V ed I le variabili complesse \bar{V} ed \bar{I} . Alle costanti R e G si sostituiscono i numeri complessi (costanti per un dato valore di ω) \bar{Z} e \bar{Y} . I generatori saranno schematizzati come generatori equivalenti di tensione o di corrente a seconda del metodo di analisi della rete scelto.

Presupposto fondamentale è che tutti i generatori inseriti abbiano la stessa pulsazione; in caso contrario si applica la sovrapposizione degli effetti.

La dipendenza delle impedenze dalla pulsazione porta ad un comportamento della rete dipendente dalla pulsazione. Lo studio del comportamento della rete costituisce l'argomento specifico dei capitoli "Funzioni di trasferimento" e "Filtri". Qui si anticipano alcuni semplici casi.

6.1.1 – FILTRO RC

Con riferimento alla figura 6.5 il rapporto fra le tensioni di uscita e di ingresso è la funzione complessa:

$$\frac{\bar{V}_u}{\bar{V}_i} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \bar{I}}{(R + \frac{1}{j\omega C}) \bar{I}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

il cui modulo è:

$$\left| \frac{\bar{V}_u}{\bar{V}_i} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

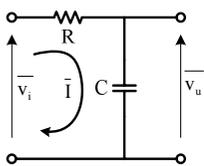


Fig. 6.5 – Filtro RC.

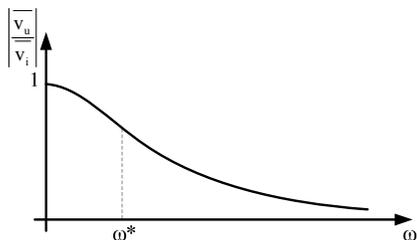


Fig. 6.6 – Modulo della funzione V_u/V_i .

Il valore della pulsazione per cui $\omega^2 R^2 C^2 = 1$, e quindi la funzione diventa $\frac{1}{\sqrt{2}}$, è

$\omega^* = \frac{1}{RC}$ e prende il nome di **pulsazione di taglio**. La fase della funzione complessa

è 0 per $\omega = 0$ e $-\frac{\pi}{4}$ per $\omega = \omega^*$ e $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega = \infty$. Il filtro lascia passare le basse pulsazioni e taglia quelle alte, alterando la fase (fig. 6.6).

6.1.2 – RISONANZA LC SERIE

In un circuito RLC serie se il valore della pulsazione è tale per cui $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ e quindi $\omega^* = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (**pulsazione di risonanza**), la reattanza si annulla. Il modulo della corrente, che è 0 per $\omega = 0$ e per $\omega = \infty$, ha un massimo di valore E_{max}/R (fig. 6.7).

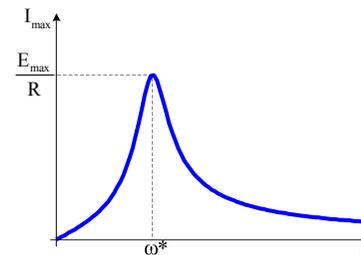


Fig. 6.7 – Modulo della corrente nel circuito RLC serie.

La fase della corrente è $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega = 0$, 0 per $\omega = \omega^*$ e $\frac{\pi}{2}$ per $\omega = \infty$.

6.1.3 – ANTIRISONANZA LC PARALLELO

Se i bipoli L e C sono in parallelo (vedi fig. 6.8) l'impedenza del circuito è

$$\bar{Z} = R + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

Il valore della pulsazione è tale per cui $\omega^* = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (**pulsazione di antirisonanza**),

la reattanza diventa infinita e la corrente si annulla, mentre ha modulo $\frac{E_{max}}{R}$ per $\omega = 0$ e per $\omega = \infty$ (fig. 6.9).

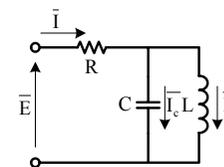


Fig. 6.8 – Circuito LC parallelo (la R è in serie).

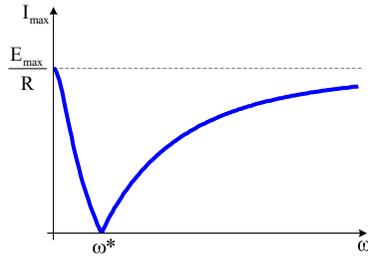


Fig. 6.9 – Modulo della corrente nel circuito RLC parallelo.

In corrispondenza della pulsazione di risonanza la corrente complessiva è nulla mentre nei bipoli induttore e condensatore le correnti sono uguali in modulo $\bar{I}_L = \frac{\bar{E}}{j\omega L}$, $\bar{I}_C = j\omega CE$ e sfasate di π .

6.2 – Potenza in regime sinusoidale

Ci si riferisce per semplicità ad un singolo utilizzatore di impedenza \bar{Z} alimentato con tensione $v(t) = V_{\max} \cos \omega t$ che assorbe la corrente $i(t) = I_{\max} \cos(\omega t - \varphi)$.

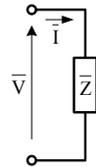


Fig. 6.10 – Utilizzatore in regime sinusoidale.

La tensione per $t=0$ ha il valore massimo mentre la corrente ha valore $i(t) = I_{\max} \cos(-\varphi) = I_{\max} \cos \varphi$. **Lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione è quindi per convenzione $-\varphi$.** Quindi se la corrente ritarda rispetto alla tensione (carico ohmico-induttivo) φ è positivo, se anticipa (carico ohmico-capacitivo) φ è negativo.

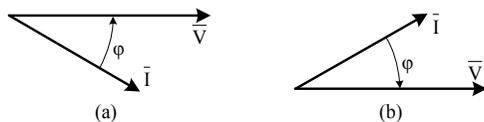


Fig. 6.11 – Vettori rappresentativi della tensione e della corrente nel caso di $\varphi > 0$ ($X_L > X_C$) (a) e $\varphi < 0$ ($X_L < X_C$) (b).

Dalla definizione di tensione e di corrente si ha, come nel regime stazionario:

$$p(t) = v(t)i(t) \quad \text{potenza istantanea} \quad (6.9)$$

Sostituendo a tensione e corrente le loro espressioni:

$$p(t) = V_{\max} I_{\max} \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)] \quad (6.10)$$

La potenza istantanea ha un valore costante, che è il suo valor medio in un periodo T , ed un termine sinusoidale a pulsazione doppia (vedi fig.6.9):

$$P = \frac{1}{T} \int p(t) dt = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} \cos \varphi \quad \text{potenza attiva} \quad (6.11)$$

$$\frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} \cos(2\omega t - \varphi) \quad \text{potenza fluttuante}$$

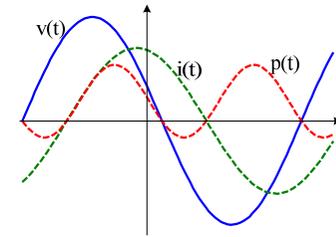


Fig. 6.12 – Andamento della potenza nel tempo.

Si può in alternativa scomporre la corrente nelle due componenti in fase e in quadratura con la tensione, cioè sostituire all'impedenza una resistenza ed una reattanza in parallelo (fig. 6.13):

$$p(t) = V_{\max} I_{\max} \cos \omega t [\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi] = V_{\max} I_{\max} \left[\cos^2 \omega t \cos \varphi + \frac{\sin 2\omega t}{2} \sin \varphi \right]$$

$$V_{\max} I_{\max} \cos^2 \omega t \cos \varphi = \frac{V_{\max} I_{\max}}{2} [1 + \cos(2\omega t)] \cos \varphi \quad \text{potenza attiva istantanea (valor medio P)}$$

$$V_{\max} I_{\max} \frac{\sin 2\omega t}{2} \sin \varphi \quad \text{potenza reattiva istantanea (valor medio zero)}$$

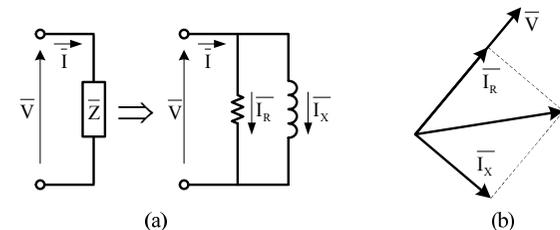


Fig. 6.13 – Impedenza equivalente con ramo resistivo e ramo reattivo (a) e diagramma vettoriale di tensione e correnti (b).

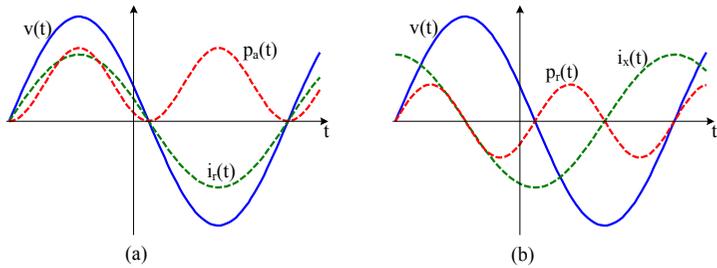


Fig. 6.14 – Andamento nel tempo della potenza attiva (a) e reattiva (b) istantanea.

Se l'impedenza è costituita da una resistenza si ha $i(t) = \frac{V_{\max}}{R} \cos \omega t$ e quindi la potenza attiva è:

$$P = \frac{1}{T} \int V_{\max} I_{\max} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int V_{\max} I_{\max} \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{V_{\max} I_{\max}}{2} = R \frac{I_{\max}^2}{2}$$

Si introduce il **valore efficace** I della corrente sinusoidale uguale al valore della corrente continua che produce su una resistenza la stessa potenza:

$$R \frac{I_{\max}^2}{2} = RI^2 \quad \text{quindi} \quad I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int I_{\max}^2 \cos^2 \omega t dt}$$

Da qui in avanti si scriveranno tensioni e correnti nella forma $a(t) = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \alpha)$ usando i valori efficaci invece delle ampiezze. Per cui:

$$P = \frac{1}{T} \int p(t) dt = VI \cos \varphi \quad \text{potenza attiva} \quad [W] \quad (6.12)$$

$(\cos \varphi$ prende il nome di **fattore di potenza**)

$$VI \cos(2\omega t - \varphi) \quad \text{potenza fluttuante}$$

$$2VI \cos^2 \omega t \cos \varphi \quad \text{potenza attiva istantanea}$$

$$VI \sin 2\omega t \sin \varphi \quad \text{potenza reattiva istantanea}$$

6.3 – Potenza complessa

Si definiscono:

$$\text{potenza reattiva} \quad Q = VI \sin \varphi \quad (Q \text{ ha il segno di } \varphi) \quad [VAR] \quad (6.13)$$

$$\text{potenza complessa} \quad \bar{A} = P + jQ \quad [VA] \quad (6.14)$$

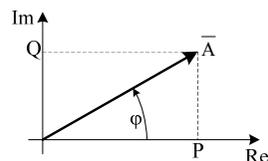


Fig. 6.15 – Piano complesso delle potenze.

Queste potenze non hanno alcun significato fisico, ma permettono di avere semplici relazioni con tensioni, correnti e parametri R ed X .

Se V ed I sono tensione e corrente efficaci ai capi del bipolo per una resistenza si ha: $P = RI^2 = V^2/R$ (6.15)

per una reattanza $Q = XI^2 = V^2/X$ (6.16)

Se si moltiplica il vettore tensione (preso sull'asse reale) per il complesso coniugato (per far tornare la convenzione sul segno dell'angolo φ) del vettore corrente, si ha:

$$\bar{V} \bar{I}^* = V(I \cos \varphi - jI \sin \varphi) = VI \cos \varphi - jVI \sin \varphi = P + jQ = \bar{A} \quad (6.17)$$

e anche, usando l'impedenza $\bar{Z} = R + jX$:

$$\bar{V} \bar{I}^* = \bar{Z} \bar{I} \bar{I}^* = \bar{Z} I^2 = I^2 (R + jX) = RI^2 + jXI^2 = P + jQ = \bar{A} \quad (6.18)$$

Il modulo della potenza complessa risulta:

$$|\bar{A}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(VI \cos \varphi)^2 + (VI \sin \varphi)^2} = VI \quad (6.19)$$

e contenendo i due parametri che sono alla base del dimensionamento di ciascun bipolo prende il nome di **potenza di dimensionamento**.

Per più bipoli si può dimostrare che è:

$$\bar{V} \bar{I}^* = \sum P + j \sum Q = \sum RI^2 + j \sum XI^2 = \bar{A} \quad (6.20)$$

V ed I sono sempre tensione e corrente ai capi di ciascun bipolo, indipendentemente dal collegamento serie o parallelo. Vale quindi anche per gli elementi reattivi l'additività delle potenze reattive (con il segno opportuno, si ricordi che le reattanze induttive e capacitive forniscono contributi opposti). Questa proprietà delle potenze consente di effettuare calcoli basati sulle potenze attive e reattive in alternativa ai calcoli basati sui vettori tensioni e correnti.

L'esempio tipico è il calcolo dell'utilizzatore equivalente ad una serie di utilizzatori industriali inseriti in parallelo per cui i parametri forniti sono generalmente la tensione nominale, la potenza attiva ed il fattore di potenza.

6.4 – Rifasamento dei carichi industriali

La potenza attiva di ciascun utilizzatore $P = VI \cos \varphi$ è minore della potenza di dimensionamento $|\bar{A}| = VI$ degli elementi dell'impianto che alimentano l'utilizzatore, per cui si richiede che il fattore di potenza sia vicino ad uno. Se è troppo basso si può correggere inserendo un bipolo reattivo di segno opposto in parallelo con l'utilizzatore (un condensatore essendo in genere gli utilizzatori industriali ohmico-induttivi).

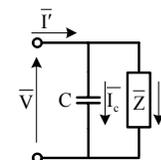


Fig. 6.16 – Inserzione del condensatore di rifasamento.

Il calcolo della capacità o della potenza reattiva del condensatore che porti il valore del fattore di potenza da $\cos\varphi$ a $\cos\varphi'$ si può effettuare in base alle tensioni ed alle correnti oppure, ed è più immediato, in base alle potenze.

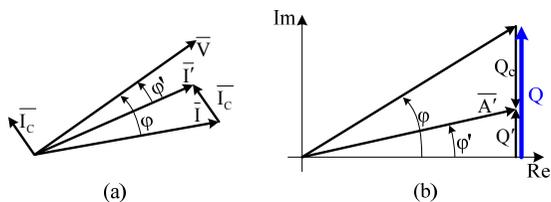


Fig. 6.17 – Diagramma vettoriale delle correnti (a) e delle potenze (b).

La potenza attiva non cambia, quella reattiva

$$Q = VI \sin \varphi = VI \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = P \tan \varphi \quad \text{deve diventare} \quad Q' = P \tan \varphi' \quad \text{e quindi}$$

$$Q_c = P(\tan \varphi - \tan \varphi') \quad (6.21)$$

6.5 – Sistemi trifase

Un sistema elettrico di produzione, trasporto e utilizzazione in corrente alternata costituito schematicamente da un generatore, una linea e un utilizzatore equivalente ad un complesso di utilizzatori prende il nome di **sistema monofase**.

La considerazione che N correnti sinusoidali di uguale ampiezza e sfasate fra loro di un angolo $2\pi/N$ hanno somma nulla se viste come sinusoidi o costituiscono una stella di vettori a somma nulla viste come vettori rappresentativi, ha portato alla realizzazione di **sistemi N-fase**. Quello più affermato è il **sistema trifase**.

Il carico complessivo è diviso in tre parti alimentate con tre tensioni uguali (**tensioni simmetriche**) in modulo e sfasate di $2\pi/3$. Se i tre utilizzatori sono esattamente uguali, le correnti assorbite saranno uguali in modulo e sfasate di $2\pi/3$ (**correnti equilibrate**), per cui il trasporto della potenza è realizzato solo con i conduttori di andata. I conduttori in uscita dagli utilizzatori sono riuniti in un punto (**centro stella degli utilizzatori**) e non si hanno più i conduttori di ritorno nei quali passerebbe una corrente nulla. Analogamente sono riuniti in un punto (**centro stella dei generatori**) gli ingressi dei generatori.

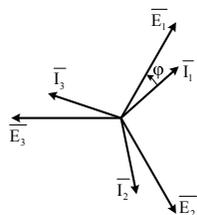


Fig. 6.18 – Stella dei vettori delle tensioni simmetriche e delle correnti equilibrate.

Se gli utilizzatori non sono perfettamente suddivisi (il **carico equilibrato** diventa **carico squilibrato**) le correnti si squilibrano e la loro somma sarà ancora zero non

per le caratteristiche dei tre circuiti ma per la presenza del centro stella e la mancanza dei conduttori di ritorno. Si squilibreranno anche le tensioni applicate agli utilizzatori. Per evitare eccessivi squilibri nelle tensioni, si può lasciare un solo conduttore di ritorno, che prende il nome di **neutro**. Il neutro si trova tipicamente negli impianti a bassa tensione e non in quelli a media e alta tensione.

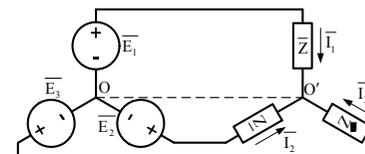


Fig. 6.19 – Schema di un sistema trifase stella-stella con neutro (tratteggiato).

I generatori e gli utilizzatori di potenza superiore ad una decina di kW sono intrinsecamente trifase, quindi i carichi monofase si trovano solo nelle utenze civili. La suddivisione dei carichi monofase in tre parti viene fatta per grandi gruppi di utenze. Oltre al collegamento dei tre terminali di generatori ed utilizzatori a stella è possibile il collegamento a triangolo: ogni generatore o utilizzatore è collegato a due dei conduttori del sistema (fig. 6.20).

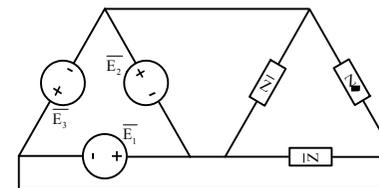


Fig. 6.20 – Schema di collegamento trifase triangolo-triangolo.

Per quanto riguarda i calcoli i sistemi simmetrici nelle tensioni ed equilibrati nelle correnti si trattano come sistemi monofasi equivalenti a stella con riferimento ai vettori rappresentativi di una delle fasi. Avvertenza: il valore della corrente che si considera è quello del conduttore di alimentazione (**corrente di fase I**), quello della tensione è il valore della tensione fra due fili del sistema trifase (**tensione concatenata V**) e non quello fra un conduttore ed il centro stella (**tensione stellata E**). La relazione fra i moduli è: $V = \sqrt{3}E$.

Di conseguenza la potenza attiva e reattiva sono: $P = \sqrt{3}VI \cos \varphi$, $Q = \sqrt{3}VI \sin \varphi$

I calcoli per sistemi non simmetrici ed equilibrati non sono argomento di questo corso. Si cita solo la relazione (sulla quale è basata la misura industriale della energia trifase, la così detta inserzione di Aaron utilizzando due wattmetri) che permette di calcolare la potenza considerando uno dei tre ingressi come uscita. Se ad esempio il morsetto 3 è preso come uscita, l'ingresso 1 è alimentato con tensione v_{13} e l'ingresso 2 con tensione v_{23} la potenza istantanea è:

$$p(t) = v_{13}(t)i_1(t) + v_{23}(t)i_2(t)$$

e quella attiva:

$$P = V_{13}I_1 \cos \alpha_{V_{13}I_1} + V_{23}I_2 \cos \alpha_{V_{23}I_2}$$