Università degli studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Reti Logiche A
a.a. 2007/2008

Forme canoniche e trasformazioni con De Morgan

prof. Stefano CASELLI
stefano.caselli@unipr.it
http://www.ce.unipr.it/people/caselli
https://corsi.unipr.it

Definizioni: Mintermini e Maxtermini

- *Mintermine*
  - espressione *prodotto* che contiene in modo affermato o negato tutte le variabili di una funzione
  - esempio: $m_3 = \overline{x} \cdot y \cdot z$ $3 = 011$
  - non sono mintermini di funzione a tre var: x y, x z, ...
- *Maxtermine*
  - espressione *somma* che contiene in modo affermato o negato tutte le variabili di una funzione
  - esempio: $M_3 = x + \overline{y} + \overline{z}$
  - non sono Maxtermini di funzione a tre var: x+y, x, ...
  - costruito secondo regola di *corrispondenza negata* con le variabili di ingresso della configurazione

Forme canoniche

- A partire dalla tabella di verità, ogni funzione logica può essere espressa univocamente in
  - **Prima Forma canonica** (SoP o SP)
    - sommatoria di tutti i mintermini relativi alle configurazioni di ingresso che generano uscita 1
  - **Seconda Forma canonica** (PoS o PS)
    - produttoria di tutti i maxtermini relativi a configurazioni di ingresso corrispondenti agli 0 della funzione di uscita
- Tale possibilità può essere dimostrata anche come conseguenza del *teorema di espansione di Shannon*
  - $f(x_1, x_2, \dots x_n) = \overline{x_1}\, f(0, x_2, \dots x_n) + x_1\, f(1, x_2, \dots x_n)$
  - $f(x_1, x_2, \dots x_n) = (\overline{x_1} + f(1, x_2, \dots x_n)) \cdot (x_1 + f(0, x_2, \dots x_n))$

Esempio: somma binaria

Riporto	*1 1 1 0*
Addendo	1 0 1 1 +
Addendo	0 1 1 1 =
Somma	1 0 0 1 0

X_0	Y_0	C_0	S_0	C_1
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Esempio: Prima Forma Canonica

$$
\begin{array}{lllll}
C_1 = 1 \text{ se} & x_0 & y_0 & C_0 & \\
 & 0 & 1 & 1 & \overline{x_0}\, y_0\, C_0 \; + \\
 & 1 & 0 & 1 & x_0\, \overline{y_0}\, C_0 \; + \\
 & 1 & 1 & 0 & x_0\, y_0\, \overline{C_0} \; + \\
 & 1 & 1 & 1 & x_0\, y_0\, C_0
\end{array}
$$

- Espressione canonica SP *in forma simbolica*:

  $C_1\ (x,y,c_0) = m_3+m_5+m_6+ m_7 = \Sigma\ m(3,5,6,7)$

Esempio: Seconda Forma Canonica

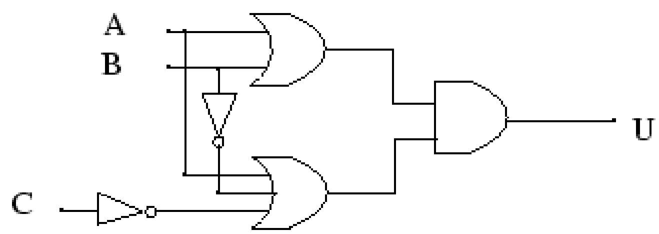
$$
\begin{array}{lllll}
C_1 = 0 \text{ se} & x_0 & y_0 & C_0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & (x_0 + y_0 + C_0) \\
 & 0 & 0 & 1 & (x_0 + y_0 + \overline{C_0}) \\
 & 0 & 1 & 0 & (x_0 + \overline{y_0} + C_0) \\
 & 1 & 0 & 0 & (\overline{x_0} + y_0 + C_0)
\end{array}
$$

- Espressione canonica PS *in forma simbolica*:

  $C_1\ (x,y,c_0) = M_0\ M_1\ M_2\ M_4 = \Pi\ M(0,1,2,4)$

Sintesi SP o PS

- Le RC corrispondenti alle forme canoniche sono sempre *a due livelli*
- Qualunque espressione PS o SP è realizzata da una RC a due livelli di logica
  - Esempio: U = (A+B)(A+B'+C')

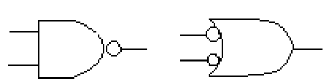


Equivalenze: leggi di De Morgan

- Il teorema di De Morgan afferma

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

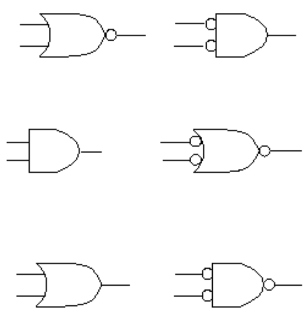
- che corrisponde all'equivalenza circuitale



- Le relazioni di equivalenza dell'algebra booleana sono interpretate a livello circuitale come relazioni di equivalenza fra moduli logici

Equivalenze

- La possibilità di rappresentare in modo diverso le stesse funzioni logiche consente di effettuare trasformazioni circuitali basandosi su proprietà algebriche



$$\overline{A+B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

$$A \bullet B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

$$A + B = \overline{\overline{A} \bullet \overline{B}}$$

Teoremi di espansione di Shannon

- *Teoremi di espansione di Shannon:*
  - $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = x'_1 \cdot f(0, x_2, \ldots x_n) + x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots x_n)$
  - $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = (x'_1 + f(1, x_2, \ldots x_n)) \cdot (x_1 + f(0, x_2, \ldots x_n))$

- Ad es.:

  z(x1,x0) = x0x1+x1’ = x0’(0·x1+x1’)+x0(1·x1+x1’) =

  =x1’[x0’(0·0+0’)+x0(1·0+0’)]+x1[x0’(0·1+1’)+x0(1·1+1’)]

- prop. distrib.: a·(b+c)=a·b+a·c →

  z(x1,x0) =x1’x0’·(1)+x1’x0·(1)+x1x0’·(0)+x1x0·(1) (eq.1)

  ^^^→ f valutata in (0,0), etc!

Espressione generale SP

- Dalla eq.1:
  $z(x1,x0) = x1'x0'\cdot(1)+x1'x0\cdot(1)+x1x0'\cdot(0)+x1x0\cdot(1)$

- **Espressione generale SP:**

$$z(x_{n-1},\ldots,x_1,x_0) = \sum_{i=0,2^n-1} m(i)\cdot f(i)$$

Espressione generale PS

- Dal 2° teor. di Shannon:
  $z(x1,x0) = x0x1+x1' = [x0+(0\cdot x1+x1')]\cdot[x0'+(1\cdot x1+x1')] =$
  $= [x1+[x0+(0\cdot 0+0')]\cdot[x0'+(1\cdot 0+0')] \cdot$
  $\cdot [x1'+[x0+(0\cdot 1+1')]\cdot[x0'+(1\cdot 1+1')]]$

- Prop. distrib.: $a+b\cdot c=(a+b)(a+c)$ →
  $z(x1,x0)=(x1+x0+(1))\cdot(x1+x0'+(1))\cdot(x1'+x0+(0))\cdot(x1'+x0'+(1))$ (eq.2)
  ^^^ f valutata in (0,0), etc.!

- → **Espressione generale PS:**

$$z(x_{n-1},\ldots,x_1,x_0) = \prod_{i=0,2^n-1} (M(i)+f(i))$$

Espressioni canoniche

- Da eq.1 e eq.2, semplificando, otteniamo anche:
- *Espressione canonica* SP di z:

  z(x1,x0) = x1'x0'+x1'x0+x1x0

- *Espressione canonica PS* di z:

  z(x1,x0) = (x1'+x0)

Interpretazioni circuitali

- Dalle espressioni canoniche:
  - circuiti generatori di tutti i potenziali minterm o maxterm di n variabili
  - *Decoder*
- Dalle espressioni generali:
  - circuiti che integrano anche la somma o il prodotto di 2° livello
  - ricevono come ingressi anche 2^n valori della funzione
  - *Multiplexer*