Corso DUT di Comunicazioni Elettriche per Elettronici
Appunti sulle esercitazioni relative alla Teoria dei Segnali

A cura di R.. Gaudino
Versione 1.0 del 5/2/2000

INDICE

Teoria della probabilità

La teoria della probabilità si basa sul concetto di esperimento casuale, cioè di un esperimento suscettibile di diversi possibili risultati (eventi) all'interno di un determinato insieme (spazio campione).

Esempio: l'esperimento casuale può essere l'estrazione di una carta da un mazzo: in questo caso lo spazio campione è costituito dall'insieme di tutte le *N* carte presenti nel mazzo, mentre i possibili eventi sono le carte stesse.

La teoria della probabilità usa una notazione tipica della teoria degli insiemi.

Gli spazi campione possono avere cardinalità:

- finita (esempio: mazzo di 52 carte)
- infinita numerabile (esempio: insieme dei numeri interi)
- infinita non numerabile (esempio: insieme dei numeri reali)

Teoria assiomatica della probabilità

Sia *A* un evento dell'insieme *S*. La probabilità di un evento è espressa da un numero reale e si indica con *P(A).*

Valgono i seguenti assiomi:

1. $P(A) \geq 0$ (la probabilità di un qualunque evento è sempre maggiore di 0)
2. $P(S) = 1$ (la probabilità dello spazio campione è pari a 1)
3. Se $A \cap B = \boldsymbol{f} \;\Rightarrow\; P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (se due eventi *A* e *B* sono mutuamente esclusivi, cioè se hanno intersezione nulla, la probabilità della loro unione è data dalla somma delle probabilità.

Conseguenze:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ (la probabilità di un evento *A* è data da un numero reale compreso in [0,1])
2. $P(\boldsymbol{f}) = 0$ (la probabilità dell'insieme vuoto è pari a zero)
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (formula per il calcolo della probabilità del complemento di *A* rispetto a *S*)
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (formula per il calcolo della probabilità dell'unione di due eventi)

Frequenza statistica

Il concetto di probabilità di un evento è legato al più intuitivo concetto di frequenza statistica.

Esempio: si consideri il lancio di un dado ripetuto *N* volte; sia n_1 il numero di volte per cui è uscito il numero 1. Per frequenza statistica dell'evento "uscita del numero 1" si intende il rapporto $\frac{n_1}{N}$. Per *N* elevati, si interpreta la frequenza statistica come probabilità dell'evento.

Esercizi sulla teoria assiomatica della probabilità

Si consideri il lancio di una moneta ripetuto per tre volte, con l'ipotesi che il risultato su ciascun lancio sia indipendente da quello ottenuto al lancio precendente.

1. indicare l'insieme che costituisce lo spazio campione;
2. calcolare la probabilità di avere "testa" al primo e al terzo lancio

Soluzione:

Lo spazio campione è costituito dagli 8 eventi:

1. $A_1 =$ TTT
2. $A_2 =$ XTT
3. $A_3 =$ TXT
4. $A_4 =$ XXT
5. $A_5 =$ TTX
6. $A_6 =$ XTX
7. $A_7 =$ TXX
8. $A_8 =$ XXX

È intuitivo che la probabilità di ogni evento è pari a 1/8. Questo risultato può tuttavia essere dimostrato tramite la teoria assiomatica come segue:

1. $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_8$
2. le intersezioni tra i vari eventi sono insiemi vuoti $A_i \cap A_j = f$
3. si applica l'assioma sulla probabilità dell'unione di eventi relativamente all'insieme S ottenendo $$\begin{aligned} &P(S) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_8) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_8) \\ &P(S) = 1 \Rightarrow \quad P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_8) = 1 \end{aligned}$$

4. dato che gli eventi hanno tutte le stesse caratteristiche, si ha $P(A_i) = P(A_j) \quad \forall i, j$ e di conseguenza, per la precedente condizione 3 (somma delle probabilità pari a 1) si deve avere $8 \cdot P(A_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A_i) = 1/8 \quad \forall i$

La probabilità di avere "testa" al primo e al terzo lancio è data da:

$$P(TTT \cup TXT) = P(TTT) + P(TXT) = 2/8$$

Probabilità condizionate e congiunte

Si definiscono:

- **Probabilità congiunta** di due eventi: probabilità dell'intersezione dei due eventi. Si indica con la notazione $P(A, B) = P(A \cap B)$; è la probabilità che i due eventi avvengano contemporaneamente. Si tratta della probabilità che avvengano sia *A* che *B*, probabilità da non confondersi con $P(A \cup B)$, che consiste nella probabilità che avvenga *A* oppure *B* oppure entrambi.

- **Probabilità condizionata**: è la probabilità che avvenga un evento *A* sapendo che è vero l'evento *B*. Si indica con la notazione $P(A \mid B)$, che si legge come "probabilità di *A* dato *B*". Vale la formula $P(A \mid B) = \dfrac{P(A, B)}{P(B)}$

Teoremi della teoria della probabilità

Teorema delle probabilità totali

Sia $A_1, A_2, \ldots, A_N$ una partizione dello spazio campione *S*, cioè una serie di eventi la cui unione copra tutto lo spazio campione. In formule, $S = \cup_{j=1}^{N} A_j$. Per un qualunque evento *B* si ha allora:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{N} P(B \mid A_j) \cdot P(A_j)$$

Teorema di Bayes

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Concetto di indipendenza statistica

Due eventi sono detti indipendenti se vale la seguente proprietà:

$$P(A,B)=P(A)\cdot P(B)$$

L'indipendenza statistica è un concetto molto importante, e viene utilizzata molto spesso nell'ambito della teoria della probabilità e delle variabili casuali.

Conseguenza: se *A* e *B* sono eventi indipendenti, la probabilità condizionata è data da:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A,B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A)$$

Esempi di applicazione teoria della probabilità: Formula di Bernoulli

Si consideri un esperimento con soli due possibili risultati, che chiameremo convenzionalmente "successo" e "insuccesso". Siano:

P(successo)=*p*
P(insuccesso)=*q*

Ovviamente si deve avere *p*+*q*=1

La formula di Bernoulli fornisce la probabilità di avere esattamente *k* successi ripetendo *n* volte l'esperimento, e supponendo che le varie ripetizioni dell'esperimento siano indipendenti tra di loro. La probabilitè è indicata come $P_{k,n}$ e vale:

$$P_{k,n}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Questa formula è molto usata nell'ambito delle comunicazioni digitali, dove molti "esperimenti" possono avere solo due possibili risultati. Ad esempio: un bit può essere trasmesso correttamente (successo) oppure con errore (insuccesso).

Si ricorda che il simbolo $\binom{n}{k}$ rappresenta la formula del binomiale, che vale:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{k!}$$

Per esercizio, dimostriamo il risultato per *k*=1. In tal caso, $P_{1,n}$ rappresenta la probabilità di avere esattamente un "successo" su *n* ripetizioni. Indicando con S_i l'evento "avere successo alla i-esima ripetizione e insuccesso a tutte le altre ripetizioni", si ha:

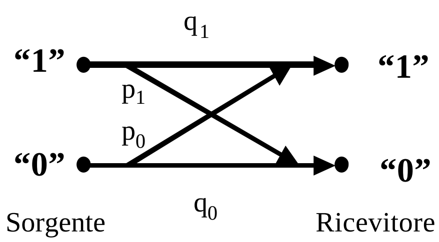
$$P_{1,n} = P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n)$$

D'altra parte, osservando che $S_i \cap S_j = f \quad \forall i, j$ si può applicare uno degli assiomi della teoria della probabiltà, ottenendo:

$$P_{1,n} = P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = P(S_1) + P(S_2) + \ldots + P(S_n) = nP(S_i) = n \cdot p \cdot q^{n-1}$$

Esempi di applicazione teoria della probabilità: Canale binario simmetrico

Un modello molto usato per un sistema di comunicazioni digitale è il "canale binario", rappresentato nella seguente figura:



Il sistema rappresenta la trasmissione di un bit da parte di una sorgente; il bit può essere ricevuto correttamente, oppure si può avere un errore sul canale. Indicando con 1*R* l'evento "ricezione di un bit a 1" e con 1*T* l'evento "trasmissione di un bit a 1" (e analogamente per 0*T*, 0*R*), le probabilità di errore e di corretta ricezione sono date da:

$$\begin{cases} q_1 = P(1R \mid 1T) \\ q_0 = P(0R \mid 0T) \\ p_1 = P(0R \mid 1T) \\ p_0 = P(1R \mid 0T) \end{cases}$$

Si deve avere: $q_1 + p_1 = 1 \quad q_0 + p_0 = 1$.

Queste quattro probabilità caratterizzano completamente il canale di trasmissione digitale insieme all'ipotesi di avere trasmissioni successive tra di loro indipendenti. La sorgente sarà invece caratterizzata dalle probabilità di emettere 1 o 0, indicate con $P(0T) \quad P(1T)$

ESEMPIO

Calcolare la probabilità di ricevere uno zero.

Si devono applicare alcuni risultati relativi alla probabilità congiunte e condizionate, e in particolare ricordare che $P(A|B)=\frac{P(A,B)}{P(B)} \Rightarrow P(A,B)=P(A|B)\cdot P(B)=P(B|A)\cdot P(A)$

Nel nostro caso si ha:

$$P(0R)=P(0T,0R)+P(1T,0R)=P(0R|0T)\cdot P(0T)+P(0R|1T)\cdot P(1T)$$
$$=q_0 P(0T)+p_1 P(1T)$$

ESEMPIO

Calcolare la probabilità $P(E)$ di avere un errore sul canale:

$$P(E)=P(0T,1R)+P(1T,0R)=P(1R|0T)\cdot P(0T)+P(0R|1T)\cdot P(1T)$$
$$=p_1 P(0T)+p_0 P(1T)$$

I canali sono generalmente "simmetrici", cioè hanno:

$$\begin{cases} p_1=p_0=p \\ q_1=q_0=(1-p) \\ P(1T)=P(0T)=0.5 \end{cases}$$

In questo caso il sistema è chiamato "canale binario simmetrico" (o BSC da "binary simmetric channel"). Notare che in questo caso si ha $P(E)=p_1 P(0T)+p_0 P(1T)=p$, cioè p rappresenta la probabilità di errore.

ESEMPIO

Supponiamo di trasmettere blocchi di N bit su un canale BSC. Calcolare la probabilità che un blocco sia ricevuto in modo errato (cioè abbia almeno un bit errato).

Si può utilizzare direttamente la formula di Bernoulli:

$$P(E_{blocco})=\sum_{i=1}^{N} P(\text{esattamente } i \text{ errori su } N \text{ bit})=\sum_{i=1}^{N}\binom{N}{i}p^i(1-p)^{N-i}$$

In alternativa, si può ottenere molto più semplicemente il risultato osservando che:

$$P(E_{blocco})=1-P(\text{blocco corretto})=1-(1-p)^N$$

ESEMPIO: codici a controllo di parità

Si consideri un codice a controllo di parità che a gruppi di 7 bit aggiunga un ottavo bit in modo che il numero totale di "1" nel blocco sia pari. I blocchi risultanti sono trasmessi su un canale BSC con $p = 10^{-3}$. Il ricevitore controlla per ciascun blocco la condizione di parità e può dunque rivelare alcune condizioni di errore. Calcolare:

1. la probabilità di rivelare una situazione di errore;
2. la probabilità di non rivelare una situazione di errore.

Soluzione

Il sistema è in grado di rivelare un errore tutte le volte che ci sono un numero dispari di bit sbagliati all'interno di un blocco, in quanto questa condizione viola la condizione di parità sul blocco ricevuto. Di conseguenza:

$$P(\text{rivelazion e errore sul blocco}) = P(1E) + P(3E) + P(5E) + P(7E) =$$

$$= P_{1,8} + P_{3,8} + P_{5,8} + P_{7,8} = \binom{8}{1} p(1-p)^7 + \binom{8}{3} p^3 (1-p)^5 + \binom{8}{5} p^5 (1-p)^3 + \binom{8}{7} p^7 (1-p)$$

Osservando che $p << 1. \Rightarrow (1-p) \approx 1$ e che inoltre $p^n << p$ per $n > 1$, l'espressione precedente si può approssimare come:

$$P(\text{rivelazion e errore sul blocco}) = 8p = 8 \cdot 10^{-3}$$

Analogamente, la condizione di non rivelare errori si verifica quando sul canale ci sono stati un numero pari di errori per blocco, ed è dunque data da:

$$P(\text{non rivelare errore}) = P_{2,8} + P_{4,8} + P_{6,8} + P_{8,8}$$

$$\cong P_{2,8} = \binom{8}{2} p^2 (1-p)^6 \cong \frac{8 \cdot 7}{2} p^2 = 2.8 \cdot 10^{-5}$$

Altri esercizi sulla teoria della probabilità

ESERCIZIO

Una coppia ha due figli: sapendo che uno dei due à maschio, quale è la probabilità che anche l'altro sia maschio?

Risultato:

In questo caso, lo spazio campione è dato da {MF,MM,FM}. Il risultato è dunque pari a 1/3

ESERCIZIO

Una coppia ha due figli: sapendo che il primo è maschio, quale è la probabilità che anche l'altro sia maschio?

Risultato:

In questo caso, lo spazio campione è dato da {MF,MM}. Il risultato è dunque pari a 1/2.

ESERCIZIO

Si consideri un codice a ripetizione che, per ciascun bit in ingresso, lo codifichi ripetendolo per 3 volte. Il ricevitore decide "a maggioranza", ad esempio i blocchi "111" oppure "101" vengono decodificati come "1", mentre i blocchi "001" oppure "000" sono decodificati come "0".
Supponendo di lavorare su un canale BSC con $p = 10^{-2}$, calcolare la probabilità di errore del sistema di trasmissione risultante.

Risultato:

Traccia: la decodifica risulta errata quando su un blocco di 3 bit ci sono stati 2 oppure 3 bit sbagliati. Di conseguenza $P_{2,3} + P_{3,3} \cong 3 \cdot 10^{-4}$

Variabili casuali

Associando un numero reale a ciascuno degli eventi di un esperimento casuale, si può introdurre il concetto di "variabile casuale", che si indica solitamente con lettere greche.

ESEMPI

- Lancio di un dado: si può associare ad ognuno dei possibili 6 eventi un numero pari al numero comparso sulla faccia del dado. La variabile casuale risultante $\boldsymbol{x}$ assume dunque i valori interi da 1 a 6. Per indicare la probabilità che la variabile casuale $\boldsymbol{x}$ assuma il valore 3 si usa la notazione: $P(\boldsymbol{x} = 3) = \frac{1}{6}$

- valore di resistenza di un resistore: a causa delle incertezze di fabbricazione e di misura, la resistenza R risultante può assumere qualunque valore reale all'interno di un determinato intervallo, e deve dunque essere trattata come una variabile casuale.
- tensione all'uscita di un circuito elettrico con ingressi costanti: a causa del rumore del sistema, la tensione di uscita avrà sempre delle fluttuazioni e deve dunque essere trattata come una variabile casuale

Variabili casuali continue e discrete

Le variabili casuali possono essere:
- discrete: assumono un numero finito di valori;
- continue: assumono tutti i valori su sottoinsiemi dell'asse reale

Caratterizzazione variabili casuali discrete

Le variabili casuali continue sono generalmente caratterizzate elencando i possibili risultati $\boldsymbol{x} = x_i \quad i = 1,...,N$ e le loro rispettive probabilità $p_i = P(\boldsymbol{x} = x_i)$.

Si deve ovviamente avere $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$

Funzione di distribuzione cumulativa

La funzione di distribuzione cumulativa di una variabile casuale è definita come:

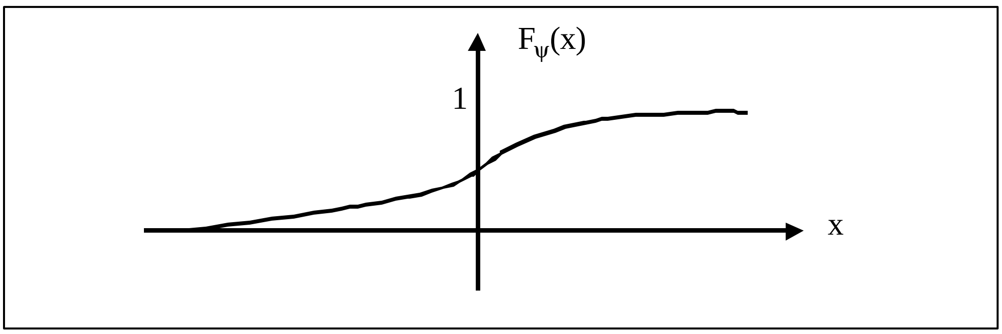
$F_x(x) = P(\boldsymbol{x} < x)$

La funzione di distribuzione cumulativa è dunque una funzione reale di variabile reale.

Proprietà della funzione di distribuzione cumulativa

1. $F_x(+\infty) = 1$
2. $F_x(-\infty) = 0$
3. sia $x_1 \le \boldsymbol{x} \le x_2$; allora $P(x_1 \le \boldsymbol{x} \le x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1)$
4. se $x_1 \le x_2 \Rightarrow F_x(x_1) \le F_x(x_2)$
5. dalle proprietà precedenti risulta dunque che la funzione di distribuzione cumulativa è una funziona monotona non decrescente con valori compresi in [0,1]
6. le funzioni di distribuzione cumulative di variabili casuali continue sono continue.

Gli andamenti tipici delle funzioni di distribuzione cumulative sono dunque del tipo indicati in figura.



Densità di probabilità di una variabile casuale

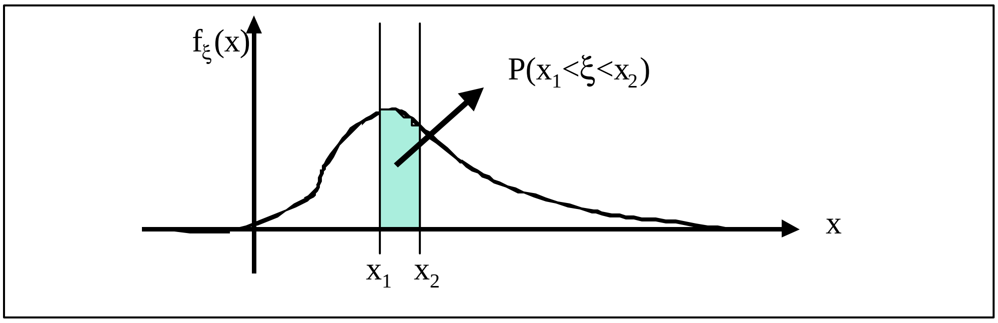
La funzione densità di probabilità di una variabile casuale è definita a partire dalla funzione di distribuzione cumulativa:

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$$

Proprietà della funzione densità di probabilità

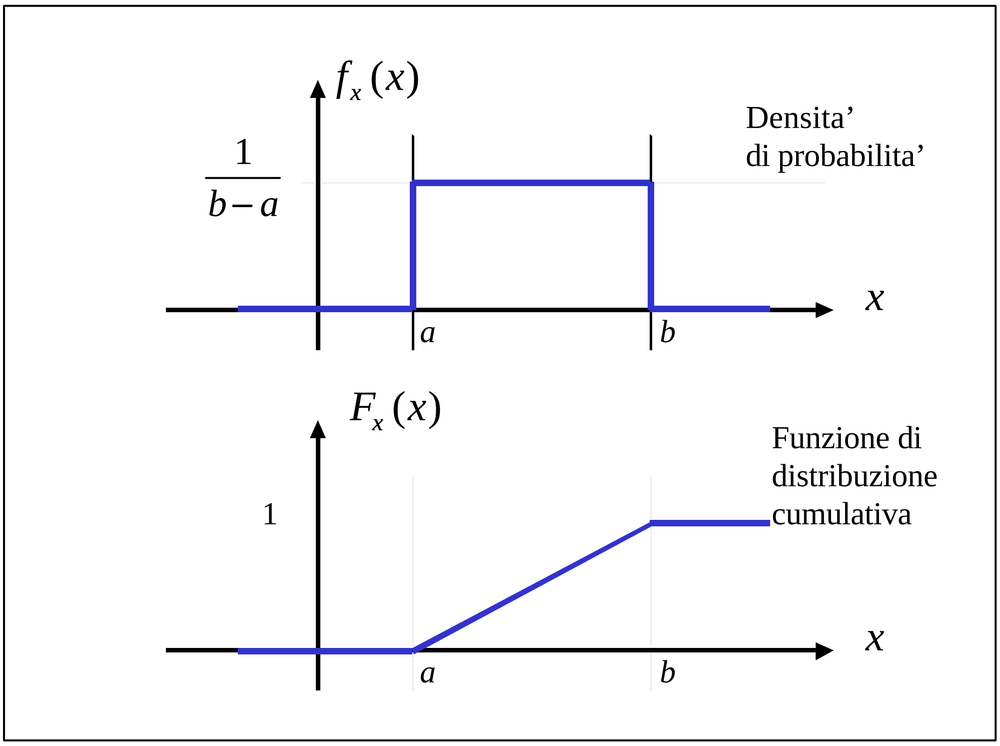
1. $f_x(x) \geq 0$ (è una diretta conseguenza del fatto che la funzione di distribuzione cumulativa è monotona non decresente);
2. $\int_{x_1}^{x_2} f_x(x)\,dx = F_x(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = F_x(x_2) - F_x(x_1) = P(x_1 < \boldsymbol{x} < x_2)$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,dx = 1$ (la funzione densità di probabilità è sempre normalizzata a 1)

La proprietà 2. è la proprietà fondamentale della funzione densità di probabilità: l'integrale della densità $\int_{x_1}^{x_2} f_x(x)\,dx$ è pari alla probabilità che la variabile casuale $\boldsymbol{x}$ assuma valori nell'intervallo $[x_1, x_2]$. Graficamente si ha:



Principali densità di probabilità: distribuzione uniforme

Una variabile casuale $\boldsymbol{x}$ con distribuzione uniforme nell'intervallo $[a,b]$ ha le seguenti densità di probabilità e funzione di distribuzione cumulativa:



Intuitivamente si tratta di una variabile che nell'intervallo $[a,b]$ assume valori equiprobabili. Infatti qualunque intervallo $[x_1, x_1 + L]$ all'interno di $[a,b]$ ha la stessa probabilità, in quanto l'area sottesa è la stessa.

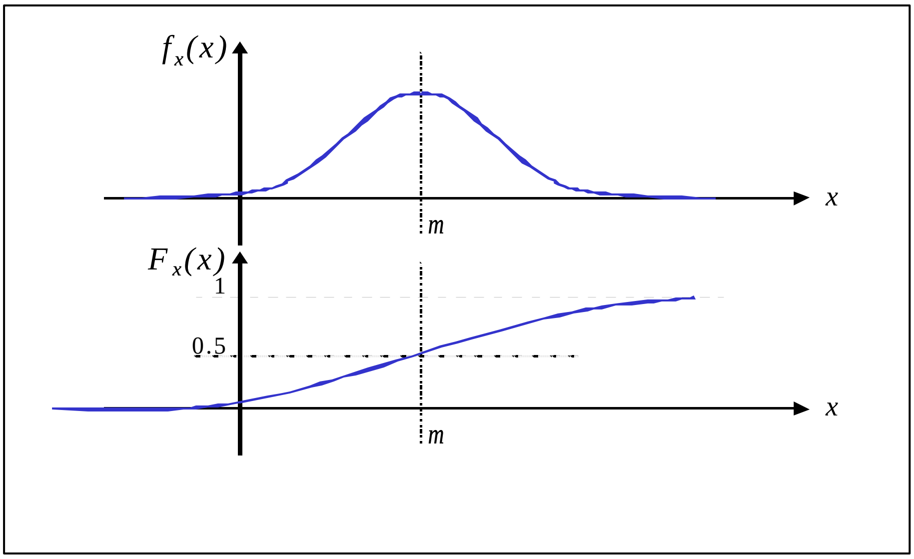
Principali densità di probabilità: distribuzione gaussiana

Una variabile casuale gaussiana ha densità di probabilità:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

dove m, σ sono due parametri liberi della distribuzione detti:

- media m: è il baricentro della distribuzione, che è inoltre simmetrica rispetto a questo punto.
- deviazione standard σ :è indicativamente



la “larghezza” della distribuzione.

Il parametro s^2 è denominato varianza della distribuzione gaussiana.

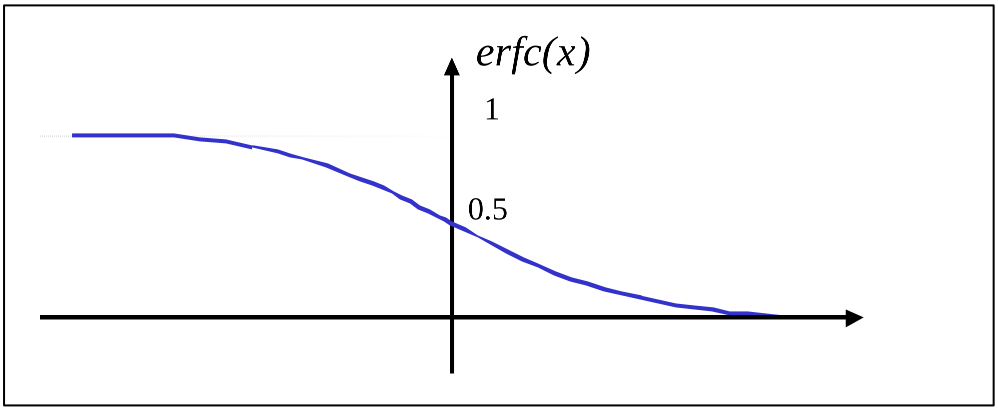
La funzione di distribuzione cumulativa non è esprimibile analiticamente tramite funzioni elementari. Data l’importanza di questa distribuzione, è utile introdurre una nuova funzione al fine di poter esprimere analiticamente la funzione di distribuzione cumulativa di una gaussiana.

Funzione di errore complementare

La funzione di errore complementare $erfc(x)$ è definita tramite la seguente forma integrale:

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

La funzione di errore complementare si calcola solitamente tramite tabelle o grafici.

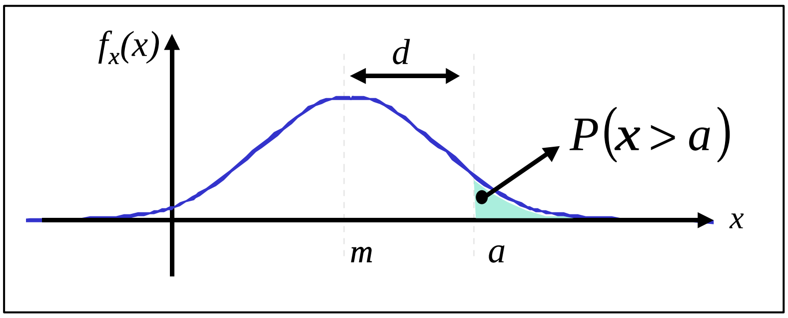


La funzione di distribuzione cumulativa di una variabile casuale gaussiana si esprime come:

$$F_x(x) = 1 - \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x - m}{\sqrt{2}s} \right)$$

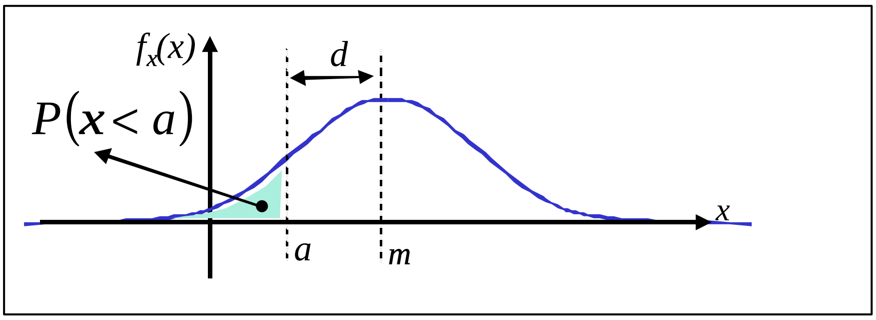
La funzione $erfc(x)$ è inoltre molto usata per calcolare l’area sottesa alle code di una distribuzione gaussiana.

$$P(x > a) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{a-m}{\sqrt{2}s}\right)$$
$$= \frac{1}{2} erfc\left(\frac{d}{\sqrt{2}s}\right)$$



Analogamente, per simmetria, si ha:

$$P(x < a) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{m-a}{\sqrt{2}s}\right)$$

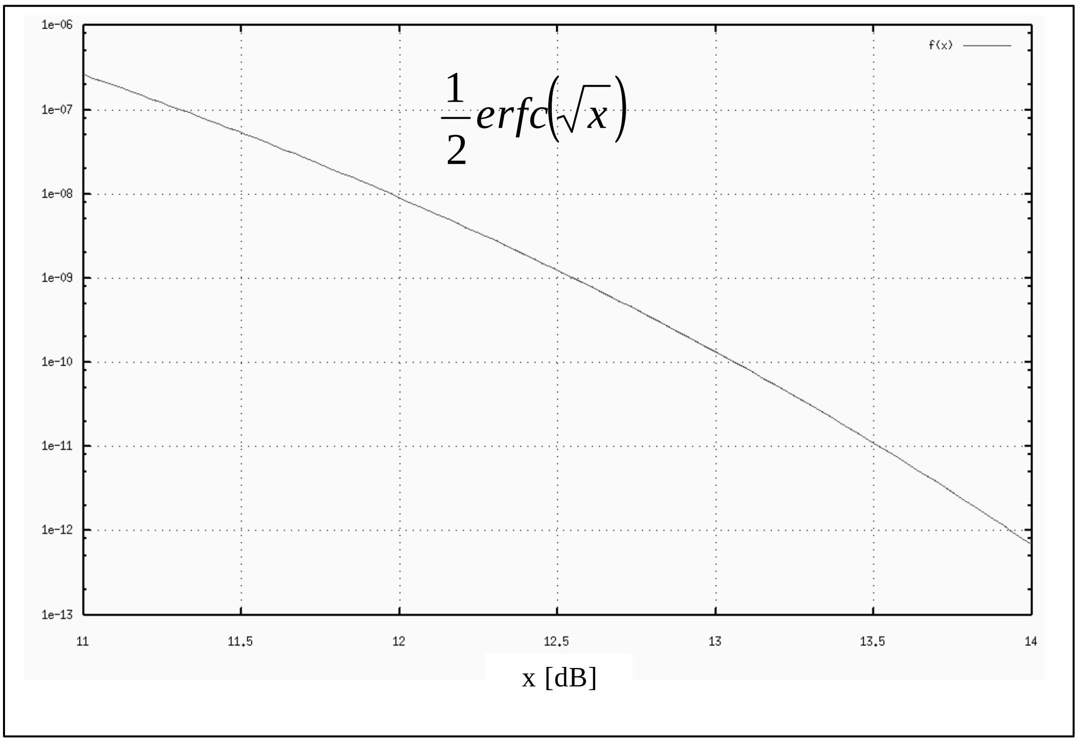


Esercizio sul calcolo della funzione *erfc* tramite grafici

Una tensione all'uscita da un circuito elettrico è rappresentabile come una variabile casuale gaussiana a media pari a 10 V e deviazione standard 0.1776 V

Usando l'allegato grafico, calcolare:

1. la probabilità che la tensione superi 11 V;
2. la probabilità che la tensione sia inferiore a 8.8 V.



SOLUZIONE

Osservare che il grafico allegato riporta l'andamento della funzione $\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{x}\right)$ con x espresso in dB $10\log_{10}(\cdot)$. Notare che esistono altri tipi di grafici che riportano le funzioni $\frac{1}{2}erfc(x)$ oppure $erfc(x)$

Nel nostro caso, indicando con $\boldsymbol{x}$ la variabile casuale corrispondente alla tensione, dobbiamo calcolare:

$$P(\boldsymbol{x} > 11) = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{11.-10.}{\sqrt{2}\boldsymbol{s}}\right)$$

Riportiamo l'argomento dell'*erfc* nella forma $\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{x}\right)$, ottenendo

$$P(\boldsymbol{x} > 11) = \frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{1.}{2\boldsymbol{s}^2}}\right) = \frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{15.84}\right)$$

Dobbiamo dunque usare il precedente grafico con $x = 15.84 = 12$ dB, valore per il quale si ha approssimativamente $P(\boldsymbol{x} > 11) = 10^{-8}$.

Analogamente si può calcolare:

$$P(\boldsymbol{x} < 8.8) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{10 - 8.8}{\sqrt{2}\boldsymbol{s}}\right) = \frac{1}{2} erfc(22.82) \cong 10^{-11}$$

Esercizio sul calcolo della funzione *erfc* tramite tabelle

Si consideri una variabile gaussiana $\boldsymbol{h}$ a media nulla e varianza $\boldsymbol{s}^2$. Si calcoli $P(|\boldsymbol{h}| < i\,\boldsymbol{s})$ con $i = 1, 2, 3$

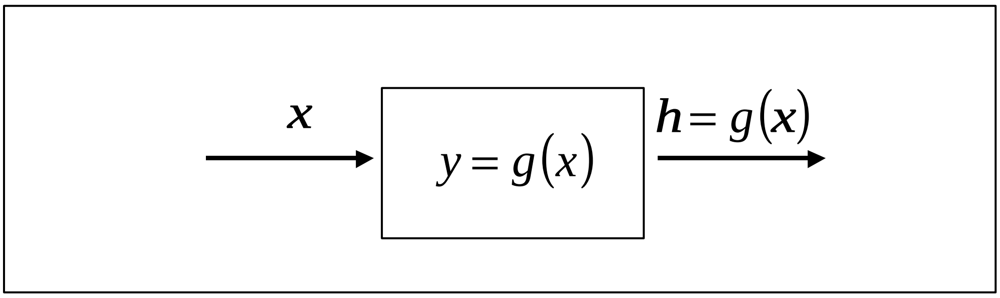
Soluzione

Si tratta di calcolare $P(-i\boldsymbol{s} < \boldsymbol{h} < i\,\boldsymbol{s}) = 1 - 2\left(\frac{1}{2} erfc\left(\frac{i\,\boldsymbol{s}}{\sqrt{2}\boldsymbol{s}}\right)\right) = 1 - erfc\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

- per $i = 1 \Rightarrow P(-\boldsymbol{s} < \boldsymbol{h} < \boldsymbol{s}) = 1 - erfc\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - erfc(0.707) = 1 - 0.3153 = 0.6847$
- per $i = 2 \Rightarrow P(-2\boldsymbol{s} < \boldsymbol{h} < 2\boldsymbol{s}) = 1 - erfc\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 1 - erfc(1.414) = 1 - 0.0461 = 0.9539$
- per $i = 3 \Rightarrow P(-3\boldsymbol{s} < \boldsymbol{h} < 3\boldsymbol{s}) = 1 - erfc\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 1 - erfc(2.121) = 1 - 0.0027 = 0.9973$

Funzioni di variabili casuali

In molte situazioni è necessario calcolare le caratteristiche di una variabile casuale ottenuta come trasformazione di una variabile casuale nota attraverso una funzione $y = g(x)$.



In generale, questo è una problema complesso, e dunque ci occuperemo solo di un caso particolare.

Trasformazioni lineari di variabili casuali

Se la trasformazione è del tipo $y = ax + b$, cioè se la trasformazione è lineare, si dimostra che:

$$f_h(y) = \frac{1}{|a|} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Questo tipo di trasformazione è molto usata. In particolare, se la variabile in ingresso x è gaussiana con media m_x e varianza s_x^2, si ha che la media e la varianza della variabile di uscita h sono calcolabili come:

$$\begin{cases} m_h = m_x + b \\ s_h^2 = a^2 s^2 \end{cases}$$

Momenti di variabili casuali

Media o valore atteso di una variabile casuale

La media o valore atteso di una variabile casuale discreta x che assume i valori $x_1, \dots, x_n$ con probabilità $p_1, \dots, p_n$ è definita come:

$$E[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Su una variabile casuale continua si definisce invece per analogia:

$$E[\mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx$$

Teorema del valore atteso

Vale in generale il seguente risultato utile per il calcolo della media di una variabile casuale ottenuta da una trasformazione di un'altra variabile casuale:

$$E[g(\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_x(x)\, dx$$

Varianza e momenti di ordine superiore

Si definiscono i momenti di ordine k come:

$$m_k = E[\mathbf{x}^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\ f_x(x)\, dx$$

Casi particolari:

- per $k = 1$ si ottiene il valor medio
- per $k = 2$ si ottiene il valore quadratico medio

E' molto usato il momento di ordine 2 centrale, cioè la varianza, definita come:

$$\mathbf{s}_x^2 = E\left[(\mathbf{x} - m_x)^2\right]$$

Si può dimostrare che vale la seguente utile relazione:

$$\mathbf{s}_x^2 = E[\mathbf{x}^2] - m_x^2$$

Applicazioni del teorema del valore atteso

E' utile calcolare i momenti di una variabile casuale $\mathbf{h} = a\mathbf{x} + b$ ottenuta come trasformazione lineare di una variabile $\mathbf{x}$ di cui si suppone siano noti i momenti.

Si dimostra, applicando il teorema del valore atteso che:

- $E[\mathbf{h}] = E[a\mathbf{x} + b] = aE[\mathbf{x}] + b = am_x + b$
- $\mathbf{s}_h^2 = a^2 \mathbf{s}_x^2$

Esempio: momenti distribuzione uniforme

Calcolare media e varianza di una distribuzione uniforme in $[a,b]$.

Ricordiamo che per una variabile uniforme si ha:

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ \dfrac{1}{\text{b - a}} & \text{per } a < x < b \\ 0 & \text{per } x > b \end{cases}$$

Calcolo della media.

$$m_x = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_x(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}$$

Calcolo della varianza:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - m_x^2$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\, dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Esercizio su calcolo dei momenti

Per una lingua straniera con 25 lettere dell'alfabeto, si è rivelato che:

- le 5 vocali hanno uguale frequenza statistica (probabilità) 7/100
- le rimanenti 20 lettere hanno uguale frequenza statistica 13/400

Si usa una codifica per cui le vocali sono codificate su 3 bit, mentre tutte le altre lettere sono codificate su 8 bit. Calcolare:

1. il numero medio di bit necessari a codificare una lettera;
2. la lunghezza media in numero di bit per un testo di 1000 caratteri.

Soluzione

Il numero medio di bit necessari a codificare una lettera è dato da:

$$\overline{n} = 5 \cdot 3 \cdot \frac{7}{100} + 20 \cdot 8 \cdot \frac{13}{400} = 6.25$$

Il numero medio di bit necessari per codificare 1000 caratteri è dunque pari a 625.

Teorema limite centrale

Si può dimostrare che, date n variabili casuali

- indipendenti tra di loro;
- con uguale densità di probabilità;
- media e varianza finite

la loro somma tende ad una distribuzione gaussiana per $n \to \infty$.

Questo teorema fondamentale giustifica l'utilizzo di una modellizzazione gaussiana per moltissimi fenomeni fisici.

Richiami sulle trasformate di Fourier e loro proprietà

In questo capitolo si riportano brevemente le principali proprietà delle trasformate di Fourier.

Sviluppi in serie di segnali periodici

Sia $x(t)$ un segnale periodico di periodo T, cioè tale per cui $x(t+T)=x(t)$. Il segnale si può espandere in serie di Fourier tramite le seguenti formule

$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} m_n e^{jn\frac{2p}{T}t}$ dove i coefficienti sono dati da: $m_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)e^{-jn\frac{2p}{T}t}dt$

Definizioni trasformate di Fourier

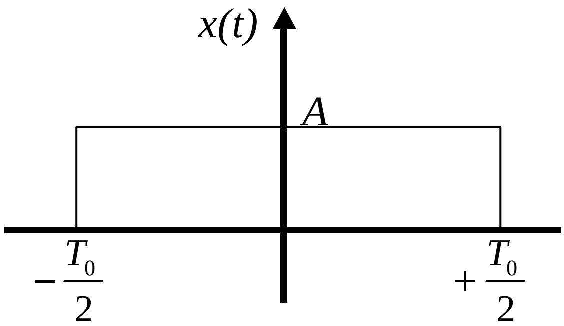
$$\begin{cases} X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2pft}dt \\ x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{+j2pft}dt \end{cases}$$

Tutti i segnali utilizzati in questo corso (salvo esplicite indicazioni contratie) soddisfano alle condizione di esistenza e invertibilità di questi integrali.

Esempio: calcolo esplicito di una trasformata tramite soluzione di integrali

Calcolare la trasformata del segnale detto "porta simmetrica" indicato in figura.

Si può applicare direttamente la definizione di trasformata, ottenendo:

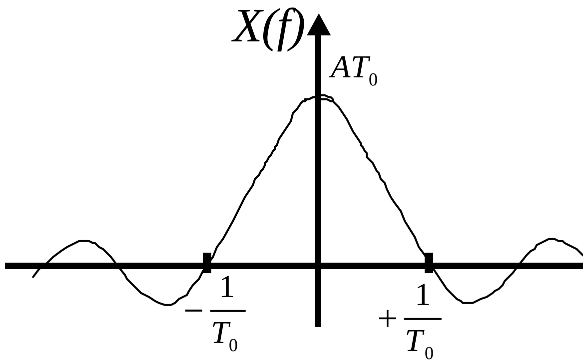


$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j2pft}dt=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}}Ae^{-j2pft}dt=$$

$$=A\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}}\cos(2pft)\,dt-jA\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}}\sin(2pft)\,dt$$

Il secondo integrale è dispari ed e' dunque nullo. Si ha dunque:

$$X(f)=2A\left[\frac{\sin(2pft)}{2pf}\right]_0^{T_0/2}=A\frac{\sin(pfT_0)}{pf}$$



Altre trasformate utili

- trasformata di $d(t)\Rightarrow F[d(t)]=1$
- trasformata di $\cos(t)\Rightarrow F[\cos(t)]=\frac{1}{2}[d(f-f_0)-d(f+f_0)]$
- trasformata di $\sin(t)\Rightarrow F[\sin(t)]=\frac{1}{2j}[d(f-f_0)-d(f+f_0)]$
- trasformata “treno di delta” equispaziate nel tempo: $\Rightarrow F\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty}d(t-iT)\right]=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}d\left(f-\frac{i}{T}\right)$

Si ricordino inoltre le seguenti proprietà della funzione delta:

- moltiplicazione per una delta: $x(t)\cdot d(t-t_0)=x(t_0)\cdot d(t-t_0)$
- convoluzione per una delta: $x(t)*d(t-t_0)=x(t-t_0)$

Proprietà trasformate di Fourier

1. linearità della trasformata: $F[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]=a_1X_1(f)+a_2X_2(f)$
2. proprietà del “ritardo”: $F[x(t-t)]=X(f)e^{-j2pft}$ (si noti che un ritardo nel dominio del tempo genera uno sfasamento nel dominio delle frequenze, senza modificare il modulo della trasformata)
3. scalamento nel tempo: $F[x(Kt)]=\frac{1}{|K|}X\left(\frac{f}{K}\right)$ (si noti che uno allargamento sull’asse dei tempi, corrispondente a $K<1$, crea un allargamento sull’asse delle frequenze, e viceversa)

4. condizioni di parità nel caso in cui $x(t)$ sia un segnale reale. Si ha in questo caso: $\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} & \text{pari} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} & \text{dispari} \end{cases}$ $\begin{cases} |X(f)| & \text{pari} \\ \mathrm{fase}\{X(f)\} & \text{dispari} \end{cases}$ (si noti che, a causa di queste condizioni di parità, la trasformata di un segnale reale ha tutta l'informazione spettrale contenuta nel semiasse positivo delle frequenze. Infatti, dato lo spettro per $f > 0$, quello per $f < 0$ può essere ricostruito applicando le condizioni di parità)
5. proprietà della "modulazione": $F\left[x(t)e^{j2pf_0t}\right] = X(f - f_0)$

Esempio di applicazione: spettro di segnali modulati in ampiezza

Un segnale $x(t)$ viene modulato in ampiezza da una portante sinusoidale, ottenendo in uscita il segnale $y(t) = x(t)\cos(2pf_0 t)$. Calcolare lo spettro del segnale risultante.

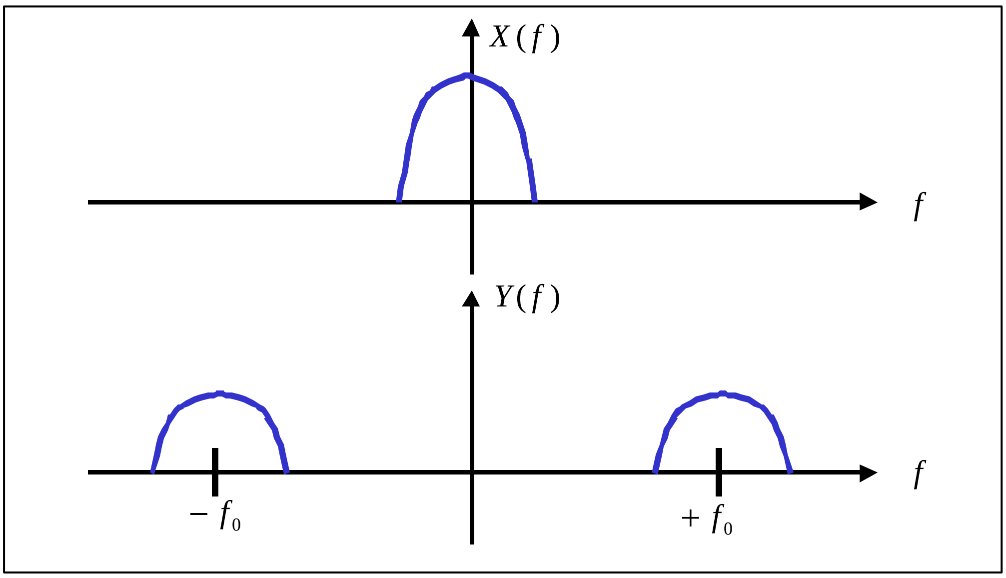
Soluzione
E' utile riscrivere il segnale $y(t)$ nella forma

$$y(t) = x(t)\frac{e^{+j2pf_0t} + e^{-j2pf_0t}}{2}$$

e successivamente applicare la proprietà delle trasformate $F\left[x(t)e^{j2pf_0t}\right] = X(f - f_0)$, ottenendo:

$$Y(f) = \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

E' importante visualizzare graficamente il risultato, in particolare nel caso in cui il segnale $x(t)$ sia in "banda base", cioè occupi le frequenze attorno a $f = 0$.

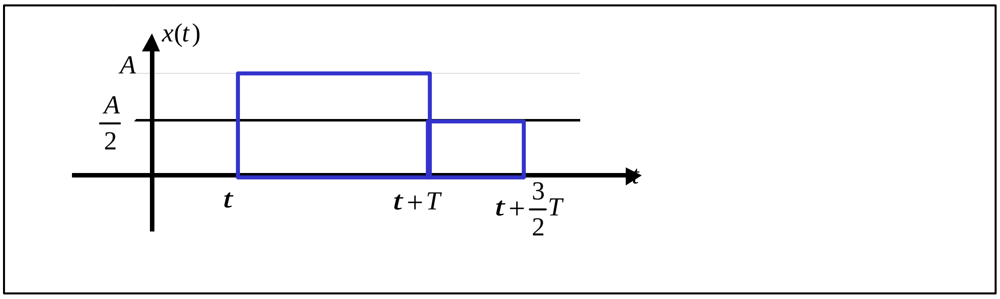


Si noti che la moltiplicazione per un segnale sinusoidale sposta l'occupazione di un segnale in banda base attorno alla frequenza f_0 .

Esercizi sulle trasformate di Fourier

Si calcolino le trasformate di Fourier dei seguenti segnali:

1. $y(t) = p_T(t-2T) + 0.5\, p_T(t-3T)$, dove per $p_T(t)$ si intende una "porta" di altezza unitaria, durata T centrata attorno all'origine
2. $y(t) = (1 + m \cdot x(t)) \sin(2pf_0 t)$
3. Si esprima analiticamente il seguente segnale e se ne calcoli la trasformata:



Soluzioni:

1. $$y(t) = p_T(t-2T) + 0.5\, p_T(t-3T) \Rightarrow Y(f) = \frac{\sin(pfT)}{pf} e^{-j2pf\cdot 2T} + \frac{1}{2}\frac{\sin(pfT)}{pf} e^{-j2pf\cdot 3T} =$$
$$= \frac{\sin(pfT)}{pf} e^{-j4pfT}\left(1 + \frac{1}{2} e^{-j2pfT}\right)$$

$$y(t) = (1 + m \cdot x(t)) \sin(2pf_0 t) \Rightarrow Y(f) = \left(d(f) + mX(f)\right) * \frac{1}{2j}\left(d(f-f_0) - d(f+f_0)\right) =$$

$$= \frac{1}{2j}\left(d(f-f_0) - d(f+f_0) + m \cdot X(f-f_0) - m \cdot X(f+f_0)\right)$$

2. La funzione indicata in figura si può esprimere analiticamente come:

$$y(t) = p_T\left(t - \left(t + \frac{T}{2}\right)\right) + p_{\frac{T}{2}}\left(t - (t + T + \frac{T}{4})\right) \Rightarrow$$

$$Y(f) = \frac{\sin(pfT)}{pf} e^{-j2pf\left(t+\frac{T}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{pfT}{2}\right)}{pf} e^{-j2pf\left(t+\frac{5}{4}T\right)}$$

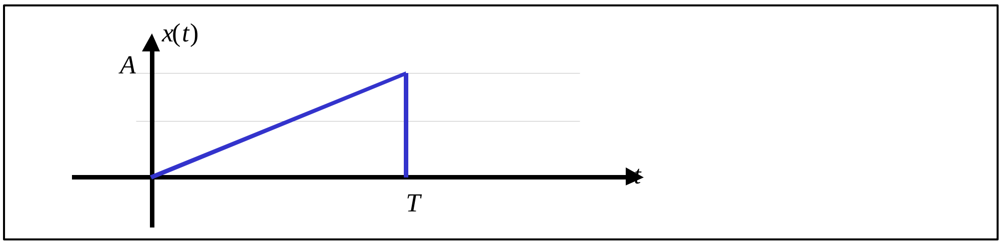
Sistemi lineari e convoluzione

In un sistema lineare con ingresso $x(t)$, risposta all'impulso $h(t)$ e uscita $y(t)$ valgono le seguenti relazioni:

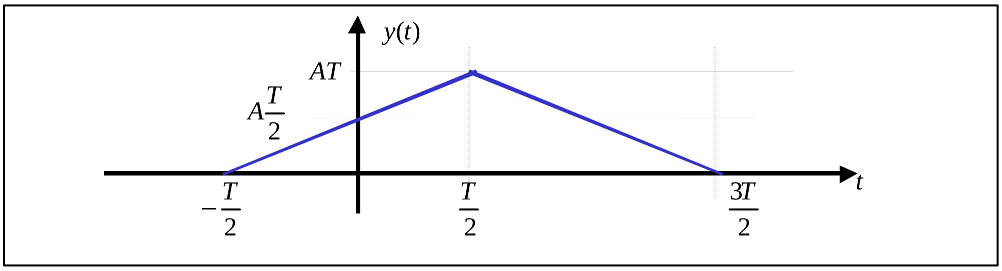
1. $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$ (integrale di convoluzione)
2. $Y(f) = H(f) \cdot X(f)$

Esercizi su integrali di convoluzione

1. si calcoli l'uscita di un sistema lineare con ingresso $x(t) = A p_T(t)$ e risposta all'impulso $h(t) = p_T(t)$
2. si calcoli l'uscita di un sistema lineare con ingresso $x(t)$ rappresentato nella sottostante figura e risposta all'impulso $h(t) = p_T(t)$



Soluzione es. 1



Soluzione es. 2

Uguaglianza di Parseval

Vale la seguente relazione, detta “uguaglianza di Parseval”:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

Analisi spettrale dei segnali

In questo capitolo si tratteranno brevemente le nozioni relative all'analisi spettrale dei segnali necessarie per questo corso. In particolare, si studieranno le proprietà dei segnali determinati, mentre nel capitolo successivo si esamineranno i segnali con caratteristiche stocastiche, detti " processi casuali".

Energia di un segnale

Dato un segnale $x(t)$ definito sull'intervallo $[t_1, t_2]$ (eventualmente con limiti che tendono all'infinito), si definisce "energia" del segnale la quantità

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

Un segnale si dice "ad energia finita" se questo integrale converge.

Commento sul legame con la definizione di energia nel campo della fisica: se il segnale $x(t)$ è la tensione ai capi si un resistore, la potenza istantanea dissipata sul resistore è data da $P(t) = \frac{x^2(t)}{R}$, dove R è la resistenza. Corrispondentemente, l'energia totale ai capi della resistenza risulta essere $E_R = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt = \frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$. La definizione di energia introdotta in questo costante è dunque del tutto analoga a quella fisica, salvo una costante di proporzionalità, che in questo caso risulta essere l'inverso di una resistenza.

Espressione dell'energia tramite uguaglianza di Parseval: l'energia di un segnale sull'intervallo temporale $[-\infty, +\infty]$ si può anche calcolare nel dominio spettrale tramite:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 dt$$

Potenza media di un segnale

Per segnali ad energia infinita, si usa comunemente la definizione di potenza media, data da:

$$P_x = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} |x(t)|^2 dt$$

Questa definizione è usata ad esempio per i segnali periodici (che risultano sempre essere ad energia infinita).

Sia $x(t)$ un segnale periodico di periodo T, cioè tale per cui $x(t+T)=x(t)$. In questi casi, la precedente definizione di potenza media si semplifica in:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2\,dt$$

Spettri di energia

Relativamente ai segnali ad energia finita su $[-\infty,+\infty]$, è utile introdurre una rappresentazione spettrale. Si definisce a tale scopo come "spettro di energia" di un segnale $x(t)$ ad energia finita la quantità

$$S_x(f) = |X(f)|^2$$

Proprietà spettro di energia

1. $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,df$
2. per un sistema lineare con funzione di trasferimento $H(f)$ vale la proprietà $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$

Funzione di autocorrelazione

Si definisce come funzione di autocorrelazione di un segnale $x(t)$ la funzione:

$$R_x(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\mathbf{t})x(t)\,dt = F^{-1}\{S_x(f)\}$$

Spettri di potenza

Per segnali ad energia infinita, ma a potenza media finita, si può introdurre una funzione $G_x(f)$ detta spettro di potenza, con le seguenti proprietà

1. $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\,df$
2. per un sistema lineare con funzione di trasferimento $H(f)$ vale la proprietà $G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$

In questo corso non si entrerà nel dettaglio del calcolo di $G_x(f)$ dato un generico segnale $x(t)$ e solitamente $G_x(f)$ sarà uno dei dati di ingresso degli esercizi da risolvere.

Processi casuali

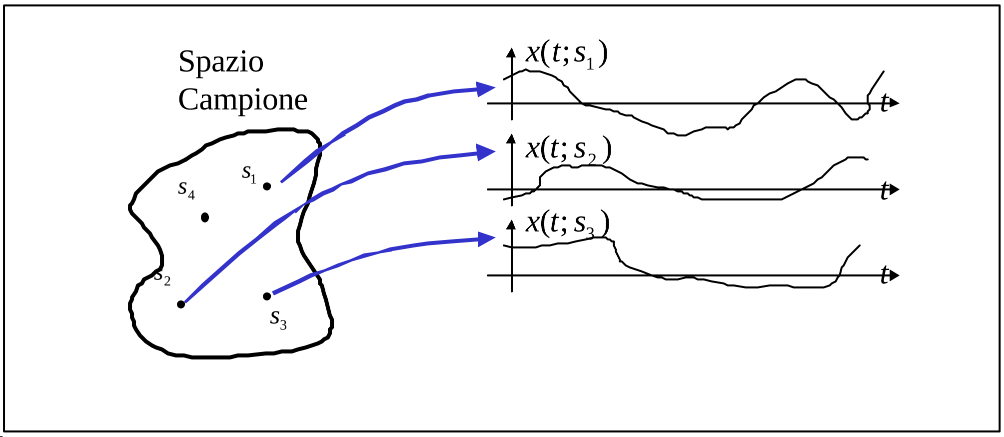
I processi casuali (anche detti "processi stocastici") sono un metodo matematico per rappresentare delle funzioni del tempo che abbiano caratteristiche stocastiche.

I processi casuali sono utili a rappresentare fenomeni fisici quali:

1. posizione di una singola particella di gas all'interno di un volume;
2. tensione ai campi di una resistenza;
3. segnali elettrici affetti da rumore
4. segnale vocale, etc. etc.

I processi casuali possono essere intesi come insiemi di "eventi", in cui ciascuna evento è una funzione del tempo.

Un processo casuale si indica semplicemente con $x(t)$; una singola "realizzazione" del processo casuale si indica invece come $x(t;s_i)$. Si veda la seguente rappresentazione



grafica:

Si noti che:

1. con il processo $x(t)$ si intende l'insieme di tutte le funzioni del tempo
2. se si fissa un evento s_i, di ottiene una funzione deterministica del tempo $x(t;s_i)$
3. se si fissa un istante di tempo t, al variare di s_i si ottiene una variabile casuale che assume valori $x(\mathbf{t};s_i)$
4. se si fissa un istante di tempo t ed una realizzazione s_i, si ottiene semplicemente un numero

Esempio: si consideri la tensione a vuoto misurata ai capi di un insieme di resistori, in presenza di rumore termico. Il processo casuale risultante $x(t)$ è il modello matematico che permette di descrivere il fenomeno fisico “rumore termico”. In sostanza si deve interpretare $x(t)$ come segue:

1. $x(t;s_i)$ è la tensione (deterministica) in funzione del tempo misurata ai capi del resistore s_i
2. fissato un istante di tempo $\boldsymbol{t}$, $x(\boldsymbol{t};s_i)$ è l’insieme dei valori di tensione misurati su ciascuno dei resistori.

Per caratterizzare i processi casuali, si dovrebbero in generale fornire le densità di probabilità per ogni istante di tempo.

Ad esempio, le “statistiche del primo ordine” del processo $x(t)$ sono date, per ogni istante di tempo, dalla densità di probabilità $f_x(x,t)$

Caratterizzazione processi casuali

I processi casuali si caratterizzano comunemente tramite i loro valori medi e funzioni di autocorrelazione.

Valore medio di un processo casuale

Si definisce come “valore medio” di un processo casuale la funzione del tempo:

$$\boldsymbol{h}(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x,t)\, dx$$

Ad esempio, il valore medio del processo casuale che rappresenta la tensione a vuoto ai capi di un resistore è nullo, cioè $\boldsymbol{h}(t) = 0 \quad \forall t$

Autocorrelazione di un processo casuale

Si definisce come “autocorrelazione” di un processo casuale la funzione di due variabili:

$$R_x(t_1,t_2) = E[x(t_1)x(t_2)]$$

La funzione di autocorrelazione è una delle caratterizzazioni più utile nell’ambito dei processi casuali.

In particolare, per un processo a valor medio nullo, si ha in tutti i casi pratici che la funzione di autocorrelazione tende a zero per $t_1 - t_2$ sufficientemente elevati, in quanto le variabili casuali $x(t_1)$ e $x(t_2)$ tendono ad essere scorrelate, e dunque: $E[x(t_1)x(t_2)] \to E[x(t_1)]E[x(t_2)] = 0$.

Potenza media di un processo casuale

Si definisce come "potenza media" di un processo casuale la funzione del tempo:

$$P_x(t) = E[x^2(t)]$$

Si osservi che esiste una relazione tra potenza media e funzione di autocorrelazione:

$$P_x(t) = R_x(t,t)$$

Esempio di caratterizzazione di un processo casuale

Si consideri il processo casuale $x(t) = r\cos(\omega t + \varphi)$ dove r è una variabile casuale gaussiano con media μ_r e varianza σ_r^2, mentre ω, φ sono valori deterministici. Calcolare media e autocorrelazione del processo casuale.

Soluzione

Calcolo della media.

$$E[x(t)] = E[r\cos(\omega t + \varphi)] = E[r]\cos(\omega t + \varphi) = \mu_r \cos(\omega t + \varphi)$$

Notare che si è ottenuto il risultato portando fuori dall'operatore $E[]$ tutte le funzioni deterministiche, sfruttando implicitamente le proprietà di linearità dell'operatore di media. Notare inoltre che, in generale, questo processo ha media dipendente dal tempo.

Calcolo dell'autocorrelazione

$$R_x(t_1,t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = E[r\cos(\omega t_1 + \varphi)\, r\cos(\omega t_2 + \varphi)]$$
$$= E[r^2]\cos(\omega t_1 + \varphi)\cos(\omega t_2 + \varphi) = (\sigma_r^2 - \mu_r^2)\cos(\omega t_1 + \varphi)\cos(\omega t_2 + \varphi)$$

Stazionarietà dei processi casuali

Un processo casuale si definisce stazionario in senso stretto quando le sue statistiche sono invarianti rispetto ad una traslazione dell'asse dei tempi.

In questo corso si userà solo una definizione più lasca, detta “stazionarietà in senso lato”, che coinvolge solo la media e l’autocorrelazione del processo. Si usa spesso l’abbreviazione WSS, da “Wide Sense Stationary”
In particolare, un processo casuale $x(t)$ si definisce stazionario in senso lato quando:

1. la media è costante nel tempo $\Rightarrow E[x(t)] = \boldsymbol{h} \quad \forall t$
2. la funzione di autocorrelazione dipende solo dalla differenza dei tempi $\boldsymbol{t} = t_1 - t_2$ e dunque si può scrivere: $R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1), x(t_2)] = E[x(t)x(t+\boldsymbol{t})] = R_x(\boldsymbol{t})$

Una conseguenza importante per i processi stazionari in senso lato riguarda la potenza, che risulta costante nel tempo, e pari all’autocorrelazione per $t = 0$. Infatti $P_x(t) = E[x^2(t)] = E[x(t)x(t)] = R_x(0)$

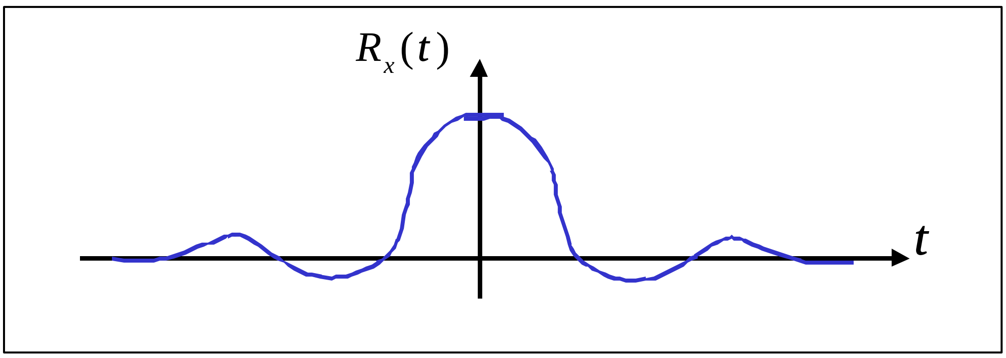
Commento: molti processi fisici, ed in particolare tutti quelli considerati in questo corso, hanno caratteristiche di stazionarietà. Ad esempio, il rumore termico in un circuito elettronico è in prima approssimazione stazionario. Intuitivamente, questo vuol dire che le caratteristiche stocastiche del processo sono indipendenti dal tempo.

Proprietà della funzione di autocorrelazione di un processo WSS

La funzione di autocorrelazione di un processo stazionario in senso lato ha le seguenti proprietà

1. è una funzione pari, cioè $R_x(\boldsymbol{t}) = R_x(-\boldsymbol{t})$
2. è una funzione a valori positivi nell’origine, cioè $R_x(0) \geq 0$ (infatti $R_x(0) = E[x^2(t)]$)
3. ha un massimo nell’origine $|R_x(\boldsymbol{t})| \geq R_x(0)$

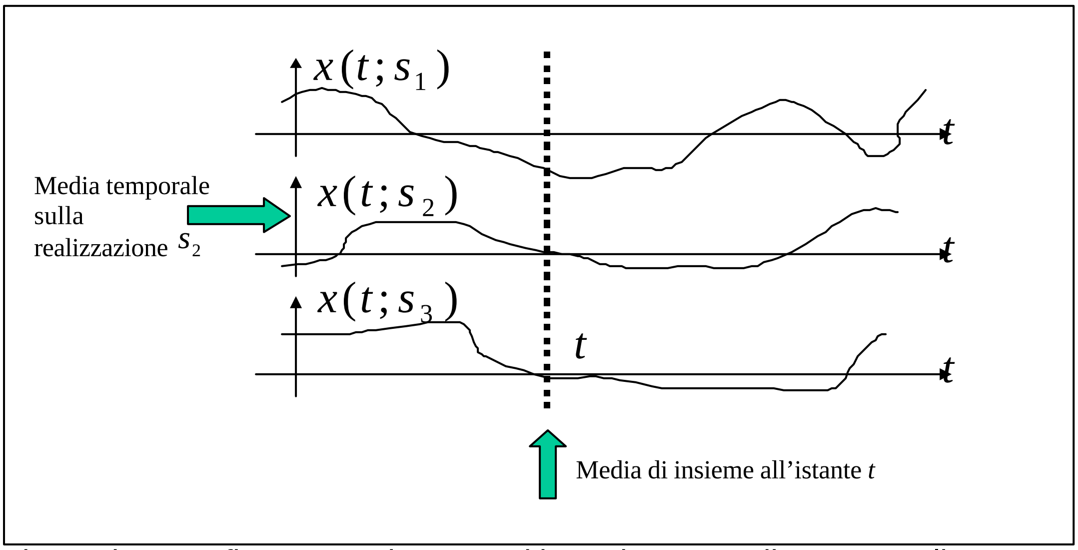
Un andamento tipico di funzione di autocorrelazione di un processo stazionario in senso lato è illustrato nella sottostante figura:



Cenni sul concetto di ergodicità di un processo casuale

Un processo casuale è detto "ergodico" se le medie temporali uguagliano le medie di insieme.

In sostanza, per un processo stazionario, l'ergodicità richiede che le medie fatte sulle diverse realizzazioni del processo (medie di insieme) siano uguali rispetto a quelle fatte su una singola realizzazione rispetto al tempo (medie temporali). La seguente figura



schematizza graficamente che cosa si intende per medie "temporali" oppure "di insieme".

Ad esempio, per quanto riguarda il processo casuale rappresentante la tensione a vuoto ai capi di un gruppo di resistori:

1. per media di insieme si intende, fissato un certo istante t di osservazione, la media delle tensioni a quell'istante su *tutti* i resistori;
2. per media temporale si intende quella misurata su un *singolo* resistore, e fatta rispetto al *tempo*.

I processi casuali considerati in questo corso si supporranno sempre ergodici, salvo altre indicazioni esplicite.

Densità spettrale di potenza di processo WSS

Si definisce densità spettrale di potenza di un processo WSS la trasformata della sua autocorrelazione:

$$G_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Proprietà della densità spettrale di potenza di un processo WSS

1. $G_x(f)$ è una funzione reale e pari
2. $G_x(f) \geq 0$.
3. $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) df$ (la potenza del processo è pari all'integrale della densità spettrale)
4. dato un sistema lineare con funzione di trasferimento $H(f)$, la densità spettrali in uscita è data da: $G_y(f) = H(f) \cdot G_x(f)$

Le ultime due proprietà collegano la densità spettrale con le definizioni di potenza, e sono estremamente importanti.

Rumore gaussiano bianco

Il processo casuale più usato nell'ambito della teoria delle comunicazioni è il "rumore gaussiano bianco".

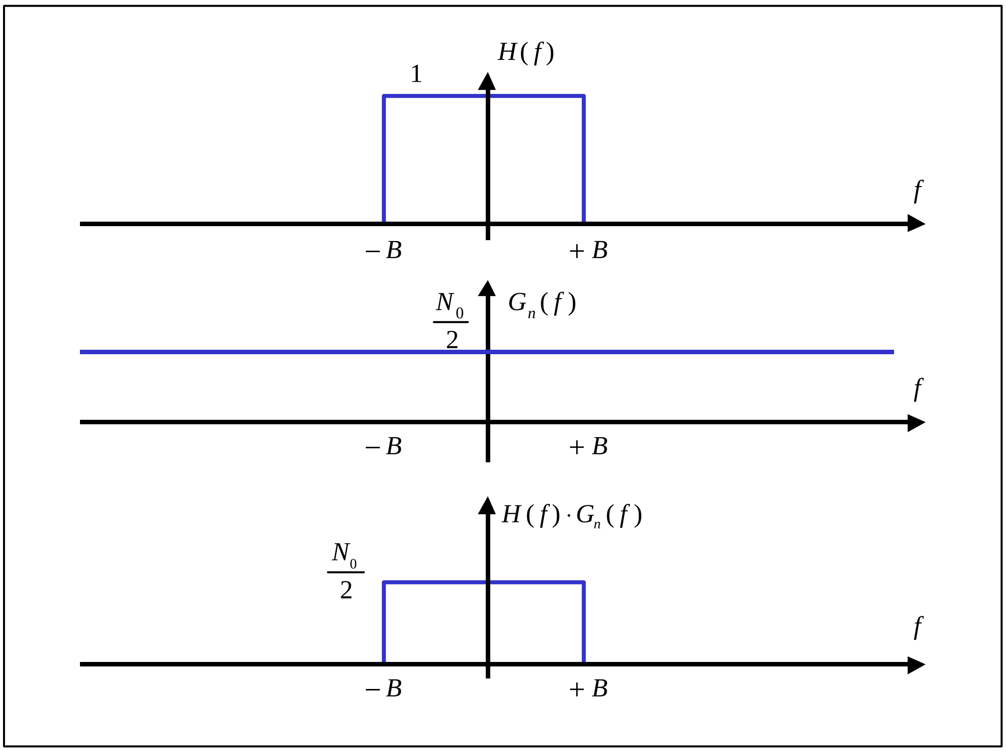
Un processo causale $n(t)$ si dice gaussiano bianco se:

1. per $\forall t$, $n(t)$ è una variabile gaussiana a valore medio nullo
2. $G_n(f) = \frac{N_0}{2}$ $\forall f$ (la densità spettrale è piatta in frequenza, da cui la definizione di rumore "bianco")
3. $R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$

Si osservi che la potenza totale di un rumore gaussiano bianco, data dall'integrale della densità spettrale, risulta infinita e dunque chiaramente non fisica. Tuttavia, il modello è usato in moltissimi casi pratici per rappresentare un rumore piatto su una banda molto più larga dei filtri del sistema.

Rumore gaussiano bianco all'uscita di un filtro

E' importante calcolare la potenza di un rumore gaussiano bianco all'uscita di un filtro ideale, ad esempio un passabasso con banda passante B mostrato nella seguente figura:



Si ha in uscita $G_{out}(f) = \left|H(f)\right|^2 G_n(f) = \dfrac{N_0}{2}\left|H(f)\right|^2$

Per il calcolo della potenza:

$$P_{out} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{out}(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2}\left|H(f)\right|^2\,df = \int_{-B}^{+B} \frac{N_0}{2}\,df = N_0 B$$