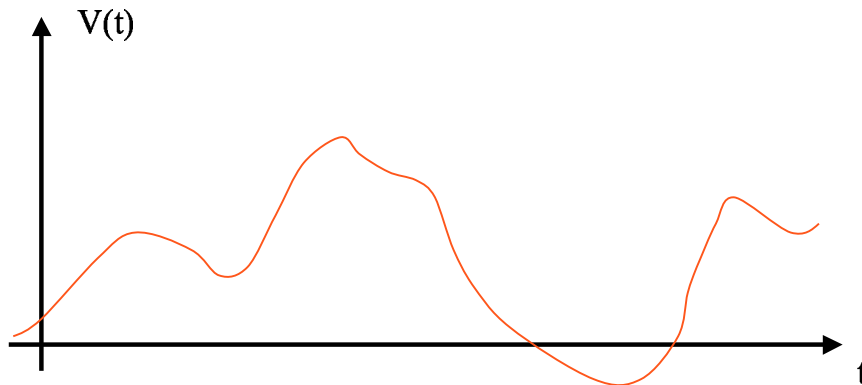


Campionamento e ricostruzione dei segnali

Rappresentazione numerica dei segnali

- Nei moderni sistemi di memorizzazione e trasmissione i segnali in ingresso sono di tipo **numerico**, normalmente rappresentati in **formato binario {0,1}**.
- In alcuni casi (si pensi ad esempio alle informazioni sulle operazioni valutarie che le banche si scambiano fra loro), i segnali da elaborare e trasmettere sono segnali **numerici** già **all'origine** (la sorgente è una sorgente numerica).
- In alcuni casi la rappresentazione numerica dei segnali originari è molto semplice (alle lettere di un testo può essere facilmente associato un codice numerico: a→1, b →2, ecc.).
- In molti altri casi, invece, la rappresentazione numerica dei segnali originari richiede un'analisi più accurata. Come, ad esempio, rappresentare numericamente il segnale di tensione (Volt) in uscita da un microfono?

Molti dei segnali con cui abbiamo a che fare nella realtà quotidiana sono continui sia nel tempo che nelle ampiezze.



La rappresentazione di un segnale **continuo** in un segnale **numerico** richiede di discretizzare sia il tempo che le ampiezze.

L'operazione di discretizzazione nel tempo e' detta campionamento, la discretizzazione nelle ampiezze e' detta quantizzazione.

Conversione analogico/digitale (A/D)

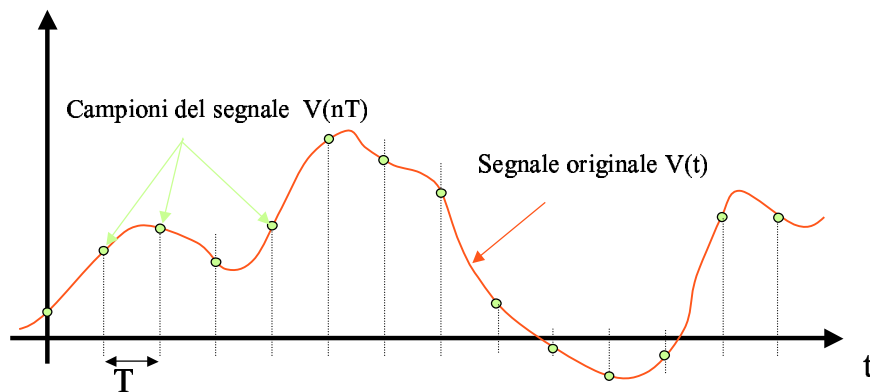
Per rappresentare numericamente un segnale **continuo** nel **tempo** e nelle **ampiezze** è necessario:

- **Campionare il segnale nel tempo;**
- **Quantizzare le ampiezze dei campioni**
(rappresentare l'ampiezza di ogni campione utilizzando un numero finito di livelli);
- **Codificare i valori quantizzati dei campioni**
(associare ad ogni livello un numero finito di cifre; solitamente si usano cifre binarie, cioè 'bit').

Questo processo di conversione A/D, che trasforma il segnale originario in una sequenza di bit {0,1}, e' noto come tecnica 'PCM' (Pulse Code Modulation o Modulazione impulsiva codificata).

Il sistema PCM costituisce la tecnica di base per la trasmissione numerica di informazione analogica.

Campionare i segnali



- **T** e' detto **periodo (o passo) di campionamento**;
- **$f_c = 1/T$** e' detta **frequenza di campionamento**.

5

Fondamenti TLC

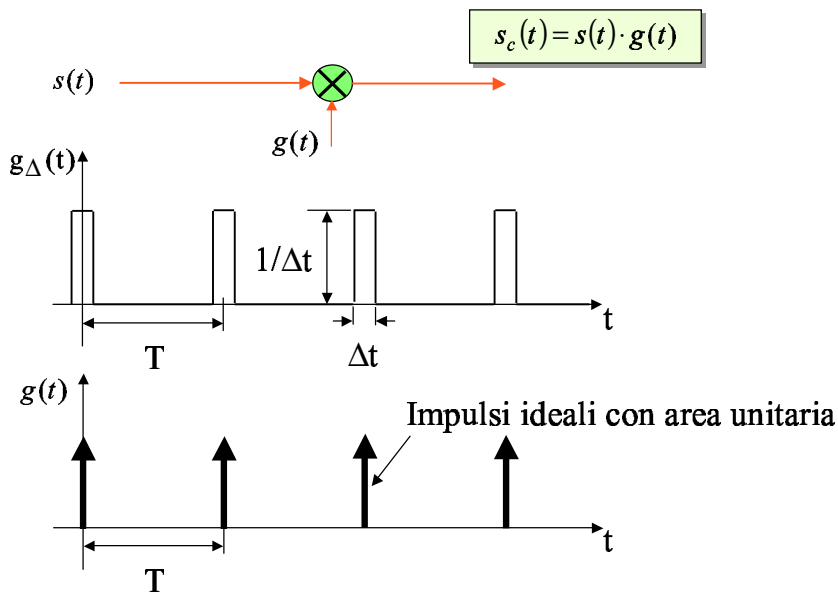
Campionare un segnale significa convertire il segnale $V(t)$, continuo nel tempo t , nella sequenza dei suoi campioni $V(nT)$, i valori che il segnale assume negli istanti equidistanti nT , dove T e' l'intervallo costante tra due campioni successivi.

Se il segnale $v(t)$ ha ampiezza continua, i suoi campioni hanno ampiezza $V(nT)$ che puo' variare in maniera continua in un certo intervallo.

Perche' l'operazione di campionamento sia di utilita' pratica, e necessario che la sequenza dei suoi campioni rappresenti il segnale continuo, nel senso che sia possibile ricostruire esattamente il segnale continuo a partire dalla sequenza $V(nT)$.

Il nostro obiettivo e' quello di evidenziare quali sono le condizioni perche' questo sia possibile.

Il campionamento ideale nel tempo



6

Fondamenti TLC

Assumeremo, come ipotesi, che i segnali da campionare siano di tipo passabasso. Questa ipotesi è ampiamente soddisfatta per i segnali di tipo fisico che, in pratica, vengono convertiti.

Per continuare ad utilizzare gli strumenti dell'analisi di Fourier, è utile rappresentare con un segnale continuo il segnale all'uscita del campionatore, che per definizione è un segnale discreto, che trasporta informazione solo negli istanti discreti nT .

Questo è il motivo per cui si introduce il campionamento cosiddetto 'ideale', in cui, dato un segnale continuo $s(t)$ in ingresso, il segnale campionato $s_c(t)$ viene rappresentato come una successione di impulsi ideali che si ripetono con passo T , uguale al passo di campionamento.

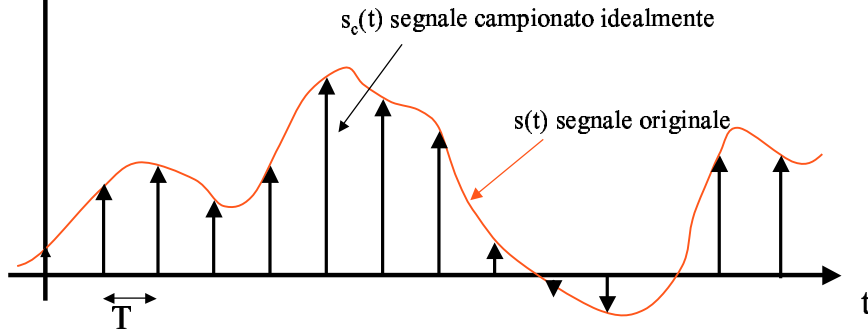
L'area dell'impulso centrato nel generico istante nT coincide con il valore del campione $s(nT)$.

Dato un segnale continuo $s(t)$, il campionamento ideale è schematizzabile come il prodotto di $s(t)$ per il treno periodico di impulsi ideali di area unitaria equispaziati di T , indicato con $g(t)$.

Il treno di impulsi ideali può essere visto come il limite per Δt che tende a zero del treno di impulsi rettangolari con area unitaria e durata temporale Δt .

Il campionamento ideale

$$s_c(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \delta(t - nT)$$



7

Fondamenti TLC

Il segnale campionato $s_c(t)$ e' rappresentato dunque dalla sequenza di impulsi ideali equispaziati di T , la cui area coincide con il valore che il segnale continuo assume agli istanti iT .

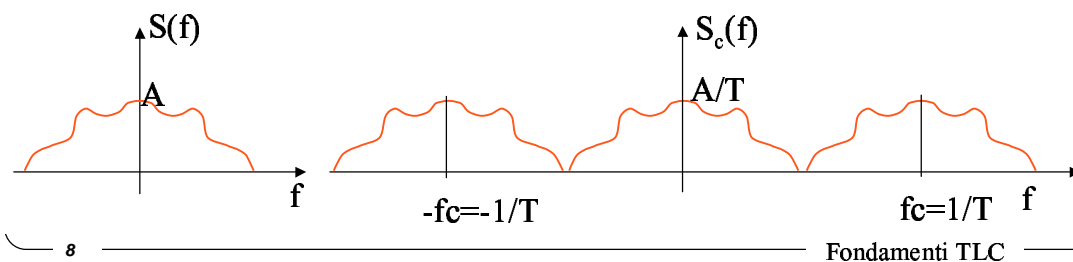
Utilizziamo questa rappresentazione grafica, in cui ogni impulso e' raffigurato con una freccia la cui altezza e' proporzionale alla sua area.

Il Campionamento ideale nel dominio delle frequenze

$$s(t) \xrightarrow{F} S(f)$$

$$g(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT) \xrightarrow{F} G(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_c)$$

$$s_c(t) = s(t) \cdot g(t) \xrightarrow{F} S_c(f) = S(f) * G(f) = \\ = S(f) * \frac{1}{T} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_c) \right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f - kf_c)$$



8

Fondamenti TLC

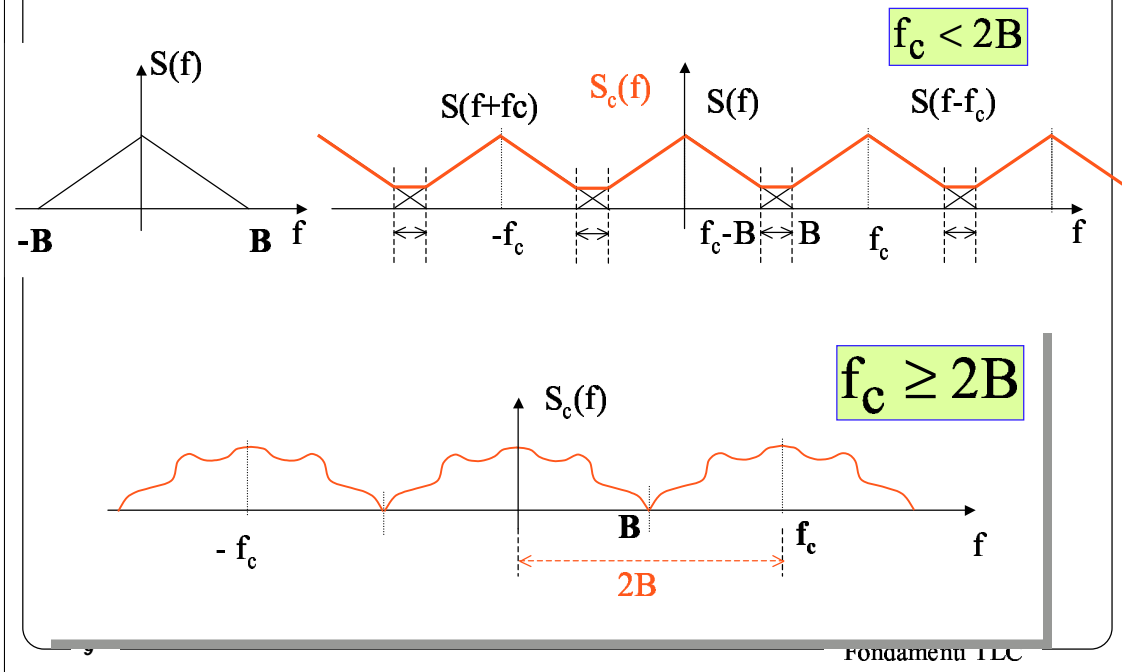
L'operazione di campionamento nel tempo corrisponde, nel dominio delle frequenze all'operazione di replicazione dello spettro del segnale continuo.

Chiamiamo $S(f)$ lo spettro del segnale continuo e $G(f)$ lo spettro del treno di impulsi ideali, $G(f)$ e' sua volta un treno di impulsi ideali centrati nei multipli kf_c della frequenza di campionamento f_c , e moltiplicati per $1/T$.

Applicando la proprieta' della trasformata di Fourier di moltiplicazione nel tempo, la trasf. del prodotto delle due funzioni nel tempo si ottiene facendo la convoluzione degli spettri.

La convoluzione di $S(f)$ con un impulso centrato in kf_c equivale a traslare lo spettro in kf_c , dunque lo spettro del segnale campionato si ottiene sommando le infinite repliche dello spettro $S(f)$ traslate nei multipli della frequenza di campionamento kf_c . Nella figura abbiamo rappresentato solo tre repliche centrate in 0 in f_c e $-f_c$.

La condizione di Nyquist



Se il segnale continuo $s(t)$ ha banda B strettamente limitata, cioè se il suo spettro $S(f)=0$ per $|f| \geq B$, le repliche dello spettro, generate dall'operazione di campionamento, non si sovrappongono se e solo se è soddisfatta la condizione di Nyquist cioè $f_c \geq 2B$.

Viceversa, se $f_c < 2B$ le repliche dello spettro si sovrappongono.

Le frequenze comprese nell'intervallo di sovrapposizione sono dette frequenze di 'aliasing'.

Il teorema del campionamento

Se

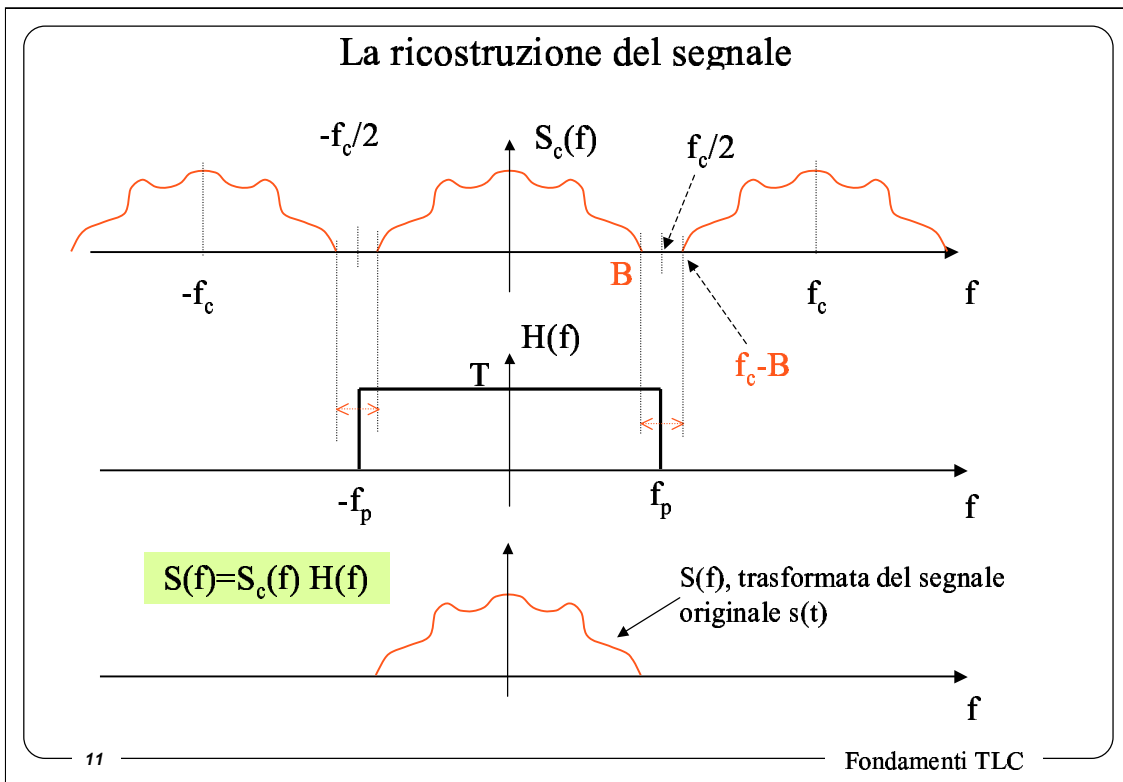
- il segnale $s(t)$ e' a banda B strettamente limitata
 $S(f)=0$ per $|f|>=B$;
- e' soddisfatta la condizione di Nyquist $f_c=1/T>=2B$;

allora

- il segnale $s(t)$ e' rappresentato dai suoi campioni;
- il segnale originale $s(t)$ puo' essere ricostruito a partire dalla sua versione campionata $s_c(t)$ con un filtro passa basso ideale avente guadagno T e frequenza di taglio f_p

$$B < f_p < f_c - B.$$

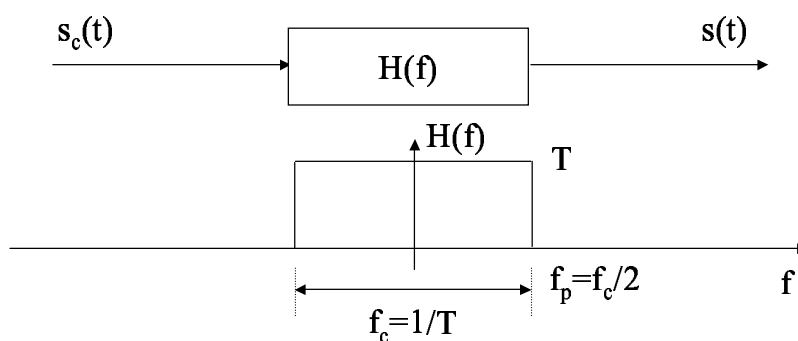
Il teorema del campionamento risponde alla domanda che ci eravamo posti: quali sono le condizioni tali per cui dalla sequenza dei campioni e' possibile ricostruire il segnale originario.



Ricostruire il segnale continuo $s(t)$, data la sua versione campionata $s_c(t)$, equivale, nel dominio della frequenza, a ricostruire lo spettro del segnale $s(t)$, cioè $S(f)$, dato lo spettro del segnale $s_c(t)$, cioè dato $S_c(f)$.

Il filtro di ricostruzione elimina perfettamente le repliche spettrali eccetto quella centrata nella frequenza zero, che coincide con lo spettro del segnale originario.

La ricostruzione del segnale



$$h(t) = F^{-1}(H(f)) = \text{sinc}(t/T)$$

$$s(t) = s_c(t) * h(t) = \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} s(iT) \cdot \delta(t - iT) \right] * \text{sinc}(t/T) =$$

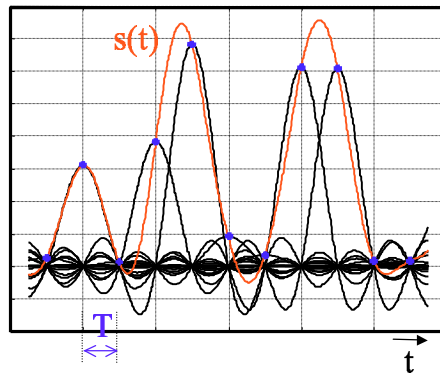
$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} s(iT) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - iT}{T}\right)$$

E' possibile rappresentare la ricostruzione del segnale continuo direttamente nel dominio temporale: il segnale ricostruito risulta essere la convoluzione tra il segnale campionato idealmente e la risposta all'impulso del filtro di ricostruzione $h(t)$.

Il segnale ricostruito dunque risulta essere la somma di funzioni $\text{sinc}(t/T)$, traslate negli istanti di campionamento iT e moltiplicate per il valore del campione corrispondente $s(iT)$.

Il segnale è ricostruito come somma di seni cardinali

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s(iT) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t-iT}{T}\right)$$



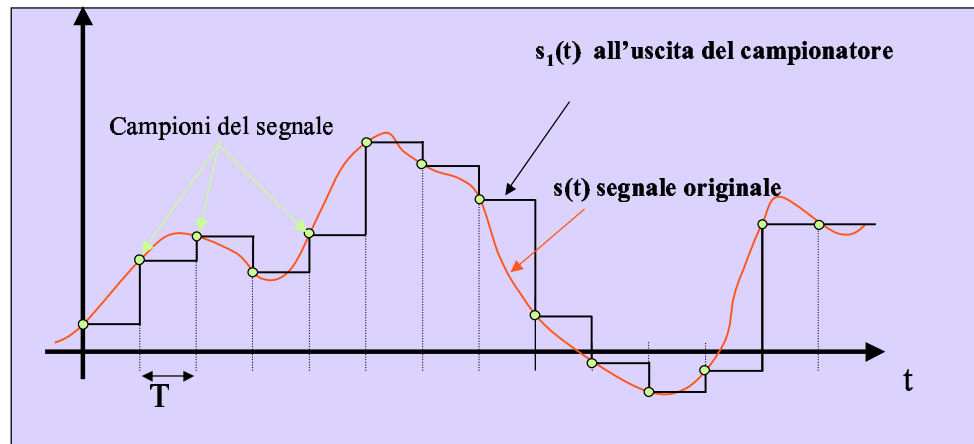
Il campionamento in pratica

- Il segnale campionato consiste di impulsi di ampiezza e durata finita;
- il filtro di ricostruzione non è ideale;
- il segnale da campionare non è a banda rigorosamente limitata.

Finora abbiamo trattato le operazioni di campionamento e ricostruzione dal punto di vista ideale.

Passando a considerare come queste operazioni vengono realizzate in pratica, dobbiamo tenere conto che alcune ipotesi ideali che abbiamo assunto non valgono.

Cosa succede nei sistemi reali



15

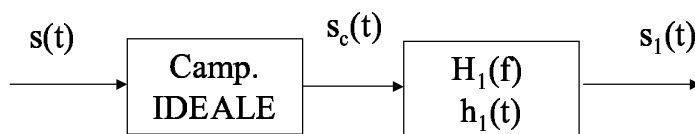
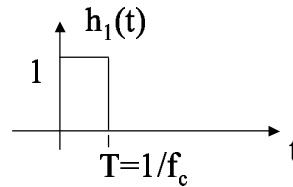
Fondamenti TLC

Oltre al fatto che gli impulsi ideali con ampiezza infinita e durata infinitesima non sono realizzabili, nei convertitori A/D il corretto funzionamento dei circuiti a valle del campionatore richiede che gli impulsi costituenti il segnale campionato abbiano durata non troppo piccola e ampiezza costante.

Generalmente il segnale campionato è somma di impulsi rettangolari con base uguale al tempo di campionamento T .

Il campionamento Sample & Hold (S&H)

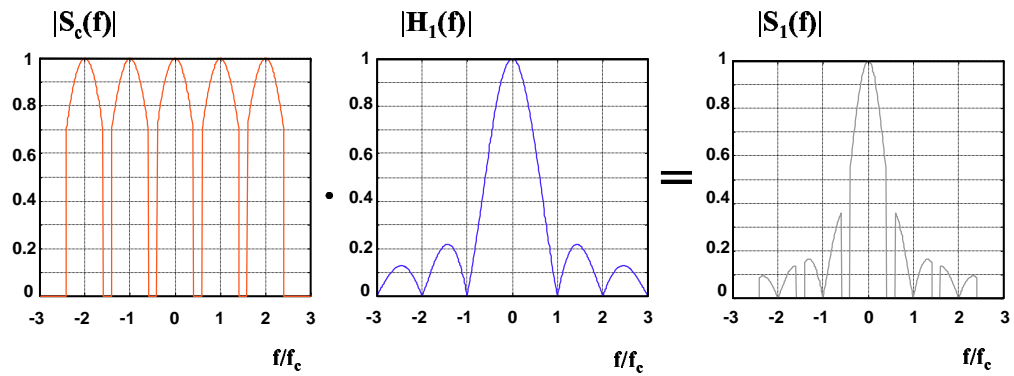
$$s_1(t) = s_c(t) * h_1(t)$$
$$S_1(f) = S_c(f) \cdot H_1(f)$$



L'operazione di campionamento nei sistemi reali equivale ad un campionamento ideale a cui si fa seguire la memorizzazione del campione per un tempo generalmente uguale al passo T di campionamento.

In questo caso si parla di campionamento Sample & Hold e si può schematizzare come un campionatore ideale e un filtro con risposta all'impulso $h_1(t)$ rettangolare e risposta in frequenza $H_1(f)$ di tipo $\text{sinc}(fT)$.

Il campionamento Sample & Hold (S&H)

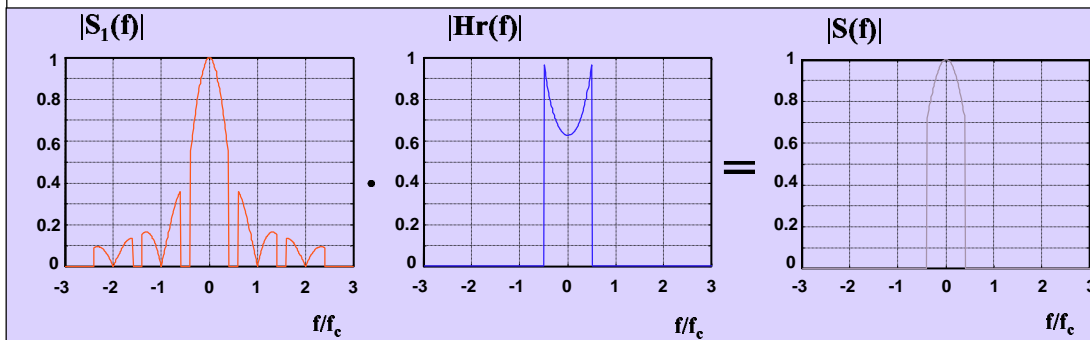
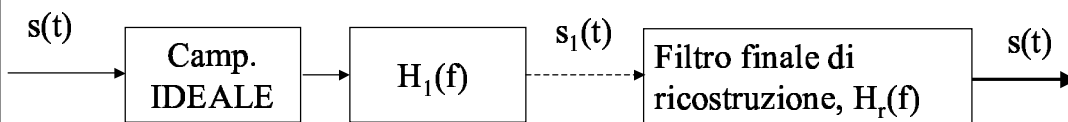


17

Fondamenti TLC

Le varie repliche che costituiscono lo spettro del segnale campionato in modo ideale vengono distorte per effetto della memorizzazione.

La ricostruzione del segnale campionato con un S&H



Se $H_r(f) = \frac{1}{H_1(f)} \text{rect}\left(\frac{f}{2f_p}\right); \quad B < f_p < f_c - B$ \implies $H_1(f) \cdot H_r(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_p}\right); \quad B < f_p < f_c - B$
 e $S_1(f) \cdot H_r(f) = S_c(f) \cdot H_1(f) \cdot H_r(f) \propto S(f)$

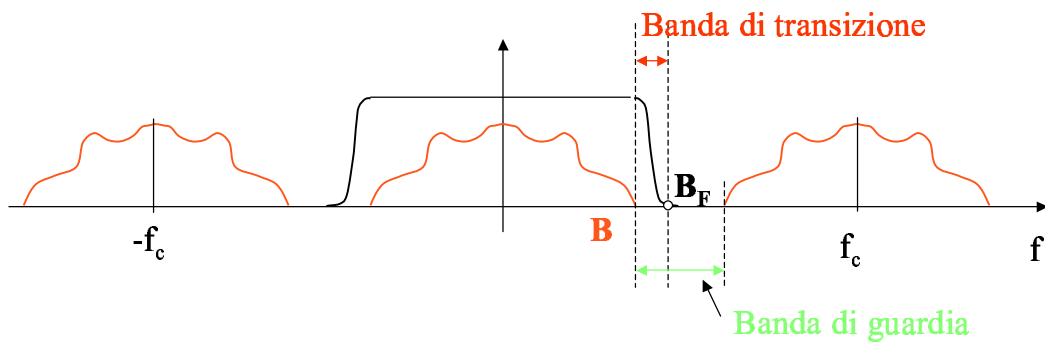
18

Fondamenti TLC

Tuttavia il segnale originario $s(t)$ e' ugualmente recuperabile a partire dalla sua versione campionata mediante un filtraggio passabasso con risposta in frequenza $H_r(f)$ che, nella banda passante, risulta proporzionale all'inverso della funzione di trasferimento $H_1(f)$ del mantentore.

In questo modo si riesce a compensare la distorsione introdotta dal mantentore.

Filtri di ricostruzione non ideali



$$f_c \geq 2B_F > 2B$$

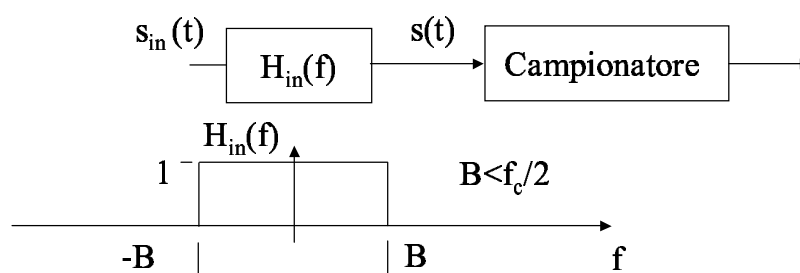
Il teorema del campionamento afferma che è possibile ricostruire il segnale a partire dalla sua versione campionata mediante un filtro ideale; in pratica tale tipo di filtro non è realizzabile. Nella risposta in frequenza dei filtri passabasso reali, la banda di transizione tra banda passante e banda oscura non è infinitesima, ma ha un'ampiezza finita.

I filtri reali dunque, nella banda di transizione, presentano un comportamento che si discosta dal comportamento ideale.

Per evitare che nella banda di transizione compaiano code delle repliche degli spettri ripetuti, basta avere l'accorgimento di sovracampionare il segnale (cioè utilizzare una frequenza di campionamento maggiore della minima consentita dal teorema del campionamento) per garantire una certa separazione delle varie repliche (banda di guardia). L'entità del sovracampionamento dipenderà dalla qualità del filtro di ricostruzione: migliore è la qualità del filtro di ricezione, più bassa è la frequenza di campionamento utilizzabile.

Filtro anti-aliasing

Se i segnali sono a banda non rigorosamente limitata, per evitare la sovrapposizione di componenti spettrali con frequenza $f \geq f_c/2$ si inserisce, prima del campionatore un filtro limitatore di banda (filtro anti-aliasing).



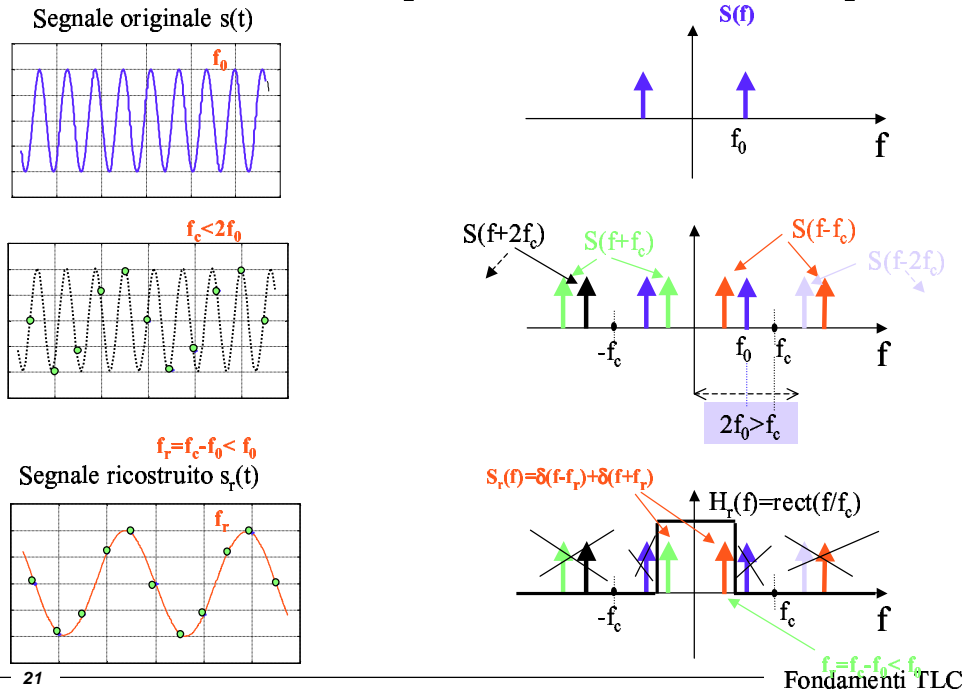
La maggior parte dei segnali hanno banda non rigorosamente limitata, ma sono a banda praticamente limitata, nel senso che le componenti frequenziali esterne ad una banda nominale $|f| > B$ sono piccole o comunque trascurabili ai fini dell'applicazione che si vuole studiare.

Ad es la voce ha un contenuto spettrale che si estende fino a frequenze di circa 20 KHz, ma per l'intelligibilità della conversazione, tenuto conto delle caratteristiche dell'orecchio umano, per tale tipo di applicazione è sufficiente trasmettere il contenuto spettrale limitato alla banda di 3400 Hz, che risulta la sua banda nominale.

Se però consideriamo la banda nominale come se fosse la banda effettiva del segnale, e utilizziamo una frequenza di campionamento doppia della banda nominale (teorema del campionamento), nella replicazione spettrale, le code delle repliche, per quanto non significative, possono sovrapporsi (fenomeno di aliasing) e generare distorsione (detta di 'aliasing') dopo la ricostruzione.

Per evitare distorsioni da aliasing, si prefiltra il segnale originario per eliminare le componenti spettrali esterne alla banda nominale: in questo modo il segnale prefiltrato risulta effettivamente un segnale a banda rigorosamente limitata e si può applicare il teorema del campionamento.

Cosa succede se non è rispettato il Teorema del Campionamento?



21

Come esempio prendiamo un segnale sinusoidale a frequenza f_0 , $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

Il suo spettro $S(f)$ è rappresentato da due impulsi centrati in $\pm f_0$. Il segnale è a banda limitata e, in accordo con il teorema del campionamento, per ricostruire il segnale perfettamente dovremmo scegliere una frequenza di campionamento $f_c > 2f_0$.

Se campioniamo il segnale con frequenza $f_c < 2f_0$, la replicazione spettrale genera aliasing, infatti nello spettro del segnale campionato compaiono due impulsi all'interno della banda del segnale continuo originario. Questi due impulsi alle frequenze $\pm(f_c - f_0)$ rappresentano lo spettro del segnale ricostruito da un filtro passabasso ideale con frequenza di taglio $f_p = f_c/2$.

Il segnale ricostruito è ancora un segnale sinusoidale, la cui frequenza $f_r = f_c - f_0$ però è più bassa della frequenza f_0 del segnale originario.

Il segnale dunque ha subito distorsione da aliasing.