Fondamenti di segnali e trasmissione

Esercizi - parte 1: Segnali

Indice

Segnali deterministici, energia, valor medio, potenza, analisi di Fourier, convoluzione, filtraggio, decibel, campionamento.

1. Esercizi risolti.

Esercizio 1.1

Calcolare la potenza, l'energia e il valor medio dei seguenti segnali

a) $x(t)=A$;
b) $x(t)=u(t)$ (scalino);
c) $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\phi)$

Soluzione

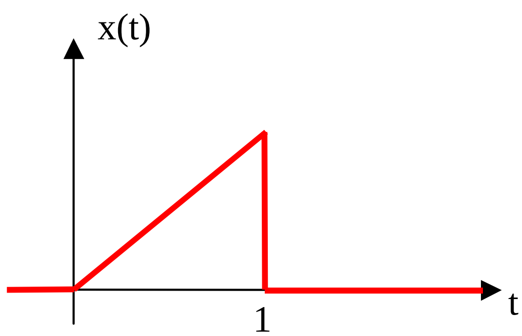
$$a)\quad P=A^2;\quad E=\infty;\quad m_x=A.$$

$$b)\quad P=1/2;\quad E=\infty;\quad m_x=1/2.$$

$$c)\quad P=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2\cos^2(2\pi f_0 t+\phi)dt=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t+2\phi)\right)dt=\frac{A^2}{2};\quad E=\infty;\quad m_x=0.$$

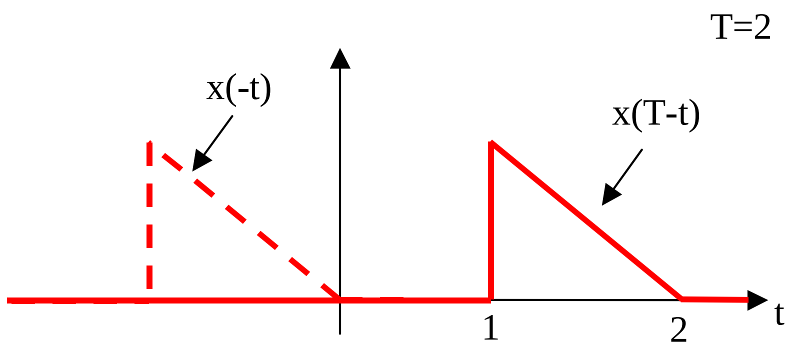
Esercizio 1.2

Dato il segnale $x(t)$ riportato in figura tracciare l'andamento del segnale $x(T-t)$ con $T=2$.



Soluzione

Il segnale $x(T-t)$ può essere scritto come $x[-(t-T)]$ e quindi può essere visto come una versione del segnale originale scalata di un fattore -1 (ribaltata rispetto all'asse verticale) e ritardata di T.

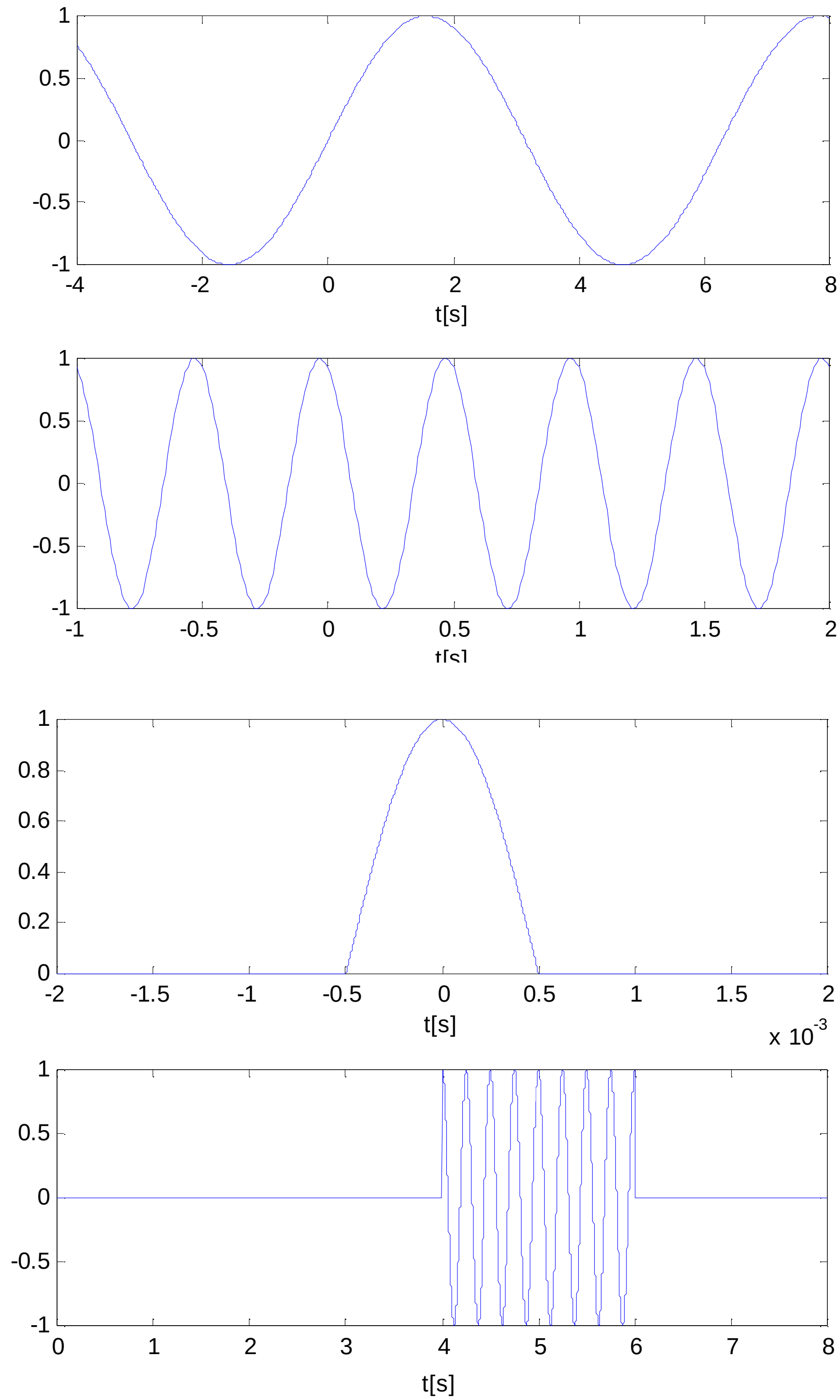


Esercizio 1.3

Visualizzare l'andamento nel tempo delle seguenti funzioni reali

a) *x(t)=sen(t)*
b) $x(t)=cos(4\pi t+\pi/8)$
c) $x(t)=cos(1000\pi t)rect(1000t)$
d) $x(t)=cos(8\pi t)rect((t-5)/2)$

Soluzione



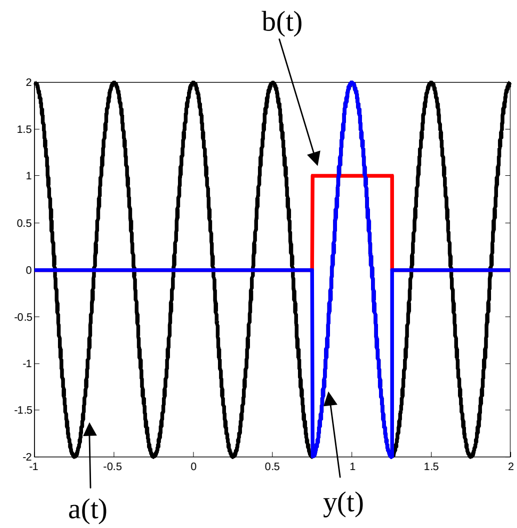
Esercizio 1.4

Sia dato il segnale: $y(t) = [2 \cdot \cos(2\pi \cdot 2 \cdot t)] \cdot rect\left(\frac{t-1}{0.5}\right) = (t) \cdot b(t)$.

Tracciarne l'andamento nel tempo e calcolarne l'energia.

Soluzione

L'andamento dei segnali considerati è riportato in figura



Per calcolare l'energia di *y(t)* possiamo procedere nel seguente modo:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2 \, dt = \int_{0.75}^{1.25} [2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot t)]^2 \, dt = 4 \cdot \int_{0.75}^{1.25} \cos^2(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot t) \cdot dt$$

A questo punto basta effettuare il calcolo dell'integrale.
Per evitare i calcoli si può ricordare che la potenza media di un segnale cosenusoidale/sinusoidale in un periodo è pari a ½, cioè sia ha:

$$\frac{1}{T} \int_T \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{T} \int_T \sin^2\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{2}$$

Da ciò ed osservando che l'integrale relativo al calcolo dell'energia copre proprio un periodo della funzione sinusoidale considerata (tale periodo vale *0.5*), possiamo scrivere:

$$E = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Esercizio 1.5

A cosa corrisponde il segnale $\mathrm{Re}\left[e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j\pi/2}\right]$?

Soluzione

$$\mathrm{Re}\left[e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j\pi/2}\right] = \mathrm{Re}\left[e^{-j(2\pi f_0 t + \pi/2)}\right] = \cos(2\pi f_0 t + \pi/2) = -\sin(2\pi f_0 t)$$

Esercizio1.6

Determinare lo spettro di fase e lo spettro di ampiezza del segnale $x(t)=cos^3(2\pi t)$.

Soluzione

Il segnale risulta periodico dello stesso periodo *fo=1Hz*, della funzione cos(2πt).

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4\pi t)\right)\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi t)+\frac{1}{4}\cos(6\pi t)+\frac{1}{4}\cos(2\pi t) = \frac{3}{4}\cos(2\pi t)+\frac{1}{4}\cos(6\pi t).$$

$$X_1 = X_{-1} = \frac{3}{8};$$

$$X_3 = X_{-3} = \frac{1}{8}.$$

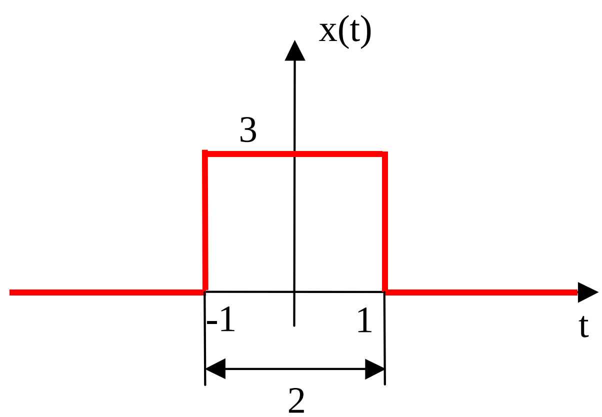
I coefficienti di Fourier risultano reali e positivi: lo spettro di fase e' nullo, lo spettro di ampiezza coincide con la sequenza dei quattro coefficienti diversi da zero.

Esercizio 1.7

Rappresentare graficamente l'andamento del segnale *x(t)* e calcolarne la trasformata di Fourier.

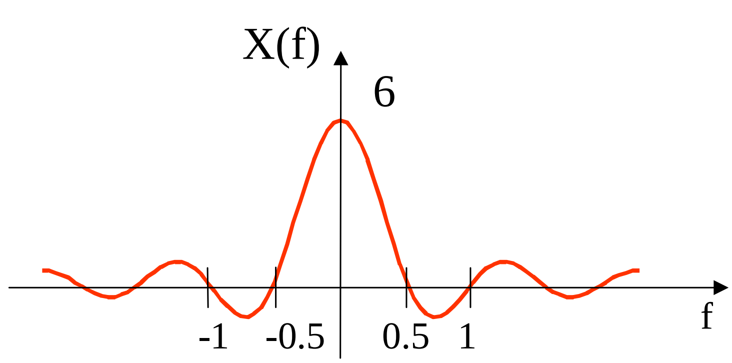
$$x(t) = 3\cdot rect\left(\frac{t}{2}\right)$$

Soluzione



La trasformata di Fourier del segnale vale:

$$X(f) = 3\cdot 2\cdot \sin c(f2)$$

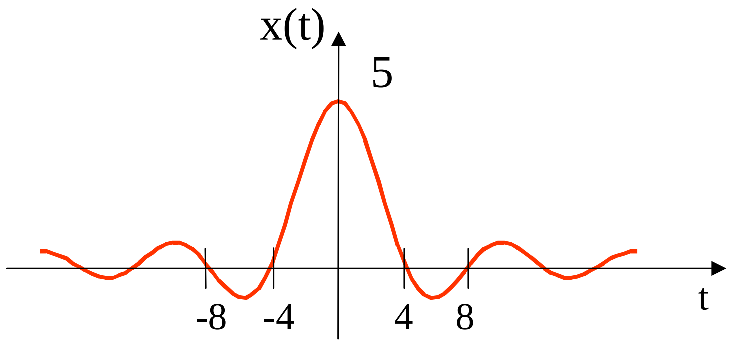


Esercizio 1.8

Rappresentare graficamente l'andamento del segnale *x(t)* e calcolarne la trasformata di Fourier.

$x(t) = 5 \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{4}\right)$

Soluzione



$X(f) = 5 \cdot 4 \cdot rect(4f)$.

Esercizio 1.9

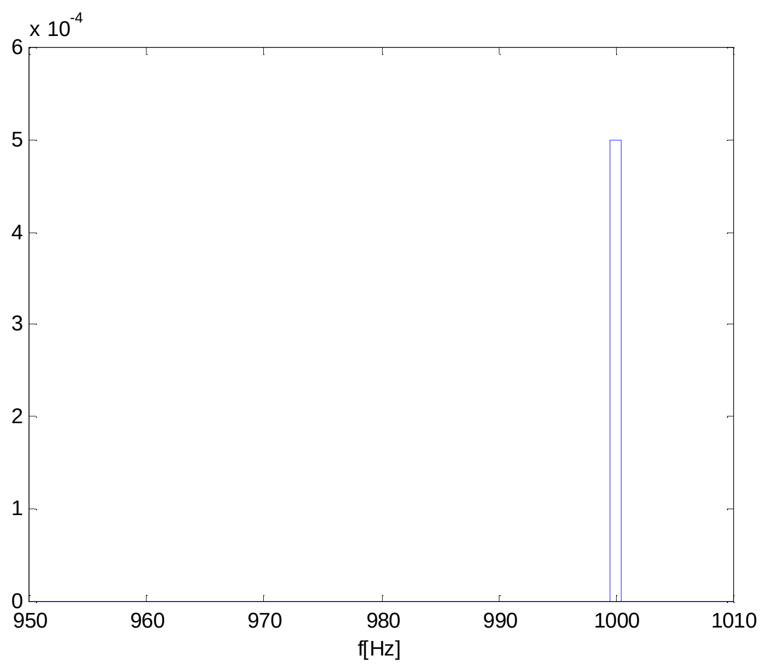
Rappresentare lo spettro di ampiezza e di fase del segnale *x(t)=0.001sinc(t)cos(2000πt).*

Soluzione

Il segnale *x(t)* e' reale e pari, dunque la trasformata di Fourier risulta reale e pari. Applicando la proprieta' di modulazione (sugg.: scomporre il coseno nelle 2 esp. complesse e calcolare la trasformata di ognuno dei due termini ottenuti), ricaviamo la sua descrizione analitica

$X(f) = 0.0005\,rect(f-1000) + 0.0005\,rect(f+1000)$.

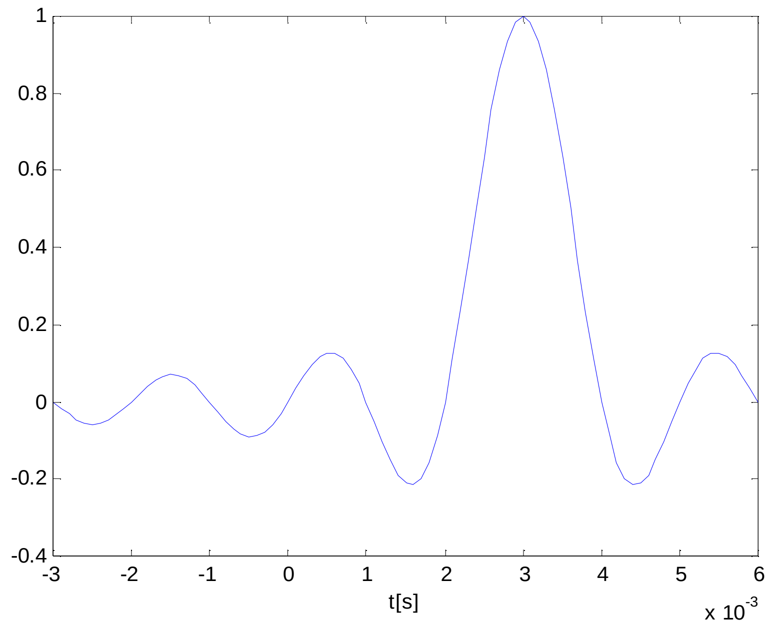
In questo caso, l'andamento della trasformata di Fourier, essendo reale e positivo, coincide con lo spettro di amapiezza del segnale. Rappresentiamo graficamente la trasformata di Fourier nell'intervallo positivo delle frequenze che vanno da 950 a 1010 Hz.

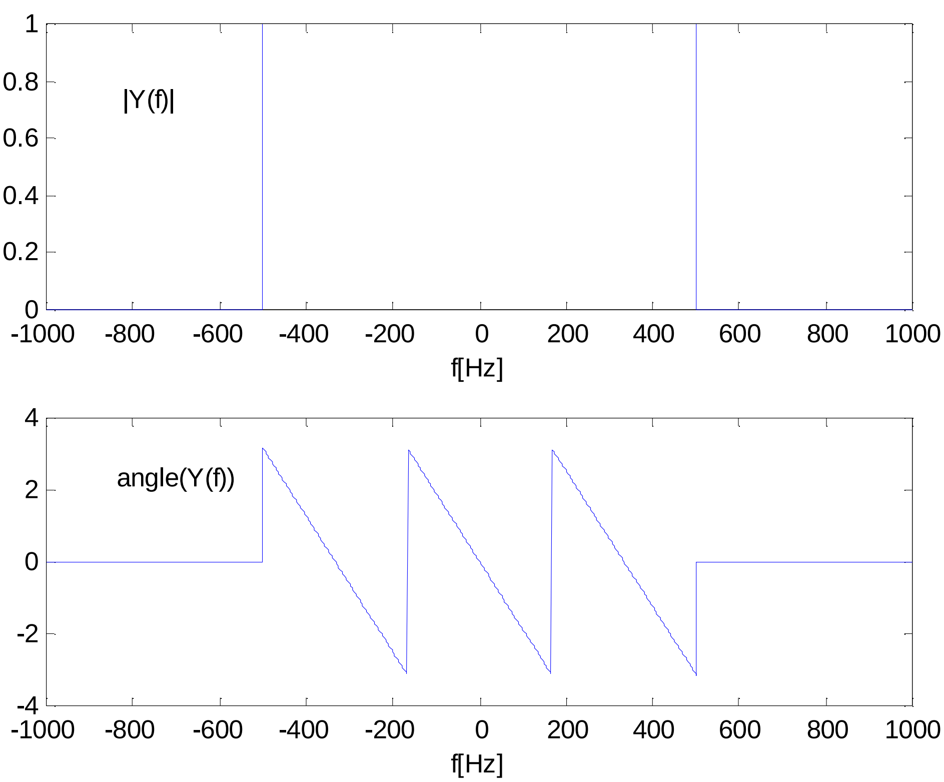


Esercizio 1.10

Dato il segnale *x(t)=sinc(1000t)*, disegnare l'andamento nel tempo e determinarne la trasformata di Fourier di ampiezza del segmale *y(t)=x(t-0.003)*.

Soluzione

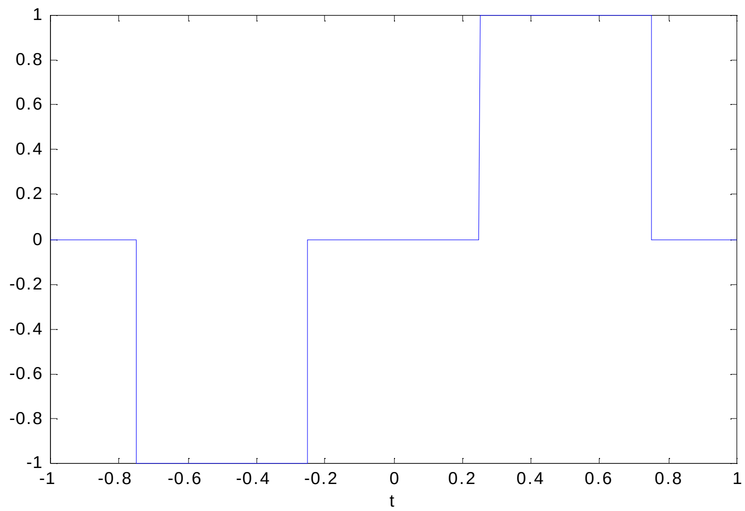




Esercizio 1.11

Disegnare l'andamento nel tempo del segnale $x(t)=rect(t-0.25)-rect(t+0.25)$ e determinarne la trasformata di Fourier .

Soluzione



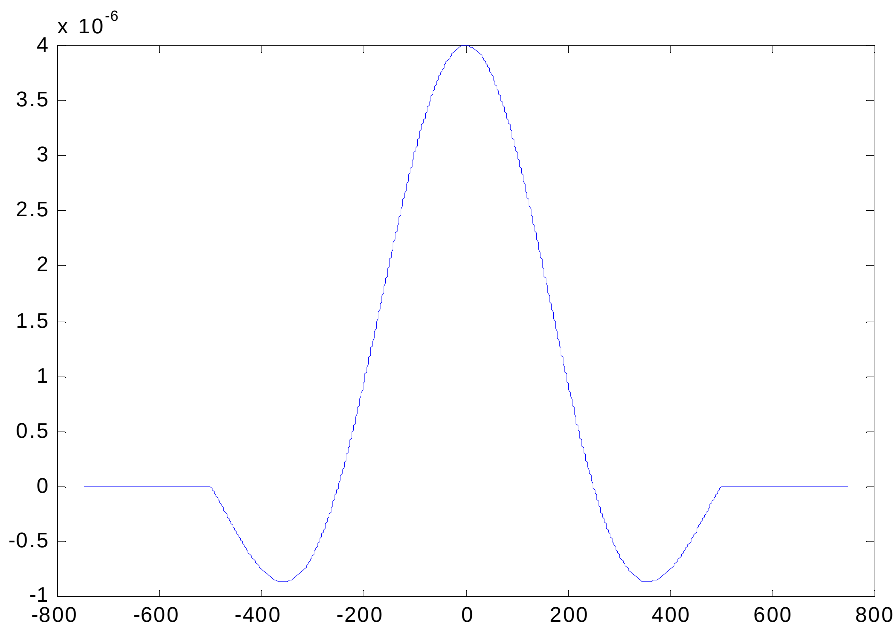
$$X(f)=\mathrm{sinc}(f)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi 0.25\mathrm{f}}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi 0.25\mathrm{f}}\right)=-2j\,\mathrm{sinc}(f)sen(2\pi 0.25f)$$

Esercizio 1.12

Determinare la trasformata di Fourier $Z(f)$ del segnale $z(t)$, ottenuto convolvendo i due segnali $x(t)=sinc(1000t)$ e $y(t)=rect(250t)$.

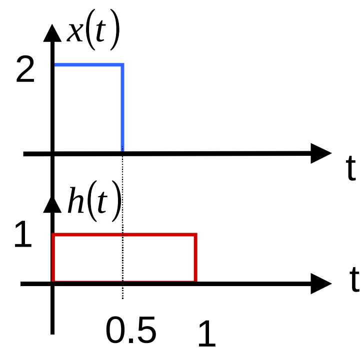
Soluzione

$Z(f)=X(f)Y(f)=(1/1000)rect(f/1000)(1/250)sinc(f/250)$.



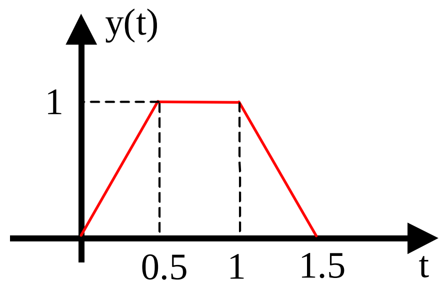
Esercizio 1.13

Valutare graficamente il prodotto di convoluzione $y(t) = x(t) * h(t)$.



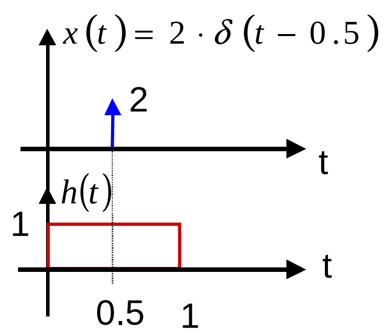
Soluzione

Il prodotto di convoluzione può essere scritto come: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \cdot d\tau$



Esercizio 1.14

Valutare analiticamente o graficamente il prodotto di convoluzione $y(t) = x(t) * h(t)$.



Soluzione

Il prodotto di convoluzione può essere scritto come: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \cdot d\tau$

Il prodotto di convoluzione può essere visto come l'uscita di un sistema lineare tempo invariante, con risposta all'impulso *h(t)*, ed ingresso $x(t) = 2\delta(t-0.5)$. Sfruttando la tempo-invarianza del sistema possiamo immediatamente scrivere $y(t) = 2 \cdot h(t-0.5)$.

Allo stesso risultato possiamo giungere valutando direttamente l'integrale di convoluzione. A questo proposito si ricordi che:

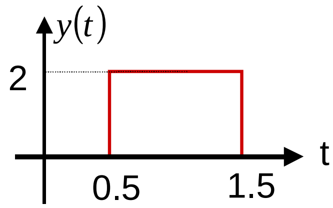
$x(-\tau) = 2 \cdot \delta(\tau + 0.5); \quad x(t-\tau) = x[-(\tau - t)] = 2 \cdot \delta(\tau - t + 0.5)$

Abbiamo perciò:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \cdot d\tau = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \delta(\tau - t + 0.5) \cdot d\tau =$$

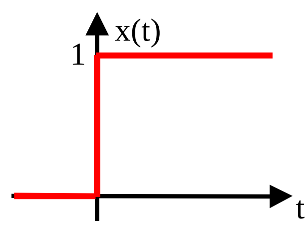
$$= 2 \cdot h(t-0.5) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t + 0.5) \cdot d\tau = 2 \cdot h(t - 0.5)$$

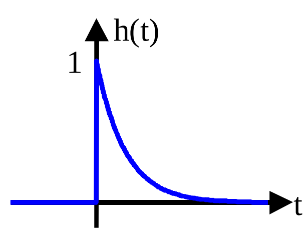
Al medesimo risultato si poteva giungere anche con considerazioni grafiche sulla valutazione dell'integrale di convoluzione e ricordando che $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \alpha) \cdot d\tau = 1$



Esercizio 1.15

Valutare il prodotto di convoluzione $y(t) = x(t) * h(t); \; x(t) = u(t); \; h(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t); \quad \alpha > 0$





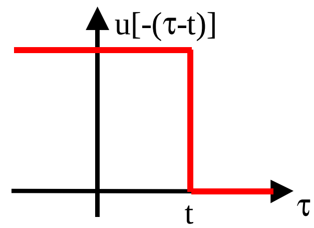
Soluzione

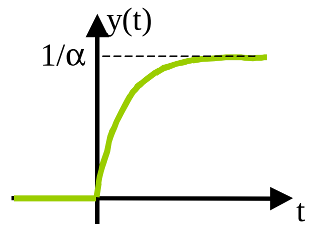
Il prodotto di convoluzione può essere scritto come:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \cdot d\tau = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cdot u(t-\tau) \cdot d\tau = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cdot u[-(\tau - t)] \cdot d\tau \,.$$

Si ha perciò:

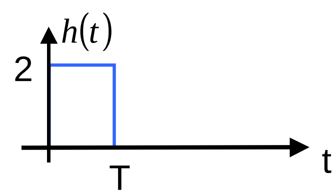
$$y(t) = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cdot u[-(\tau - t)] \cdot d\tau = \int_{0}^{t} e^{-\alpha\tau} \cdot d\tau = -\frac{1}{\alpha}\left[e^{-\alpha\tau}\right]_0^t = \frac{1}{\alpha}\left[e^{-\alpha\tau}\right]_t^0 = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$





Esercizio 1.16

Il segnale $x(t) = \cos\left(2\pi \frac{1}{2T} t\right)$ rappresenta l'ingresso di un sistema lineare tempo-invariante caratterizzato dalla risposta all'impulso riportata in figura. Quale sarà l'andamento del segnale, $y(t)$, in uscita dal sistema?



Soluzione

Il segnale in uscita dal sistema può essere scritto come: $y(t) = \left|H\left(\frac{1}{2T}\right)\right| \cos\left[2\pi \frac{1}{2T} t + \arg\left(H\left(\frac{1}{2T}\right)\right)\right]$;

dove *H(f)* rappresenta la risposta in frequenza del sistema.
Risulta inoltre che *H(f)* è la Trasformata di Fourier della risposta all'impulso (*h(t)*), cioe'

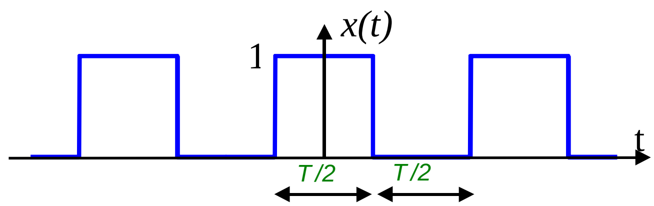
$$H(f) = 2T \cdot \mathrm{sinc}(fT) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = 2T \cdot \mathrm{sinc}(fT) \cdot e^{-j\pi f T}.$$

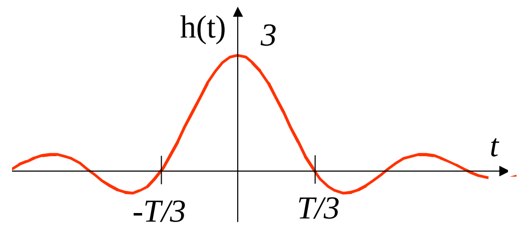
Si ricava, dunque,

$$y(t) = \left|2T \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2T} T\right)\right| \cos\left[2\pi \frac{1}{2T} t - \pi \frac{1}{2T} T\right] = \frac{4T}{\pi} \sin\left[2\pi \frac{1}{2T} t\right].$$

Esercizio 1.17

Il segnale $x(t)$ rappresentato in figura costituisce l'ingresso di un sistema lineare tempo-invariante con risposta all'impulso $h(t) = 3\text{sinc}\left(t\frac{3}{T}\right)$ (vedi figura). Quale sarà l'andamento del segnale, $y(t)$, in uscita dal sistema?



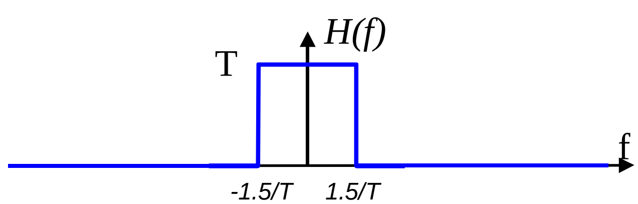


Soluzione

Le Trasfromate di Fourier di *x(t)* e *h(t)* sono rispettivamente:

$$X(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{T}{2}\cdot\text{sinc}\left(\frac{T}{2}\frac{1}{T}n\right)\cdot\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{n}{T}\right);$$

$$H(f) = T\cdot rect\left(f\frac{T}{3}\right).$$



Gli impulsi della *X(f)* posti a frequenza in modulo maggiore di *1.5/T* vengono quindi cancellati. Si ha quindi:

$$Y(f) = \sum_{n=-1}^{1}\frac{1}{2}\cdot\text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\delta\left(f+\frac{1}{T}\right)+\frac{1}{2}\cdot\text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{1}{T}\right) =$$

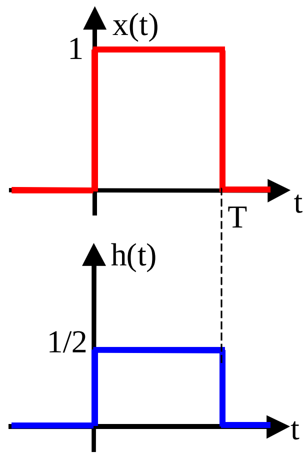
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\delta\left(f+\frac{1}{T}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\delta\left(f-\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\delta\left(f+\frac{1}{T}\right)+\frac{1}{\pi}\cdot\delta\left(f-\frac{1}{T}\right).$$

Questa trasformata di Fourier corrisponde, nel tempo, al segnale:

$$y(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot e^{-j2\pi\frac{t}{T}}+\frac{1}{\pi}\cdot e^{j2\pi\frac{t}{T}} = \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)..$$

Esercizio 1.18

Il segnale $x(t)$ rappresentato in figura costituisce l'ingresso di un sistema lineare tempo-invariante con risposta all'impulso $h(t)$ (vedi figura). Quale sarà l'andamento del segnale, $y(t)$, in uscita dal sistema? Quale sarà l'andamento della densità spettrale di energia all'ingresso ed all'uscita del sistema?



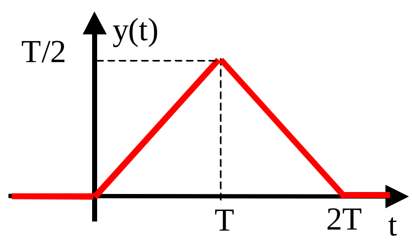
Soluzione

Si ha:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Procedendo in modo analitico o grafico si ottiene:

$$y(t)=\frac{T}{2}\cdot tri\left(\frac{t-T}{T}\right).$$



A riguardo delle densità spettrali di energia possiamo scrivere:

$$G_x(f)=|X(f)|^2=\left|T\cdot \text{sinc}(fT)\cdot e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\right|^2=T^2\cdot[\text{sinc}(fT)]^2$$

$$G_y(f)=|Y(f)|^2=|X(f)\cdot H(f)|^2=$$

$$\left|T\cdot \text{sinc}(fT)\cdot e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\cdot\frac{T}{2}\cdot \text{sinc}(fT)\cdot e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\right|^2=\frac{T^4}{4}\cdot[\text{sinc}(fT)]^4$$

Integrando fra $-\infty$ ed ∞ le densità spettrali di energia si ottiene l'energia all'ingresso e all'uscita del sistema.
Tali energie possono essere calcolate a partire dall'andamento nel tempo dei segnali.
Si ottiene:

$$E_x=|T|;\quad E_y=\frac{1}{6}|T|^3$$

Esercizio 1.19

Un segnale con potenza media di *0 dBm* viene amplificato attraverso un dispositivo elettronico la cui *H(f)* è costante per ogni frequenza e pari a *10dB*. Quale sarà la potenza media del segnale amplificato?

Soluzione

$0dBm + 10dB = 10dBm.$
Per verificare la relazione precedente possiamo ragionare nel modo seguente:
1) L'amplificazione in potenza del dispositivo elettronico è pari a 10 infatti: $10 \cdot \lg_{10} 10 = 10.$
2) La potenza del segnale di ingresso è un $1mW$.
3) Perciò la potenza del segnale in uscita varrà $10mW$ pari a $10dBm$.
Si ricordi inoltre che in "unità logaritmiche" i prodotti diventano somme.

Esercizio 1.20

Volendo esprimere in *dBW* una potenza di *3 dBm* che risultato si ottiene?

Soluzione

$1dBm = -30dBW$
$3dBm = (-30+3)dBW = -27dBW$
Infatti
$3dBm \rightarrow 2mW$
$$\frac{2mW}{1W} = \frac{2 \cdot 10^{-3} W}{1W} = 2 \cdot 10^{-3} \rightarrow -27dBW$$

Esercizio 1.21

Due segnali sinusoidali con frequenza $f_1 = 1Khz$ ed $f_2 = 10Khz$ vengono sommate insieme. Il primo è caratterizzato da una potenza media pari a $6dBm$, mentre il secondo ha una potenza di $3dBm$. Quale sarà la potenza del segnale somma?

Soluzione

Poiché effettuiamo una somma e non un prodotto non possiamo effettuare i calcoli direttamente in "unità logaritmiche", ma dobbiamo ritornare alle "unità lineari".
$6dBm \rightarrow 4mW$
$3dBm \rightarrow 2mW$
$4mW + 2mW = 6mW \rightarrow 7.8dBm$

Esercizio 1.22

Molto spesso nei sistemi di comunicazione si fa riferimento ai rapporti fra potenza di segnale e potenza di disturbo rumore (SNR Signal to Noise Ratio). Data una potenza di segnale di $-20dBm$ ed una potenza di rumore di $-50dBm$, quanto vale il rapporto segnale/rumore in "unità logaritmiche" ed "unità lineari"?

Soluzione

$SNR\big|_{dB} = -20 - (-50) = 30dB$
riportando il risultato in "unità lineari" si ha:
$SNR = 10^3$
Operando direttamente in "unità lineari":

$$SNR = \frac{10^{-2}\,mW}{10^{-5}\,mW} = 10^{3} \rightarrow 30dB$$

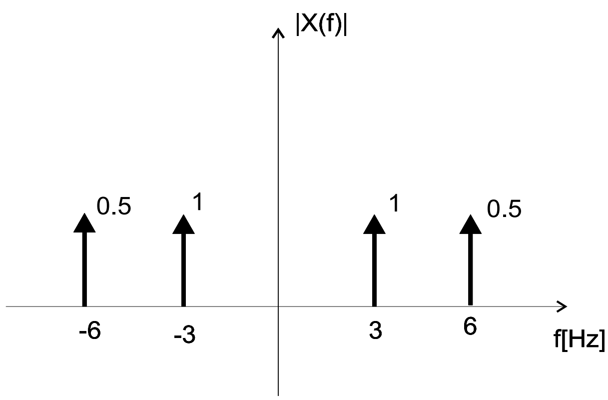
Esercizio 1.23

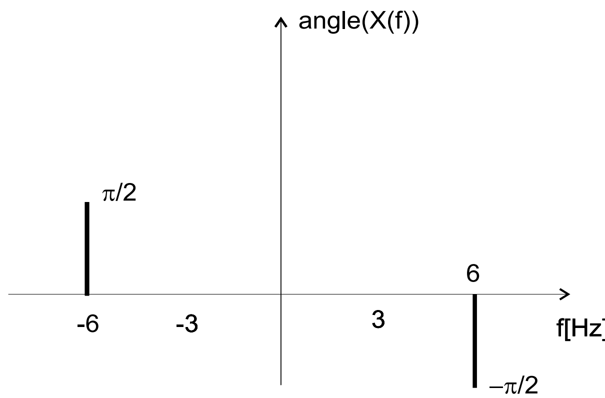
1. Dato il segnale periodico $x(t)=2\cos(6\pi t)+sen(12\pi t)$,
a) rappresentare graficamente la sua trasformata di Fourier $X(f)$, in modulo e fase, e la sua densita' spettrale di potenza $S_x(f)$;
b) calcolare il rapporto, in dB, tra le potenze delle due componenti frequenziali di $x(t)$.
Il segnale $x(t)$ entra in un sistema lineare stazionario caratterizzato da una risposta all'impulso $h(t)=sinc(18t)$.
c) Determinare il segnale in uscita $y(t)$ e dire, giustificando il risultato, se il sistema ha introdotto distorsione di ampiezza e/o di fase.

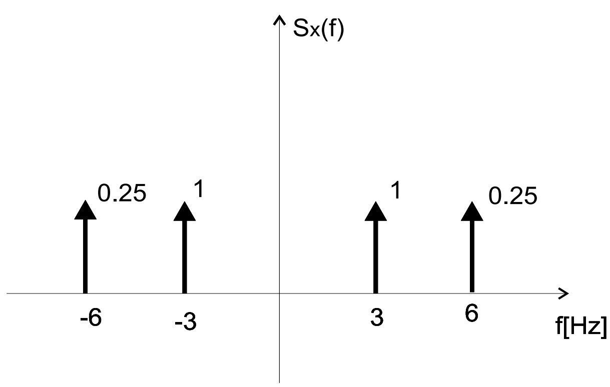
Soluzione

1a) $|X(f)|$ spettro di ampiezza; angle$(X(f))$ spettro di fase; $Sx(f)$ densita' spettrale di potenza - vedi figura;

1b) $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{2^2/2}{1^2/2} = 4 \leftrightarrow 6dB$;







1c)

$$h(t) = \sin c(18t) \overset{Fourier}{\Leftrightarrow} H(f) = \frac{1}{18} rect\left(\frac{f}{18}\right);$$

$$y(t) = H(3)\cdot 2\cos(2\pi 3t + \angle H(3)) + H(6)\cdot sen(2\pi 6t + \angle H(6)) =$$

$$= \frac{1}{18}\cdot 2\cos(2\pi 3t) + \frac{1}{18}\cdot sen(2\pi 6t);$$

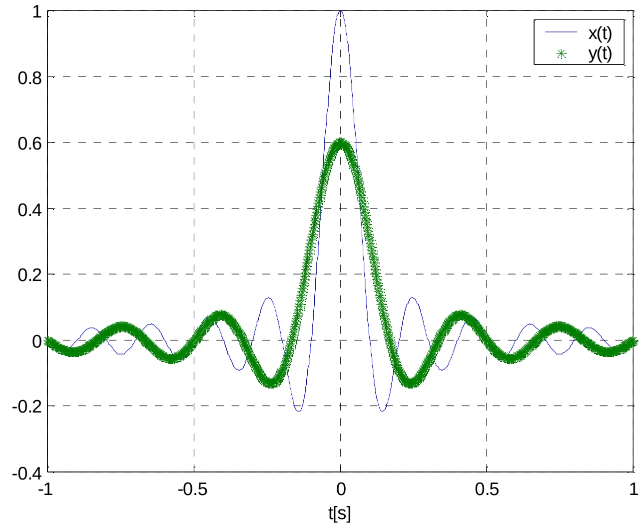
Il sistema non introduce ne' distorsione di fase ($argH(3)=argH(6)=0$), ne' distorsione di ampiezza ($|H(3)|=|H(6)|$).

Esercizio 1.24

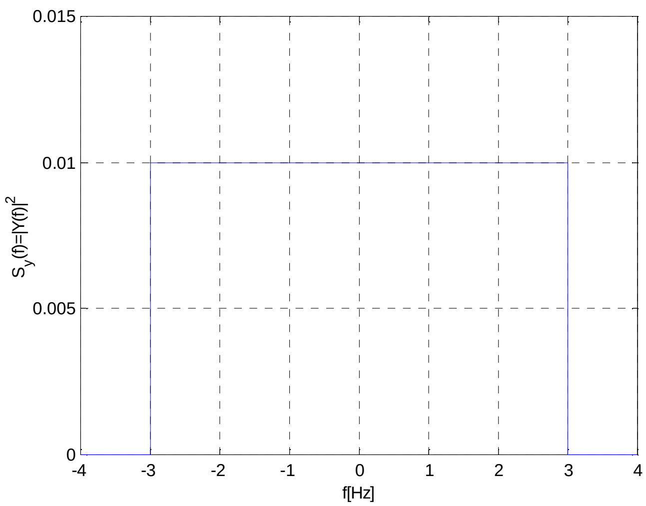
Il segnale *x(t)=sinc(10t)* entra in un filtro ideale passa-basso con banda *B=3Hz*. Detto *y(t)* il segnale in uscita al passa-basso,

a) disegnare l'andamento nel tempo del segnale *x(t);*
b) disegnare l'andamento nel tempo del segnale *y(t)*. Il segnale *x(t)* e' stato distorto nel passaggio dal filtro ?
c) Determinare la densita' spettrale di energia e l'energia di *y(t)*.

Soluzione



Il segnale *y(t)* e' stato distorto nel passaggio attraverso il filtro passa-basso, come si vede dall'andamento nel tempo dei due segnali.



$$S_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2 = 0.01 \cdot rect\left(\frac{f}{6}\right) \Rightarrow E_y = \int S_y(f)df = 0.06\ J.$$

Esercizio 1.25

Il segnale $x(t)=8\cos(10\pi t)+4\cos(18\pi t)$, dove il tempo t e' misurato in secondi, viene ritardato di $t_0=25ms$ e poi filtrato attraverso un passa-basso ideale con banda $B=10$ Hz.
Detti $y(t)$ il segnale in uscita al filtro passa-basso, $Y(f)$ la sua trasformata di Fourier e $S_y(f)$ la sua densita' spettrale di potenza,

a) rappresentare $Y(f)$ in modulo e fase;
b) rappresentare $S_y(f)$ e calcolare la potenza di $y(t)$;
c) il segnale $x(t)$, trasformato in $y(t)$, e' stato distorto in fase e/o in ampiezza ? Motivare la risposta.

Soluzione

1a)
$$y(t)=8\cos(10\pi t-\pi/4)+4\cos(18\pi t-0.45\pi);$$
$$Y(f)=4e^{-j\pi/4}\delta(f-5)+4e^{j\pi/4}\delta(f+5)+2e^{-j0.45\pi}\delta(f-9)+2e^{j0.45\pi}\delta(f+9).$$

1b)
$$S_y(f)=16\delta(f-5)+16\delta(f+5)+4\delta(f-9)+4\delta(f+9);$$
$$\overline{y^2(t)}=32+8=40.$$

1c) Il segnale $y(t)=x(t-0.25)$ e' una versione ritardata e non distorta di $x(t)$. Non c'e' ne' distorsione di fase, ne' distorsione di ampiezza.

Esercizio 1.26

Rappresentare graficamente l'andamento nel tempo e la trasformata di Fourier del segnale $y(t)=x(t)\cos(8\pi t)$, dove $x(t)=2\sin c(t)$.

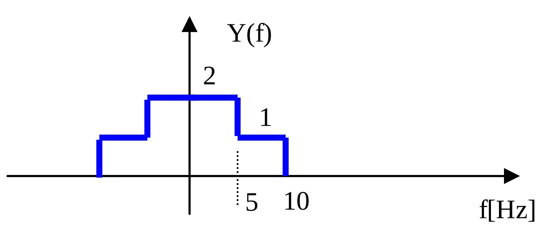
Soluzione

Lo spettro del segnale y(t) e' costituito da due rettangolari (con base di 1 Hz e altezza unitaria), centrati intorno alle frequenze -4Hz e +4 Hz.

Esercizio 1.27

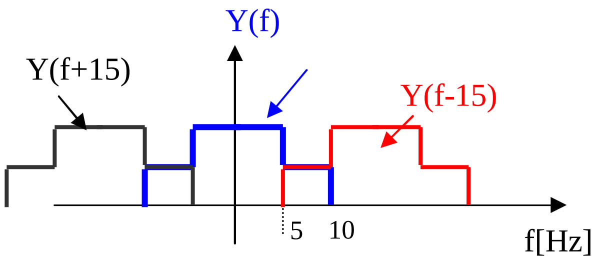
Dato il segnale $y(t)$, con trasformata di Fourier $Y(f)$ rappresentata in figura, rappresentare lo spettro $Yc(f)$ del segnale ottenuto campionando idealmente $y(t)$ con
a) $fc=15$ campioni/s;
b) $fc=17.5$ campioni/s;
c) $fc=22$ campioni/s.

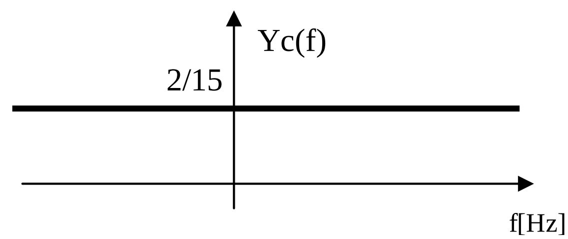
Determinare l'intervallo delle frequenze di aliasing nei tre casi a), b), c).
Nel caso a) determinare l'andamento del segnale campionato idealmente nel tempo $y_c(t)$.



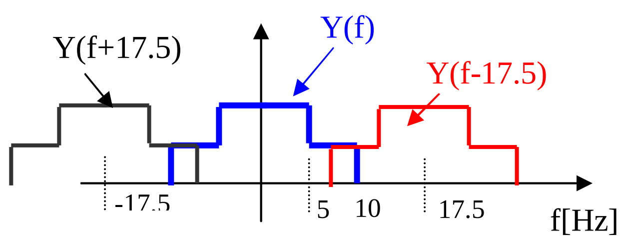
Soluzione:

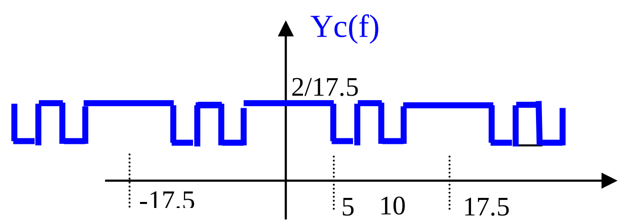
a)



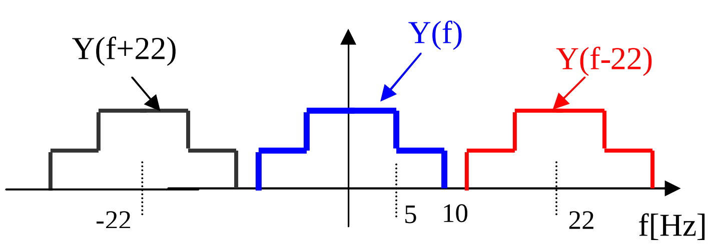


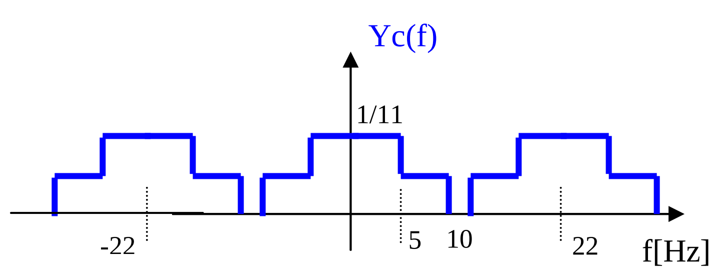
b)





c)





L'intervallo delle frequenze di aliasing si estende

a) tra 5 e 10 Hz;

b) tra 7.5 e 10 Hz;
c) non ci sono frequenze di aliasing.

Nel caso a), basta antitrasformare la funzione Yc(f) costante, per ottenere

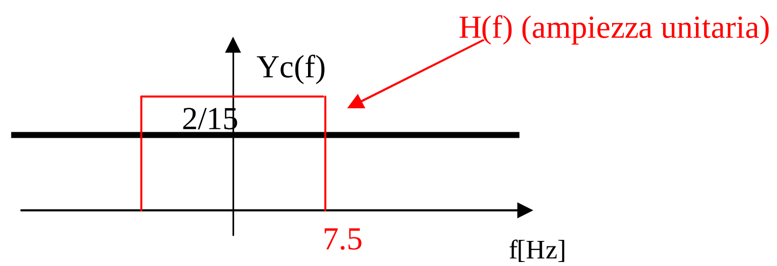
$y_c(t)$= *Fourier* $^{-1}$*(Yc(f))=2/15* δ*(t).*

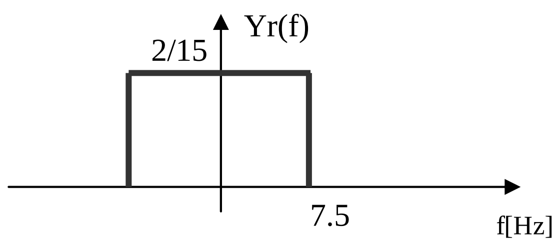
Esercizio 1.28

Dato il risultato dell'esercizio precedente, determinare nei tre casi a), b), c), lo spettro *Yr(f)* del segnale all'uscita di un filtro di ricostruzione ideale, con risposta in frequenza *H(f)* con frequenza di taglio *fp=fc/2.*
In quale dei tre casi si ricostruisce perfettamente il segnale continuo originario *y(t)* e perche'.

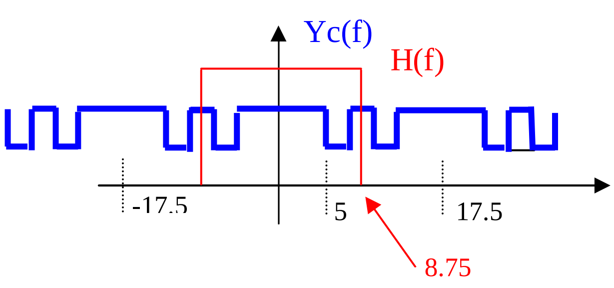
Soluzione

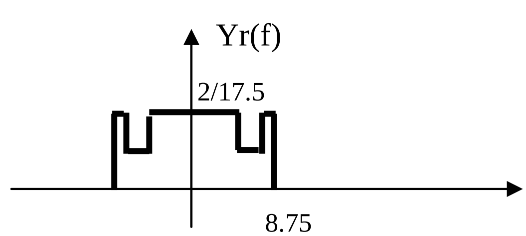
a)



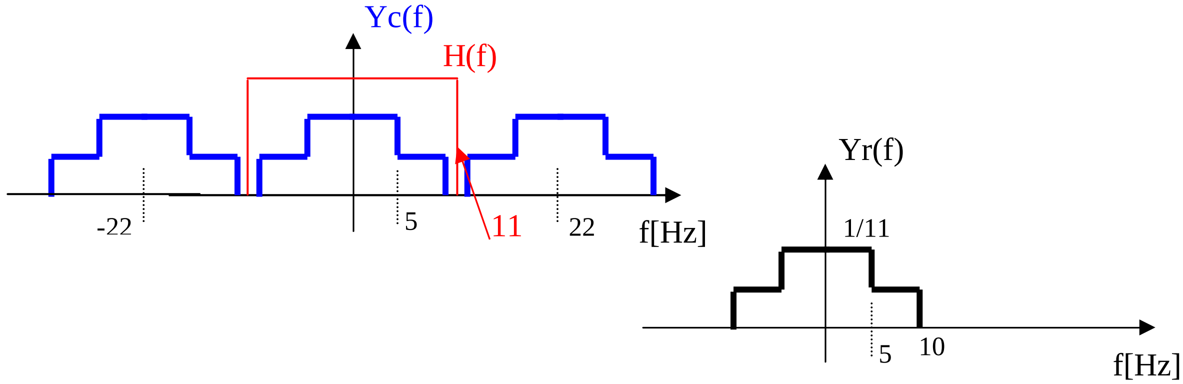


b)





c)

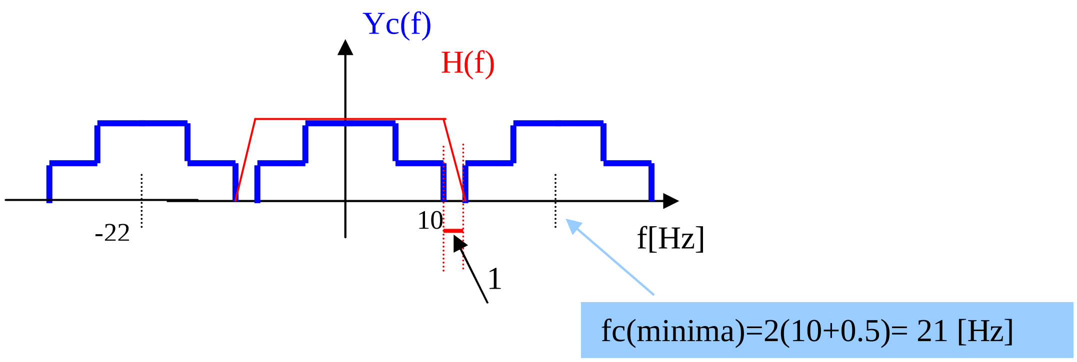


Il segnale $y_r(t)$, all'uscita del filtro di ricostruzione ideale, viene ricostruito con la stessa forma del segnale continuo originario *y(t)* solo nel caso c), corrispondente ad un campionamento che soddisfa il criterio di Nyquist $fc>2B$, dove $B=10Hz$ e' la banda del segnale originario.

Esercizio 1.29

Dato ancora il segnale *y(t)*, di cui si conosce la forma dello spettro *Y(f)* come specificata negli esercizi precedenti, determinare la frequenza di campionamento fc minima, affinche' il segnale $y_c(t)$, ottenuto campionando idealmente *y(t)*, possa essere ricostruito con un filtro passabasso reale con banda di transizione uguale a 1Hz.

Soluzione



Esercizio 1.30

Dato il segnale $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)-\cos(8\pi f_0 t)$, qual e' il massimo intervallo di campionamento T che permette di ricostruire perfettamente *x(t)* dalla sua versione campionata *x(nT)* ?
Se si campiona *x(t)* con frequenza di campionamento $f_s=3f_0$, si trovi l'espressione del segnale ricostruito.

Soluzione

Il massimo intervallo di campionamento equivale all'inverso della minima frequenza di campionamento necessaria per garantire che sul segnale campionato non si verifichi il fenomeno della sovrapposizione spettrale. Poiche' la massima frequenza, presente nello spettro del segnale da campionare e' $4f_0$[Hz], si ricava $f_s > 8 f_0 [Hz] \Rightarrow T_s < 0.125\frac{1}{f_0}[s]$.

Fissata la frequenza di campionamento $f_s=3f_0$, che non soddisfa il teorema del campionamento, si avra' sovrapposizione spettrale nel segnale campionato.

In particolare, a causa della sovrapposizione spettrale, il risultato della ripetizione, con passo $3f_0$, dello spettro del segnale continuo, costituito da quattro impulsi (due con ampiezza positiva centrati nelle freqeunze $+/-f_0$ e due con ampiezza negativa, ma stesso modulo, centrati nelle frequenze $+/-4f_0$) e' uno spettro nullo.
Il segnale in uscita al filtro di ricostruzione e' $x_r(t)=0$.

2. Esercizi non risolti.

Esercizio 2.1

Dati i segnali $x(t)=2\cos(100\pi t)$ e $y(t)=\cos(2000\pi t)$, rappresentare le trasformate di Fourier e calcolare le potenze dei segnali $x(t)$ e $z(t)=x(t)y(t)$.
Il segnale $z(t)$ entra in filtro passabasso con $H(f)$ a forma triangolare (tra –100Hz e +100Hz): determinare il segnale $u(t)$ che esce dal filtro.

Esercizio 2.2

Il segnale $x(t)=sinc(100t)$ passa attraverso un filtro passabasso ideale con banda B=40Hz (guadagno unitario e risposta in fase nulla).
Rappresentare graficamente (riportando chiaramente i valori sugli assi)

a) l'andamento nel tempo del segnale filtrato (all'uscita del secondo filtro);
b) lo spettro del segnale filtrato;
c) la densita' spettrale di energia del segnale filtrato.
d) Nel caso in cui il filtro introduca un ritardo di propagazione di 10ms, rappresentare lo spettro di ampiezza e di fase del segnale filtrato, e calcolarne l'energia.

Il segnale $x(t)$ viene modulato con una portante a frequenza $fo=1MHz$. Il segnale modulato viene poi filtrato con un filtro in banda passante, centrato intorno alla stessa frequenza portante, con risposta in frequenza a forma triangolare, guadagno a centro banda $G=6dB$, e banda $B=150Hz$.

e) Rappresentare lo spettro del segnale all'uscita del filtro.

[ricorda : $x(t)=sinc(tT)$ ⇔ $X(f)=1/T\ rect(t/T)$]

Esercizio 2.3

Una portante $y(t)=\cos(2\pi f_o t)$, dove $f_o=1MHz$, viene modulata in ampiezza con un segnale $x(t)=2rect(t/T)$, dove $T=1ms$.
Disegnare l'andamento nel tempo del segnale modulato $z(t)=x(t)y(t)$.
Disegnare lo spettro $Z(f)$ del segnale modulato $z(t)$.

Esercizio 2.4

Determinare la trasformata di Fourier della funzione $x(t)$ e rappresentarne graficamente gli spettri di ampiezza e di fase.
$x(t)=5\sin c(t-1)$

Esercizio 2.5

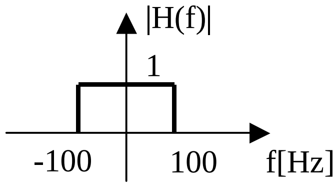
Dati i due segnali $x(t)=2\sin(10\pi\cdot t)$ e $y(t)=\cos(10\pi\cdot t)+\sin(20\pi\cdot t)$ rispondere alle seguenti domande:

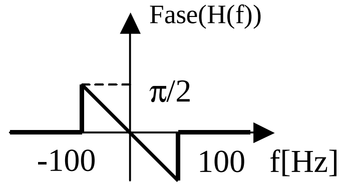
a) esiste un sistema lineare tempo-invariante tale per cui se $x(t)$ è l'ingresso di tale sistema, $y(t)$ ne rappresenta l'uscita?
b) esiste un sistema lineare tempo-invariante tale per cui se $y(t)$ è l'ingresso di tale sistema, $x(t)$ ne rappresenta l'uscita?

In entrambi i casi motivare la risposta e, in caso di risposta affermativa, determinare un esempio di risposta in frequenza $H(f)$ che verifichi tale condizione.

Esercizio 2.6

Il segnale $x(t)= 10\cos(100\pi t)+\cos(1000\pi t)$ entra in un sistema lineare stazionario con risposta in ampiezza e risposta in fase date in figura.





a) disegnare l'andamento del segnale *x(t)* nel tempo;
b) determinare l'andamento del segnale *y(t)* in uscita al sistema lineare stazionario.
c) Confrontare i due segnali *x(t)* e *y(t)* in ingresso e in uscita al sistema: qual'e' stato l'effetto del passaggio attraverso il sistema ?

Esercizio 2.7

Spiegare cosa rappresentano lo spettro di ampiezza e lo spettro di fase di un segnale *x(t)*.

Esercizio 2.8

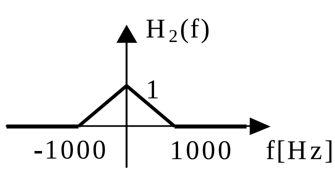
Una linea di trasmissione di lunghezza 10 km, tra due punti A e B, introduce un'attenuazione (in potenza) di 3dB/km. Quanto vale il rapporto tra le potenze in A e in B, in unita' lineari.

Esercizio 2.9

Si vuole traslare lo spettro del segnale $x(t)=sinc(t)$ intorno alle frequenze $(+/-)\ fo$, con $fo=5Hz$.
Indicare con quale operazione, nel dominio del tempo, si ottiene la traslazione in frequenza richiesta, e rappresentare graficamente l'andamento nel tempo del segnale con lo spettro traslato.

Esercizio 2.10

Dato il filtro con risposta in frequenza $H_2(f)$, illustrata in figura, rappresentare graficamente l'uscita del sistema $y(t)$ quando l'ingresso e' un impulso ideale $x(t)=\delta(t-to)$, con $to=1ms$.



Esercizio 2.11

Il segnale $x(t) = 4\cos(400\pi t) + 100\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{100}\right)$ entra nel sistema lineare tempo invariante con risposta in frequenza $H(f) = \cos\left(\frac{\pi f}{200}\right) rect\left(\frac{f}{200}\right)$.

a) rappresentare graficamente la trasformata di Fourier del segnale *x(t);*
b) rappresentare graficamente la risposta in ampiezza e la risposta in fase del sistema;
c) rappresentare la trasformata di Fourier del segnale *y(t)* all'uscita dal sistema e confrontarla con quella del segnale in ingresso.

Esercizio 2.12

Disegnare il segnale $x(t) = rect\left(\frac{t}{2}\right) - rect(t-1{,}5)$ e calcolarne l'energia.

Disegnare il segnale *y(t)* ottenuto ripetendo il segnale *x(t)* con passo *T=4s,* e calcolarne il valor medio.

Esercizio 2.13

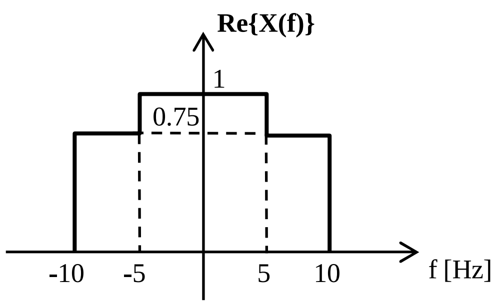
Un segnale sinusoidale con ampiezza *A=2* [Volt], frequenza *fo=10*[Hz], e fase $\phi=\pi/4$ [rad], passa attraverso una linea di trasmissione lunga 13km, che introduce un'attenuazione di 2 dB/km. Determinare la potenza del segnale sinusoidale all'ingresso della linea e il rapporto tra la potenza in ingresso e quella in uscita.

Esercizio 2.14

Un sistema lineare e stazionario trasforma un qualsiasi ingresso x(t) nell'uscita *y(t)=3x(t-to),* con *to=10* ms.
Determinare la risposta all'impulso del sistema *h(t)* e la sua risposta in frequenza *H(f)*, rappresentandone il modulo e la fase.

Esercizio 2.15

È dato un segnale *x(t)* la cui trasformata di Fourier *X(f)* ha solo parte reale avente il seguente andamento:



Rappresentare graficamente la trasformata di Fourier dei seguenti segnali:
a) $x_1(t)$ ottenuto campionando *x(t)* alla frequenza di campionamento f_c*=25Hz [2 punti]*
b) $x_2(t)$ ottenuto campionando *x(t)* alla frequenza di campionamento f_c*=20Hz [2 punti]*
c) $x_3(t)$ ottenuto campionando *x(t)* alla frequenza di campionamento f_c*=15Hz [2 punti]*

Esercizio 2.16

Un sistema lineare tempo invariante e' caratterizzato da una risposta all'impulso
$h(t) = 2rect\left(\frac{t-0.0005}{0.001}\right)$.

- Disegnare *h(t);*
- determinare l'espressione analitica della risposta in frequenza *H(f)* del sistema e disegnarne il modulo |*H(f)*|.
- Determinare l'uscita *y(t)* del sistema quando il segnale in ingresso e' $x(t) = 4\cos(1000\pi t) - 2\cos(2000\pi t)$.
- Fare il grafico di *y(t)*;
- calcolare energia, valor medio e potenza di *y(t)*.
- Il sistema ha introdotto distorsione sul segnale in ingresso ?

Esercizio 2.17

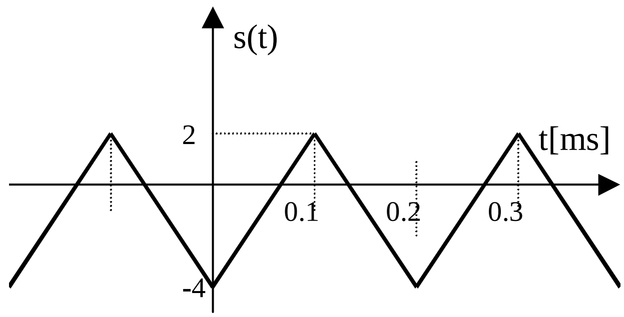
Dato il sistema con risposta all'impulso *h(t)* specificata nell'esercizio precedente, determinare l'uscita *y(t)* del sistema quando l'ingresso vale $x(t) = rect\left(\frac{t}{0.001}\right)$, e farne il grafico.

Esercizio 2.18

Un segnale con potenza $P_1=13$ dBm entra in una linea di trasmissione lunga 10km che introduce un'attenuazione di 2 dB/km e poi passa in un amplificatore con guadagno di 10 dB. Determinare la potenza P_2 del segnale in uscita all'amplificatore in unita' logaritmiche e lineari.

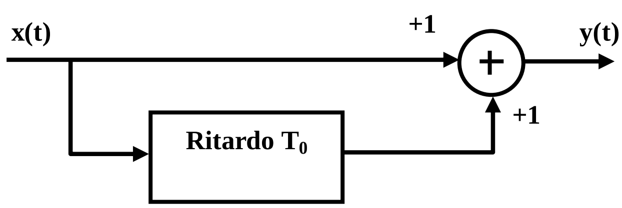
Esercizio 2.19

Dato il segnale periodico *s(t)* in figura, determinare il periodo, la frequenza fondamentale e la componente continua.



Esercizio 2.20

Un collegamento può essere modellizzato con il seguente sistema lineare:

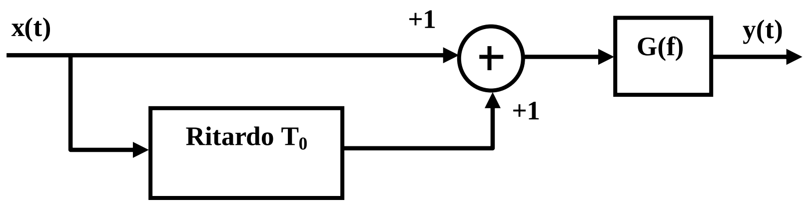


a) Determinare la risposta in frequenza $H(f)=Y(f)/X(f)$
b) Calcolare il modulo della risposta in frequenza
c) Calcolare la fase della risposta in frequenza per $1/(2T_0)<f<(3/2T_0)$ (si ricordi che la fase di un numero reale negativo vale π) *[2 punti]*
d) Assumendo che $T_0=10^{-7}$ *sec* calcolare il segnale in uscita $y_1(t)$ quando il segnale in ingresso è $x_1(t)=\cos 2\pi f_c t$ con $f_c=10MHz$ *[2 punti]*

Assumendo che $T_0=10^{-7}$ *sec* calcolare il segnale in uscita $y_2(t)$ quando il segnale in ingresso è $x_2(t)=(1+\cos(2\pi f_2 t))\cdot\cos 2\pi f_c t$ con $f_c=10MHz$ e $f_2=1MHz$ (si ricordi che $\cos\alpha\cdot\cos\beta=1/2[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$)

Esercizio 2.21

È dato il seguente sistema lineare:



dove $G(f)$=rect$((f-f_c)/B)$+rect$((f+ f_c)/B)$.
Assumendo che il segnale in ingresso *x(t)* sia un rumore bianco con densità spettrale di potenza $S_x(f)=N$ *w/Hz*:

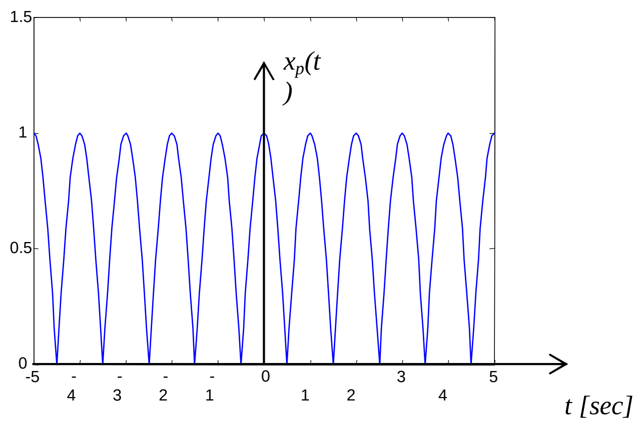
a) Calcolare $|H(f)| =|Y(f)/X(f)|$
b) Calcolare la densità spettrale di potenza del segnale *y(t)*

Calcolare la funzione di autocorrelazione del segnale *y(t)* (si ricordi che $cos^2\alpha = ½(1+cos2\alpha)$)

Esercizio 2.22

È dato il segnale periodico $x_p(t)$ con periodo *T=1 sec* ottenuto ripetendo il segnale base:

$$x_T(t) = \begin{cases} \cos\left(2\pi \frac{t}{2T}\right) & \text{se } |t| \le T/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



a) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale base
b) Calcolare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del segnale $x_p(t)$ e mostrare che $x_p(t)$ può essere espanso in serie di soli coseni .

Esercizio 2.23

Un segnale *x(t)* ha trasformata di Fourier

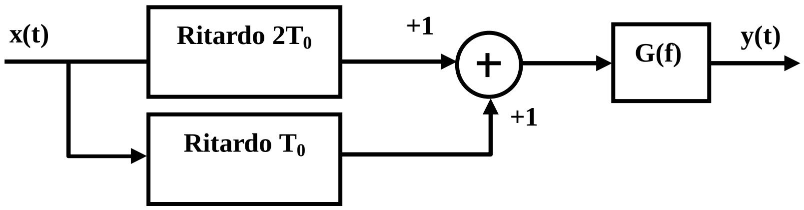
$$X(f) = \mathrm{Re}\{X(f)\} + j\,\mathrm{Im}\{X(f)\} = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) + j\left(\mathrm{rect}\left(f-\frac{1}{2}\right) - \mathrm{rect}\left(f+\frac{1}{2}\right)\right)$$

a) Disegnare parte reale e parte immaginaria di *X(f)*.
b) Determinare l'espressione analitica di *x(t)*.

c) È possibile campionare il segnale *x(t)* senza che si generi aliasing? Se sì, quale è la minima frequenza di campionamento? Esiste un valore massimo per la frequenza di campionamento?
d) Determinare la trasformata di Fourier del segnale *y(t) = X(t)*.

Esercizio 2.24

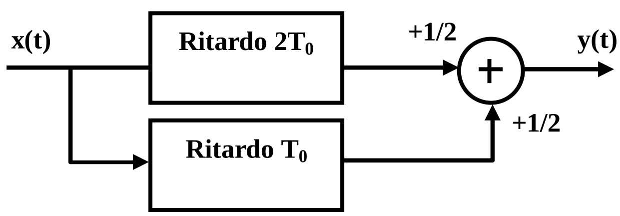
È' dato il seguente sistema lineare:



dove *G(f)*=rect*(f/B)*.
Assumendo che il segnale in ingresso *x(t)* sia un rumore bianco con densità spettrale di potenza $S_x(f)=N$ *w/Hz*:
c) Calcolare $|H(f)| =|Y(f)/X(f)|$.
d) Calcolare la densità spettrale di potenza del segnale *y(t)*
e) Calcolare la funzione di autocorrelazione del segnale *y(t)* (si ricordi che $cos^2\alpha = ½(1+cos2\alpha)$)
f) Calcolare la potenza del segnale *y(t)* per *B=1/T.*

Esercizio 2.25

È dato il seguente sistema lineare:



con T_0 costante.
a) Calcolare la funzione di trasferimento *H(f) = Y(f)/X(f)*.
b) Calcolare modulo e fase di *H(f)* per $f=1/T_0$ ed $f=1/(2T_0)$.
c) Determinare l'epressione del segnale in uscita *y(t)* quando $x(t) = A_1cos(2\pi t/T0) + A_2cos(\pi t/T0)$.

Esercizio 2.26

Dato un sistema lineare con risposta all'impulso $h(t)$ = exp$(-\pi(t-5T)^2)$ al cui ingresso è applicato un segnale casuale con densità spettrale di potenza costante pari a $S_x(f) = N$ [V^2/Hz], calcolare:
a) la densità spettrale di potenza $S_y(f)$ del segnale in uscita *y(t)*.
b) La funzione di autocorrelazione $R_y(t)$ del segnale in uscita *y(t)*.
c) La potenza P del segnale in uscita *y(t)*.

Esercizio 2.27

Un rumore *n(t)* gaussiano, bianco (a valor medio nullo) con densita' spettrale di potenza *Sn(f)=No/2*, viene filtrato con risposta in frequenza $H(f)=\sqrt{1-\frac{|f|}{2}}\,rect\left(\frac{f}{4}\right)$ e l'uscita *w(t)* viene campionata in un istante generico *t=T.* Determinare la densita' di probabilita' del campione di rumore *w=w(T)*, e la probabilita' che *w>3No*.