Soluzioni degli esercizi su segnali e analisi di Fourier

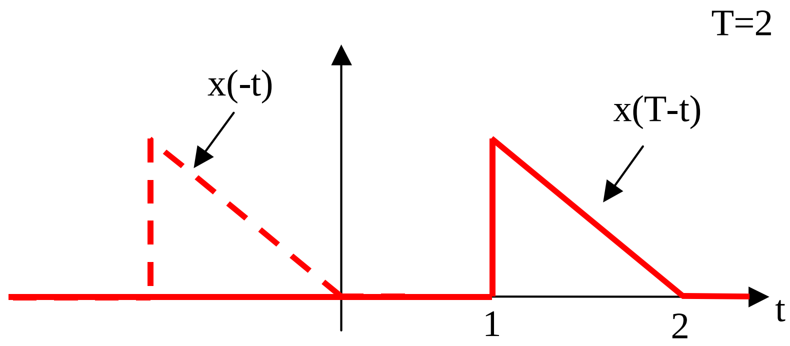
Esercizio 1
Soluzione

$$a)\quad P = A^2; \quad E = \infty; \quad m_x = A.$$

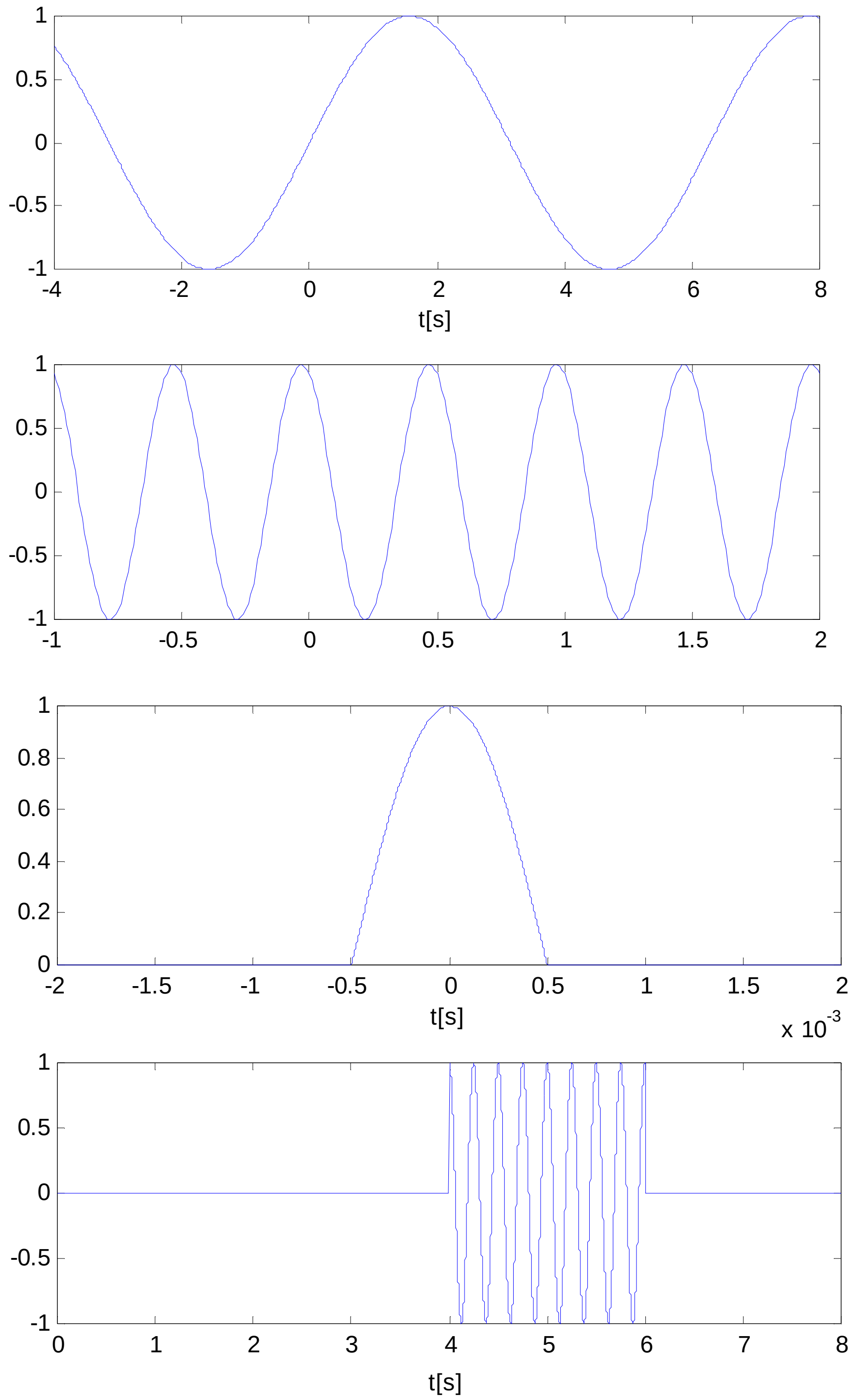
$$b)\quad P = 1/2; \quad E = \infty; \quad m_x = 1/2.$$

$$c)\quad P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t + 2\phi)\right)dt = \frac{A^2}{2}; \quad E = \infty; \quad m_x = 0.$$

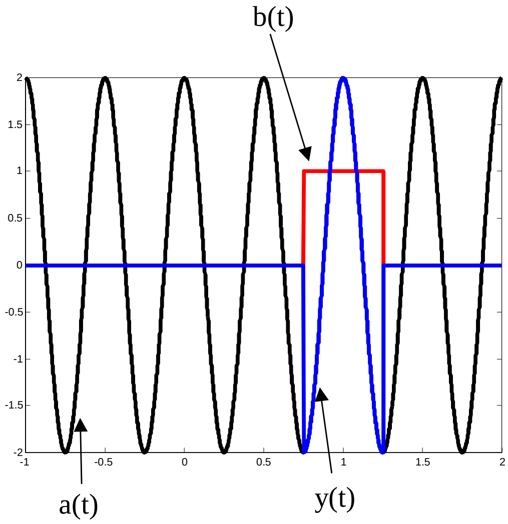
Esercizio 2
Soluzione
Il segnale *x(T-t)* può essere scritto come *x[-(t-T)]* e quindi può essere visto come una versione del segnale originale scalata di un fattore *–1* (ribaltata rispetto all'asse verticale) e ritardata di *T*.



Esercizio 3
Soluzione



Esercizio 4
Soluzione
L'andamento dei segnali considerati è riportato in figura



Per calcolare l'energia di y(t) possiamo procedere nel seguente modo:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [y(t)]^2 \, dt = \int_{0.75}^{1.25} [2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot t)]^2 \, dt = 4 \cdot \int_{0.75}^{1.25} \cos^2(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot t) \cdot dt$$

A questo punto basta effettuare il calcolo dell'integrale.
Per evitare i calcoli si può ricordare che la potenza media di un segnale cosenusoidale/sinusoidale in un periodo è pari a ½, cioè sia ha:

$$\frac{1}{T} \int_T \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{T} \int_T \sin^2\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{2}$$

Da ciò ed osservando che l'integrale relativo al calcolo dell'energia copre proprio un periodo della funzione sinusoidale considerata (tale periodo vale *0.5*), possiamo scrivere:

$$E = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Esercizio 5
Soluzione

$$\mathrm{Re}\left[e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j\pi/2}\right] = \mathrm{Re}\left[e^{-j(2\pi f_0 t + \pi/2)}\right] = \cos(2\pi f_0 t + \pi/2) = -\sin(2\pi f_0 t)$$

Esercizio 6
Soluzione
Il segnale risulta periodico dello stesso periodo fo=1Hz della funzione cos(2πt).

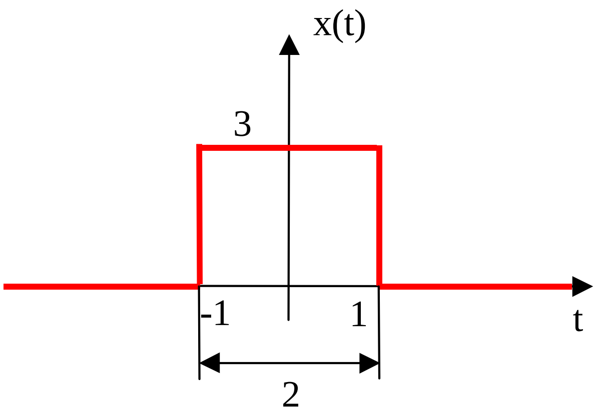
$$x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi t)\right)\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \frac{1}{4}\cos(6\pi t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi t) = \frac{3}{4}\cos(2\pi t) + \frac{1}{4}\cos(6\pi t).$$

$$X_1 = X_{-1} = \frac{3}{8};$$

$$X_3 = X_{-3} = \frac{1}{8}.$$

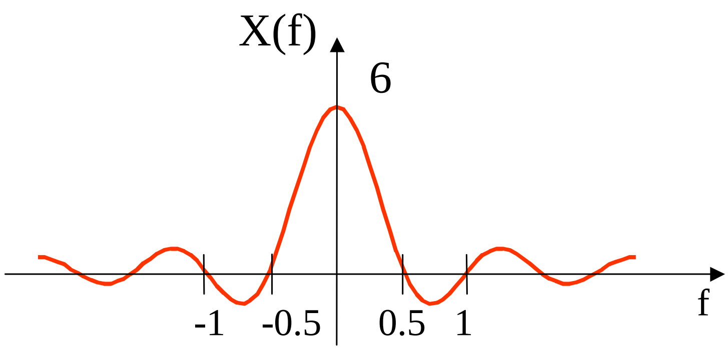
I coefficienti di Fourier risultano reali e positivi: lo spettro di fase e' nullo, lo spettro di ampiezza coincide con la sequenza dei quattro coefficienti diversi da zero.

Esercizio 7
Soluzione

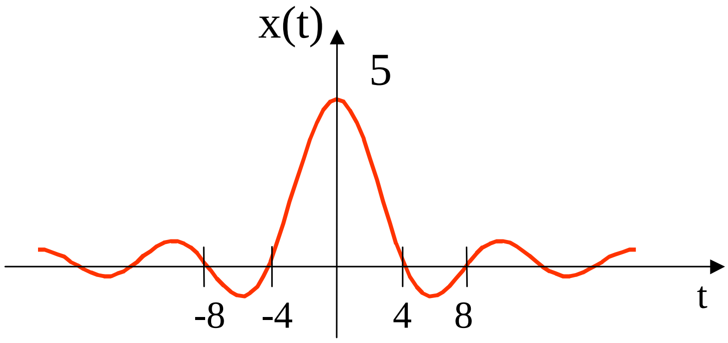


La trasformata di Fourier del segnale vale:

$$X(f) = 3 \cdot 2 \cdot \sin c(f2)$$

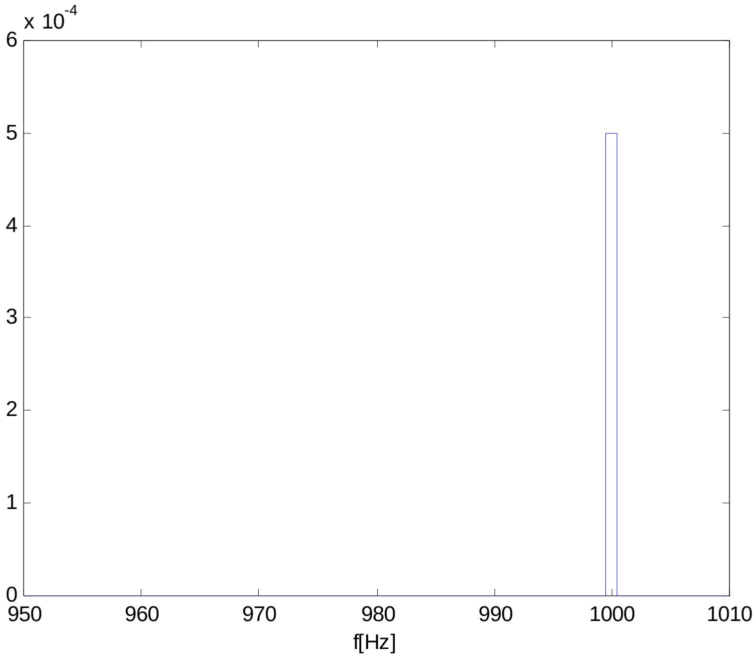


Esercizio 8
Soluzione



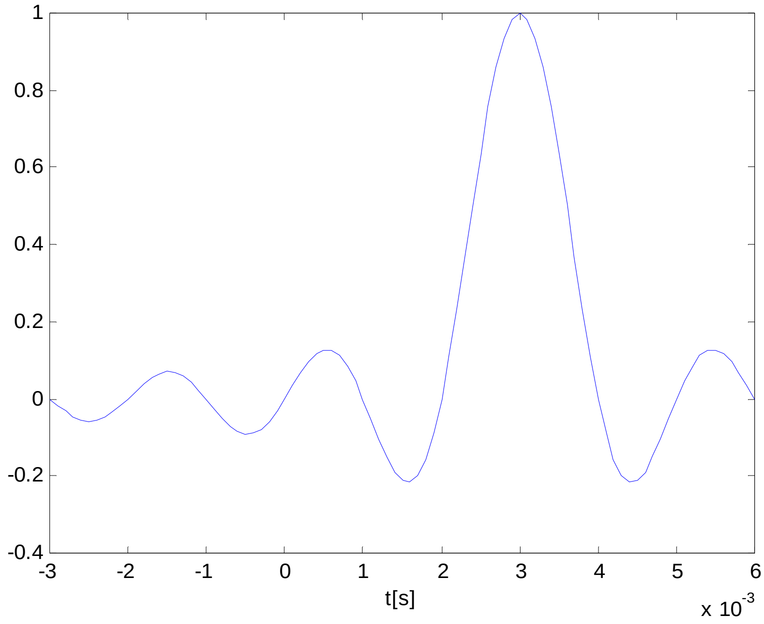
$X(f) = 5 \cdot 4 \cdot rect(4f)$.

Esercizio 9
Soluzione
Applicando la proprieta' di modulazione, ricaviamo
$X(f) = 0.0005\, rect(f - 1000) + 0.0005\, rect(f + 1000)$.
La trasformata e' rappresentata da due rettangoli con base 1Hz, centrati in +1kHz e –1kHz, con ampiezza 0.0005.
Rappresentiamo graficamente la trasformata di Fourier X(f) (reale e pari) nell'intervallo positivo delle frequenze che vanno da 950 a 1010 Hz.

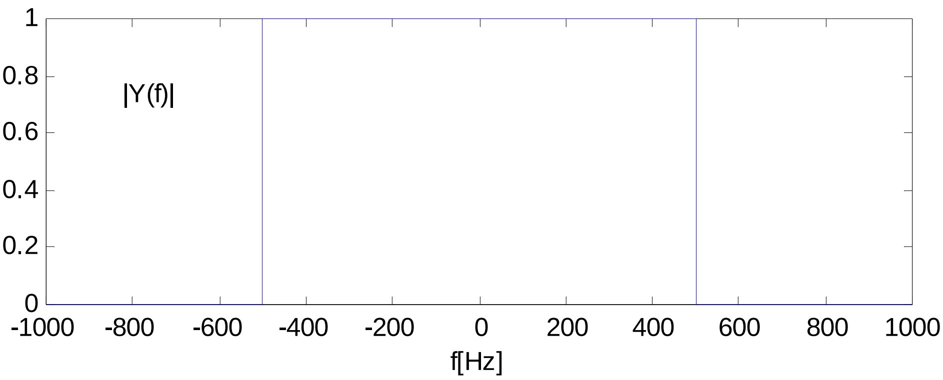


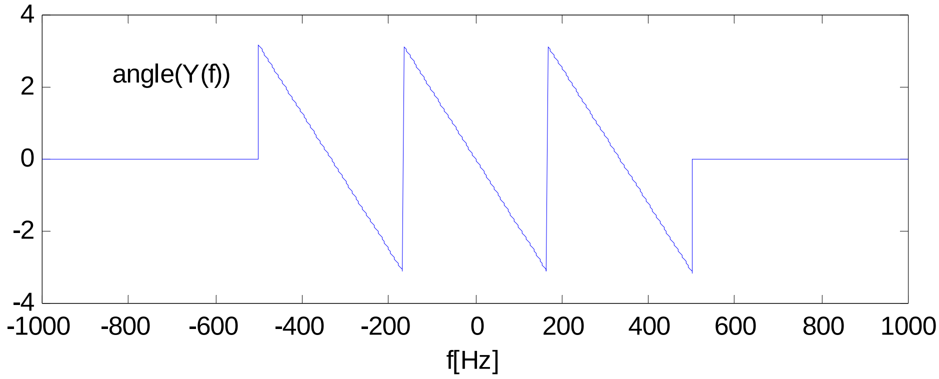
Esercizio 10
Soluzione

Il segnale y(t)=sinc(1000(t-0.003)).

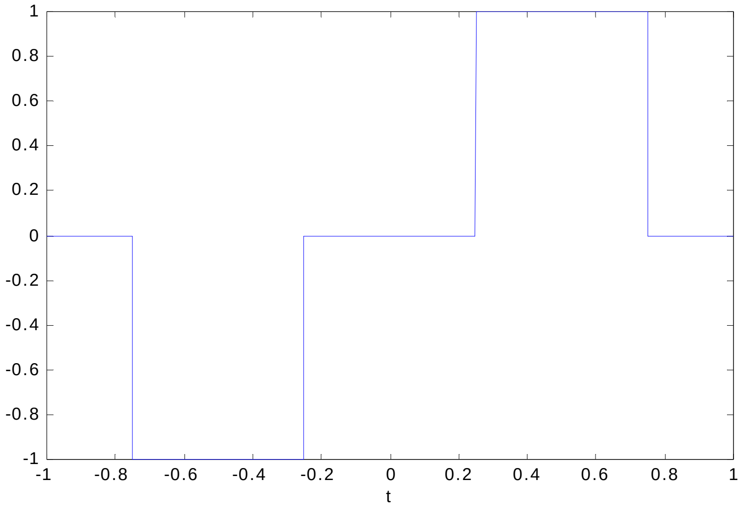


La trasformata di Fourier Y(f)= 0.001 rect(f/1000) $e^{-j2\pi f0.003}$.
(nel grafico di |Y(f)| l'altezza del rettangolo vale 0.001)



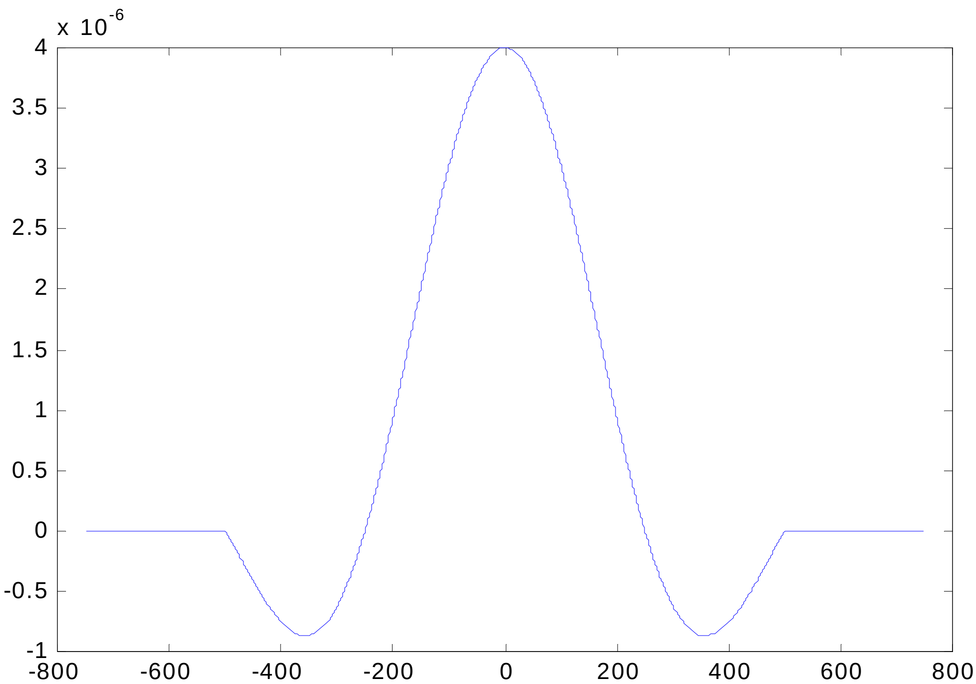


Esercizio 11
Soluzione



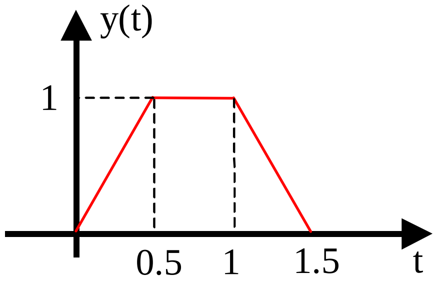
$$X(f) = \mathrm{sinc}(f)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi 0.25\mathrm{f}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi 0.25\mathrm{f}}\right) = -2j\mathrm{sinc}(f)sen(2\pi 0.25f)$$

Esercizio 12
Soluzione
Z(f)=X(f)Y(f)=(1/1000)rect(f/1000)(1/250)sinc(f/250).



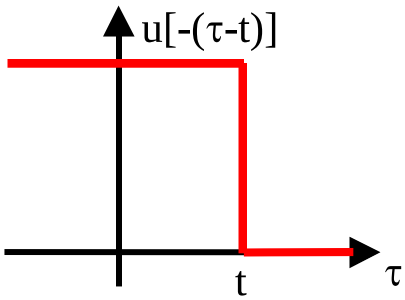
Esercizio 13
Soluzione

Il prodotto di convoluzione può essere scritto come: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \cdot d\tau$



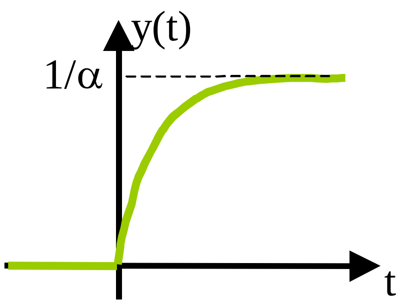
Esercizio 14
Soluzione
Il prodotto di convoluzione può essere scritto come:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \cdot d\tau = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cdot u(t-\tau) \cdot d\tau = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cdot u[-(\tau - t)] \cdot d\tau$$



si ha perciò:

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cdot u[-(\tau - t)] \cdot d\tau = \int_{0}^{t} e^{-\alpha\tau} \cdot d\tau = -\frac{1}{\alpha}\left[e^{-\alpha\tau}\right]_0^t = \frac{1}{\alpha}\left[e^{-\alpha\tau}\right]_t^0 = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$



Esercizio 15
Soluzione
Lo spettro del segnale y(t) e’ costituito da due rettangolari (con base di 1 Hz e altezza unitaria), centrati intorno alle frequenze -4Hz e +4 Hz.