ESERCIZI SUI SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI E DECIBEL

**Esercizio 1**
Soluzione

Il prodotto di convoluzione può essere scritto come: $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau$

Il prodotto di convoluzione può essere visto come l'uscita di un sistema lineare tempo invariante, con risposta all'impulso *h(t)*, ed ingresso $x(t)=2\delta(t-0.5)$. Sfruttando la tempo-invarianza del sistema possiamo immediatamente scrivere:

$y(t)=2\cdot h(t-0.5)$.

Allo stesso risultato possiamo giungere valutando direttamente l'integrale di convoluzione. A questo proposito si ricordi che:

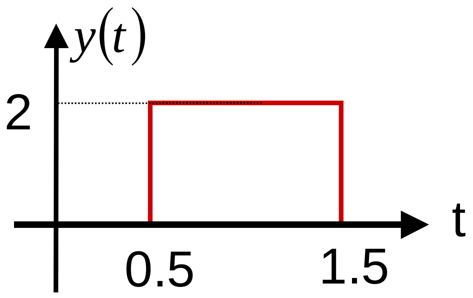
$x(-\tau)=2\cdot\delta(\tau+0.5)$; $\quad x(t-\tau)=x[-(\tau-t)]=2\cdot\delta(\tau-t+0.5)$

Abbiamo perciò:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau=2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot\delta(\tau-t+0.5)\cdot d\tau=$$

$$=2\cdot h(t-0.5)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-t+0.5)\cdot d\tau=2\cdot h(t-0.5)$$

Al medesimo risultato si poteva giungere anche con considerazioni grafiche sulla valutazione dell'integrale di convoluzione e ricordando che $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-\alpha)\cdot d\tau=1$



**Esercizio 2**
Soluzione

Il segnale in uscita dal sistema può essere scritto come: $y(t)=\left|H\left(\frac{1}{2T}\right)\right|\cos\left[2\pi\frac{1}{2T}t+\arg\left(H\left(\frac{1}{2T}\right)\right)\right]$;

dove *H(f)* rappresenta la risposta in frequenza del sistema.
Risulta inoltre che *H(f)* è la Trasformata di Fourier della risposta all'impulso *h(t)*, cioe'

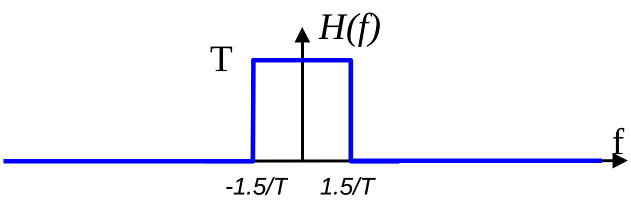
$$H(f)=2T\cdot\mathrm{sinc}(fT)\cdot e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}=2T\cdot\mathrm{sinc}(fT)\cdot e^{-j\pi fT}.$$

Si ricava, dunque,

$$y(t)=\left|2T\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2T}T\right)\right|\cos\left[2\pi\frac{1}{2T}t-\pi\frac{1}{2T}T\right]=\frac{4T}{\pi}\sin\left[2\pi\frac{1}{2T}t\right].$$

**Esercizio 3**
Soluzione
Le Trasformate di Fourier di *x(t)* e *h(t)* sono rispettivamente:

$$X(f)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{T}{2}\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{T}{2}\frac{1}{T}n\right)\cdot\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{n}{T}\right);$$
$$H(f)=T\cdot rect\left(f\frac{T}{3}\right).$$




Gli impulsi della *X(f)* posti a frequenza in modulo maggiore di *1.5/T* vengono quindi cancellati. Si ha quindi:

$$Y(f)=\sum_{n=-1}^{1}\frac{T}{2}\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)=$$
$$=\frac{T}{2}\delta(f)+\frac{T}{2}\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\delta\left(f+\frac{1}{T}\right)+\frac{T}{2}\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{1}{T}\right)=$$
$$=\frac{T}{2}\delta(f)+\frac{T}{\pi}\cdot\delta\left(f+\frac{1}{T}\right)+\frac{T}{\pi}\cdot\delta\left(f-\frac{1}{T}\right).$$

Questa trasformata di Fourier corrisponde, nel tempo, al segnale:

$$y(t)=\frac{T}{2}+\frac{T}{\pi}\cdot e^{-j2\pi\frac{t}{T}}+\frac{T}{\pi}\cdot e^{j2\pi\frac{t}{T}}=\frac{T}{2}+\frac{T}{\pi}\cdot\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)..$$

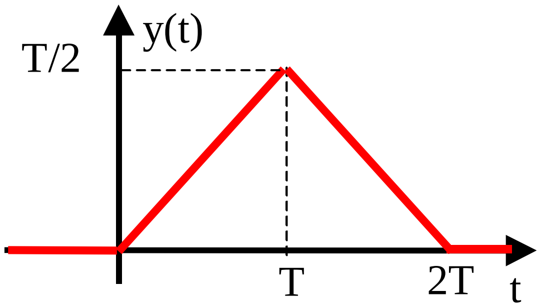
**Esercizio 4**
Soluzione

Si ha:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Procedendo in modo analitico o grafico si ottiene:

$$y(t)=\frac{T}{2}\cdot tri\left(\frac{t-T}{T}\right).$$




A riguardo delle densità spettrali di energia possiamo scrivere:

$$G_x(f)=|X(f)|^2=\left|T\cdot\text{sinc}(fT)\cdot e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\right|^2=T^2\cdot[\text{sinc}(fT)]^2$$

$$G_y(f)=|Y(f)|^2=|X(f)\cdot H(f)|^2=$$

$$\left|T\cdot\text{sinc}(fT)\cdot e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\cdot\frac{T}{2}\cdot\text{sinc}(fT)\cdot e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\right|^2=\frac{T^4}{4}\cdot[\text{sinc}(fT)]^4$$

Integrando fra $-\infty$ ed $\infty$ le densità spettrali di energia si ottiene l'energia all'ingresso e all'uscita del sistema.
Tali energie possono essere calcolate a partire dall'andamento nel tempo dei segnali.
Si ottiene:

$$E_x=|T|;\quad E_y=\frac{1}{6}|T|^3$$

**Esercizio 5**
Soluzione

$$0dBm+10dB=10dBm.$$

Per verificare la relazione precedente possiamo ragionare nel modo seguente:
1) L'amplificazione in potenza del dispositivo elettronico è pari a $10$ infatti: $10\cdot\lg_{10}10=10.$
2) La potenza del segnale di ingresso è un $1mW$ .
3) Perciò la potenza del segnale in uscita varrà $10mW$ pari a $10dBm$ .
Si ricordi inoltre che in "unità logaritmiche" i prodotti diventano somme.

**Esercizio 6**
Soluzione

$$1dBm=-30dBW$$

$$3dBm=(-30+3)dBW=-27dBW$$

Infatti

$$3dBm\rightarrow 2mW$$

$$\frac{2mW}{1W}=\frac{2\cdot10^{-3}W}{1W}=2\cdot10^{-3}\rightarrow -27dBW$$

**Esercizio 7**
Soluzione
Poiché effettuiamo una somma e non un prodotto non possiamo effettuare i calcoli direttamente in "unità logaritmiche", ma dobbiamo ritornare alle "unità lineari".

$$6dBm \rightarrow 4mW$$

$$3dBm \rightarrow 2mW$$

$$4mW + 2mW = 6mW \rightarrow 7.8dBm$$

**Esercizio 8**
Soluzione

$$SNR\big|_{dB} = -20 - (-50) = 30dB$$

riportando il risultato in "unità lineari" si ha:

$$SNR = 10^3$$

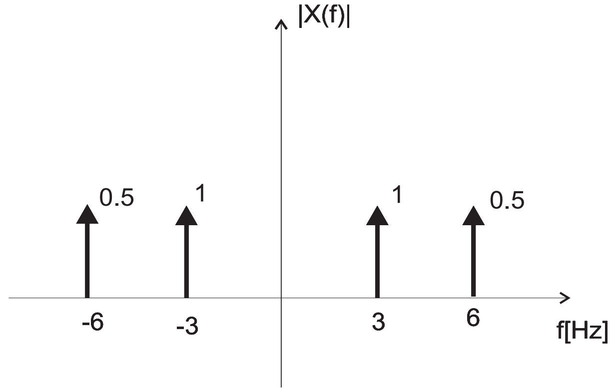
Operando direttamente in "unità lineari":

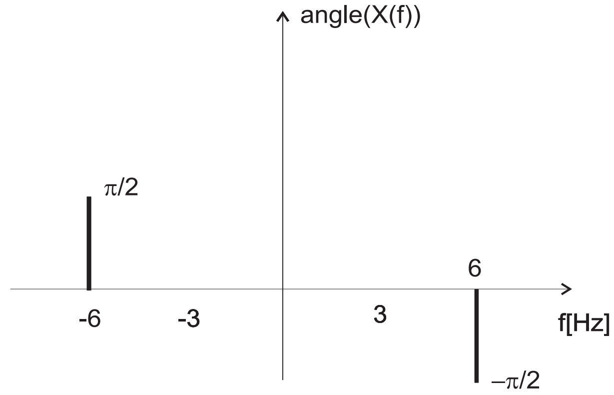
$$SNR = \frac{10^{-2}\,mW}{10^{-5}\,mW} = 10^3 \rightarrow 30dB$$

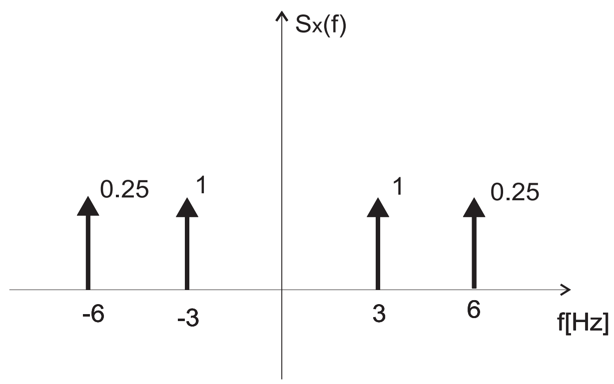
**Esercizio 9**
Soluzione

**1a)** |X(f)| spettro di ampiezza; angle(X(f)) spettro di fase; Sx(f) densita' spettrale di potenza - vedi figura;

**1b)** $\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_2} = \frac{2^2/2}{1^2/2} = 4 \leftrightarrow 6\mathrm{dB}$ ;



**1c)**

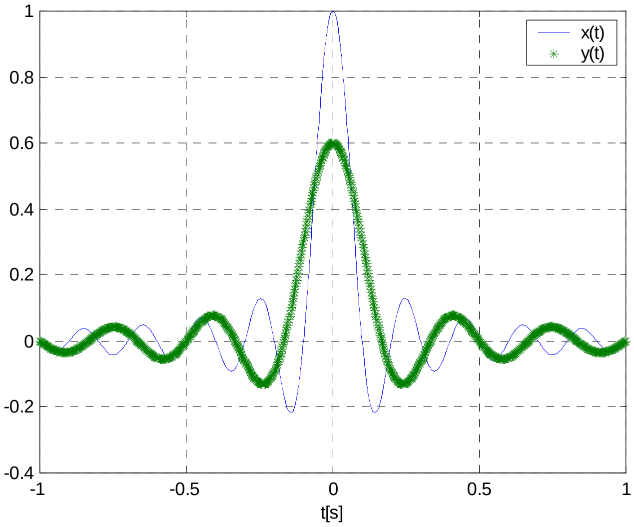
$$h(t) = \operatorname{sinc}(18t) \overset{\text{Fourier}}{\Leftrightarrow} H(f) = \frac{1}{18}\operatorname{rect}\left(\frac{f}{18}\right);$$

$$y(t) = H(3)\cdot 2\cos(2\pi 3t + \angle H(3)) + H(6)\cdot \operatorname{sen}(2\pi 6t + \angle H(6)) =$$

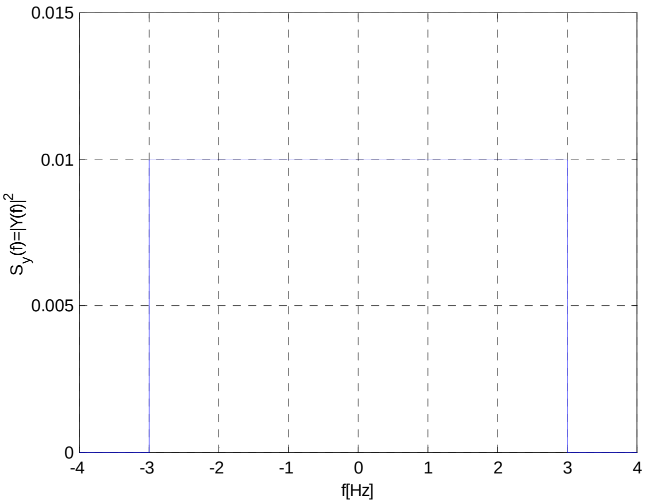
$$= \frac{1}{18}\cdot 2\cos(2\pi 3t) + \frac{1}{18}\cdot \operatorname{sen}(2\pi 6t);$$

Il sistema non introduce ne' distorsione di fase (argH(3)=argH(6)=0), ne' distorsione di ampiezza (|H(3)|=|H(6)|).

**Esercizio 10**
Soluzione




Il segnale y(t) e' stato distorto nel passaggio attraverso il filtro passa-basso, come si vede dall'andamento nel tempo dei due segnali.




$$S_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2 = 0.01\cdot \operatorname{rect}\left(\frac{f}{6}\right) \Rightarrow E_y = \int S_y(f)df = 0.06 \text{ J.}$$

**Esercizio 11**
Soluzione

**1a)**

$$y(t) = 8\cos(10\pi t - \pi/4) + 4\cos(18\pi t - 0.45\pi);$$

$$Y(f) = 4e^{-j\pi/4}\delta(f-5) + 4e^{j\pi/4}\delta(f+5) + 2e^{-j0.45\pi}\delta(f-9) + 2e^{j0.45\pi}\delta(f+9).$$

**1b)** $S_y(f) = 16\delta(f-5) + 16\delta(f+5) + 4\delta(f-9) + 4\delta(f+9);$

$\overline{y^2(t)} = 32 + 8 = 40.$

**1c)** Il segnale y(t)=x(t-0.25) e' una versione ritardata e non distorta di x(t). Non c'e' ne' distorsione di fase, ne' distorsione di ampiezza.