Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Docente:
Marino Belloni

16 marzo 2009

Cenni di Topologia

Definizione

$B(x_0, y_0; r)$ *è il* `cerchio centrato in` (x_0, y_0) *di* `raggio` r*, privato della circonferenza di bordo.*

$$B(x_0, y_0; r) = \{(x, y) \in R^2 : \ \|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}.$$

Osservazione ($n = 1$)

$$\text{In } R, \quad B(x_0, y_0; r) \ \text{diventa} \ I =]x_0 - r, x_0 + r[= \{x \in R : |x - z_0| < r\}.$$

Definizione

- $A \subseteq R^2$ *è un* `intorno` *di* $P_0 = (x_0, y_0)$ *se esiste* $\emptyset \neq B(x_0, y_0; r) \subset A$.
- $\mathcal{U}_{P_0}$ *è l'insieme di tutti gli intorni di* P_0.
- *Un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *è* `punto interno` *di* A *se* A *è un intorno di* (x_0, y_0).

Cenni di Topologia

Definizione

$B(x_0, y_0; r)$ *è il* `cerchio centrato in` (x_0, y_0) *di* `raggio` r*, privato della circonferenza di bordo.*

$$B(x_0, y_0; r) = \{(x, y) \in R^2 : \ \|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}.$$

Osservazione ($n = 1$)

$$\textit{In } R, \quad B(x_0, y_0; r) \ \textit{diventa} \ I =]x_0 - r, x_0 + r[= \{x \in R : |x - z_0| < r\}.$$

Definizione

- $A \subseteq R^2$ *è un* `intorno` *di* $P_0 = (x_0, y_0)$ *se esiste* $\emptyset \neq B(x_0, y_0; r) \subset A$.
- $\mathcal{U}_{P_0}$ *è l'insieme di tutti gli intorni di* P_0.
- *Un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *è* `punto interno` *di* A *se* A *è un intorno di* (x_0, y_0).

Cenni di Topologia

Definizione

$B(x_0, y_0; r)$ è il `cerchio centrato in` *(x_0, y_0) di* `raggio` *r, privato della circonferenza di bordo.*

$$B(x_0, y_0; r) = \{(x, y) \in R^2 : \ \|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}.$$

Osservazione ($n = 1$)

$$\text{In } R, \quad B(x_0, y_0; r) \ \textit{diventa} \ I =]x_0 - r, x_0 + r[= \{x \in R : |x - z_0| < r\}.$$

Definizione

- *$A \subseteq R^2$ è un* `intorno` *di $P_0 = (x_0, y_0)$ se esiste $\emptyset \neq B(x_0, y_0; r) \subset A$.*
- *$\mathcal{U}_{P_0}$ è l'insieme di tutti gli intorni di P_0.*
- *Un punto $(x_0, y_0) \in A$ è* `punto interno` *di A se A è un intorno di (x_0, y_0).*

Cenni di Topologia

Definizione

$B(x_0, y_0; r)$ *è il* `cerchio centrato in` (x_0, y_0) *di* `raggio` r, *privato della circonferenza di bordo.*

$$B(x_0, y_0; r) = \{(x, y) \in R^2 : \ \|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}.$$

Osservazione ($n = 1$)

$$\text{In } R, \quad B(x_0, y_0; r) \ \textit{diventa} \ I =]x_0 - r, x_0 + r[= \{x \in R : |x - z_0| < r\}.$$

Definizione

- $A \subseteq R^2$ *è un* `intorno` *di* $P_0 = (x_0, y_0)$ *se esiste* $\emptyset \neq B(x_0, y_0; r) \subset A$.
- $\mathcal{U}_{P_0}$ *è l'insieme di tutti gli intorni di* P_0.
- *Un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *è* `punto interno` *di* A *se* A *è un intorno di* (x_0, y_0).

Cenni di Topologia

Definizione

$B(x_0, y_0; r)$ *è il* cerchio centrato in (x_0, y_0) *di* raggio r*, privato della circonferenza di bordo.*

$$B(x_0, y_0; r) = \{(x, y) \in R^2 : \ \|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}.$$

Osservazione ($n = 1$)

$$In\ R, \quad B(x_0, y_0; r) \ \textit{diventa} \ I =]x_0 - r, x_0 + r[= \{x \in R : |x - z_0| < r\}.$$

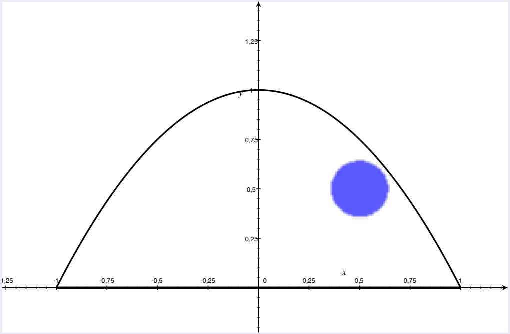
Definizione

- $A \subseteq R^2$ *è un* intorno *di* $P_0 = (x_0, y_0)$ *se esiste* $\emptyset \neq B(x_0, y_0; r) \subset A$.
- $\mathcal{U}_{P_0}$ *è l'insieme di tutti gli intorni di* P_0.
- *Un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *è* punto interno *di* A *se* A *è un intorno di* (x_0, y_0).

Esempio

(i) *L'insieme $B(x_0, y_0; r)$ è un intorno di (x_0, y_0). Anzi, $B(x_0, y_0; r)$ è intorno di ogni suo punto*

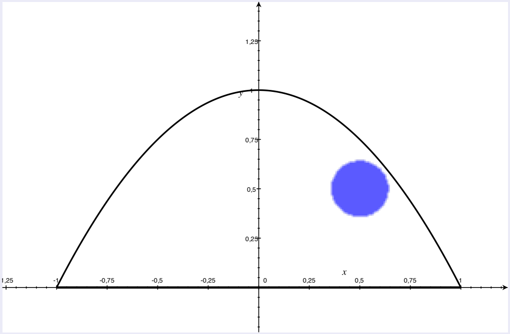
(ii) *$A = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ è intorno del punto $(1/2, 1/2)$.*



Esempio

(i) *L'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è un intorno di* (x_0, y_0). *Anzi,* $B(x_0, y_0; r)$ *è intorno di ogni suo punto*

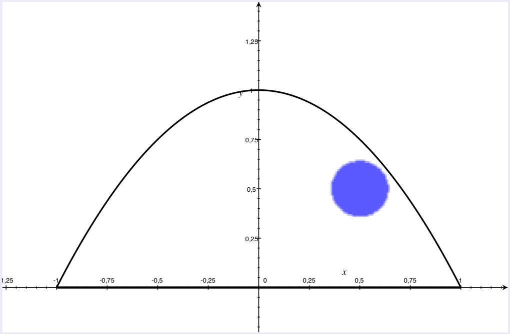
(ii) $A = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ *è intorno del punto* $(1/2, 1/2)$.



Esempio

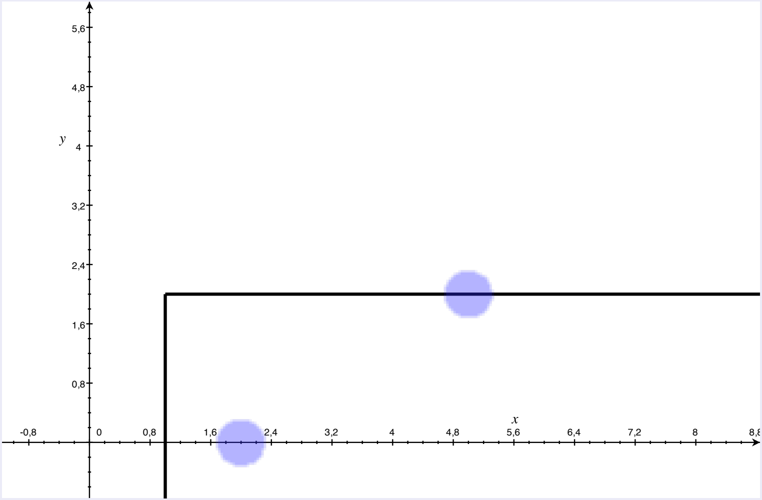
(i) *L'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è un intorno di* (x_0, y_0). *Anzi,* $B(x_0, y_0; r)$ *è intorno di ogni suo punto*

(ii) $A = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ *è intorno del punto* $(1/2, 1/2)$.



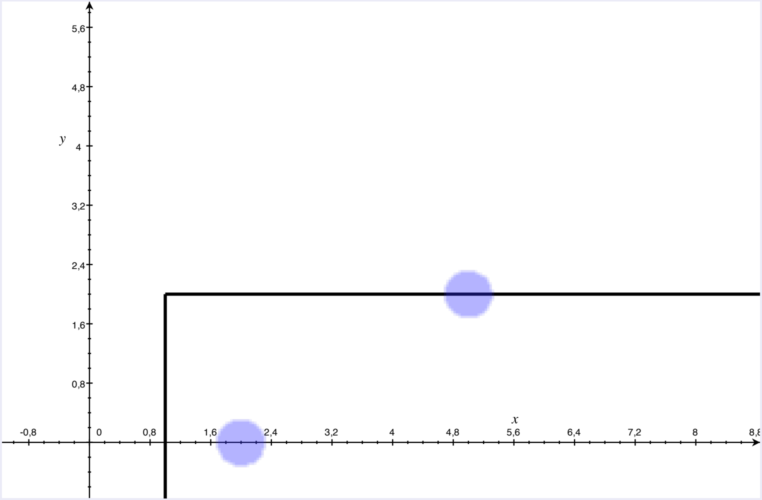
Esempio

L'insieme $\{(x, y) \in R^2 : x \geq 1,\ y \leq 2\}$ *è un intorno del punto* $(2, 0)$. *È intorno anche del punto* $(5, 2)$*?*



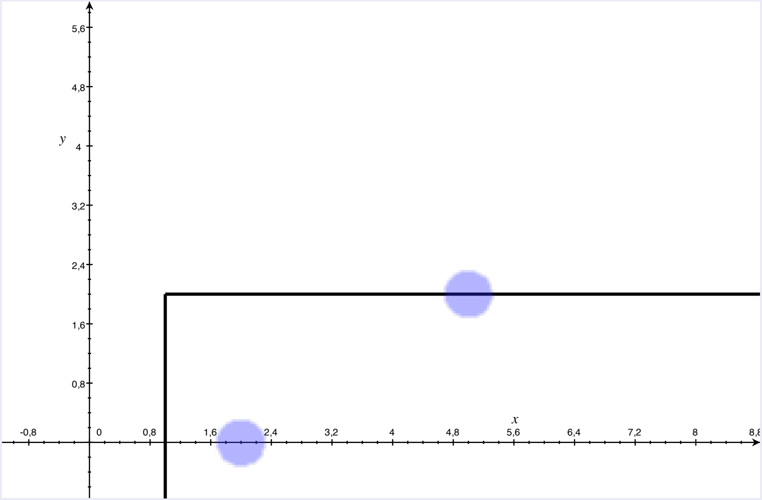
Esempio

L'insieme $\{(x, y) \in R^2 : x \geq 1,\ y \leq 2\}$ *è un intorno del punto* $(2, 0)$*. È intorno anche del punto* $(5, 2)$*?*



Esempio

L'insieme $\{(x, y) \in R^2 : x \geq 1,\ y \leq 2\}$ *è un intorno del punto* $(2, 0)$*. È intorno anche del punto* $(5, 2)$*?*



Esempio

L'insieme $S \equiv \{(x,y) \in R^2 : \ x \geq x_0\}$ *non è un intorno di* (x_0, y_0)*: infatti* $B(x_0, y_0; r) \not\subset S$ *qualunque sia* $r > 0$.

Definizione

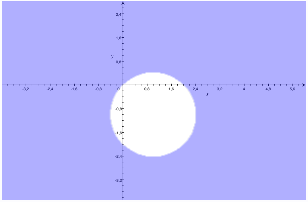
$A \subseteq R^2$ *è detto* intorno *di* ∞ *se esiste* $r > 0$ *tale che*

$$\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 > r\} \subset A.$$

Indichiamo con $\mathcal{U}_\infty$ *l'insieme di tutti gli intorni di* ∞.

(Esempio di intorno di ∞)

Il complementare del cerchio $B(1, -1; \sqrt{2})$.



Esempio

L'insieme $S \equiv \{(x,y) \in R^2 : \ x \geq x_0\}$ *non è un intorno di* (x_0, y_0)*: infatti* $B(x_0, y_0; r) \not\subset S$ *qualunque sia* $r > 0$.

Definizione

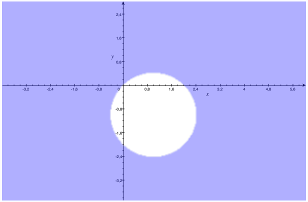
$A \subseteq R^2$ *è detto* intorno *di* ∞ *se esiste* $r > 0$ *tale che*

$$\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 > r\} \subset A.$$

Indichiamo con $\mathcal{U}_\infty$ *l'insieme di tutti gli intorni di* ∞.

(Esempio di intorno di ∞)

Il complementare del cerchio $B(1, -1; \sqrt{2})$.



Esempio

L'insieme $S \equiv \{(x,y) \in R^2 : \ x \geq x_0\}$ *non è un intorno di* (x_0, y_0)*: infatti* $B(x_0, y_0; r) \not\subset S$ *qualunque sia* $r > 0$.

Definizione

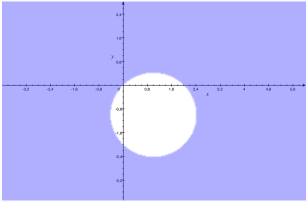
$A \subseteq R^2$ *è detto* `intorno` *di* ∞ *se esiste* $r > 0$ *tale che*

$$\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 > r\} \subset A.$$

Indichiamo con $\mathcal{U}_\infty$ *l'insieme di tutti gli intorni di* ∞.

(Esempio di intorno di ∞)

Il complementare del cerchio $B(1, -1; \sqrt{2})$.



Esempio

L'insieme $S \equiv \{(x, y) \in R^2 : \; x \geq x_0\}$ *non è* *un intorno di* (x_0, y_0)*: infatti* $B(x_0, y_0; r) \not\subset S$ *qualunque sia* $r > 0$.

Definizione

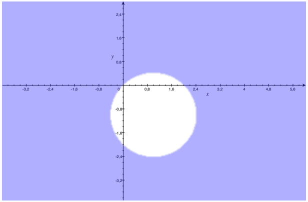
$A \subseteq R^2$ *è detto* `intorno` *di* ∞ *se esiste* $r > 0$ *tale che*

$$\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 > r\} \subset A.$$

Indichiamo con $\mathcal{U}_\infty$ *l'insieme di tutti gli intorni di* ∞.

(Esempio di intorno di ∞)

Il complementare del cerchio $B(1, -1; \sqrt{2})$.



Esempio

L'insieme $S \equiv \{(x, y) \in R^2 : \ x \geq x_0\}$ *non è un intorno di* (x_0, y_0)*: infatti* $B(x_0, y_0; r) \not\subset S$ *qualunque sia* $r > 0$.

Definizione

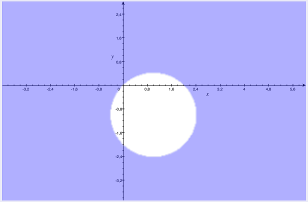
$A \subseteq R^2$ *è detto* `intorno` *di* ∞ *se esiste* $r > 0$ *tale che*

$$\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 > r\} \subset A.$$

Indichiamo con $\mathcal{U}_\infty$ *l'insieme di tutti gli intorni di* ∞.

(Esempio di intorno di ∞)

Il complementare del cerchio $B(1, -1; \sqrt{2})$.



Osservazione (Importante)

In R^2 (e, più in generale, in R^n $(n \geq 2)$) si parla solo di ∞ e di intorni di ∞ (non si distingue tra $+\infty$ e $-\infty$)

Esempio

L'insieme $\{(x, y) \in R^2 : \ x > 0\}$ non è un intorno di ∞. Infatti se lo fosse, dovrebbe contenere anche punti con ascissa negativa.

Osservazione (Importante)

In R^2 (e, più in generale, in R^n $(n \geq 2)$) si parla solo di ∞ e di intorni di ∞ (non si distingue tra $+\infty$ e $-\infty$)

Esempio

L'insieme $\{(x, y) \in R^2 : \; x > 0\}$ non è un intorno di ∞. Infatti se lo fosse, dovrebbe contenere anche punti con ascissa negativa.

Osservazione (Importante)

In R^2 (e, più in generale, in R^n $(n \geq 2)$) si parla solo di ∞ e di intorni di ∞ (non si distingue tra $+\infty$ e $-\infty$)

Esempio

L'insieme $\{(x, y) \in R^2 : \ x > 0\}$ non è un intorno di ∞. Infatti se lo fosse, dovrebbe contenere anche punti con ascissa negativa.

Punti di frontiera

Definizione

(x_0, y_0) *è un* punto di frontiera *(o di* bordo*) per* A *se per ogni* $r > 0$

$$B(x_0, y_0; r) \cap A \neq 0 \quad \& \quad B(x_0, y_0; r) \cap \mathcal{C}(A) \neq 0$$

dove

$$\mathcal{C}(A) = R^2 \setminus A.$$

L'insieme ∂A *è detto* frontiera *(o* bordo*) di* A*.*

Osservazione

- *Un punto interno ad* A *necessariamente appartiene ad* A*,*
- *un punto della frontiera di* A *può appartenere tanto ad* A *quanto al suo complementare* $\mathcal{C}(A)$ *(ma non a entrambi!).*

Osservazione

Per ogni insieme A*, si ha che* $\partial A \equiv \partial \mathcal{C}(A)$ *.*

Punti di frontiera

Definizione

(x_0, y_0) *è un* `punto di frontiera` *(o di* `bordo`*) per A se per ogni* $r > 0$

$$B(x_0, y_0; r) \cap A \neq 0 \quad \& \quad B(x_0, y_0; r) \cap \mathcal{C}(A) \neq 0$$

dove

$$\mathcal{C}(A) = R^2 \setminus A.$$

L'insieme ∂A *è detto* `frontiera` *(o* `bordo`*) di A.*

Osservazione

- *Un punto interno ad A necessariamente appartiene ad A,*
- *un punto della frontiera di A può appartenere tanto ad A quanto al suo complementare* $\mathcal{C}(A)$ *(ma non a entrambi!).*

Osservazione

Per ogni insieme A, si ha che $\partial A \equiv \partial \mathcal{C}(A)$ *.*

Punti di frontiera

Definizione

(x_0, y_0) *è un* punto di frontiera *(o di* bordo*) per A se per ogni $r > 0$*

$$B(x_0, y_0; r) \cap A \neq 0 \quad \& \quad B(x_0, y_0; r) \cap \mathcal{C}(A) \neq 0$$

dove

$$\mathcal{C}(A) = R^2 \setminus A.$$

L'insieme ∂A è detto frontiera *(o* bordo*) di A.*

Osservazione

- *Un punto interno ad A necessariamente appartiene ad A,*
- *un punto della frontiera di A può appartenere tanto ad A quanto al suo complementare $\mathcal{C}(A)$ (ma non a entrambi!).*

Osservazione

Per ogni insieme A, si ha che $\partial A \equiv \partial \mathcal{C}(A)$.

Punti di frontiera

Definizione

(x_0, y_0) *è un* `punto di frontiera` *(o di* `bordo`*) per A se per ogni $r > 0$*

$$B(x_0, y_0; r) \cap A \neq 0 \quad \& \quad B(x_0, y_0; r) \cap \mathcal{C}(A) \neq 0$$

dove

$$\mathcal{C}(A) = R^2 \setminus A.$$

L'insieme ∂A è detto `frontiera` *(o* `bordo`*) di A.*

Osservazione

- *Un punto interno ad A necessariamente appartiene ad A,*
- *un punto della frontiera di A può appartenere tanto ad A quanto al suo complementare $\mathcal{C}(A)$ (ma non a entrambi!).*

Osservazione

Per ogni insieme A, si ha che $\partial A \equiv \partial \mathcal{C}(A)$.

Punti di frontiera

Definizione

(x_0, y_0) *è un* `punto di frontiera` *(o di* `bordo`*) per A se per ogni $r > 0$*

$$B(x_0, y_0; r) \cap A \neq 0 \quad \& \quad B(x_0, y_0; r) \cap \mathcal{C}(A) \neq 0$$

dove

$$\mathcal{C}(A) = R^2 \setminus A.$$

L'insieme ∂A è detto `frontiera` *(o* `bordo`*) di A.*

Osservazione

- *Un punto interno ad A necessariamente appartiene ad A,*
- *un punto della frontiera di A può appartenere tanto ad A quanto al suo complementare $\mathcal{C}(A)$ (ma non a entrambi!).*

Osservazione

Per ogni insieme A, si ha che $\partial A \equiv \partial\mathcal{C}(A)$.

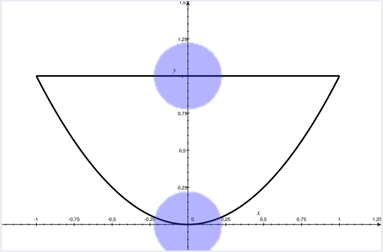
Esempio

Sia $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 < y \leq 1\}$;

- $(0, 0) \notin A$ *(e dunque* $(0, 0) \in \mathcal{C}(A)$*)*,
- $(0, 0) \in \partial A$. *Infatti, per ogni* $r > 0$, $(0, \delta) \in B(0, 0; r)$ *e* $(0, -\delta) \in B(0, 0; r)$
  - $0 < \delta \leq 1$, *e quindi il punto* $(0, \delta) \in A$.
  - *Invece* $(0, -\delta) \notin A$.

  Quindi $(0, 0) \in \partial A$.
- *Analogamente* $(0, 1) \in A \cup \partial A$
- *Infine*

$$\partial A = \{(x, y) \in R^2 : \; y = x^2, \; -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 1) \in R^2 : \; -1 \leq x \leq 1\}.$$



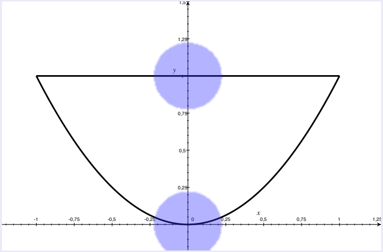
Esempio

Sia $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 < y \leq 1\}$*;*

- $(0,0) \notin A$ *(e dunque* $(0,0) \in \mathcal{C}(A)$*),*
- $(0,0) \in \partial A$*. Infatti, per ogni* $r > 0$*,* $(0,\delta) \in B(0,0;r)$ *e* $(0,-\delta) \in B(0,0;r)$
  - $0 < \delta \leq 1$*, e quindi il punto* $(0,\delta) \in A$*.*
  - *Invece* $(0,-\delta) \notin A$*.*

  Quindi $(0,0) \in \partial A$*.*
- *Analogamente* $(0,1) \in A \cup \partial A$
- *Infine*

$$\partial A = \{(x,y) \in R^2 : \ y = x^2, \ -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,1) \in R^2 : \ -1 \leq x \leq 1\}.$$



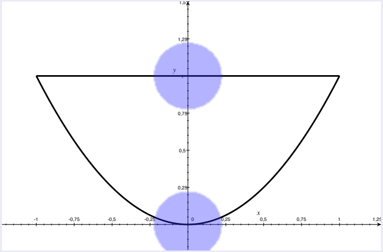
Esempio

Sia $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 < y \leq 1\}$*;*

- $(0,0) \notin A$ *(e dunque* $(0,0) \in \mathcal{C}(A)$*),*
- $(0,0) \in \partial A$*. Infatti, per ogni* $r > 0$*,* $(0,\delta) \in B(0,0;r)$ *e* $(0,-\delta) \in B(0,0;r)$
  - $0 < \delta \leq 1$*, e quindi il punto* $(0,\delta) \in A$*.*
  - *Invece* $(0,-\delta) \notin A$*.*

  Quindi $(0,0) \in \partial A$*.*
- *Analogamente* $(0,1) \in A \cup \partial A$
- *Infine*

$$\partial A = \{(x,y) \in R^2 : \ y = x^2, \ -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,1) \in R^2 : \ -1 \leq x \leq 1\}.$$



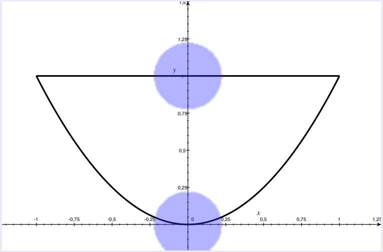
Esempio

Sia $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 < y \leq 1\}$*;*

- $(0,0) \notin A$ *(e dunque* $(0,0) \in \mathcal{C}(A)$*),*
- $(0,0) \in \partial A$*. Infatti, per ogni* $r > 0$*,* $(0,\delta) \in B(0,0;r)$ *e* $(0,-\delta) \in B(0,0;r)$
  - $0 < \delta \leq 1$*, e quindi il punto* $(0,\delta) \in A$*.*
  - *Invece* $(0,-\delta) \notin A$*.*

  Quindi $(0,0) \in \partial A$*.*
- *Analogamente* $(0,1) \in A \cup \partial A$
- *Infine*

$$\partial A = \{(x,y) \in R^2 : \; y = x^2, \; -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,1) \in R^2 : \; -1 \leq x \leq 1\}.$$



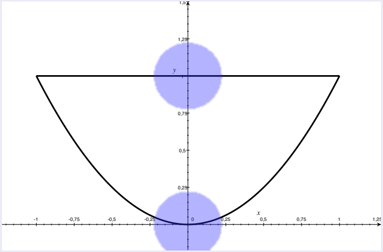
Esempio

Sia $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 < y \leq 1\}$;

- $(0, 0) \notin A$ *(e dunque* $(0, 0) \in \mathcal{C}(A)$*),*
- $(0, 0) \in \partial A$. *Infatti, per ogni* $r > 0$, $(0, \delta) \in B(0, 0; r)$ *e* $(0, -\delta) \in B(0, 0; r)$
  - $0 < \delta \leq 1$, *e quindi il punto* $(0, \delta) \in A$.
  - *Invece* $(0, -\delta) \notin A$.

  Quindi $(0, 0) \in \partial A$.
- *Analogamente* $(0, 1) \in A \cup \partial A$
- *Infine*

$$\partial A = \{(x, y) \in R^2 : \ y = x^2, \ -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 1) \in R^2 : \ -1 \leq x \leq 1\}.$$



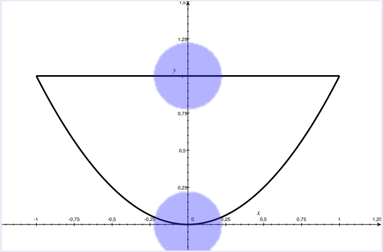
Esempio

Sia $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 < y \leq 1\}$*;*

- $(0,0) \notin A$ *(e dunque* $(0,0) \in \mathcal{C}(A)$*),*
- $(0,0) \in \partial A$*. Infatti, per ogni* $r > 0$*,* $(0,\delta) \in B(0,0;r)$ *e* $(0,-\delta) \in B(0,0;r)$
  - $0 < \delta \leq 1$*, e quindi il punto* $(0,\delta) \in A$*.*
  - *Invece* $(0,-\delta) \notin A$*.*

  Quindi $(0,0) \in \partial A$*.*
- *Analogamente* $(0,1) \in A \cup \partial A$
- *Infine*

$$\partial A = \{(x, y) \in R^2 : \ y = x^2, \ -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 1) \in R^2 : \ -1 \leq x \leq 1\}.$$



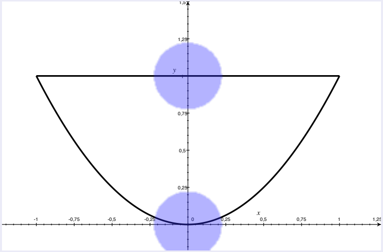
Esempio

Sia $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 < y \leq 1\}$;

- $(0, 0) \notin A$ *(e dunque* $(0, 0) \in \mathcal{C}(A)$*)*,
- $(0, 0) \in \partial A$. *Infatti, per ogni* $r > 0$, $(0, \delta) \in B(0, 0; r)$ *e* $(0, -\delta) \in B(0, 0; r)$
  - $0 < \delta \leq 1$, *e quindi il punto* $(0, \delta) \in A$.
  - *Invece* $(0, -\delta) \notin A$.

  Quindi $(0, 0) \in \partial A$.
- *Analogamente* $(0, 1) \in A \cup \partial A$
- *Infine*

$$\partial A = \{(x, y) \in R^2 : \ y = x^2, \ -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 1) \in R^2 : \ -1 \leq x \leq 1\}.$$



Insiemi chiusi

Definizione

$C \subseteq R^2$ è chiuso se $\partial C \subseteq C$.

Esempio

$C = \{(x, y) \in R^2 : \ x \geq 0\}$ *è un insieme chiuso.*

- *ogni punto della forma* $(0, y)$ *con* $y \in R$ *appartiene a* ∂C.
- $(x_0, y_0) \in C$ *con* $x_0 > 0$ *non è di frontiera.*
  - *Infatti,* $B(x_0, y_0; r) \subset A$ *per ogni* $r < x_0/2$.
    - *se* $(x, y) \in B(x_0, y_0; r)$, *allora*

$$|x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \frac{1}{2}x_0.$$

    - *quindi*

$$x = x_0 + (x - x_0) \geq x_0 - |x - x_0| > \frac{1}{2}x_0 > 0.$$

- *Analogamente ogni punto* $(x, y) \in R^2$ *con* $x < 0$ *e* $y \in R$ *non è di frontiera per A.*

Insiemi chiusi

Definizione

$C \subseteq R^2$ è `chiuso` *se* $\partial C \subseteq C$.

Esempio

$C = \{(x,y) \in R^2 : \ x \geq 0\}$ *è un insieme chiuso.*

- *ogni punto della forma* $(0, y)$ *con* $y \in R$ *appartiene a* ∂C.
- $(x_0, y_0) \in C$ *con* $x_0 > 0$ *non è di frontiera.*
  - *Infatti,* $B(x_0, y_0; r) \subset A$ *per ogni* $r < x_0/2$.
    - *se* $(x, y) \in B(x_0, y_0; r)$, *allora*
    $$|x - x_0| \leq \|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \frac{1}{2} x_0.$$
    - *quindi*
    $$x = x_0 + (x - x_0) \geq x_0 - |x - x_0| > \frac{1}{2} x_0 > 0.$$
- *Analogamente ogni punto* $(x, y) \in R^2$ *con* $x < 0$ *e* $y \in R$ *non è di frontiera per A.*

Insiemi chiusi

Definizione

$C \subseteq R^2$ è chiuso se $\partial C \subseteq C$.

Esempio

$C = \{(x, y) \in R^2 : \ x \geq 0\}$ *è un insieme chiuso.*

- *ogni punto della forma* $(0, y)$ *con* $y \in R$ *appartiene a* ∂C.
- $(x_0, y_0) \in C$ *con* $x_0 > 0$ *non è di frontiera.*
  - *Infatti,* $B(x_0, y_0; r) \subset A$ *per ogni* $r < x_0/2$.
    - *se* $(x, y) \in B(x_0, y_0; r)$, *allora*
      $$|x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \frac{1}{2}x_0.$$
    - *quindi*
      $$x = x_0 + (x - x_0) \geq x_0 - |x - x_0| > \frac{1}{2}x_0 > 0.$$
- *Analogamente ogni punto* $(x, y) \in R^2$ *con* $x < 0$ *e* $y \in R$ *non è di frontiera per A.*

Insiemi chiusi

Definizione

$C \subseteq R^2$ è `chiuso` *se* $\partial C \subseteq C$.

Esempio

$C = \{(x, y) \in R^2 : \; x \geq 0\}$ *è un insieme chiuso.*

- *ogni punto della forma* $(0, y)$ *con* $y \in R$ *appartiene a* ∂C.
- $(x_0, y_0) \in C$ *con* $x_0 > 0$ *non è di frontiera.*
  - *Infatti,* $B(x_0, y_0; r) \subset A$ *per ogni* $r < x_0/2$.
    - *se* $(x, y) \in B(x_0, y_0; r)$, *allora*

$$|x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \frac{1}{2} x_0.$$

    - *quindi*

$$x = x_0 + (x - x_0) \geq x_0 - |x - x_0| > \frac{1}{2} x_0 > 0.$$

- *Analogamente ogni punto* $(x, y) \in R^2$ *con* $x < 0$ *e* $y \in R$ *non è di frontiera per A.*

Insiemi chiusi

Definizione

$C \subseteq R^2$ è `chiuso` *se* $\partial C \subseteq C$.

Esempio

$C = \{(x, y) \in R^2 : \; x \geq 0\}$ *è un insieme chiuso.*

- *ogni punto della forma* $(0, y)$ *con* $y \in R$ *appartiene a* ∂C.
- $(x_0, y_0) \in C$ *con* $x_0 > 0$ *non è di frontiera.*
  - *Infatti,* $B(x_0, y_0; r) \subset A$ *per ogni* $r < x_0/2$.
    - *se* $(x, y) \in B(x_0, y_0; r)$, *allora*
    $$|x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \frac{1}{2}x_0.$$
    - *quindi*
    $$x = x_0 + (x - x_0) \geq x_0 - |x - x_0| > \frac{1}{2}x_0 > 0.$$
- *Analogamente ogni punto* $(x, y) \in R^2$ *con* $x < 0$ *e* $y \in R$ *non è di frontiera per A.*

Insiemi chiusi

Definizione

$C \subseteq R^2$ è chiuso se $\partial C \subseteq C$.

Esempio

$C = \{(x, y) \in R^2 : \ x \geq 0\}$ *è un insieme chiuso.*

- *ogni punto della forma* $(0, y)$ *con* $y \in R$ *appartiene a* ∂C.
- $(x_0, y_0) \in C$ *con* $x_0 > 0$ *non è di frontiera.*
  - *Infatti,* $B(x_0, y_0; r) \subset A$ *per ogni* $r < x_0/2$.
    - *se* $(x, y) \in B(x_0, y_0; r)$, *allora*

$$|x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \frac{1}{2} x_0.$$

    - *quindi*

$$x = x_0 + (x - x_0) \geq x_0 - |x - x_0| > \frac{1}{2} x_0 > 0.$$

- *Analogamente ogni punto* $(x, y) \in R^2$ *con* $x < 0$ *e* $y \in R$ *non è di frontiera per A.*

Insiemi chiusi

Definizione

$C \subseteq R^2$ è `chiuso` *se* $\partial C \subseteq C$.

Esempio

$C = \{(x, y) \in R^2 : \; x \geq 0\}$ *è un insieme chiuso.*

- *ogni punto della forma* $(0, y)$ *con* $y \in R$ *appartiene a* ∂C.
- $(x_0, y_0) \in C$ *con* $x_0 > 0$ *non è di frontiera.*
  - *Infatti,* $B(x_0, y_0; r) \subset A$ *per ogni* $r < x_0/2$.
    - *se* $(x, y) \in B(x_0, y_0; r)$, *allora*
    $$|x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \frac{1}{2}x_0.$$
    - *quindi*
    $$x = x_0 + (x - x_0) \geq x_0 - |x - x_0| > \frac{1}{2}x_0 > 0.$$
- *Analogamente ogni punto* $(x, y) \in R^2$ *con* $x < 0$ *e* $y \in R$ *non è di frontiera per A.*

Insiemi chiusi

Definizione

$C \subseteq R^2$ è chiuso se $\partial C \subseteq C$.

Esempio

$C = \{(x, y) \in R^2 : \ x \geq 0\}$ *è un insieme chiuso.*

- *ogni punto della forma* $(0, y)$ *con* $y \in R$ *appartiene a* ∂C.
- $(x_0, y_0) \in C$ *con* $x_0 > 0$ *non è di frontiera.*
  - *Infatti,* $B(x_0, y_0; r) \subset A$ *per ogni* $r < x_0/2$.
    - *se* $(x, y) \in B(x_0, y_0; r)$, *allora*

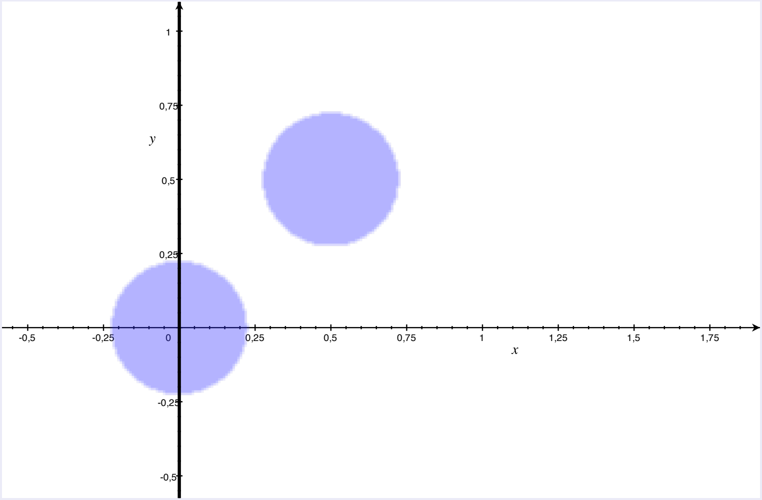
$$|x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \frac{1}{2}x_0.$$

    - *quindi*

$$x = x_0 + (x - x_0) \geq x_0 - |x - x_0| > \frac{1}{2}x_0 > 0.$$

- *Analogamente ogni punto* $(x, y) \in R^2$ *con* $x < 0$ *e* $y \in R$ *non è di frontiera per* A.

Esempio (...continua...)



Osservazione

Ogni insieme chiuso è l'unione dei suoi punti interni e dei punti di frontiera.

Esempio

L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$ **non** *è un insieme chiuso:* ***infatti*** $\partial A = \{(x, y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 = 1\} \not\subset A$.

Osservazione

Dato A, la sua frontiera ∂A *è un insieme chiuso.*

Osservazione

Ogni insieme chiuso è l'unione dei suoi punti interni e dei punti di frontiera.

Esempio

L'insieme $A = \{(x,y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$ **non** *è un insieme chiuso: infatti* $\partial A = \{(x,y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 = 1\} \not\subset A$.

Osservazione

Dato A, la sua frontiera ∂A *è un insieme chiuso.*

Osservazione

Ogni insieme chiuso è l'unione dei suoi punti interni e dei punti di frontiera.

Esempio

L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$ **non** *è un insieme chiuso: infatti* $\partial A = \{(x, y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 = 1\} \not\subset A$.

Osservazione

Dato A, la sua frontiera ∂A *è un insieme chiuso.*

Osservazione

Ogni insieme chiuso è l'unione dei suoi punti interni e dei punti di frontiera.

Esempio

L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : \; x^2 + y^2 < 1\}$ **non** *è un insieme chiuso: infatti* $\partial A = \{(x, y) \in R^2 : \; x^2 + y^2 = 1\} \not\subset A$*.*

Osservazione

Dato A*, la sua frontiera* ∂A *è un insieme chiuso.*

Definizione

Dato un insieme $A \subseteq R^2$, si dice `chiusura di` *A l'insieme*

$$\overline{A} = \partial A \cup A.$$

Esercizio

Se C è un insieme chiuso, allora $C = \overline{C}$.

Esercizio

Qualunque sia l'insieme C, si ha

$$\overline{C} = \overline{\overline{C}}.$$

Suggerimento: segue da

$$\overline{X \cup Y} \subset (\overline{X} \cup \overline{Y})$$

Definizione

Dato un insieme $A \subseteq R^2$, si dice `chiusura di` *A l'insieme*

$$\overline{A} = \partial A \cup A.$$

Esercizio

Se C è un insieme chiuso, allora $C = \overline{C}$.

Esercizio

Qualunque sia l'insieme C, si ha

$$\overline{C} = \overline{\overline{C}}.$$

Suggerimento: segue da

$$\overline{X \cup Y} \subset (\overline{X} \cup \overline{Y})$$

Definizione

Dato un insieme $A \subseteq R^2$, *si dice* chiusura di A *l'insieme*

$$\overline{A} = \partial A \cup A.$$

Esercizio

Se C *è un insieme chiuso, allora* $C = \overline{C}$.

Esercizio

Qualunque sia l'insieme C, *si ha*

$$\overline{C} = \overline{\overline{C}}.$$

Suggerimento: segue da

$$\overline{X \cup Y} \subset (\overline{X} \cup \overline{Y})$$

Soluzione

Proviamo che

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}.$$

- *Si sa che*

$$\overline{A \cup B} \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}).$$

- *Proviamo l'inclusione* $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. *Segue subito da*

$$\overline{(\overline{A})} \equiv \overline{\partial A \cup A} \subseteq (\overline{\partial A} \cup \overline{A}) \subseteq (\partial A \cup (\partial A \cup A)) \subseteq \overline{A}.$$

Quindi la chiusura di un insieme è un insieme chiuso. In realtà vale di più :

$$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}.$$

- *Infatti, da* $A \subseteq \overline{A}$ e $B \subseteq \overline{B}$, *segue che*$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- *Pertanto*

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

perché $\overline{A} \cup \overline{B}$ *è un insieme chiuso.*

Soluzione

Proviamo che

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}.$$

- *Si sa che*

$$\overline{A \cup B} \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}).$$

- *Proviamo l'inclusione* $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. *Segue subito da*

$$\overline{(\overline{A})} \equiv \overline{\partial A \cup A} \subseteq \left(\overline{\partial A} \cup \overline{A}\right) \subseteq (\partial A \cup (\partial A \cup A)) \subseteq \overline{A}.$$

Quindi la chiusura di un insieme è un insieme chiuso. In realtà vale di più :

$$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}.$$

- *Infatti, da* $A \subseteq \overline{A}$ e $B \subseteq \overline{B}$, *segue che*$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- *Pertanto*

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

perché $\overline{A} \cup \overline{B}$ *è un insieme chiuso.*

Soluzione

Proviamo che

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}.$$

- *Si sa che*

$$\overline{A \cup B} \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}).$$

- *Proviamo l'inclusione* $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. *Segue subito da*

$$\overline{(\overline{A})} \equiv \overline{\partial \overline{A} \cup \overline{A}} \subseteq \left(\overline{\partial \overline{A}} \cup \overline{A}\right) \subseteq (\partial A \cup (\partial A \cup A)) \subseteq \overline{A}.$$

Quindi la chiusura di un insieme è un insieme chiuso. In realtà vale di più :

$$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}.$$

- *Infatti, da* $A \subseteq \overline{A}$ *e* $B \subseteq \overline{B}$, *segue che* $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- *Pertanto*

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

perché $\overline{A} \cup \overline{B}$ *è un insieme chiuso.*

Soluzione

Proviamo che

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}.$$

- *Si sa che*

$$\overline{A \cup B} \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}).$$

- *Proviamo l'inclusione* $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. *Segue subito da*

$$\overline{(\overline{A})} \equiv \overline{\partial A \cup A} \subseteq \left(\overline{\partial A} \cup \overline{A}\right) \subseteq (\partial A \cup (\partial A \cup A)) \subseteq \overline{A}.$$

Quindi la chiusura di un insieme è un insieme chiuso. In realtà vale di più :

$$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}.$$

- *Infatti, da* $A \subseteq \overline{A}$ e $B \subseteq \overline{B}$, *segue che*$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- *Pertanto*

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

perché $\overline{A} \cup \overline{B}$ *è un insieme chiuso.*

Soluzione

Proviamo che

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}.$$

- *Si sa che*

$$\overline{A \cup B} \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}).$$

- *Proviamo l'inclusione* $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. *Segue subito da*

$$\overline{(\overline{A})} \equiv \overline{\partial \overline{A} \cup A} \subseteq \left(\overline{\partial \overline{A}} \cup \overline{A}\right) \subseteq (\partial A \cup (\partial A \cup A)) \subseteq \overline{A}.$$

Quindi la chiusura di un insieme è un insieme chiuso. In realtà vale di più :

$$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}.$$

- *Infatti, da* $A \subseteq \overline{A}$ *e* $B \subseteq \overline{B}$, *segue che*$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- *Pertanto*

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

perché $\overline{A} \cup \overline{B}$ *è un insieme chiuso.*

Soluzione

Proviamo che

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}.$$

- *Si sa che*

$$\overline{A \cup B} \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}).$$

- *Proviamo l'inclusione* $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. *Segue subito da*

$$\overline{(\overline{A})} \equiv \overline{\partial A \cup A} \subseteq \left(\overline{\partial A} \cup \overline{A}\right) \subseteq (\partial A \cup (\partial A \cup A)) \subseteq \overline{A}.$$

Quindi la chiusura di un insieme è un insieme chiuso. In realtà vale di più :

$$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}.$$

- *Infatti, da* $A \subseteq \overline{A}$ *e* $B \subseteq \overline{B}$, *segue che* $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- *Pertanto*

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

perché $\overline{A} \cup \overline{B}$ *è un insieme chiuso.*

Soluzione

Proviamo che

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}.$$

- *Si sa che*

$$\overline{A \cup B} \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}).$$

- *Proviamo l'inclusione* $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. *Segue subito da*

$$\overline{(\overline{A})} \equiv \overline{\partial A \cup A} \subseteq \left(\overline{\partial A} \cup \overline{A}\right) \subseteq (\partial A \cup (\partial A \cup A)) \subseteq \overline{A}.$$

Quindi la chiusura di un insieme è un insieme chiuso. In realtà vale di più :

$$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}.$$

- *Infatti, da* $A \subseteq \overline{A}$ *e* $B \subseteq \overline{B}$, *segue che* $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- *Pertanto*

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

perché $\overline{A} \cup \overline{B}$ *è un insieme chiuso.*

Soluzione

Proviamo che

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}.$$

- *Si sa che*

$$\overline{A \cup B} \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}).$$

- *Proviamo l'inclusione* $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. *Segue subito da*

$$\overline{(\overline{A})} \equiv \overline{\partial A \cup A} \subseteq \left(\overline{\partial A} \cup \overline{A}\right) \subseteq (\partial A \cup (\partial A \cup A)) \subseteq \overline{A}.$$

Quindi la chiusura di un insieme è un insieme chiuso. In realtà vale di più :

$$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}.$$

- *Infatti, da* $A \subseteq \overline{A}$ e $B \subseteq \overline{B}$, *segue che* $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- *Pertanto*

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

perché $\overline{A} \cup \overline{B}$ *è un insieme chiuso.*

Soluzione

Proviamo che

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}.$$

- *Si sa che*

$$\overline{A \cup B} \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}).$$

- *Proviamo l'inclusione* $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. *Segue subito da*

$$\overline{(\overline{A})} \equiv \overline{\partial A \cup A} \subseteq \left(\overline{\partial A} \cup \overline{A}\right) \subseteq (\partial A \cup (\partial A \cup A)) \subseteq \overline{A}.$$

Quindi la chiusura di un insieme è un insieme chiuso. In realtà vale di più :

$$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}.$$

- *Infatti, da* $A \subseteq \overline{A}$ e $B \subseteq \overline{B}$, *segue che*$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- *Pertanto*

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

perché $\overline{A} \cup \overline{B}$ *è un insieme chiuso.*

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* `aperto` *se il suo complementare* $\mathcal{C}(A)$ *è chiuso.*

Osservazione (Importante)

Si conviene che R^2 *e l'insieme vuoto siano simultaneamente aperti e chiusi.*

Osservazione

Un insieme è aperto se, e soltanto se, è intorno di ogni suo punto.

Esercizio

- *Dato un qualsiasi insieme* A*, l'insieme* $A \setminus \partial A$ *è un insieme aperto.*
- *L'unione/intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.*
- *L'unione/intersezione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso.*

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ è detto `aperto` *se il suo complementare $\mathcal{C}(A)$ è chiuso.*

Osservazione (Importante)

Si conviene che R^2 e l'insieme vuoto siano simultaneamente aperti e chiusi.

Osservazione

Un insieme è aperto se, e soltanto se, è intorno di ogni suo punto.

Esercizio

- *Dato un qualsiasi insieme A, l'insieme $A \setminus \partial A$ è un insieme aperto.*
- *L'unione/intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.*
- *L'unione/intersezione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso.*

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ è detto `aperto` *se il suo complementare $\mathcal{C}(A)$ è chiuso.*

Osservazione (Importante)

Si conviene che R^2 e l'insieme vuoto siano simultaneamente aperti e chiusi.

Osservazione

Un insieme è aperto se, e soltanto se, è intorno di ogni suo punto.

Esercizio

- *Dato un qualsiasi insieme A, l'insieme $A \setminus \partial A$ è un insieme aperto.*
- *L'unione/intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.*
- *L'unione/intersezione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso.*

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ è detto `aperto` *se il suo complementare $\mathcal{C}(A)$ è chiuso.*

Osservazione (Importante)

Si conviene che R^2 e l'insieme vuoto siano simultaneamente aperti e chiusi.

Osservazione

Un insieme è aperto se, e soltanto se, è intorno di ogni suo punto.

Esercizio

- *Dato un qualsiasi insieme A, l'insieme $A \setminus \partial A$ è un insieme aperto.*
- *L'unione/intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.*
- *L'unione/intersezione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso.*

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* `aperto` *se il suo complementare* $\mathcal{C}(A)$ *è chiuso.*

Osservazione (Importante)

Si conviene che R^2 *e l'insieme vuoto siano simultaneamente aperti e chiusi.*

Osservazione

Un insieme è aperto se, e soltanto se, è intorno di ogni suo punto.

Esercizio

- *Dato un qualsiasi insieme* A*, l'insieme* $A \setminus \partial A$ *è un insieme aperto.*
- *L'unione/intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.*
- *L'unione/intersezione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso.*

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* `aperto` *se il suo complementare* $\mathcal{C}(A)$ *è chiuso.*

Osservazione (Importante)

Si conviene che R^2 *e l'insieme vuoto siano simultaneamente aperti e chiusi.*

Osservazione

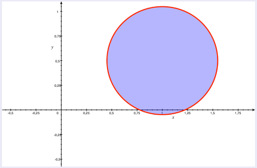
Un insieme è aperto se, e soltanto se, è intorno di ogni suo punto.

Esercizio

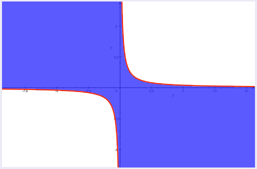
- *Dato un qualsiasi insieme* A*, l'insieme* $A \setminus \partial A$ *è un insieme aperto.*
- *L'unione/intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.*
- *L'unione/intersezione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso.*

Esempio

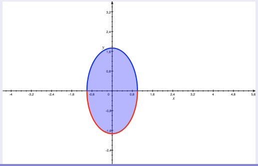
- *L'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è aperto comunque si fissi* $(x_0, y_0) \in R^2$ *e* $r > 0$.



- *L'insieme* $A = \{x, y) \in R^2 : xy < 1\}$ *è aperto.*

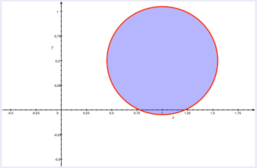


- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : 3x^2 + y^2 < 3\} \cup \{(x, y) \in R^2 : y = \sqrt{3 - 3x^2}\}$ *non è né aperto né chiuso.*

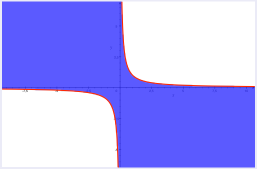


Esempio

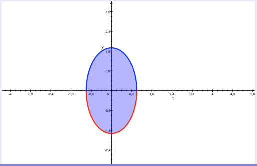
- *L'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è aperto comunque si fissi* $(x_0, y_0) \in R^2$ *e* $r > 0$.



- *L'insieme* $A = \{x, y) \in R^2 : xy < 1\}$ *è aperto.*

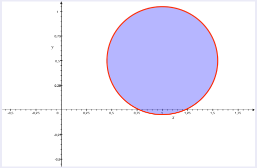


- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : 3x^2 + y^2 < 3\} \cup \{(x, y) \in R^2 : y = \sqrt{3 - 3x^2}\}$ *non è né aperto né chiuso.*

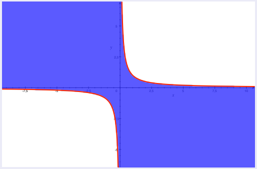


Esempio

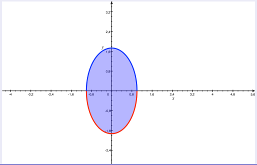
- *L'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è aperto comunque si fissi* $(x_0, y_0) \in R^2$ *e* $r > 0$.



- *L'insieme* $A = \{x, y) \in R^2 : \; xy < 1\}$ *è aperto.*



- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : 3x^2 + y^2 < 3\} \cup \{(x, y) \in R^2 : y = \sqrt{3 - 3x^2}\}$ *non è né aperto né chiuso.*



Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* `limitato` *se esiste* $R > 0$ *tale che* $A \subset B(x_0, y_0; R)$.

Osservazione

Dalla definizione segue che
un insieme A *è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva* K *tale che* $\|(x,y)\| \leq K$ *per ogni* $(x,y) \in A$.
ovvero, detto in un altro modo,
un insieme A *è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva* K *tale che* $A \subset B(0,0; K+1)$.

- *Infatti, se* A *è limitato esiste un cerchio* $B(x_0, y_0; R)$ *che contiene tutti gli elementi di* A.
- *Pertanto, usando la disuguaglianza triangolare si ottiene*

$$\|(x,y)\| \leq \|(x,y) - (x_0, y_0)\| + \|(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\| + R,$$

  per ogni $(x,y) \in A$.
- *Quindi si ha la tesi con* $K = \|(x_0, y_0)\| + R$. *Il viceversa è immediato prendendo* $(x_0, y_0) = (0,0)$ *ed* $R = K + 1$.

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* `limitato` *se esiste* $R > 0$ *tale che* $A \subset B(x_0, y_0; R)$.

Osservazione

Dalla definizione segue che

un insieme A è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva K tale che $\|(x, y)\| \leq K$ per ogni $(x, y) \in A$.

ovvero, detto in un altro modo,

un insieme A è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva K tale che $A \subset B(0, 0; K + 1)$.

- *Infatti, se A è limitato esiste un cerchio $B(x_0, y_0; R)$ che contiene tutti gli elementi di A.*
- *Pertanto, usando la disuguaglianza triangolare si ottiene*

$$\|(x, y)\| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| + \|(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\| + R,$$

  per ogni $(x, y) \in A$.
- *Quindi si ha la tesi con $K = \|(x_0, y_0)\| + R$. Il viceversa è immediato prendendo $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ed $R = K + 1$.*

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* `limitato` *se esiste* $R > 0$ *tale che* $A \subset B(x_0, y_0; R)$.

Osservazione

Dalla definizione segue che

un insieme A *è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva* K *tale che* $\|(x, y)\| \leq K$ *per ogni* $(x, y) \in A$.

ovvero, detto in un altro modo,

un insieme A *è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva* K *tale che* $A \subset B(0, 0; K + 1)$.

- *Infatti, se* A *è limitato esiste un cerchio* $B(x_0, y_0; R)$ *che contiene tutti gli elementi di* A.
- *Pertanto, usando la disuguaglianza triangolare si ottiene*

$$\|(x, y)\| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| + \|(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\| + R,$$

  per ogni $(x, y) \in A$.
- *Quindi si ha la tesi con* $K = \|(x_0, y_0)\| + R$. *Il viceversa è immediato prendendo* $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *ed* $R = K + 1$.

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* `limitato` *se esiste* $R > 0$ *tale che* $A \subset B(x_0, y_0; R)$.

Osservazione

Dalla definizione segue che
un insieme A *è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva* K *tale che* $\|(x, y)\| \leq K$ *per ogni* $(x, y) \in A$.
ovvero, detto in un altro modo,
un insieme A *è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva* K *tale che* $A \subset B(0, 0; K + 1)$.

- *Infatti, se* A *è limitato esiste un cerchio* $B(x_0, y_0; R)$ *che contiene tutti gli elementi di* A.
- *Pertanto, usando la disuguaglianza triangolare si ottiene*
$$\|(x, y)\| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| + \|(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\| + R,$$
per ogni $(x, y) \in A$.
- *Quindi si ha la tesi con* $K = \|(x_0, y_0)\| + R$. *Il viceversa è immediato prendendo* $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *ed* $R = K + 1$.

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* `limitato` *se esiste* $R > 0$ *tale che* $A \subset B(x_0, y_0; R)$.

Osservazione

Dalla definizione segue che
un insieme A *è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva* K *tale che* $\|(x, y)\| \leq K$ *per ogni* $(x, y) \in A$.
ovvero, detto in un altro modo,
un insieme A *è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva* K *tale che* $A \subset B(0, 0; K + 1)$.

- *Infatti, se* A *è limitato esiste un cerchio* $B(x_0, y_0; R)$ *che contiene tutti gli elementi di* A.
- *Pertanto, usando la disuguaglianza triangolare si ottiene*
$$\|(x, y)\| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| + \|(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\| + R,$$
per ogni $(x, y) \in A$.
- *Quindi si ha la tesi con* $K = \|(x_0, y_0)\| + R$. *Il viceversa è immediato prendendo* $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *ed* $R = K + 1$.

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* `limitato` *se esiste* $R > 0$ *tale che* $A \subset B(x_0, y_0; R)$.

Osservazione

Dalla definizione segue che
un insieme A *è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva* K *tale che* $\|(x, y)\| \leq K$ *per ogni* $(x, y) \in A$.
ovvero, detto in un altro modo,
un insieme A *è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva* K *tale che* $A \subset B(0, 0; K + 1)$.

- *Infatti, se* A *è limitato esiste un cerchio* $B(x_0, y_0; R)$ *che contiene tutti gli elementi di* A.
- *Pertanto, usando la disuguaglianza triangolare si ottiene*

$$\|(x, y)\| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| + \|(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\| + R,$$

  per ogni $(x, y) \in A$.
- *Quindi si ha la tesi con* $K = \|(x_0, y_0)\| + R$. *Il viceversa è immediato prendendo* $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *ed* $R = K + 1$.

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* `limitato` *se esiste* $R > 0$ *tale che* $A \subset B(x_0, y_0; R)$.

Osservazione

Dalla definizione segue che
un insieme A è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva K tale che $\|(x, y)\| \leq K$ *per ogni* $(x, y) \in A$.
ovvero, detto in un altro modo,
un insieme A è limitato se, e solo se, esiste una costante positiva K tale che $A \subset B(0, 0; K + 1)$.

- *Infatti, se A è limitato esiste un cerchio* $B(x_0, y_0; R)$ *che contiene tutti gli elementi di A.*
- *Pertanto, usando la disuguaglianza triangolare si ottiene*

$$\|(x, y)\| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| + \|(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\| + R,$$

  per ogni $(x, y) \in A$.
- *Quindi si ha la tesi con* $K = \|(x_0, y_0)\| + R$. *Il viceversa è immediato prendendo* $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *ed* $R = K + 1$.

Esempio

- *L'insieme $B(x_0, y_0; r)$ è (ovviamente!!) limitato per ogni $(x_0, y_0) \in R^2$ e ogni $r > 0$.*
- *Un qualsiasi intorno A di ∞* **non** *è limitato.*
  - *Se A è un intorno di ∞, esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{C}(B(0,0;r)) \subset A$.*
  - *Quindi A contiene tutti i punti $(x,y) \in R^2$ tali che $\|(x,y)\| \geq r$ il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme $A = \{(x,y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ non è limitato, non è chiuso e non è aperto. Vediamo che è illimitato.*
  - *Infatti $(M, 1/M) \in A$ per ogni $M > 0$.*
  - *Inoltre $\|(x, 1/x)\| \geq x$,*

  e quindi $A \not\subset B(0,0;R)$ per ogni $R > 0$.
- *L'insieme $A = \{(x,y) \in R^2 : x \in]-1,1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ è limitato.*
  Infatti, se $(x,y) \in A$, si ha

$$\|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

  Quindi $A \subset B(0,0;K)$ con $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme $B(x_0, y_0; r)$ è (ovviamente!!) limitato per ogni $(x_0, y_0) \in R^2$ e ogni $r > 0$.*
- *Un qualsiasi intorno A di ∞* **non** *è limitato.*
  - *Se A è un intorno di ∞, esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{C}(B(0, 0; r)) \subset A$.*
  - *Quindi A contiene tutti i punti $(x, y) \in R^2$ tali che $\|(x, y)\| \geq r$ il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ non è limitato, non è chiuso e non è aperto. Vediamo che è illimitato.*
  - *Infatti $(M, 1/M) \in A$ per ogni $M > 0$.*
  - *Inoltre $\|(x, 1/x)\| \geq x$,*

  e quindi $A \not\subset B(0, 0; R)$ per ogni $R > 0$.
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x \in]-1, 1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ è limitato.*
  Infatti, se $(x, y) \in A$, si ha

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

  Quindi $A \subset B(0, 0; K)$ con $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è (ovviamente!!) limitato per ogni* $(x_0, y_0) \in R^2$ *e ogni* $r > 0$.
- *Un qualsiasi intorno A di* ∞ **non**è *limitato.*
  - *Se A è un intorno di* ∞, *esiste* $r > 0$ *tale che* $\mathcal{C}(B(0, 0; r)) \subset A$.
  - *Quindi A contiene tutti i punti* $(x, y) \in R^2$ *tali che* $\|(x, y)\| \geq r$ *il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ *non è limitato, non è chiuso e non è aperto. Vediamo che è illimitato.*
  - *Infatti* $(M, 1/M) \in A$ *per ogni* $M > 0$.
  - *Inoltre* $\|(x, 1/x)\| \geq x$,

  e quindi $A \not\subset B(0, 0; R)$ *per ogni* $R > 0$.
- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : x \in]-1, 1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ *è limitato.*
  Infatti, se $(x, y) \in A$, *si ha*

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

Quindi $A \subset B(0, 0; K)$ *con* $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme $B(x_0, y_0; r)$ è (ovviamente!!) limitato per ogni $(x_0, y_0) \in R^2$ e ogni $r > 0$.*
- *Un qualsiasi intorno A di ∞* **non** *è limitato.*
  - *Se A è un intorno di ∞, esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{C}(B(0,0;r)) \subset A$.*
  - *Quindi A contiene tutti i punti $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tali che $\|(x, y)\| \geq r$ il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ non è limitato, non è chiuso e non è aperto. Vediamo che è illimitato.*
  - *Infatti $(M, 1/M) \in A$ per ogni $M > 0$.*
  - *Inoltre $\|(x, 1/x)\| \geq x$,*

  e quindi $A \not\subset B(0,0;R)$ per ogni $R > 0$.
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x \in]-1, 1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ è limitato.*
  Infatti, se $(x, y) \in A$, si ha

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

  Quindi $A \subset B(0,0;K)$ con $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme $B(x_0, y_0; r)$ è (ovviamente!!) limitato per ogni $(x_0, y_0) \in R^2$ e ogni $r > 0$.*
- *Un qualsiasi intorno A di ∞* **non** *è limitato.*
  - *Se A è un intorno di ∞, esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{C}(B(0,0;r)) \subset A$.*
  - *Quindi A contiene tutti i punti $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tali che $\|(x, y)\| \geq r$ il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ non è limitato, non è chiuso e non è aperto. Vediamo che è illimitato.*
  - *Infatti $(M, 1/M) \in A$ per ogni $M > 0$.*
  - *Inoltre $\|(x, 1/x)\| \geq x$,*

  e quindi $A \not\subset B(0, 0; R)$ per ogni $R > 0$.
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x \in]-1, 1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ è limitato. Infatti, se $(x, y) \in A$, si ha*

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

Quindi $A \subset B(0, 0; K)$ con $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è (ovviamente!!) limitato per ogni* $(x_0, y_0) \in R^2$ *e ogni* $r > 0$.
- *Un qualsiasi intorno* A *di* ∞ **non***è limitato.*
  - *Se* A *è un intorno di* ∞, *esiste* $r > 0$ *tale che* $\mathcal{C}(B(0, 0; r)) \subset A$.
  - *Quindi* A *contiene tutti i punti* $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ *tali che* $\|(x, y)\| \geq r$ *il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ *non è limitato, non è chiuso e non è aperto. Vediamo che è illimitato.*
  - *Infatti* $(M, 1/M) \in A$ *per ogni* $M > 0$.
  - *Inoltre* $\|(x, 1/x)\| \geq x$,

  e quindi $A \not\subset B(0, 0; R)$ *per ogni* $R > 0$.
- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : x \in]-1, 1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ *è limitato.* *Infatti, se* $(x, y) \in A$, *si ha*

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

Quindi $A \subset B(0, 0; K)$ *con* $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è (ovviamente!!) limitato per ogni* $(x_0, y_0) \in R^2$ *e ogni* $r > 0$.
- *Un qualsiasi intorno* A *di* ∞ **non***è limitato.*
  - *Se* A *è un intorno di* ∞, *esiste* $r > 0$ *tale che* $\mathcal{C}(B(0, 0; r)) \subset A$.
  - *Quindi* A *contiene tutti i punti* $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ *tali che* $\|(x, y)\| \geq r$ *il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ *non è limitato, non è chiuso e non è aperto.* *Vediamo che è illimitato.*
  - *Infatti* $(M, 1/M) \in A$ *per ogni* $M > 0$.
  - *Inoltre* $\|(x, 1/x)\| \geq x$,

  e quindi $A \not\subset B(0, 0; R)$ *per ogni* $R > 0$.
- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : x \in]-1, 1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ *è limitato.* *Infatti, se* $(x, y) \in A$, *si ha*

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

Quindi $A \subset B(0, 0; K)$ *con* $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme $B(x_0, y_0; r)$ è (ovviamente!!) limitato per ogni $(x_0, y_0) \in R^2$ e ogni $r > 0$.*
- *Un qualsiasi intorno A di ∞* **non** *è limitato.*
  - *Se A è un intorno di ∞, esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{C}(B(0, 0; r)) \subset A$.*
  - *Quindi A contiene tutti i punti $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ tali che $\|(x, y)\| \geq r$ il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ non è limitato, non è chiuso e non è aperto. Vediamo che è illimitato.*
  - *Infatti $(M, 1/M) \in A$ per ogni $M > 0$.*
  - *Inoltre $\|(x, 1/x)\| \geq x$,*

  e quindi $A \not\subset B(0, 0; R)$ per ogni $R > 0$.
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x \in]-1, 1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ è limitato.*
  Infatti, se $(x, y) \in A$, si ha

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

Quindi $A \subset B(0, 0; K)$ con $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è (ovviamente!!) limitato per ogni* $(x_0, y_0) \in R^2$ *e ogni* $r > 0$.
- *Un qualsiasi intorno* A *di* ∞ **non***è limitato.*
  - *Se* A *è un intorno di* ∞, *esiste* $r > 0$ *tale che* $\mathcal{C}(B(0,0;r)) \subset A$.
  - *Quindi* A *contiene tutti i punti* $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ *tali che* $\|(x, y)\| \geq r$ *il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ *non è limitato, non èchiuso e non èaperto. Vediamo che èillimitato.*
  - *Infatti* $(M, 1/M) \in A$ *per ogni* $M > 0$.
  - *Inoltre* $\|(x, 1/x)\| \geq x$,

e quindi $A \not\subset B(0,0;R)$ *per ogni* $R > 0$.

- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : x \in]-1, 1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ *è limitato.* *Infatti, se* $(x, y) \in A$, *si ha*

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

Quindi $A \subset B(0,0;K)$ *con* $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme $B(x_0, y_0; r)$ è (ovviamente!!) limitato per ogni $(x_0, y_0) \in R^2$ e ogni $r > 0$.*
- *Un qualsiasi intorno A di ∞* **non** *è limitato.*
  - *Se A è un intorno di ∞, esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{C}(B(0, 0; r)) \subset A$.*
  - *Quindi A contiene tutti i punti $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tali che $\|(x, y)\| \geq r$ il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ non è limitato, non è chiuso e non è aperto. Vediamo che è illimitato.*
  - *Infatti $(M, 1/M) \in A$ per ogni $M > 0$.*
  - *Inoltre $\|(x, 1/x)\| \geq x$,*

  e quindi $A \not\subset B(0, 0; R)$ per ogni $R > 0$.
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x \in]-1, 1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ è limitato. Infatti, se $(x, y) \in A$, si ha*

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

Quindi $A \subset B(0, 0; K)$ con $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme $B(x_0, y_0; r)$ è (ovviamente!!) limitato per ogni $(x_0, y_0) \in R^2$ e ogni $r > 0$.*
- *Un qualsiasi intorno A di ∞* **non** *è limitato.*
  - *Se A è un intorno di ∞, esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{C}(B(0,0;r)) \subset A$.*
  - *Quindi A contiene tutti i punti $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ tali che $\|(x, y)\| \geq r$ il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ non è limitato, non è chiuso e non è aperto. Vediamo che è illimitato.*
  - *Infatti $(M, 1/M) \in A$ per ogni $M > 0$.*
  - *Inoltre $\|(x, 1/x)\| \geq x$,*

  e quindi $A \not\subset B(0, 0; R)$ per ogni $R > 0$.
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x \in]-1, 1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ è limitato. Infatti, se $(x, y) \in A$, si ha*

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

  Quindi $A \subset B(0, 0; K)$ con $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme $B(x_0, y_0; r)$ è (ovviamente!!) limitato per ogni $(x_0, y_0) \in R^2$ e ogni $r > 0$.*
- *Un qualsiasi intorno A di ∞* **non** *è limitato.*
  - *Se A è un intorno di ∞, esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{C}(B(0,0;r)) \subset A$.*
  - *Quindi A contiene tutti i punti $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ tali che $\|(x, y)\| \geq r$ il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ non è limitato, non è chiuso e non è aperto. Vediamo che è illimitato.*
  - *Infatti $(M, 1/M) \in A$ per ogni $M > 0$.*
  - *Inoltre $\|(x, 1/x)\| \geq x$,*

  e quindi $A \not\subset B(0, 0; R)$ per ogni $R > 0$.
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x \in]-1, 1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ è limitato.*
  Infatti, se $(x, y) \in A$, si ha

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

  Quindi $A \subset B(0, 0; K)$ con $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme $B(x_0, y_0; r)$ è (ovviamente!!) limitato per ogni $(x_0, y_0) \in R^2$ e ogni $r > 0$.*
- *Un qualsiasi intorno A di ∞* **non** *è limitato.*
    - *Se A è un intorno di ∞, esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{C}(B(0,0;r)) \subset A$.*
    - *Quindi A contiene tutti i punti $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ tali che $\|(x, y)\| \geq r$ il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ non è limitato, non è chiuso e non è aperto. Vediamo che è illimitato.*
    - *Infatti $(M, 1/M) \in A$ per ogni $M > 0$.*
    - *Inoltre $\|(x, 1/x)\| \geq x$,*

  e quindi $A \not\subset B(0, 0; R)$ per ogni $R > 0$.
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : x \in]-1, 1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ è limitato.*
  Infatti, se $(x, y) \in A$, si ha

$$\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

Quindi $A \subset B(0, 0; K)$ con $K = \sqrt{2}$.

Esempio

- *L'insieme $B(x_0, y_0; r)$ è (ovviamente!!) limitato per ogni $(x_0, y_0) \in R^2$ e ogni $r > 0$.*
- *Un qualsiasi intorno A di ∞* **non** *è limitato.*
  - *Se A è un intorno di ∞, esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{C}(B(0,0;r)) \subset A$.*
  - *Quindi A contiene tutti i punti $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ tali che $\|(x,y)\| \geq r$ il che ovviamente contraddice la limitatezza.*
- *L'insieme $A = \{(x,y) \in R^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 1\}$ non è limitato, non è chiuso e non è aperto. Vediamo che è illimitato.*
  - *Infatti $(M, 1/M) \in A$ per ogni $M > 0$.*
  - *Inoltre $\|(x, 1/x)\| \geq x$,*

  e quindi $A \not\subset B(0,0;R)$ per ogni $R > 0$.
- *L'insieme $A = \{(x,y) \in R^2 : x \in]-1,1[,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ è limitato.*
  Infatti, se $(x,y) \in A$, si ha

  $$\|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

  Quindi $A \subset B(0,0;K)$ con $K = \sqrt{2}$.

Definizione

- *Un punto* (x_0, y_0) *è detto* `di accumulazione` *per* A *se per ogni* $r > 0$ $(B(x_0, y_0; r) \setminus \{(x_0, y_0)\}) \cap A \neq \emptyset$.
- *Analogamente, si dice che* ∞ *è* `di accumulazione` *per* A *se, per ogni* $R > 0$, $A \cap \mathcal{C}(B(0, 0; R)) \neq \emptyset$.

Osservazione

- *Un punto* $(x_0, y_0) \in R^2$ *di accumulazione per* A *può appartenere ad* A*, ma può anche non appartenere ad* A.
- *Se* (x_0, y_0) *è un punto interno di* A*, allora è di accumulazione per* A.
- *L'insieme* Q *di tutti i punti di accumulazione dell'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è* $Q = B(x_0, y_0; r) \cup \partial B(x_0, y_0; r)$.

Definizione

- *Un punto* (x_0, y_0) *è detto* di accumulazione *per* A *se per ogni* $r > 0$ $(B(x_0, y_0; r) \setminus \{(x_0, y_0)\}) \cap A \neq \emptyset$.
- *Analogamente, si dice che* ∞ *è* di accumulazione *per* A *se, per ogni* $R > 0$, $A \cap \mathcal{C}(B(0, 0; R)) \neq \emptyset$.

Osservazione

- *Un punto* $(x_0, y_0) \in R^2$ *di accumulazione per* A *può appartenere ad* A*, ma può anche non appartenere ad* A.
- *Se* (x_0, y_0) *è un punto interno di* A*, allora è di accumulazione per* A.
- *L'insieme* Q *di tutti i punti di accumulazione dell'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è* $Q = B(x_0, y_0; r) \cup \partial B(x_0, y_0; r)$.

Definizione

- *Un punto* (x_0, y_0) *è detto* di accumulazione *per* A *se per ogni* $r > 0$ $(B(x_0, y_0; r) \setminus \{(x_0, y_0)\}) \cap A \neq \emptyset$.
- *Analogamente, si dice che* ∞ *è* di accumulazione *per* A *se, per ogni* $R > 0$, $A \cap \mathcal{C}(B(0, 0; R)) \neq \emptyset$.

Osservazione

- *Un punto* $(x_0, y_0) \in R^2$ *di accumulazione per* A *può appartenere ad* A*, ma può anche non appartenere ad* A.
- *Se* (x_0, y_0) *è un punto interno di* A*, allora è di accumulazione per* A.
- *L'insieme* Q *di tutti i punti di accumulazione dell'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è* $Q = B(x_0, y_0; r) \cup \partial B(x_0, y_0; r)$.

Definizione

- *Un punto* (x_0, y_0) *è detto* di accumulazione *per* A *se per ogni* $r > 0$ $(B(x_0, y_0; r) \setminus \{(x_0, y_0)\}) \cap A \neq \emptyset$.
- *Analogamente, si dice che* ∞ *è* di accumulazione *per* A *se, per ogni* $R > 0$, $A \cap \mathcal{C}(B(0, 0; R)) \neq \emptyset$.

Osservazione

- *Un punto* $(x_0, y_0) \in R^2$ *di accumulazione per* A *può appartenere ad* A*, ma può anche non appartenere ad* A.
- *Se* (x_0, y_0) *è un punto interno di* A*, allora è di accumulazione per* A.
- *L'insieme* Q *di tutti i punti di accumulazione dell'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è* $Q = B(x_0, y_0; r) \cup \partial B(x_0, y_0; r)$.

Definizione

- *Un punto* (x_0, y_0) *è detto* `di accumulazione` *per* A *se per ogni* $r > 0$ $(B(x_0, y_0; r) \setminus \{(x_0, y_0)\}) \cap A \neq \emptyset$.
- *Analogamente, si dice che* ∞ *è* `di accumulazione` *per* A *se, per ogni* $R > 0$, $A \cap \mathcal{C}(B(0, 0; R)) \neq \emptyset$.

Osservazione

- *Un punto* $(x_0, y_0) \in R^2$ *di accumulazione per* A *può appartenere ad* A*, ma può anche non appartenere ad* A.
- *Se* (x_0, y_0) *è un punto interno di* A*, allora è di accumulazione per* A.
- *L'insieme* Q *di tutti i punti di accumulazione dell'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è* $Q = B(x_0, y_0; r) \cup \partial B(x_0, y_0; r)$.

Esempio

- *Il punto* $(0,2)$ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| < 2\}$, *ma* $(0,2) \notin A$. *Infatti, per ogni* $r > 0$ *l'insieme* $A \cap B(0,2;r) \setminus \{(0,2)\}$ *contiene, ad esempio, il punto* $(0, 2-s)$ *con* $0 < s < \min\{2, r\}$.
  Il punto $(1,3)$ *invece* **non***è di accumulazione per A. Perché?*
- ∞ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le y \le 2/x\}$.
  Infatti per ogni $R > 0$ *il punto* $(2R, 0)$ *appartiene ad* $A \cap \mathcal{C}(B(0,0,R))$.

Definizione

Un punto $(x_0, y_0) \in R^2$ *è* `isolato` *per A se*

- *appartiene ad A e*
- *non è di accumulazione per A.*

Ovvero (x_0, y_0) *è isolato per A se esiste* $r > 0$ *tale che* $B(x_0, y_0; r) \cap A = \{(x_0, y_0)\}$.

Esempio

- *Il punto* $(0,2)$ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| < 2\}$*, ma* $(0,2) \notin A$*. Infatti, per ogni* $r > 0$ *l'insieme* $A \cap B(0,2;r) \setminus \{(0,2)\}$ *contiene, ad esempio, il punto* $(0, 2-s)$ *con* $0 < s < \min\{2, r\}$*.*
  Il punto $(1,3)$ *invece* **non***è di accumulazione per A. Perché?*
- ∞ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le y \le 2/x\}$*.*
  Infatti per ogni $R > 0$ *il punto* $(2R, 0)$ *appartiene ad* $A \cap \mathcal{C}(B(0,0,R))$*.*

Definizione

Un punto $(x_0, y_0) \in R^2$ *è* `isolato` *per A se*

- *appartiene ad A e*
- *non è di accumulazione per A.*

Ovvero (x_0, y_0) *è isolato per A se esiste* $r > 0$ *tale che* $B(x_0, y_0; r) \cap A = \{(x_0, y_0)\}$*.*

Esempio

- *Il punto* $(0,2)$ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| < 2\}$, *ma* $(0,2) \notin A$. *Infatti, per ogni* $r > 0$ *l'insieme* $A \cap B(0,2;r) \setminus \{(0,2)\}$ *contiene, ad esempio, il punto* $(0, 2-s)$ *con* $0 < s < \min\{2, r\}$.
  Il punto $(1,3)$ *invece* **non***è di accumulazione per A. Perché?*
- ∞ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le y \le 2/x\}$.
  Infatti per ogni $R > 0$ *il punto* $(2R, 0)$ *appartiene ad* $A \cap \mathcal{C}(B(0,0,R))$.

Definizione

Un punto $(x_0, y_0) \in R^2$ *è* `isolato` *per A se*

- *appartiene ad A e*
- *non è di accumulazione per A.*

Ovvero (x_0, y_0) *è isolato per A se esiste* $r > 0$ *tale che* $B(x_0, y_0; r) \cap A = \{(x_0, y_0)\}$.

Esempio

- *Il punto* $(0,2)$ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| < 2\}$, *ma* $(0,2) \notin A$. *Infatti, per ogni* $r > 0$ *l'insieme* $A \cap B(0,2;r) \setminus \{(0,2)\}$ *contiene, ad esempio, il punto* $(0, 2-s)$ *con* $0 < s < \min\{2, r\}$.
  Il punto $(1,3)$ *invece* **non***è di accumulazione per A. Perché?*
- ∞ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le y \le 2/x\}$.
  Infatti per ogni $R > 0$ *il punto* $(2R, 0)$ *appartiene ad* $A \cap \mathcal{C}(B(0,0,R))$.

Definizione

Un punto $(x_0, y_0) \in R^2$ è `isolato` *per A se*

- *appartiene ad A e*
- *non è di accumulazione per A.*

Ovvero (x_0, y_0) *è isolato per A se esiste* $r > 0$ *tale che* $B(x_0, y_0; r) \cap A = \{(x_0, y_0)\}$.

Esempio

- *Il punto* $(0,2)$ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| < 2\}$, *ma* $(0,2) \notin A$. *Infatti, per ogni* $r > 0$ *l'insieme* $A \cap B(0,2;r) \setminus \{(0,2)\}$ *contiene, ad esempio, il punto* $(0, 2-s)$ *con* $0 < s < \min\{2, r\}$.
  Il punto $(1,3)$ *invece* **non***è di accumulazione per A. Perché?*
- ∞ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le y \le 2/x\}$. *Infatti per ogni* $R > 0$ *il punto* $(2R, 0)$ *appartiene ad* $A \cap \mathcal{C}(B(0,0,R))$.

Definizione

Un punto $(x_0, y_0) \in R^2$ è `isolato` *per A se*

- *appartiene ad A e*
- *non è di accumulazione per A.*

Ovvero (x_0, y_0) *è isolato per A se esiste* $r > 0$ *tale che* $B(x_0, y_0; r) \cap A = \{(x_0, y_0)\}$.

Esempio

- *Il punto* $(0, 2)$ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : |x| + |y| < 2\}$, *ma* $(0, 2) \notin A$. *Infatti, per ogni* $r > 0$ *l'insieme* $A \cap B(0, 2; r) \setminus \{(0, 2)\}$ *contiene, ad esempio, il punto* $(0, 2 - s)$ *con* $0 < s < \min\{2, r\}$.
  Il punto $(1, 3)$ *invece* **non***è di accumulazione per A. Perché?*
- ∞ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq y \leq 2/x\}$.
  Infatti per ogni $R > 0$ *il punto* $(2R, 0)$ *appartiene ad* $A \cap \mathcal{C}(B(0, 0, R))$.

Definizione

Un punto $(x_0, y_0) \in R^2$ è `isolato` *per A se*

- *appartiene ad A e*
- *non è di accumulazione per A.*

Ovvero (x_0, y_0) *è isolato per A se esiste* $r > 0$ *tale che* $B(x_0, y_0; r) \cap A = \{(x_0, y_0)\}$.

Esempio

- *Il punto* $(0,2)$ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| < 2\}$, *ma* $(0,2) \notin A$. *Infatti, per ogni* $r > 0$ *l'insieme* $A \cap B(0,2;r) \setminus \{(0,2)\}$ *contiene, ad esempio, il punto* $(0, 2-s)$ *con* $0 < s < \min\{2, r\}$.
  Il punto $(1,3)$ *invece* **non***è di accumulazione per A. Perché?*
- ∞ *è di accumulazione per l'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq y \leq 2/x\}$.
  Infatti per ogni $R > 0$ *il punto* $(2R, 0)$ *appartiene ad* $A \cap \mathcal{C}(B(0,0,R))$.

Definizione

Un punto $(x_0, y_0) \in R^2$ è `isolato` *per A se*

- *appartiene ad A e*
- *non è di accumulazione per A.*

Ovvero (x_0, y_0) *è isolato per A se esiste* $r > 0$ *tale che* $B(x_0, y_0; r) \cap A = \{(x_0, y_0)\}$.

Osservazione

Sia $A = B(0,0;1) \cup \{(2,5)\}$*;*

- *il punto* $(2,5)$*, essendo isolato, appartiene alla frontiera di A e quindi alla chiusura di A.*
- *Però* $(2,5)$ *non è di accumulazione (è isolato!).*

Si può provare che l'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A è l'unione dei punti interni di A e dei punti di frontiera che non siano isolati.

Osservazione (Importante)

Le definizioni di punto isolato, di accumulazione, di frontiera, etc. sono del tutto analoghe a quelle introdotte in rz, una volta che si prenda come intorno del punto l'intervallino centrato nel punto.
Il passaggio a dimensione 3 o superiore si fa sostituendo nelle definizioni il cerchio $B(x_0, y_0; r)$ *la sfera di centro nel punto* (x_0, y_0, z_0) *e raggio* r*, cioè l'insieme*

$$B(x_0, y_0, z_0; r) = \{(x, y, z) \in R^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}.$$

Osservazione

Sia $A = B(0,0;1) \cup \{(2,5)\}$*;*

- *il punto* $(2,5)$*, essendo isolato, appartiene alla frontiera di* A *e quindi alla chiusura di* A*.*
- *Però* $(2,5)$ *non è di accumulazione (è isolato!).*

Si può provare che l'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A *è l'unione dei punti interni di* A *e dei punti di frontiera che non siano isolati.*

Osservazione (Importante)

Le definizioni di punto isolato, di accumulazione, di frontiera, etc. sono del tutto analoghe a quelle introdotte in rz, una volta che si prenda come intorno del punto l'intervallino centrato nel punto.
Il passaggio a dimensione 3 *o superiore si fa sostituendo nelle definizioni il cerchio* $B(x_0, y_0; r)$ *la sfera di centro nel punto* (x_0, y_0, z_0) *e raggio* r*, cioè l'insieme*

$$B(x_0, y_0, z_0; r) = \{(x, y, z) \in R^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}.$$

Osservazione

Sia $A = B(0,0;1) \cup \{(2,5)\}$;

- *il punto* $(2,5)$, *essendo isolato, appartiene alla frontiera di* A *e quindi alla chiusura di* A.
- *Però* $(2,5)$ *non è di accumulazione (è isolato!).*

Si può provare che l'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A è l'unione dei punti interni di A e dei punti di frontiera che non siano isolati.

Osservazione (Importante)

Le definizioni di punto isolato, di accumulazione, di frontiera, etc. sono del tutto analoghe a quelle introdotte in rz, una volta che si prenda come intorno del punto l'intervallino centrato nel punto.
Il passaggio a dimensione 3 o superiore si fa sostituendo nelle definizioni il cerchio $B(x_0, y_0; r)$ *la sfera di centro nel punto* (x_0, y_0, z_0) *e raggio* r, *cioè l'insieme*

$$B(x_0, y_0, z_0; r) = \{(x, y, z) \in R^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}.$$

Osservazione

Sia $A = B(0,0;1) \cup \{(2,5)\}$;

- *il punto* $(2,5)$, *essendo isolato, appartiene alla frontiera di* A *e quindi alla chiusura di* A.
- *Però* $(2,5)$ *non è di accumulazione (è isolato!).*

Si può provare che l'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A *è l'unione dei punti interni di* A *e dei punti di frontiera che non siano isolati.*

Osservazione (Importante)

Le definizioni di punto isolato, di accumulazione, di frontiera, etc. sono del tutto analoghe a quelle introdotte in rz, una volta che si prenda come intorno del punto l'intervallino centrato nel punto.

Il passaggio a dimensione 3 o superiore si fa sostituendo nelle definizioni il cerchio $B(x_0, y_0; r)$ *la sfera di centro nel punto* (x_0, y_0, z_0) *e raggio* r, *cioè l'insieme*

$$B(x_0, y_0, z_0; r) = \{(x,y,z) \in R^3 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < r^2\}.$$

Osservazione

Sia $A = B(0,0;1) \cup \{(2,5)\}$*;*

- *il punto* $(2,5)$*, essendo isolato, appartiene alla frontiera di* A *e quindi alla chiusura di* A*.*
- *Però* $(2,5)$ *non è di accumulazione (è isolato!).*

Si può provare che l'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A *è l'unione dei punti interni di* A *e dei punti di frontiera che non siano isolati.*

Osservazione (Importante)

Le definizioni di punto isolato, di accumulazione, di frontiera, etc. sono del tutto analoghe a quelle introdotte in rz, una volta che si prenda come intorno del punto l'intervallino centrato nel punto.

Il passaggio a dimensione 3 o superiore si fa sostituendo nelle definizioni il cerchio $B(x_0, y_0; r)$ *la sfera di centro nel punto* (x_0, y_0, z_0) *e raggio* r*, cioè l'insieme*

$$B(x_0, y_0, z_0; r) = \{(x, y, z) \in R^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}.$$

Osservazione

Sia $A = B(0,0;1) \cup \{(2,5)\}$*;*

- *il punto* $(2,5)$*, essendo isolato, appartiene alla frontiera di* A *e quindi alla chiusura di* A*.*
- *Però* $(2,5)$ *non è di accumulazione (è isolato!).*

Si può provare che l'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A *è l'unione dei punti interni di* A *e dei punti di frontiera che non siano isolati.*

Osservazione (Importante)

Le definizioni di punto isolato, di accumulazione, di frontiera, etc. sono del tutto analoghe a quelle introdotte in rz, una volta che si prenda come intorno del punto l'intervallino centrato nel punto.

Il passaggio a dimensione 3 o superiore si fa sostituendo nelle definizioni il cerchio $B(x_0, y_0; r)$ *la sfera di centro nel punto* (x_0, y_0, z_0) *e raggio* r*, cioè l'insieme*

$$B(x_0, y_0, z_0; r) = \{(x,y,z) \in R^3 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < r^2\}.$$

Definizione

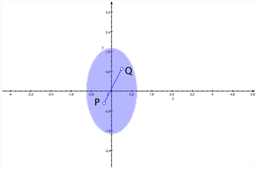
Un insieme A è detto connesso *se,*

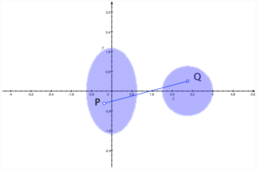
- *fissati comunque* $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in A$,
- *esiste* $\varphi : [a, b] \to A$ *continua tale che* $\varphi(a) = (x_0, y_0)$ *e* $\varphi(b) = (x_1, y_1)$

Osservazione

La definizione di connesso recita che per ogni coppia di punti $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in A$ *esiste una curva continua con supporto tutto contenuto in A avente punto iniziale* (x_0, y_0) *e punto finale* (x_1, y_1).

Vediamo un esempio di insieme connesso (l'ellisse) e di insieme non connesso (unione disgiunta di un'ellisse e di un cerchio).





Definizione

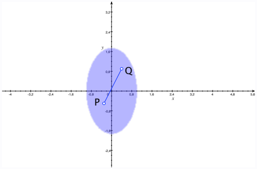
Un insieme A è detto connesso *se,*

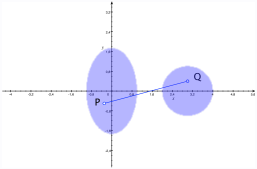
- *fissati comunque* (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in A$,
- *esiste* $\varphi : [a, b] \to A$ *continua tale che* $\varphi(a) = (x_0, y_0)$ *e* $\varphi(b) = (x_1, y_1)$

Osservazione

La definizione di connesso recita che per ogni coppia di punti (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in A$ *esiste una curva continua con supporto tutto contenuto in A avente punto iniziale* (x_0, y_0) *e punto finale* (x_1, y_1).

Vediamo un esempio di insieme connesso (l'ellisse) e di insieme non connesso (unione disgiunta di un'ellisse e di un cerchio).





Definizione

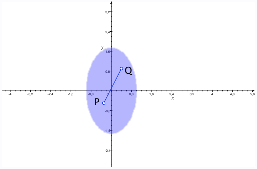
Un insieme A è detto connesso *se,*

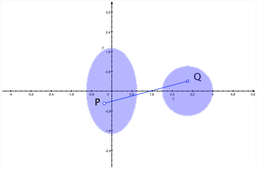
- *fissati comunque* (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in A$,
- *esiste* $\varphi : [a, b] \to A$ *continua tale che* $\varphi(a) = (x_0, y_0)$ *e* $\varphi(b) = (x_1, y_1)$

Osservazione

La definizione di connesso recita che per ogni coppia di punti (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in A$ *esiste una curva continua con supporto tutto contenuto in A avente punto iniziale* (x_0, y_0) *e punto finale* (x_1, y_1).

Vediamo un esempio di insieme connesso (l'ellisse) e di insieme non connesso (unione disgiunta di un'ellisse e di un cerchio).





Definizione

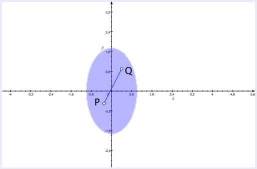
Un insieme A è detto connesso *se,*

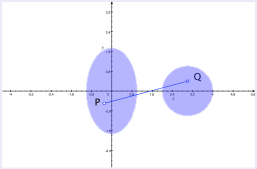
- *fissati comunque (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in A$,*
- *esiste $\varphi : [a, b] \to A$ continua tale che $\varphi(a) = (x_0, y_0)$ e $\varphi(b) = (x_1, y_1)$*

Osservazione

La definizione di connesso recita che per ogni coppia di punti (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in A$ esiste una curva continua con supporto tutto contenuto in A avente punto iniziale (x_0, y_0) e punto finale (x_1, y_1).

Vediamo un esempio di insieme connesso (l'ellisse) e di insieme non connesso (unione disgiunta di un'ellisse e di un cerchio).





Esercizio

- *In R gli insiemi connessi non banali (cioè non ridotti ad un solo punto) sono tutti e soli gli intervalli.*
- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : 1 - x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ *è connesso.*

Esempio

L'insieme $A = B(0, 0; 1) \cup B(4, 0; 1)$ **non***è connesso.*
Infatti, presi $(0, 0)$ *e* $(2, 0)$*, son esiste nessuna curva che li congiunga avente sostegno contenuto in A.*

- *per assurdo, esista* $\varphi : [a, b] \to A$ *cosifatta,*
- *la sua prima componente,* $\varphi_1 : [a, b] \to R$ *sarebbe una funzione continua tale che* $\varphi_1(a) = 0$ *e* $\varphi_1(b) = 4$.
- *Per il Teorema dei valori intermedi,* $\varphi_1([a, b]) \supseteq [0, 4]$*, cioè esiste* $t \in]a, b[$ *tale che* $\varphi_1(t) = 2$.
- *Ma A non contiene alcun punto con ascissa 2. Abbiamo quindi ottenuto l'assurdo.*

Esercizio

- *In R gli insiemi connessi non banali (cioè non ridotti ad un solo punto) sono tutti e soli gli intervalli.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : 1 - x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ è connesso.*

Esempio

L'insieme $A = B(0,0;1) \cup B(4,0;1)$ **non***è connesso.*
Infatti, presi $(0,0)$ e $(2,0)$, son esiste nessuna curva che li congiunga avente sostegno contenuto in A.

- *per assurdo, esista $\varphi : [a,b] \to A$ cosifatta,*
- *la sua prima componente, $\varphi_1 : [a,b] \to R$ sarebbe una funzione continua tale che $\varphi_1(a) = 0$ e $\varphi_1(b) = 4$.*
- *Per il Teorema dei valori intermedi, $\varphi_1([a,b]) \supseteq [0,4]$, cioè esiste $t \in]a,b[$ tale che $\varphi_1(t) = 2$.*
- *Ma A non contiene alcun punto con ascissa 2. Abbiamo quindi ottenuto l'assurdo.*

Esercizio

- *In R gli insiemi connessi non banali (cioè non ridotti ad un solo punto) sono tutti e soli gli intervalli.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : 1 - x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ è connesso.*

Esempio

L'insieme $A = B(0, 0; 1) \cup B(4, 0; 1)$ **non***è connesso.*
Infatti, presi $(0, 0)$ e $(2, 0)$, son esiste nessuna curva che li congiunga avente sostegno contenuto in A.

- *per assurdo, esista $\varphi : [a, b] \to A$ cosifatta,*
- *la sua prima componente, $\varphi_1 : [a, b] \to R$ sarebbe una funzione continua tale che $\varphi_1(a) = 0$ e $\varphi_1(b) = 4$.*
- *Per il Teorema dei valori intermedi, $\varphi_1([a, b]) \supseteq [0, 4]$, cioè esiste $t \in]a, b[$ tale che $\varphi_1(t) = 2$.*
- *Ma A non contiene alcun punto con ascissa 2. Abbiamo quindi ottenuto l'assurdo.*

Esercizio

- *In R gli insiemi connessi non banali (cioè non ridotti ad un solo punto) sono tutti e soli gli intervalli.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : 1 - x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ è connesso.*

Esempio

L'insieme $A = B(0, 0; 1) \cup B(4, 0; 1)$ **non**è *connesso.*
Infatti, presi $(0, 0)$ e $(2, 0)$, son esiste nessuna curva che li congiunga avente sostegno contenuto in A.

- *per assurdo, esista $\varphi : [a, b] \to A$ cosifatta,*
- *la sua prima componente, $\varphi_1 : [a, b] \to R$ sarebbe una funzione continua tale che $\varphi_1(a) = 0$ e $\varphi_1(b) = 4$.*
- *Per il Teorema dei valori intermedi, $\varphi_1([a, b]) \supseteq [0, 4]$, cioè esiste $t \in]a, b[$ tale che $\varphi_1(t) = 2$.*
- *Ma A non contiene alcun punto con ascissa 2. Abbiamo quindi ottenuto l'assurdo.*

Esercizio

- *In R gli insiemi connessi non banali (cioè non ridotti ad un solo punto) sono tutti e soli gli intervalli.*
- *L'insieme* $A = \{(x, y) \in R^2 : 1 - x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ *è connesso.*

Esempio

L'insieme $A = B(0, 0; 1) \cup B(4, 0; 1)$ **non***è connesso.*
Infatti, presi $(0, 0)$ *e* $(2, 0)$*, son esiste nessuna curva che li congiunga avente sostegno contenuto in* A*.*

- *per assurdo, esista* $\varphi : [a, b] \to A$ *cosifatta,*
- *la sua prima componente,* $\varphi_1 : [a, b] \to R$ *sarebbe una funzione continua tale che* $\varphi_1(a) = 0$ *e* $\varphi_1(b) = 4$*.*
- *Per il Teorema dei valori intermedi,* $\varphi_1([a, b]) \supseteq [0, 4]$*, cioè esiste* $t \in]a, b[$ *tale che* $\varphi_1(t) = 2$*.*
- *Ma* A *non contiene alcun punto con ascissa 2. Abbiamo quindi ottenuto l'assurdo.*

Esercizio

- *In R gli insiemi connessi non banali (cioè non ridotti ad un solo punto) sono tutti e soli gli intervalli.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : 1 - x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ è connesso.*

Esempio

L'insieme $A = B(0, 0; 1) \cup B(4, 0; 1)$ **non***è connesso.*
Infatti, presi $(0, 0)$ e $(2, 0)$, son esiste nessuna curva che li congiunga avente sostegno contenuto in A.

- *per assurdo, esista $\varphi : [a, b] \to A$ cosifatta,*
- *la sua prima componente, $\varphi_1 : [a, b] \to R$ sarebbe una funzione continua tale che $\varphi_1(a) = 0$ e $\varphi_1(b) = 4$.*
- *Per il Teorema dei valori intermedi, $\varphi_1([a, b]) \supseteq [0, 4]$, cioè esiste $t \in]a, b[$ tale che $\varphi_1(t) = 2$.*
- *Ma A non contiene alcun punto con ascissa 2. Abbiamo quindi ottenuto l'assurdo.*

Esercizio

- *In R gli insiemi connessi non banali (cioè non ridotti ad un solo punto) sono tutti e soli gli intervalli.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : 1 - x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ è connesso.*

Esempio

L'insieme $A = B(0, 0; 1) \cup B(4, 0; 1)$ **non***è connesso.*
Infatti, presi $(0, 0)$ e $(2, 0)$, son esiste nessuna curva che li congiunga avente sostegno contenuto in A.

- *per assurdo, esista $\varphi : [a, b] \to A$ cosifatta,*
- *la sua prima componente, $\varphi_1 : [a, b] \to R$ sarebbe una funzione continua tale che $\varphi_1(a) = 0$ e $\varphi_1(b) = 4$.*
- *Per il Teorema dei valori intermedi, $\varphi_1([a, b]) \supseteq [0, 4]$, cioè esiste $t \in]a, b[$ tale che $\varphi_1(t) = 2$.*
- *Ma A non contiene alcun punto con ascissa 2. Abbiamo quindi ottenuto l'assurdo.*

Esercizio

- *In R gli insiemi connessi non banali (cioè non ridotti ad un solo punto) sono tutti e soli gli intervalli.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : 1 - x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ è connesso.*

Esempio

L'insieme $A = B(0, 0; 1) \cup B(4, 0; 1)$ **non***è connesso.*
Infatti, presi $(0, 0)$ e $(2, 0)$, son esiste nessuna curva che li congiunga avente sostegno contenuto in A.

- *per assurdo, esista $\varphi : [a, b] \to A$ cosifatta,*
- *la sua prima componente, $\varphi_1 : [a, b] \to R$ sarebbe una funzione continua tale che $\varphi_1(a) = 0$ e $\varphi_1(b) = 4$.*
- *Per il Teorema dei valori intermedi, $\varphi_1([a, b]) \supseteq [0, 4]$, cioè esiste $t \in]a, b[$ tale che $\varphi_1(t) = 2$.*
- *Ma A non contiene alcun punto con ascissa 2. Abbiamo quindi ottenuto l'assurdo.*

Esercizio

- *In R gli insiemi connessi non banali (cioè non ridotti ad un solo punto) sono tutti e soli gli intervalli.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : 1 - x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ è connesso.*

Esempio

L'insieme $A = B(0, 0; 1) \cup B(4, 0; 1)$ **non***è connesso.*
Infatti, presi $(0, 0)$ e $(2, 0)$, son esiste nessuna curva che li congiunga avente sostegno contenuto in A.

- *per assurdo, esista $\varphi : [a, b] \to A$ cosifatta,*
- *la sua prima componente, $\varphi_1 : [a, b] \to R$ sarebbe una funzione continua tale che $\varphi_1(a) = 0$ e $\varphi_1(b) = 4$.*
- *Per il Teorema dei valori intermedi, $\varphi_1([a, b]) \supseteq [0, 4]$, cioè esiste $t \in]a, b[$ tale che $\varphi_1(t) = 2$.*
- *Ma A non contiene alcun punto con ascissa 2. Abbiamo quindi ottenuto l'assurdo.*

Esercizio

- *In R gli insiemi connessi non banali (cioè non ridotti ad un solo punto) sono tutti e soli gli intervalli.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : 1 - x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ è connesso.*

Esempio

L'insieme $A = B(0, 0; 1) \cup B(4, 0; 1)$ **non***è connesso.*
Infatti, presi $(0, 0)$ e $(2, 0)$, son esiste nessuna curva che li congiunga avente sostegno contenuto in A.

- *per assurdo, esista $\varphi : [a, b] \to A$ cosifatta,*
- *la sua prima componente, $\varphi_1 : [a, b] \to R$ sarebbe una funzione continua tale che $\varphi_1(a) = 0$ e $\varphi_1(b) = 4$.*
- *Per il Teorema dei valori intermedi, $\varphi_1([a, b]) \supseteq [0, 4]$, cioè esiste $t \in]a, b[$ tale che $\varphi_1(t) = 2$.*
- *Ma A non contiene alcun punto con ascissa 2. Abbiamo quindi ottenuto l'assurdo.*

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* convesso *se, presi due qualsiasi* $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1) \in A$,

$$tP_0 + (1-t)P_1 \in A \qquad \forall t \in [0,1]$$

Osservazione

Un insieme è convesso se, presi due punti P_0 *e* P_1, *il segmento che congiunge* P_0 *con* P_1 *è tutto contenuto in* A.

Esempio

- *Il generico cerchio* $B(x_0, y_0; r)$ *è un esempio di insieme convesso,*
- *una corona circolare* non *è un insieme convesso (ma è un connesso).*
- *L'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : x, y > 0,\ xy > 1\}$ *è convesso. (esercizio risolto sul testo)*

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ è detto convesso *se, presi due qualsiasi $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1) \in A$,*

$$tP_0 + (1-t)P_1 \in A \qquad \forall t \in [0,1]$$

Osservazione

Un insieme è convesso se, presi due punti P_0 e P_1, il segmento che congiunge P_0 con P_1 è tutto contenuto in A.

Esempio

- *Il generico cerchio $B(x_0, y_0; r)$ è un esempio di insieme convesso,*
- *una corona circolare* non *è un insieme convesso (ma è un connesso).*
- *L'insieme $A = \{(x,y) \in R^2 : x, y > 0,\ xy > 1\}$ è convesso. (esercizio risolto sul testo)*

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ è detto convesso *se, presi due qualsiasi $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1) \in A$,*

$$tP_0 + (1-t)P_1 \in A \qquad \forall t \in [0,1]$$

Osservazione

Un insieme è convesso se, presi due punti P_0 e P_1, il segmento che congiunge P_0 con P_1 è tutto contenuto in A.

Esempio

- *Il generico cerchio $B(x_0, y_0; r)$ è un esempio di insieme convesso,*
- *una corona circolare* non *è un insieme convesso (ma è un connesso).*
- *L'insieme $A = \{(x,y) \in R^2 : x, y > 0,\ xy > 1\}$ è convesso. (esercizio risolto sul testo)*

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* convesso *se, presi due qualsiasi* $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1) \in A$,

$$tP_0 + (1-t)P_1 \in A \qquad \forall t \in [0,1]$$

Osservazione

Un insieme è convesso se, presi due punti P_0 *e* P_1*, il segmento che congiunge* P_0 *con* P_1 *è tutto contenuto in* A.

Esempio

- *Il generico cerchio* $B(x_0, y_0; r)$ *è un esempio di insieme convesso,*
- *una corona circolare* non *è un insieme convesso (ma è un connesso).*
- *L'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : x, y > 0,\ xy > 1\}$ *è convesso. (esercizio risolto sul testo)*

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ *è detto* convesso *se, presi due qualsiasi* $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1) \in A$,

$$tP_0 + (1-t)P_1 \in A \qquad \forall t \in [0,1]$$

Osservazione

Un insieme è convesso se, presi due punti P_0 *e* P_1*, il segmento che congiunge* P_0 *con* P_1 *è tutto contenuto in* A.

Esempio

- *Il generico cerchio* $B(x_0, y_0; r)$ *è un esempio di insieme convesso,*
- *una corona circolare* non *è un insieme convesso (ma è un connesso).*
- *L'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : x, y > 0,\ xy > 1\}$ *è convesso. (esercizio risolto sul testo)*

Osservazione

- *In R un insieme*

$$A \text{ connesso} \iff A \text{ convesso} \iff A \text{ intervallo}.$$

- *In R^2 (e più in generale in R^n)*

$$A \text{ convesso} \Longrightarrow A \text{ connesso},$$

ma, in generale, non vale il viceversa. Si pensi ad esempio ad una corona circolare

Osservazione

- *In* R *un insieme*

$$A \text{ connesso} \Longleftrightarrow A \text{ convesso} \Longleftrightarrow A \text{ intervallo}.$$

- *In* R^2 *(e più in generale in* R^n*)*

$$A \text{ convesso} \Longrightarrow A \text{ connesso},$$

ma, in generale, non vale il viceversa. Si pensi ad esempio ad una corona circolare

Insiemi di livello

Definizione

Sia A un sottoinsieme di R^2. Una `funzione` *$f : A \to R$ è una "legge" che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo numero reale. L'insieme A è detto* `dominio` *di f e, a volte, denotato con $\mathrm{dom}(f)$.*

Osservazione (Importante)

Spesso di una funzione viene data solo la legge $f(x, y)$ e non il dominio. Si intende che il dominio è il più grande possibile, ovvero il `dominio massimale`

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \; f(x, y) \in R\}.$$

Esempio

- *Data $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$, il dominio massimale di f è l'insieme*

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \; x^2 + y^2 < 1\}.$$

- *Data $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2}$, il dominio massimale di f è l'insieme*

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \; (x - 1)^2 + y^2 \geq 3\}.$$

Insiemi di livello

Definizione

Sia A un sottoinsieme di R^2. Una `funzione` *$f : A \to R$ è una "legge" che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo numero reale. L'insieme A è detto* `dominio` *di f e, a volte, denotato con $\mathrm{dom}(f)$.*

Osservazione (Importante)

Spesso di una funzione viene data solo la legge $f(x, y)$ e non il dominio. Si intende che il dominio è il più grande possibile, ovvero il `dominio massimale`

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \; f(x, y) \in R\}.$$

Esempio

- *Data $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$, il dominio massimale di f è l'insieme*

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \; x^2 + y^2 < 1\}.$$

- *Data $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2}$, il dominio massimale di f è l'insieme*

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \; (x - 1)^2 + y^2 \geq 3\}.$$

Insiemi di livello

Definizione

Sia A un sottoinsieme di R^2. Una `funzione` *$f : A \to R$ è una "legge" che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo numero reale. L'insieme A è detto* `dominio` *di f e, a volte, denotato con $\mathrm{dom}(f)$.*

Osservazione (Importante)

Spesso di una funzione viene data solo la legge $f(x, y)$ e non il dominio. Si intende che il dominio è il più grande possibile, ovvero il `dominio massimale`

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \ f(x, y) \in R\}.$$

Esempio

- *Data $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$, il dominio massimale di f è l'insieme*

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}.$$

- *Data $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2}$, il dominio massimale di f è l'insieme*

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \ (x - 1)^2 + y^2 \geq 3\}.$$

Insiemi di livello

Definizione

Sia A un sottoinsieme di R^2. Una `funzione` *$f : A \to R$ è una "legge" che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo numero reale. L'insieme A è detto* `dominio` *di f e, a volte, denotato con $\mathrm{dom}(f)$.*

Osservazione (Importante)

Spesso di una funzione viene data solo la legge $f(x, y)$ e non il dominio. Si intende che il dominio è il più grande possibile, ovvero il `dominio massimale`

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \; f(x, y) \in R\}.$$

Esempio

- *Data $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$, il dominio massimale di f è l'insieme*

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \; x^2 + y^2 < 1\}.$$

- *Data $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2}$, il dominio massimale di f è l'insieme*

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \; (x - 1)^2 + y^2 \geq 3\}.$$

Insiemi di livello

Definizione

Sia A un sottoinsieme di R^2. Una `funzione` *$f : A \to R$ è una "legge" che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo numero reale. L'insieme A è detto* `dominio` *di f e, a volte, denotato con $\mathrm{dom}(f)$.*

Osservazione (Importante)

Spesso di una funzione viene data solo la legge $f(x, y)$ e non il dominio. Si intende che il dominio è il più grande possibile, ovvero il `dominio massimale`

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \ f(x, y) \in R\}.$$

Esempio

- *Data $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$, il dominio massimale di f è l'insieme*

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}.$$

- *Data $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2}$, il dominio massimale di f è l'insieme*

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in R^2 : \ (x - 1)^2 + y^2 \geq 3\}.$$

Insiemi di livello

Definizione

Sia A un sottoinsieme di R^2. Una `funzione` *$f : A \to R$ è una "legge" che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo numero reale. L'insieme A è detto* `dominio` *di f e, a volte, denotato con $\mathrm{dom}(f)$.*

Osservazione (Importante)

Spesso di una funzione viene data solo la legge $f(x,y)$ e non il dominio. Si intende che il dominio è il più grande possibile, ovvero il `dominio massimale`

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in R^2 : \; f(x,y) \in R\}.$$

Esempio

- *Data $f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2)$, il dominio massimale di f è l'insieme*

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in R^2 : \; x^2 + y^2 < 1\}.$$

- *Data $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2}$, il dominio massimale di f è l'insieme*

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in R^2 : \; (x-1)^2 + y^2 \geq 3\}.$$

Definizione (MOLTO IMPORTANTE)

Sia data una funzione $f : A \to R$; un punto $(x_0, y_0) \in A$ è detto

- **punto di minimo relativo interno** *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$. *Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* mimimo relativo interno di f.
- punto di minimo assoluto *se* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$. *Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* minimo assoluto di f in A;
- punto di massimo relativo interno *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$. *Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* massimo relativo interno di f.
- punto di massimo assoluto *se* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$. *Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* massimo assoluto di f in A;

Definizione (MOLTO IMPORTANTE)

Sia data una funzione $f : A \to R$*; un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *è detto*

- `punto di minimo relativo interno` *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `mimimo relativo interno di` f.
- `punto di minimo assoluto` *se* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `minimo assoluto di` f `in` A*;*
- `punto di massimo relativo interno` *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `massimo relativo interno di` f.
- `punto di massimo assoluto` *se* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `massimo assoluto di` f `in` A*;*

Definizione (MOLTO IMPORTANTE)

Sia data una funzione $f : A \to R$*; un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *è detto*

- **punto di minimo relativo interno** *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* **mimimo relativo interno di** f.
- **punto di minimo assoluto** *se* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* minimo assoluto di f in A;
- punto di massimo relativo interno *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* massimo relativo interno di f.
- punto di massimo assoluto *se* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* massimo assoluto di f in A;

Definizione (MOLTO IMPORTANTE)

Sia data una funzione $f : A \to R$*; un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *è detto*

- `punto di minimo relativo interno` *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$. *Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `mimimo relativo interno di` f.
- `punto di minimo assoluto` *se* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$. *Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `minimo assoluto di` f `in` A;
- `punto di massimo relativo interno` *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$. *Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `massimo relativo interno di` f.
- `punto di massimo assoluto` *se* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$. *Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `massimo assoluto di` f `in` A;

Definizione (MOLTO IMPORTANTE)

Sia data una funzione $f : A \to R$*; un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *è detto*

- `punto di minimo relativo interno` *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$. *Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `mimimo relativo interno di` f.
- `punto di minimo assoluto` *se* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$. *Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `minimo assoluto di` f `in` A;
- `punto di massimo relativo interno` *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$. *Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `massimo relativo interno di` f.
- `punto di massimo assoluto` *se* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$. *Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `massimo assoluto di` f `in` A;

Definizione (MOLTO IMPORTANTE)

Sia data una funzione $f : A \to R$*; un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *è detto*

- punto di minimo relativo interno *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* mimimo relativo interno di f.
- punto di minimo assoluto *se* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* minimo assoluto di f in A*;*
- punto di massimo relativo interno *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* massimo relativo interno di f.
- punto di massimo assoluto *se* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* massimo assoluto di f in A*;*

Definizione (MOLTO IMPORTANTE)

Sia data una funzione $f : A \to R$*; un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *è detto*

- `punto di minimo relativo interno` *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `mimimo relativo interno di` f.
- `punto di minimo assoluto` *se* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `minimo assoluto di` f `in` A*;*
- `punto di massimo relativo interno` *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `massimo relativo interno di` f.
- `punto di massimo assoluto` *se* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `massimo assoluto di` f `in` A*;*

Definizione (MOLTO IMPORTANTE)

Sia data una funzione $f : A \to R$*; un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *è detto*

- `punto di minimo relativo interno` *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `mimimo relativo interno di` f.
- `punto di minimo assoluto` *se* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `minimo assoluto di` f `in` A;
- `punto di massimo relativo interno` *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `massimo relativo interno di` f.
- `punto di massimo assoluto` *se* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `massimo assoluto di` f `in` A;

Definizione (MOLTO IMPORTANTE)

Sia data una funzione $f : A \to R$*; un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *è detto*

- `punto di minimo relativo interno` *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `mimimo relativo interno di` f.
- `punto di minimo assoluto` *se* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `minimo assoluto di` f `in` A;
- `punto di massimo relativo interno` *se esiste* $B(x_0, y_0; R) \subseteq A$ *tale che* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in B(x_0, y_0; R)$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `massimo relativo interno di` f.
- `punto di massimo assoluto` *se* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *per ogni* $(x, y) \in A$*. Il valore* $f(x_0, y_0)$ *è detto* `massimo assoluto di` f `in` A;

Esempio

La funzione $f : \overline{B(0,0;5)} \to R$ *definita da* $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4$ *per ogni* $(x,y) \in \overline{B(0,0;5)}$,

- *ha un punto di minimo assoluto in* $(0,0)$ *con* $f(0,0) = 4$.
- *Inoltre* $(0,0)$ *è anche un punto di minimo relativo interno.*
- *Il punto* $(0,5)$ *è un punto di massimo assoluto per* f *su* $\overline{B(0,0;5)}$ *con* $f(0,5) = 29$,
- $(0,5)$ *non è punto di massimo relativo interno per* f *su* $\overline{B(0,0;5)}$.

Osservazione

Nell'esercizio precedente, la funzione f *ha* $(0,0)$ *come "punto di minimo", ma ha "minimo"* $f(0,0) = 4$. *Bisogna fare attenzione a non confondere le due cose.*

Esempio

La funzione $f : \overline{B(0,0;5)} \to R$ *definita da* $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4$ *per ogni* $(x,y) \in \overline{B(0,0;5)}$,

- *ha un punto di minimo assoluto in* $(0,0)$ *con* $f(0,0) = 4$.
- *Inoltre* $(0,0)$ *è anche un punto di minimo relativo interno.*
- *Il punto* $(0,5)$ *è un punto di massimo assoluto per* f *su* $\overline{B(0,0;5)}$ *con* $f(0,5) = 29$,
- $(0,5)$ *non è punto di massimo relativo interno per* f *su* $\overline{B(0,0;5)}$.

Osservazione

Nell'esercizio precedente, la funzione f *ha* $(0,0)$ *come "punto di minimo", ma ha "minimo"* $f(0,0) = 4$. *Bisogna fare attenzione a non confondere le due cose.*

Esempio

La funzione $f : \overline{B(0,0;5)} \to R$ *definita da* $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4$ *per ogni* $(x,y) \in \overline{B(0,0;5)}$,

- *ha un punto di minimo assoluto in* $(0,0)$ *con* $f(0,0) = 4$.
- *Inoltre* $(0,0)$ *è anche un punto di minimo relativo interno.*
- *Il punto* $(0,5)$ *è un punto di massimo assoluto per* f *su* $\overline{B(0,0;5)}$ *con* $f(0,5) = 29$,
- $(0,5)$ *non è punto di massimo relativo interno per* f *su* $\overline{B(0,0;5)}$.

Osservazione

Nell'esercizio precedente, la funzione f *ha* $(0,0)$ *come "punto di minimo", ma ha "minimo"* $f(0,0) = 4$. *Bisogna fare attenzione a non confondere le due cose.*

Esempio

La funzione $f : \overline{B(0,0;5)} \to R$ *definita da* $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4$ *per ogni* $(x,y) \in \overline{B(0,0;5)}$,

- *ha un punto di minimo assoluto in* $(0,0)$ *con* $f(0,0) = 4$.
- *Inoltre* $(0,0)$ *è anche un punto di minimo relativo interno.*
- *Il punto* $(0,5)$ *è un punto di massimo assoluto per* f *su* $\overline{B(0,0;5)}$ *con* $f(0,5) = 29$,
- $(0,5)$ *non è punto di massimo relativo interno per* f *su* $\overline{B(0,0;5)}$.

Osservazione

Nell'esercizio precedente, la funzione f *ha* $(0,0)$ *come "punto di minimo", ma ha "minimo"* $f(0,0) = 4$. *Bisogna fare attenzione a non confondere le due cose.*

Esempio

La funzione $f : \overline{B(0,0;5)} \to R$ *definita da* $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4$ *per ogni* $(x,y) \in \overline{B(0,0;5)}$,

- *ha un punto di minimo assoluto in* $(0,0)$ *con* $f(0,0) = 4$.
- *Inoltre* $(0,0)$ *è anche un punto di minimo relativo interno.*
- *Il punto* $(0,5)$ *è un punto di massimo assoluto per* f *su* $\overline{B(0,0;5)}$ *con* $f(0,5) = 29$,
- $(0,5)$ *non è punto di massimo relativo interno per* f *su* $\overline{B(0,0;5)}$.

Osservazione

Nell'esercizio precedente, la funzione f *ha* $(0,0)$ *come "punto di minimo", ma ha "minimo"* $f(0,0) = 4$. *Bisogna fare attenzione a non confondere le due cose.*

Esempio

La funzione $f : \overline{B(0,0;5)} \to R$ *definita da* $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4$ *per ogni* $(x,y) \in \overline{B(0,0;5)}$,

- *ha un punto di minimo assoluto in* $(0,0)$ *con* $f(0,0) = 4$.
- *Inoltre* $(0,0)$ *è anche un punto di minimo relativo interno.*
- *Il punto* $(0,5)$ *è un punto di massimo assoluto per* f *su* $\overline{B(0,0;5)}$ *con* $f(0,5) = 29$,
- $(0,5)$ *non è punto di massimo relativo interno per* f *su* $\overline{B(0,0;5)}$.

Osservazione

Nell'esercizio precedente, la funzione f *ha* $(0,0)$ *come "punto di minimo", ma ha "minimo"* $f(0,0) = 4$. *Bisogna fare attenzione a non confondere le due cose.*

Definizione

Sia $f : A \subseteq R^2 \to R$ una funzione data. Si definisce

- `Sopralivello k di f` *l'insieme*

$$\{f \geq k\} = \{(x,y) \in A : \; f(x,y) \geq k\};$$

- `Sottolivello k di f` *l'insieme*

$$\{f \leq k\} = \{(x,y) \in A : \; f(x,y) \leq k\};$$

- `Insieme di livello k di f` *l'insieme*

$$\{f = k\} = \{(x,y) \in A : \; f(x,y) = k\}.$$

Definizione

Sia $f : A \subseteq R^2 \to R$ *una funzione data. Si definisce*

- `Sopralivello k di f` *l'insieme*

$$\{f \geq k\} = \{(x, y) \in A : \ f(x, y) \geq k\};$$

- `Sottolivello k di f` *l'insieme*

$$\{f \leq k\} = \{(x, y) \in A : \ f(x, y) \leq k\};$$

- `Insieme di livello k di f` *l'insieme*

$$\{f = k\} = \{(x, y) \in A : \ f(x, y) = k\}.$$

Definizione

Sia $f : A \subseteq R^2 \to R$ una funzione data. Si definisce

- `Sopralivello k di f` *l'insieme*

$$\{f \geq k\} = \{(x, y) \in A : \; f(x, y) \geq k\};$$

- `Sottolivello k di f` *l'insieme*

$$\{f \leq k\} = \{(x, y) \in A : \; f(x, y) \leq k\};$$

- `Insieme di livello k di f` *l'insieme*

$$\{f = k\} = \{(x, y) \in A : \; f(x, y) = k\}.$$

Definizione

Sia $f : A \subseteq R^2 \to R$ una funzione data. Si definisce

- `Sopralivello k di f` *l'insieme*

$$\{f \geq k\} = \{(x, y) \in A : \; f(x, y) \geq k\};$$

- `Sottolivello k di f` *l'insieme*

$$\{f \leq k\} = \{(x, y) \in A : \; f(x, y) \leq k\};$$

- `Insieme di livello k di f` *l'insieme*

$$\{f = k\} = \{(x, y) \in A : \; f(x, y) = k\}.$$

Definizione

Sia $f : A \subseteq R^2 \to R$ una funzione data. Si definisce

- Sopralivello k di f *l'insieme*

$$\{f \geq k\} = \{(x, y) \in A : \ f(x, y) \geq k\};$$

- Sottolivello k di f *l'insieme*

$$\{f \leq k\} = \{(x, y) \in A : \ f(x, y) \leq k\};$$

- Insieme di livello k di f *l'insieme*

$$\{f = k\} = \{(x, y) \in A : \ f(x, y) = k\}.$$

Definizione

Sia $f : A \subseteq R^2 \to R$ *una funzione data. Si definisce*

- `Sopralivello k di f` *l'insieme*

$$\{f \geq k\} = \{(x,y) \in A : \ f(x,y) \geq k\};$$

- `Sottolivello k di f` *l'insieme*

$$\{f \leq k\} = \{(x,y) \in A : \ f(x,y) \leq k\};$$

- `Insieme di livello k di f` *l'insieme*

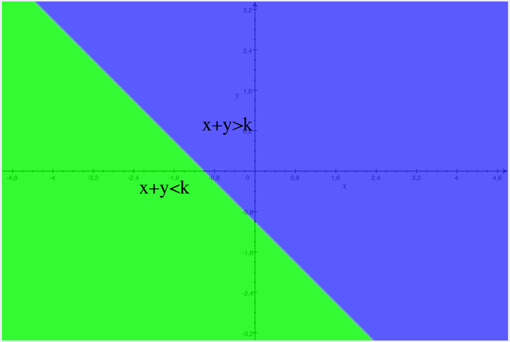
$$\{f = k\} = \{(x,y) \in A : \ f(x,y) = k\}.$$

Esempio

Data la funzione $f : R^2 \to R$*, definita da* $f(x,y) = x + y$*, per ogni* $(x,y) \in R^2$*, si ha che*

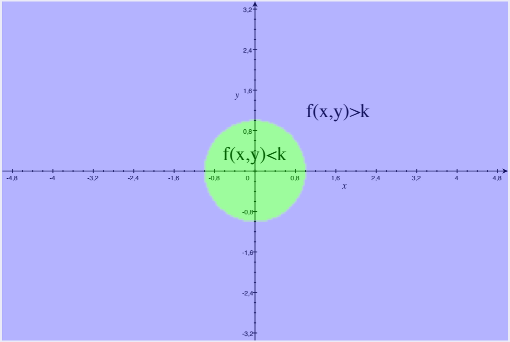
$$\{f \geq k\} = \{(x,y) \in R^2 : \; x + y \geq k\},$$

cioè i sopralivelli sono dei semipiani.



Esempio

Data la funzione $f : R^2 \to R$*, definita da* $f(x,y) = x^2 + y^2$*, per ogni* $(x,y) \in R^2$*, si ha che (quando* $k > 0$*)*

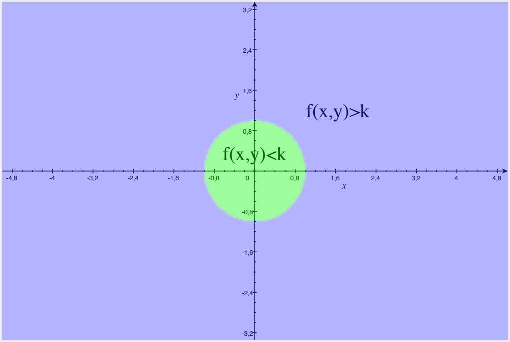


e in particolare

- *se* $k < 0$*, allora* $\{f \leq k\} = \emptyset$;
- *se* $k = 0$*, allora* $\{f \leq 0\} = (0,0)$;
- *se* $k > 0$*, allora* $\{f \leq k\} = \{(x,y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 \leq k\}$*, ovvero i sottolivelli sono dei cerchi centrati nell'origine di raggio* $\sqrt{k}$.

Esempio

Data la funzione $f : R^2 \to R$, *definita da* $f(x,y) = x^2 + y^2$, *per ogni* $(x,y) \in R^2$, *si ha che (quando* $k > 0$*)*

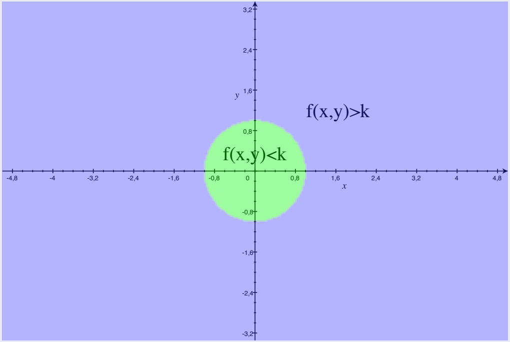


e in particolare

- *se* $k < 0$, *allora* $\{f \leq k\} = \emptyset$;
- *se* $k = 0$, *allora* $\{f \leq 0\} = (0,0)$;
- *se* $k > 0$, *allora* $\{f \leq k\} = \{(x,y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 \leq k\}$, *ovvero i sottolivelli sono dei cerchi centrati nell'origine di raggio* $\sqrt{k}$.

Esempio

Data la funzione $f : R^2 \to R$, *definita da* $f(x,y) = x^2 + y^2$, *per ogni* $(x,y) \in R^2$, *si ha che (quando* $k > 0$*)*

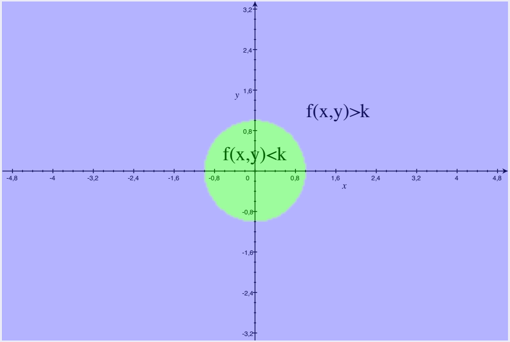


e in particolare

- *se* $k < 0$, *allora* $\{f \le k\} = \emptyset$;
- *se* $k = 0$, *allora* $\{f \le 0\} = (0,0)$;
- *se* $k > 0$, *allora* $\{f \le k\} = \{(x,y) \in R^2 : \; x^2 + y^2 \le k\}$, *ovvero i sottolivelli sono dei cerchi centrati nell'origine di raggio* $\sqrt{k}$.

Esempio

Data la funzione $f : R^2 \to R$, *definita da* $f(x,y) = x^2 + y^2$, *per ogni* $(x,y) \in R^2$, *si ha che (quando* $k > 0$*)*



e in particolare

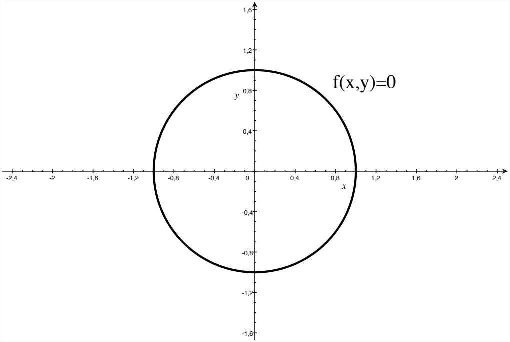
- *se* $k < 0$, *allora* $\{f \leq k\} = \emptyset$;
- *se* $k = 0$, *allora* $\{f \leq 0\} = (0,0)$;
- *se* $k > 0$, *allora* $\{f \leq k\} = \{(x,y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 \leq k\}$, *ovvero i sottolivelli sono dei cerchi centrati nell'origine di raggio* $\sqrt{k}$.

Utilizzando gli insiemi di livello e i sopra/sottolivelli si possono determinare, per via grafica, i punti di massimo e/o di minimo di funzioni continue su insiemi chiusi e limitati.

Esempio

Consideriamo la funzione $f : R^2 \to R$, *definita da* $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$, *Si ha che*

- *se* $k < 0$, $\{f(x,y) = k\} = \emptyset$ *e* $\{f \geq k\} = R^2$;
- *se* $k = 0$, $\{f(x,y) = 0\} = \partial B(0,0;1)$, *e* $\{f \geq 0\} = R^2$;

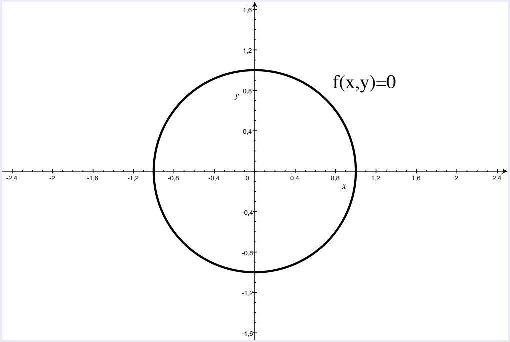


Utilizzando gli insiemi di livello e i sopra/sottolivelli si possono determinare, per via grafica, i punti di massimo e/o di minimo di funzioni continue su insiemi chiusi e limitati.

Esempio

Consideriamo la funzione $f : R^2 \to R$*, definita da* $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$*, Si ha che*

- *se* $k < 0$, $\{f(x,y) = k\} = \emptyset$ *e* $\{f \geq k\} = R^2$;
- *se* $k = 0$, $\{f(x,y) = 0\} = \partial B(0,0;1)$, *e* $\{f \geq 0\} = R^2$;

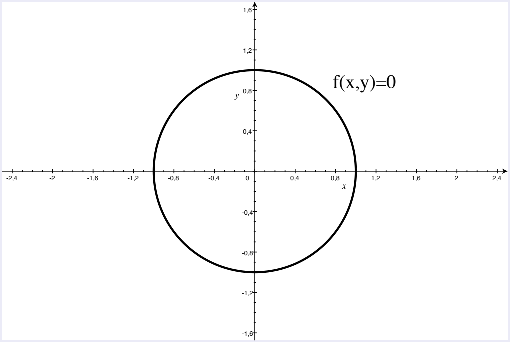


Utilizzando gli insiemi di livello e i sopra/sottolivelli si possono determinare, per via grafica, i punti di massimo e/o di minimo di funzioni continue su insiemi chiusi e limitati.

Esempio

Consideriamo la funzione $f : R^2 \to R$*, definita da* $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$*, Si ha che*

- *se* $k < 0$*,* $\{f(x,y) = k\} = \emptyset$ *e* $\{f \geq k\} = R^2$*;*
- *se* $k = 0$*,* $\{f(x,y) = 0\} = \partial B(0,0;1)$*, e* $\{f \geq 0\} = R^2$*;*

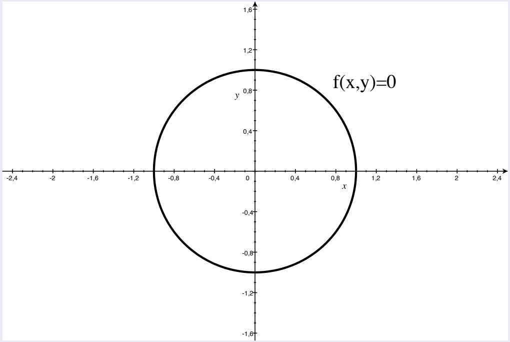


Utilizzando gli insiemi di livello e i sopra/sottolivelli si possono determinare, per via grafica, i punti di massimo e/o di minimo di funzioni continue su insiemi chiusi e limitati.

Esempio

Consideriamo la funzione $f : R^2 \to R$, *definita da* $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$, *Si ha che*

- *se* $k < 0$, $\{f(x,y) = k\} = \emptyset$ *e* $\{f \geq k\} = R^2$;
- *se* $k = 0$, $\{f(x,y) = 0\} = \partial B(0,0;1)$, *e* $\{f \geq 0\} = R^2$;



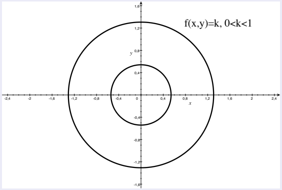
Esempio (...continua...)

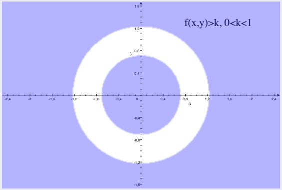
se $k \in]0,1[$,

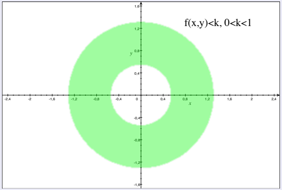
$$\{f = k\} = (\partial B(0,0; \sqrt{1-\sqrt{k}}) \cup \partial B(0,0; \sqrt{1+\sqrt{k}}))$$

$$\{f \geq k\} = \{(x,y) \in R^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1 - \sqrt{k}\} \cup \{(x,y) \in R^2 \, : \, x^2 + y^2 \geq 1 + \sqrt{k}\}$$

$$\{f \leq k\} = \{(x,y) \in R^2 \, : \, 1 - \sqrt{k} \leq x^2 + y^2 \leq 1 + \sqrt{k}\}$$







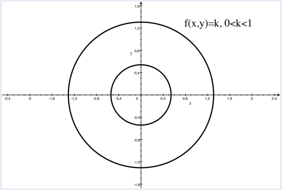
Esempio (...continua...)

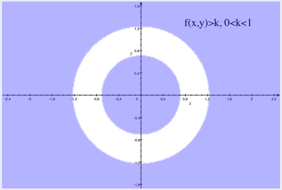
se $k \in]0,1[$,

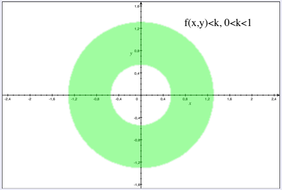
$$\{f = k\} = (\partial B(0,0;\sqrt{1-\sqrt{k}}) \cup \partial B(0,0;\sqrt{1+\sqrt{k}}))$$

$$\{f \geq k\} = \{(x,y) \in R^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1-\sqrt{k}\} \cup \{(x,y) \in R^2 \,:\, x^2+y^2 \geq 1+\sqrt{k}\}$$

$$\{f \leq k\} = \{(x,y) \in R^2 \,:\, 1-\sqrt{k} \leq x^2+y^2 \leq 1+\sqrt{k}\}$$







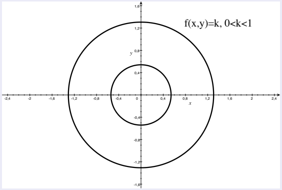
Esempio (...continua...)

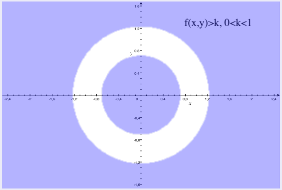
se $k \in]0,1[$,

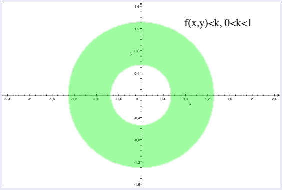
$$\{f = k\} = (\partial B(0,0; \sqrt{1-\sqrt{k}}) \cup \partial B(0,0; \sqrt{1+\sqrt{k}}))$$

$$\{f \geq k\} = \{(x,y) \in R^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 - \sqrt{k}\} \cup \{(x,y) \in R^2 \ : \ x^2 + y^2 \geq 1 + \sqrt{k}\}$$

$$\{f \leq k\} = \{(x,y) \in R^2 \ : \ 1 - \sqrt{k} \leq x^2 + y^2 \leq 1 + \sqrt{k}\}$$







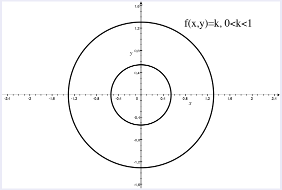
Esempio (...continua...)

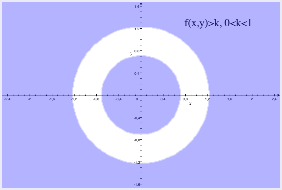
se $k \in]0,1[$,

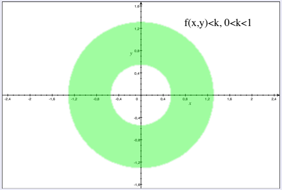
$$\{f = k\} = (\partial B(0,0; \sqrt{1-\sqrt{k}}) \cup \partial B(0,0; \sqrt{1+\sqrt{k}}))$$

$$\{f \geq k\} = \{(x,y) \in R^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 - \sqrt{k}\} \cup \{(x,y) \in R^2 \ : \ x^2 + y^2 \geq 1 + \sqrt{k}\}$$

$$\{f \leq k\} = \{(x,y) \in R^2 \ : \ 1 - \sqrt{k} \leq x^2 + y^2 \leq 1 + \sqrt{k}\}$$







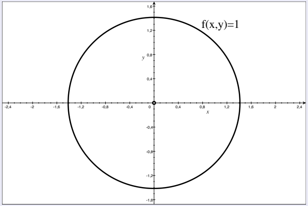
Esempio (...continua...)

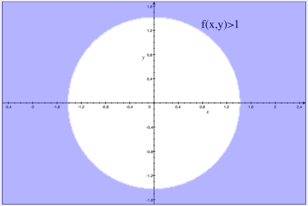
- *se* $k = 1$, *l'insieme di livello è*

$$\{f = 1\} = \{(0,0)\} \cup \partial B(0,0;\sqrt{2})$$

il sopralivello è

$$\{f > 1\} = \mathcal{C}(B(0,0;\sqrt{2}))$$





- *se* $k > 1$, *l'insieme di livello è*

$$\{f = k\} = \partial B(0,0;\sqrt{\sqrt{k}+1})$$

e il sopralivello è

$$\{f \geq k\} = \mathcal{C}(B(0,0;\sqrt{\sqrt{k}+1})).$$

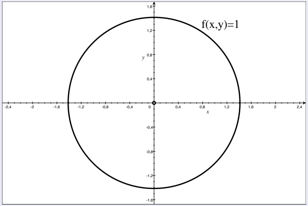
Esempio (...continua...)

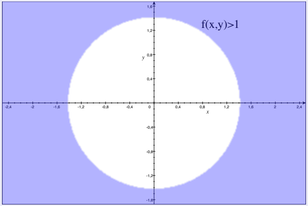
- *se $k = 1$, l'insieme di livello è*

$$\{f = 1\} = \{(0,0)\} \cup \partial B(0,0;\sqrt{2})$$

il sopralivello è

$$\{f > 1\} = \mathcal{C}(B(0,0;\sqrt{2}))$$





- *se $k > 1$, l'insieme di livello è*

$$\{f = k\} = \partial B(0,0;\sqrt{\sqrt{k}+1})$$

e il sopralivello è

$$\{f \geq k\} = \mathcal{C}(B(0,0;\sqrt{\sqrt{k}+1})).$$

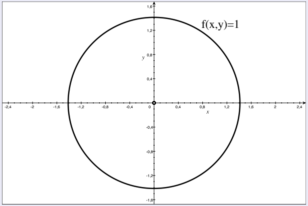
Esempio (...continua...)

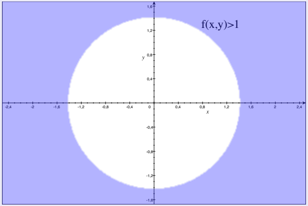
- *se* $k = 1$*, l'insieme di livello è*

$$\{f = 1\} = \{(0,0)\} \cup \partial B(0,0;\sqrt{2})$$

il sopralivello è

$$\{f > 1\} = \mathcal{C}(B(0,0;\sqrt{2}))$$





- *se* $k > 1$*, l'insieme di livello è*

$$\{f = k\} = \partial B(0,0;\sqrt{\sqrt{k}+1})$$

e il sopralivello è

$$\{f \geq k\} = \mathcal{C}(B(0,0;\sqrt{\sqrt{k}+1})).$$

Esempio (...continua...)

Quindi

- *il grafico di f si sviluppa nel semispazio $z \geq 0$*
- $0 = \min_{\mathbb{R}^2} f$;
- *i punti di $B(0,0;1)$ sono tutti punti di minimo assoluto*
- $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ *(infatti per ogni $k \geq 0$ $\{f \geq k\} \neq \emptyset$.*
- *1 è un massimo relativo di f: infatti $f(x,y) \leq 1$ per ogni $(x,y) \in \overline{B(0,0;1)}$*
- *gli insiemi di livello $\{f = k\}$ sono tutte circonferenze (o unioni di due circonferenze) con centro nell'origine.*
- *Il valore di f è costante su ogni circonferenza centrata nell'origine.*
- *Il grafico di f è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse z.*
- *Per rappresentare il grafico di f basta quindi considerare la sezione del grafico di f secondo il piano $x = 0$, ovvero il grafico (sul piano $x = 0$) della funzione $g(y) = (y^2 - 1)^2$.*

Esempio (...continua...)

Quindi

- *il grafico di f si sviluppa nel semispazio $z \geq 0$*
- $0 = \min_{\mathbb{R}^2} f$*;*
- *i punti di $B(0,0;1)$ sono tutti punti di minimo assoluto*
- $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ *(infatti per ogni $k \geq 0$ $\{f \geq k\} \neq \emptyset$.*
- 1 *è un massimo relativo di f: infatti $f(x,y) \leq 1$ per ogni $(x,y) \in \overline{B(0,0;1)}$*
- *gli insiemi di livello $\{f = k\}$ sono tutte circonferenze (o unioni di due circonferenze) con centro nell'origine.*
- *Il valore di f è costante su ogni circonferenza centrata nell'origine.*
- *Il grafico di f è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse z.*
- *Per rappresentare il grafico di f basta quindi considerare la sezione del grafico di f secondo il piano $x = 0$, ovvero il grafico (sul piano $x = 0$) della funzione $g(y) = (y^2 - 1)^2$.*

Esempio (...continua...)

Quindi

- *il grafico di f si sviluppa nel semispazio $z \geq 0$*
- $0 = \min_{\mathbb{R}^2} f$*;*
- *i punti di $B(0,0;1)$ sono tutti punti di minimo assoluto*
- $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ *(infatti per ogni $k \geq 0$ $\{f \geq k\} \neq \emptyset$.*
- *1 è un massimo relativo di f: infatti $f(x,y) \leq 1$ per ogni $(x,y) \in \overline{B(0,0;1)}$*
- *gli insiemi di livello $\{f = k\}$ sono tutte circonferenze (o unioni di due circonferenze) con centro nell'origine.*
- *Il valore di f è costante su ogni circonferenza centrata nell'origine.*
- *Il grafico di f è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse z.*
- *Per rappresentare il grafico di f basta quindi considerare la sezione del grafico di f secondo il piano $x = 0$, ovvero il grafico (sul piano $x = 0$) della funzione $g(y) = (y^2 - 1)^2$.*

Esempio (...continua...)

Quindi

- *il grafico di f si sviluppa nel semispazio $z \geq 0$*
- $0 = \min_{\mathbb{R}^2} f$*;*
- *i punti di $B(0,0;1)$ sono tutti punti di minimo assoluto*
- $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ *(infatti per ogni $k \geq 0$ $\{f \geq k\} \neq \emptyset$.*
- *1 è un massimo relativo di f: infatti $f(x,y) \leq 1$ per ogni $(x,y) \in \overline{B(0,0;1)}$*
- *gli insiemi di livello $\{f = k\}$ sono tutte circonferenze (o unioni di due circonferenze) con centro nell'origine.*
- *Il valore di f è costante su ogni circonferenza centrata nell'origine.*
- *Il grafico di f è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse z.*
- *Per rappresentare il grafico di f basta quindi considerare la sezione del grafico di f secondo il piano $x = 0$, ovvero il grafico (sul piano $x = 0$) della funzione $g(y) = (y^2 - 1)^2$.*

Esempio (...continua...)

Quindi

- *il grafico di f si sviluppa nel semispazio $z \geq 0$*
- $0 = \min_{\mathbb{R}^2} f$;
- *i punti di $B(0,0;1)$ sono tutti punti di minimo assoluto*
- $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ *(infatti per ogni $k \geq 0$ $\{f \geq k\} \neq \emptyset$.*
- 1 *è un massimo relativo di f: infatti $f(x,y) \leq 1$ per ogni $(x,y) \in \overline{B(0,0;1)}$*
- *gli insiemi di livello $\{f = k\}$ sono tutte circonferenze (o unioni di due circonferenze) con centro nell'origine.*
- *Il valore di f è costante su ogni circonferenza centrata nell'origine.*
- *Il grafico di f è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse z.*
- *Per rappresentare il grafico di f basta quindi considerare la sezione del grafico di f secondo il piano $x = 0$, ovvero il grafico (sul piano $x = 0$) della funzione $g(y) = (y^2 - 1)^2$.*

Esempio (...continua...)

Quindi

- *il grafico di f si sviluppa nel semispazio $z \geq 0$*
- $0 = \min_{\mathbb{R}^2} f$*;*
- *i punti di $B(0,0;1)$ sono tutti punti di minimo assoluto*
- $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ *(infatti per ogni $k \geq 0$ $\{f \geq k\} \neq \emptyset$.*
- 1 *è un massimo relativo di f: infatti $f(x,y) \leq 1$ per ogni $(x,y) \in \overline{B(0,0;1)}$*
- *gli insiemi di livello $\{f = k\}$ sono tutte circonferenze (o unioni di due circonferenze) con centro nell'origine.*
- *Il valore di f è costante su ogni circonferenza centrata nell'origine.*
- *Il grafico di f è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse z.*
- *Per rappresentare il grafico di f basta quindi considerare la sezione del grafico di f secondo il piano $x = 0$, ovvero il grafico (sul piano $x = 0$) della funzione $g(y) = (y^2 - 1)^2$.*

Esempio (...continua...)

Quindi

- *il grafico di f si sviluppa nel semispazio $z \geq 0$*
- $0 = \min_{\mathbb{R}^2} f$*;*
- *i punti di $B(0,0;1)$ sono tutti punti di minimo assoluto*
- $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ *(infatti per ogni $k \geq 0$ $\{f \geq k\} \neq \emptyset$.*
- 1 *è un massimo relativo di f: infatti $f(x,y) \leq 1$ per ogni $(x,y) \in \overline{B(0,0;1)}$*
- *gli insiemi di livello $\{f = k\}$ sono tutte circonferenze (o unioni di due circonferenze) con centro nell'origine.*
- *Il valore di f è costante su ogni circonferenza centrata nell'origine.*
- *Il grafico di f è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse z.*
- *Per rappresentare il grafico di f basta quindi considerare la sezione del grafico di f secondo il piano $x = 0$, ovvero il grafico (sul piano $x = 0$) della funzione $g(y) = (y^2 - 1)^2$.*

Esempio (...continua...)

Quindi

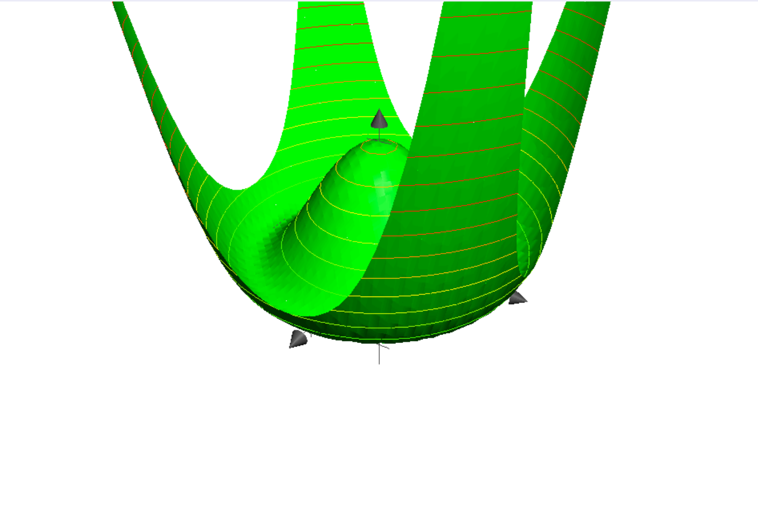
- *il grafico di f si sviluppa nel semispazio $z \geq 0$*
- $0 = \min_{\mathbb{R}^2} f$*;*
- *i punti di $B(0,0;1)$ sono tutti punti di minimo assoluto*
- $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ *(infatti per ogni $k \geq 0$ $\{f \geq k\} \neq \emptyset$.*
- *1 è un massimo relativo di f: infatti $f(x,y) \leq 1$ per ogni $(x,y) \in \overline{B(0,0;1)}$*
- *gli insiemi di livello $\{f = k\}$ sono tutte circonferenze (o unioni di due circonferenze) con centro nell'origine.*
- *Il valore di f è costante su ogni circonferenza centrata nell'origine.*
- *Il grafico di f è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse z.*
- *Per rappresentare il grafico di f basta quindi considerare la sezione del grafico di f secondo il piano $x = 0$, ovvero il grafico (sul piano $x = 0$) della funzione $g(y) = (y^2 - 1)^2$.*

Esempio (...continua...)

Quindi

- *il grafico di f si sviluppa nel semispazio $z \geq 0$*
- $0 = \min_{\mathbb{R}^2} f$;
- *i punti di $B(0,0;1)$ sono tutti punti di minimo assoluto*
- $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ *(infatti per ogni $k \geq 0$ $\{f \geq k\} \neq \emptyset$.*
- *1 è un massimo relativo di f: infatti $f(x,y) \leq 1$ per ogni $(x,y) \in \overline{B(0,0;1)}$*
- *gli insiemi di livello $\{f = k\}$ sono tutte circonferenze (o unioni di due circonferenze) con centro nell'origine.*
- *Il valore di f è costante su ogni circonferenza centrata nell'origine.*
- *Il grafico di f è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse z.*
- *Per rappresentare il grafico di f basta quindi considerare la sezione del grafico di f secondo il piano $x = 0$, ovvero il grafico (sul piano $x = 0$) della funzione $g(y) = (y^2 - 1)^2$.*

(Grafico di $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$)



Osservazione

Sia data una funzione f di tipo radiale, cioè della forma

$$f(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

per qualche funzione h definita su un intervallo $I \subseteq [0, +\infty[$

- *per queste funzioni il valore in un punto (x, y) dipende solo da $d((x, y), (0, 0))$*
- *f sarà definita in*
$$A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \in I\}$$
- *per determinare i punti di minimo/massimo di f su A basta studiare i punti di minimo e massimo di h su I.*
- *Ad esempio, se $t_0 \in I$ è un punto di minimo relativo (risp. assoluto) di h, allora ogni punto di $B(0, 0; \sqrt{t_0})$ sarà un punto di minimo relativo (risp. assoluto) di f e il minimo sarà $h(t_0)$.*

Osservazione

Sia data una funzione f di tipo radiale, cioè della forma

$$f(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

per qualche funzione h definita su un intervallo $I \subseteq [0, +\infty[$

- *per queste funzioni il valore in un punto (x, y) dipende solo da $d((x, y), (0, 0))$*
- *f sarà definita in*
$$A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \in I\}$$
- *per determinare i punti di minimo/massimo di f su A basta studiare i punti di minimo e massimo di h su I.*
- *Ad esempio, se $t_0 \in I$ è un punto di minimo relativo (risp. assoluto) di h, allora ogni punto di $B(0, 0; \sqrt{t_0})$ sarà un punto di minimo relativo (risp. assoluto) di f e il minimo sarà $h(t_0)$.*

Osservazione

Sia data una funzione f di tipo radiale, cioè della forma

$$f(x,y) = h(x^2 + y^2)$$

per qualche funzione h definita su un intervallo $I \subseteq [0, +\infty[$

- *per queste funzioni il valore in un punto (x, y) dipende solo da $d((x,y),(0,0))$*
- *f sarà definita in*
$$A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \in I\}$$
- *per determinare i punti di minimo/massimo di f su A basta studiare i punti di minimo e massimo di h su I.*
- *Ad esempio, se $t_0 \in I$ è un punto di minimo relativo (risp. assoluto) di h, allora ogni punto di $B(0,0;\sqrt{t_0})$ sarà un punto di minimo relativo (risp. assoluto) di f e il minimo sarà $h(t_0)$.*

Osservazione

Sia data una funzione f di tipo radiale, cioè della forma

$$f(x,y) = h(x^2 + y^2)$$

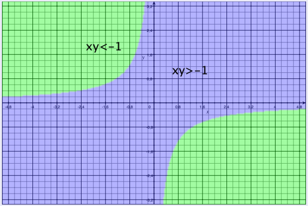
per qualche funzione h definita su un intervallo $I \subseteq [0, +\infty[$

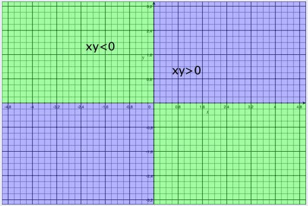
- *per queste funzioni il valore in un punto (x, y) dipende solo da $d((x, y), (0, 0))$*
- *f sarà definita in*
$$A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \in I\}$$
- *per determinare i punti di minimo/massimo di f su A basta studiare i punti di minimo e massimo di h su I.*
- *Ad esempio, se $t_0 \in I$ è un punto di minimo relativo (risp. assoluto) di h, allora ogni punto di $B(0, 0; \sqrt{t_0})$ sarà un punto di minimo relativo (risp. assoluto) di f e il minimo sarà $h(t_0)$.*

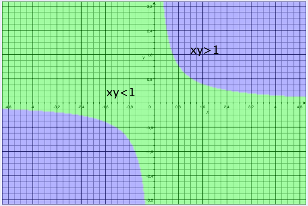
Esempio

Data la funzione $f : R^2 \to R$ *definita da* $f(x,y) = xy$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$, *determiniamo il massimo ed il minimo di* f *sul triangolo* T *di vertici* $(9,1)$, $(1,9)$ *e* $(1,1)$.

La funzione in esame ha come sopra/sottolivelli

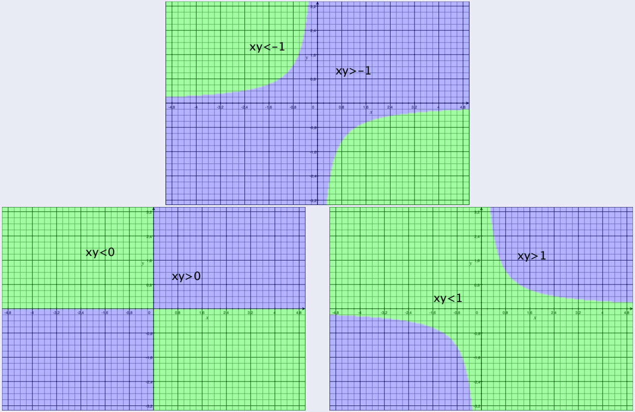






Esempio

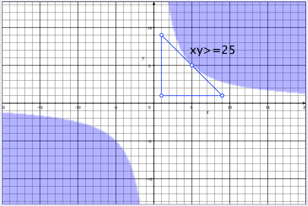
Data la funzione $f : R^2 \to R$ definita da $f(x,y) = xy$ per ogni $(x,y) \in R^2$, determiniamo il massimo ed il minimo di f sul triangolo T di vertici $(9,1)$, $(1,9)$ e $(1,1)$.
La funzione in esame ha come sopra/sottolivelli

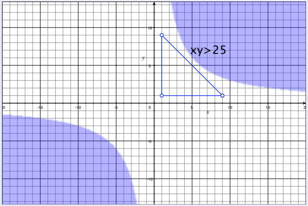


Esempio (...continua...)

Esaminando i sopralivelli $\{f \geq k\}$, possiamo convincerci agevolmente che

- *se* $k = 25$ *allora* $\{f \geq 25\} \cap T = \{(5,5)\}$;
- *se* $k > 25$ *allora* $\{f \geq k\} \cap T = \emptyset$.





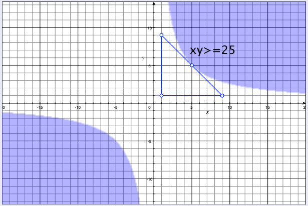
Ne segue che $\max_T f = f(5,5) = 25$.

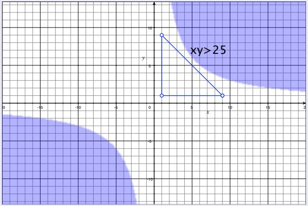
- *nel punto* $(5,5)$, *la curva di livello* $\varphi :]0, +\infty[\to R^2$, *data da* $\varphi(t) = (t, 25t^{-1})$ *per ogni* $t > 0$ *(parametrizza l'insieme* $\{f = 25\}$*) ha tangente* $x + y = 10$
- *ogni curva semplice che parametrizza la frontiera di* T *ed è regolare nel punto* $P = (5,5)$ *ha tangente* $x + y = 10$

Esempio (...continua...)

Esaminando i sopralivelli $\{f \geq k\}$, *possiamo convincerci agevolmente che*

- *se* $k = 25$ *allora* $\{f \geq 25\} \cap T = \{(5,5)\}$;
- *se* $k > 25$ *allora* $\{f \geq k\} \cap T = \emptyset$.





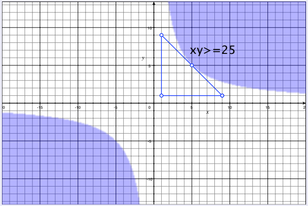
Ne segue che $\max_T f = f(5,5) = 25$.

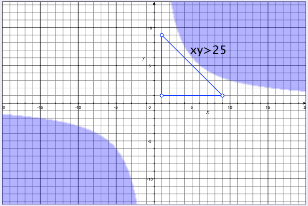
- *nel punto* $(5,5)$, *la curva di livello* $\varphi :]0, +\infty[\to R^2$, *data da* $\varphi(t) = (t, 25t^{-1})$ *per ogni* $t > 0$ *(parametrizza l'insieme* $\{f = 25\}$*) ha tangente* $x + y = 10$
- *ogni curva semplice che parametrizza la frontiera di* T *ed è regolare nel punto* $P = (5,5)$ *ha tangente* $x + y = 10$

Esempio (...continua...)

Esaminando i sopralivelli $\{f \geq k\}$, *possiamo convincerci agevolmente che*

- *se* $k = 25$ *allora* $\{f \geq 25\} \cap T = \{(5,5)\}$;
- *se* $k > 25$ *allora* $\{f \geq k\} \cap T = \emptyset$.





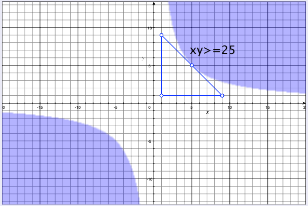
Ne segue che $\max_T f = f(5,5) = 25$.

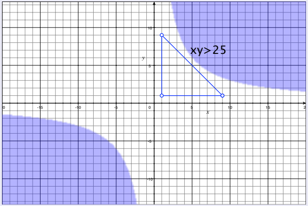
- *nel punto* $(5,5)$, *la curva di livello* $\varphi :]0, +\infty[\to R^2$, *data da* $\varphi(t) = (t, 25t^{-1})$ *per ogni* $t > 0$ *(parametrizza l'insieme* $\{f = 25\}$*) ha tangente* $x + y = 10$
- *ogni curva semplice che parametrizza la frontiera di* T *ed è regolare nel punto* $P = (5,5)$ *ha tangente* $x + y = 10$

Esempio (...continua...)

Esaminando i sopralivelli $\{f \geq k\}$, *possiamo convincerci agevolmente che*

- *se* $k = 25$ *allora* $\{f \geq 25\} \cap T = \{(5,5)\}$;
- *se* $k > 25$ *allora* $\{f \geq k\} \cap T = \emptyset$.





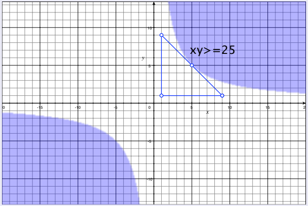
Ne segue che $\max_T f = f(5,5) = 25$.

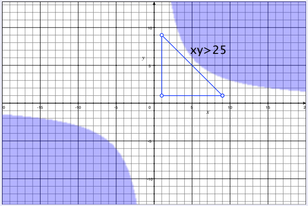
- *nel punto* $(5,5)$, *la curva di livello* $\varphi :]0, +\infty[\to R^2$, *data da* $\varphi(t) = (t, 25t^{-1})$ *per ogni* $t > 0$ (*parametrizza l'insieme* $\{f = 25\}$) *ha tangente* $x + y = 10$
- *ogni curva semplice che parametrizza la frontiera di* T *ed è regolare nel punto* $P = (5,5)$ *ha tangente* $x + y = 10$

Esempio (...continua...)

Esaminando i sopralivelli $\{f \geq k\}$, *possiamo convincerci agevolmente che*

- *se* $k = 25$ *allora* $\{f \geq 25\} \cap T = \{(5,5)\}$;
- *se* $k > 25$ *allora* $\{f \geq k\} \cap T = \emptyset$.





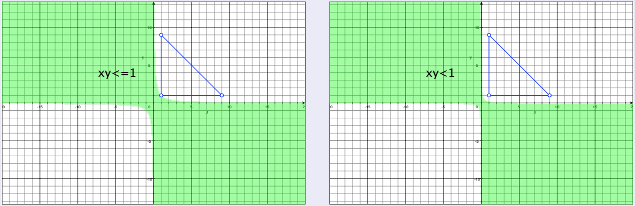
Ne segue che $\max_T f = f(5,5) = 25$.

- *nel punto* $(5,5)$, *la curva di livello* $\varphi :]0, +\infty[\to R^2$, *data da* $\varphi(t) = (t, 25t^{-1})$ *per ogni* $t > 0$ *(parametrizza l'insieme* $\{f = 25\}$*) ha tangente* $x + y = 10$
- *ogni curva semplice che parametrizza la frontiera di* T *ed è regolare nel punto* $P = (5,5)$ *ha tangente* $x + y = 10$

Esempio (...continua...)

In modo perfettamente analogo, utilizzando i sottolivelli $\{f \leq k\}$, otteniamo che

- *se* $k = 1$ *allora* $\{(1,1)\} \in \{f \leq 1\} \cap T$;
- *se* $k < 1$ *allora* $\{f \leq k\} \cap T = \emptyset$.

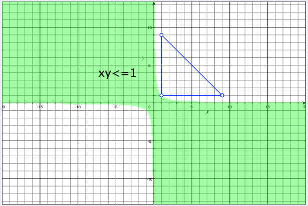


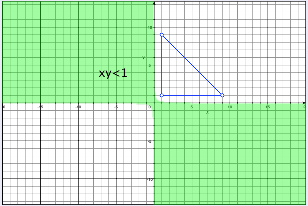
Ne segue che $\min_T f = f(1,1) = 1$. *Notiamo che in questo caso non esiste alcuna curva semplice che parametrizzi il bordo di* T *e sia regolare in* $P = (1,1)$.

Esempio (...continua...)

In modo perfettamente analogo, utilizzando i sottolivelli $\{f \leq k\}$, *otteniamo che*

- *se* $k = 1$ *allora* $\{(1,1)\} \in \{f \leq 1\} \cap T$;
- *se* $k < 1$ *allora* $\{f \leq k\} \cap T = \emptyset$.



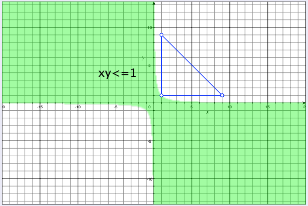


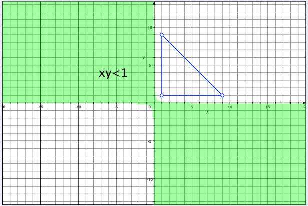
Ne segue che $\min_T f = f(1,1) = 1$. *Notiamo che in questo caso non esiste alcuna curva semplice che parametrizzi il bordo di* T *e sia regolare in* $P = (1,1)$.

Esempio (...continua...)

In modo perfettamente analogo, utilizzando i sottolivelli $\{f \le k\}$*, otteniamo che*

- *se* $k = 1$ *allora* $\{(1,1)\} \in \{f \le 1\} \cap T$;
- *se* $k < 1$ *allora* $\{f \le k\} \cap T = \emptyset$.



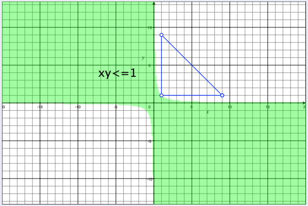


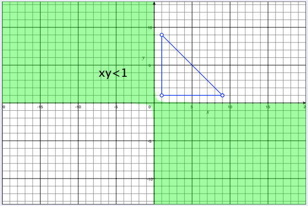
Ne segue che $\min_T f = f(1,1) = 1$. *Notiamo che in questo caso non esiste alcuna curva semplice che parametrizzi il bordo di* T *e sia regolare in* $P = (1,1)$.

Esempio (...continua...)

In modo perfettamente analogo, utilizzando i sottolivelli $\{f \leq k\}$, *otteniamo che*

- *se* $k = 1$ *allora* $\{(1,1)\} \in \{f \leq 1\} \cap T$;
- *se* $k < 1$ *allora* $\{f \leq k\} \cap T = \emptyset$.



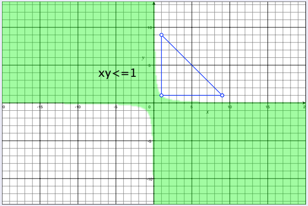


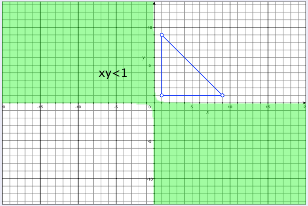
Ne segue che $\min_T f = f(1,1) = 1$. *Notiamo che in questo caso non esiste alcuna curva semplice che parametrizzi il bordo di* T *e sia regolare in* $P = (1,1)$.

Esempio (...continua...)

In modo perfettamente analogo, utilizzando i sottolivelli $\{f \leq k\}$, *otteniamo che*

- *se* $k = 1$ *allora* $\{(1,1)\} \in \{f \leq 1\} \cap T$;
- *se* $k < 1$ *allora* $\{f \leq k\} \cap T = \emptyset$.



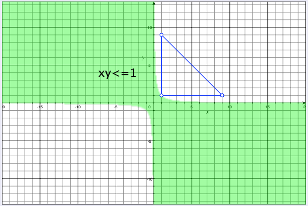


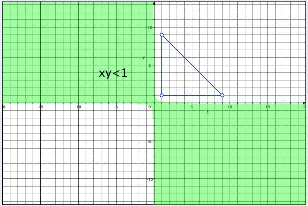
Ne segue che $\min_T f = f(1,1) = 1$. *Notiamo che in questo caso non esiste alcuna curva semplice che parametrizzi il bordo di* T *e sia regolare in* $P = (1,1)$.

Esempio (...continua...)

In modo perfettamente analogo, utilizzando i sottolivelli $\{f \leq k\}$, *otteniamo che*

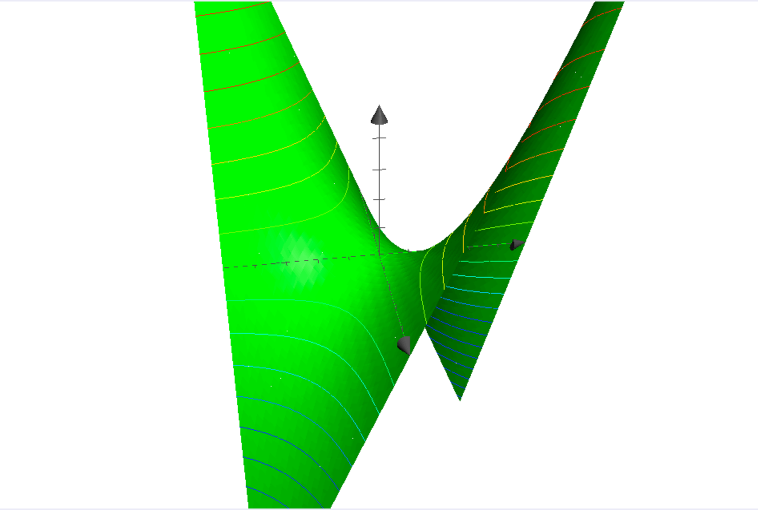
- *se* $k = 1$ *allora* $\{(1,1)\} \in \{f \leq 1\} \cap T$;
- *se* $k < 1$ *allora* $\{f \leq k\} \cap T = \emptyset$.





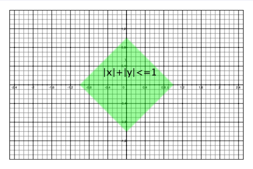
Ne segue che $\min_T f = f(1,1) = 1$. *Notiamo che in questo caso non esiste alcuna curva semplice che parametrizzi il bordo di* T *e sia regolare in* $P = (1,1)$.

(Grafico di $f = xy$)



Esempio

Sia $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$*; vogliamo determinare il massimo ed il minimo di* f *sull'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : \ |x|+|y| \leq 1\}$.



- *Gli insiemi di livello di* f *sono circonferenze centrate nell'origine.*
- $f(x,y) \geq 1$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$ *e* $f(0,0)=1$*, quindi*

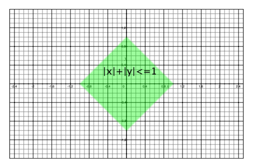
$$1 = f(0,0) = \min\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}.$$

- $\{f \geq \sqrt{2}\} \cap A$ *è formato dai 4 vertici del rombo* A*,*
- $\{f > \sqrt{2}\} \cap A = \emptyset$*,*
- *ne segue che*

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \ &= \ f(0,1) = f(1,0) = f(0,-1) = f(-1,0) \\ &= \ \max\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}.\end{aligned}$$

Esempio

Sia $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$*; vogliamo determinare il massimo ed il minimo di* f *sull'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : \ |x|+|y| \leq 1\}$.



- *Gli insiemi di livello di* f *sono circonferenze centrate nell'origine.*
- $f(x,y) \geq 1$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$ *e* $f(0,0) = 1$*, quindi*

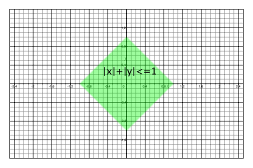
$$1 = f(0,0) = \min\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}.$$

- $\{f \geq \sqrt{2}\} \cap A$ *è formato dai 4 vertici del rombo* A*,*
- $\{f > \sqrt{2}\} \cap A = \emptyset$*,*
- *ne segue che*

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \ &= \ f(0,1) = f(1,0) = f(0,-1) = f(-1,0) \\ &= \ \max\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}.\end{aligned}$$

Esempio

Sia $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$*; vogliamo determinare il massimo ed il minimo di* f *sull'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : \ |x|+|y| \leq 1\}$.



- *Gli insiemi di livello di* f *sono circonferenze centrate nell'origine.*
- $f(x,y) \geq 1$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$ *e* $f(0,0) = 1$, *quindi*

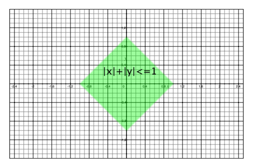
$$1 = f(0,0) = \min\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}.$$

- $\{f \geq \sqrt{2}\} \cap A$ *è formato dai 4 vertici del rombo* A,
- $\{f > \sqrt{2}\} \cap A = \emptyset$,
- *ne segue che*

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= f(0,1) = f(1,0) = f(0,-1) = f(-1,0) \\ &= \max\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}. \end{aligned}$$

Esempio

Sia $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$*; vogliamo determinare il massimo ed il minimo di* f *sull'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : \ |x|+|y| \leq 1\}$.



- *Gli insiemi di livello di* f *sono circonferenze centrate nell'origine.*
- $f(x,y) \geq 1$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$ *e* $f(0,0) = 1$*, quindi*

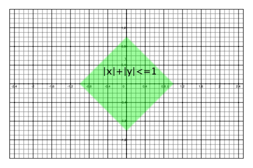
$$1 = f(0,0) = \min\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}.$$

- $\{f \geq \sqrt{2}\} \cap A$ *è formato dai* 4 *vertici del rombo* A*,*
- $\{f > \sqrt{2}\} \cap A = \emptyset$*,*
- *ne segue che*

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= f(0,1) = f(1,0) = f(0,-1) = f(-1,0) \\ &= \max\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}.\end{aligned}$$

Esempio

Sia $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$*; vogliamo determinare il massimo ed il minimo di* f *sull'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : \ |x|+|y| \leq 1\}$.



- *Gli insiemi di livello di* f *sono circonferenze centrate nell'origine.*
- $f(x,y) \geq 1$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$ *e* $f(0,0) = 1$, *quindi*

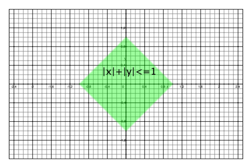
$$1 = f(0,0) = \min\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}.$$

- $\{f \geq \sqrt{2}\} \cap A$ *è formato dai* 4 *vertici del rombo* A,
- $\{f > \sqrt{2}\} \cap A = \emptyset$,
- *ne segue che*

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= f(0,1) = f(1,0) = f(0,-1) = f(-1,0) \\ &= \max\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}. \end{aligned}$$

Esempio

Sia $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$*; vogliamo determinare il massimo ed il minimo di* f *sull'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : \ |x| + |y| \le 1\}$.



- *Gli insiemi di livello di* f *sono circonferenze centrate nell'origine.*
- $f(x,y) \ge 1$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$ *e* $f(0,0) = 1$*, quindi*

$$1 = f(0,0) = \min\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}.$$

- $\{f \ge \sqrt{2}\} \cap A$ *è formato dai* 4 *vertici del rombo* A*,*
- $\{f > \sqrt{2}\} \cap A = \emptyset$*,*
- *ne segue che*

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= f(0,1) = f(1,0) = f(0,-1) = f(-1,0) \\ &= \max\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}. \end{aligned}$$

(Grafico di $f = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$)