

Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Docente:
Marino Belloni

30 marzo 2009

I seguenti due teoremi sono l'estensione al caso di funzioni di due variabili di ben noti risultati per funzioni di variabile reale.

Teorema (Teorema di esistenza degli zeri)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un connesso e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ tali che $f(x_0, y_0) < 0 < f(x_1, y_1)$, allora esiste $(x, y) \in \Omega$ tale che $f(x, y) = 0$.

Teorema (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'insieme chiuso e limitato $C \subset \mathbb{R}^2$. Allora f ammette minimo m e massimo M assoluti in C , cioè esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in C$ tali che

$$m = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1) = M, \quad \text{per ogni } (x, y) \in C.$$

Corollario (del teorema di Weierstrass)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che esiste $\ell = \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y)$.

- (i) Se $\ell = +\infty$, allora esiste $m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$.
- (ii) Se $\ell = -\infty$, allora esiste $M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$.
- (iii) Se $\ell = 0$ ed esiste $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) > 0$, allora esiste

$$M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

- (iv) Se $\ell = 0$ ed esiste $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) < 0$, allora esiste

$$m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

Dimostrazione di (i).

- Poiché $\ell = +\infty$, esiste $r > 0$ tale che $f(x, y) \geq f(0, 0) + 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x^2 + y^2 > r^2$.
- Ne segue che

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \inf_{(x,y) \in \overline{B(0,0;r)}} f(x, y)$$

- Ora $\overline{B(0,0;r)}$ è un insieme chiuso e limitato.
- Quindi per il Teorema di Weierstrass la restrizione di f a $\overline{B(0,0;r)}$ ammette minimo assoluto su $\overline{B(0,0;r)}$ e tale minimo risulta minimo assoluto anche per f .

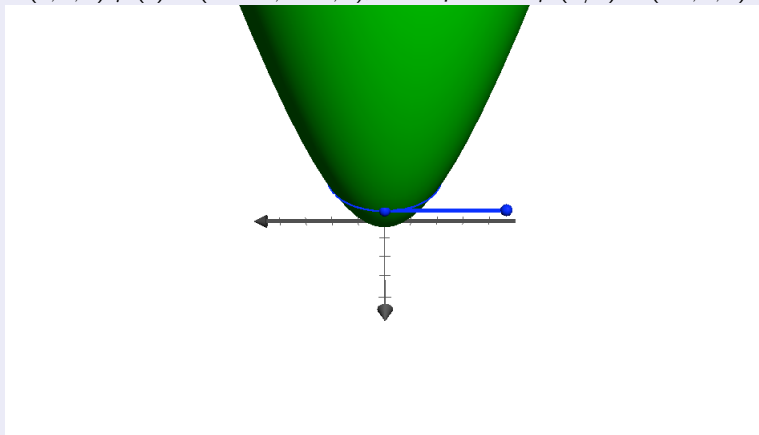
Per dimostrare la (ii) basta applicare la precedente dimostrazione alla funzione $-f$

Le dimostrazioni delle proprietà (iii) e (iv) sono del tutto analoghe e quindi sono lasciate al lettore. □

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^2$

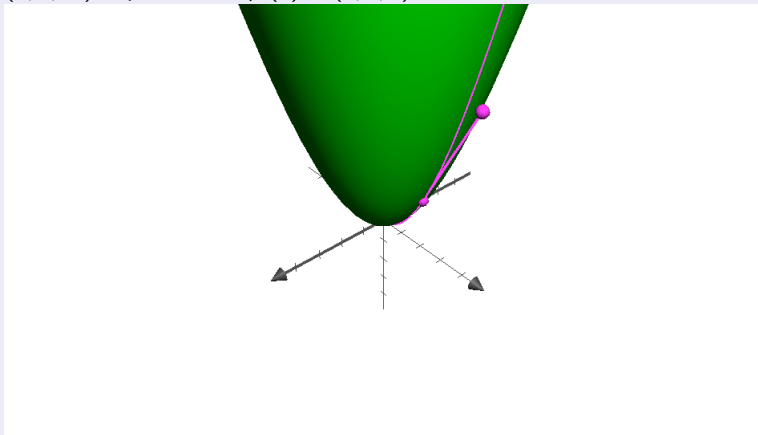
(Tangente alla circonferenza)

Il vettore tangente alla circonferenza $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ nel punto $\varphi(\pi/2) = (0, 1, 1)$: $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, e dunque $v_1 = \varphi'(\pi/2) = (-1, 0, 0)$.



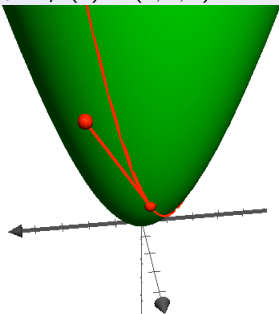
(Tangente alla Parabola)

Il vettore tangente alla parabola $\varphi(t) = (0, t, t^2)$ nel punto $\varphi(1) = (0, 1, 1)$:
 $\varphi'(t) = (0, 1, 2t)$ e quindi $v_2 = \varphi'(1) = (0, 1, 2)$.



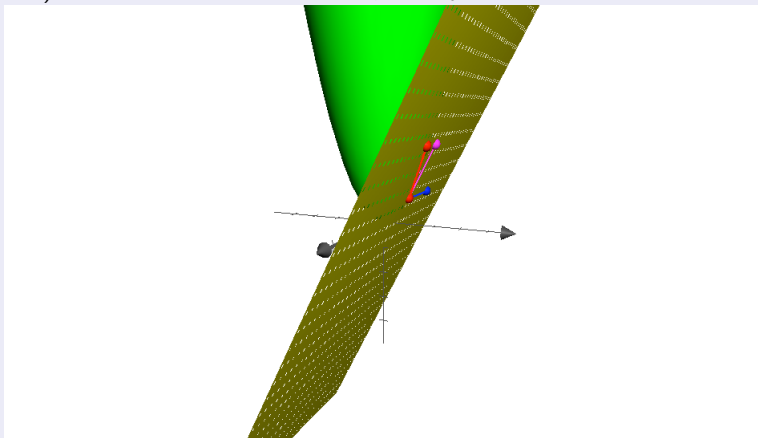
(Tangente alla Parabola)

Il vettore tangente alla parabola $\varphi(t) = (t, 1+t, 1+2t+2t^2)$ nel punto $\varphi(0) = (0, 1, 1)$:
 $\varphi'(t) = (1, 1, 2+4t)$ e quindi $v_3 = \varphi'(0) = (1, 1, 2)$.



(Piano Tangente al paraboloide)

Il piano tangente al paraboloide nel punto di coordinate $(0, 1, 1)$ avente equazione $z = 2(y - 1) + 1$. Si osservi che contiene v_1 , v_2 e v_3 .



Osservazione

Dato il paraboloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ ed il punto sul suo grafico $(0, 1, f(0, 1)) = (0, 1, 1)$, esistono infinite curve regolari

$$\varphi : I \rightarrow \text{Graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

passanti per il punto $(0, 1, 1)$, e ognuna di queste ha una retta tangente passante per il punto $(1, 1, 2)$.

Si prova che **tutte queste rette giacciono in un piano**.

Osservazione

I vettori v_1 e v_2 individuati in precedenza sono linearmente indipendenti e individuano il piano di equazione

$$\det \begin{pmatrix} (x) & (y-1) & (z-1) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(y-1) - z + 1 = 0,$$

ovvero $z = 2y - 1$.

Questo sarà il piano tangente al grafico del paraboloide nel punto $(0, 1, 1)$, ovvero quel piano che contiene tutti i vettori tangenti a curve (regolari) il cui sostegno appartiene al grafico di f .

Osservazione

- Questo piano tangente rappresenta, per le superficie, l'analogo di ciò che la retta tangente è per le curve.
- per le funzioni di una variabile non sempre esiste la retta tangente ad un punto del grafico, così come non sempre esiste il piano tangente al grafico di una funzione di due variabili. Infatti, si provi a ripetere il procedimento visto in precedenza esaminando però il punto $(0,0,0)$ appartenente alla superficie conica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: si troveranno tre vettori linearmente indipendenti e un piano non basta a contenerli tutti e tre!

In tutta questa lezione con Ω denoteremo un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

Definizione

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e ν un versore. Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ in (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ si dice derivata direzionale di f rispetto a ν in (x_0, y_0) .

Osservazione

La derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è la derivata della funzione di una variabile

$$t \mapsto f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2)$$

nel punto $t = 0$.

Questa funzione è ben definita in un intorno di $t = 0$: infatti, (x_0, y_0) è un punto interno di Ω e quindi esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0; r) \subset \Omega$; la funzione f sarà quindi definita almeno in $(-r, r)$.

Teorema

Se $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, hanno derivata direzionale secondo ν in $(x_0, y_0) \in \Omega$, allora

- la funzione $f + g$ ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial\nu}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0);$$

- la funzione fg ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial(fg)}{\partial\nu}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0) + g(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0);$$

- se $g(x_0, y_0) \neq 0$, la funzione f/g ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{f}{g} \right) (x_0, y_0) = \frac{g(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0)}{(g(x_0, y_0))^2}.$$

Esempio

Sia $f(x, y) = \log(x + y^2 + 1)$ e $\nu = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, dove $\theta \in [0, 2\pi[$. Mostriamo che esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0) = \cos(\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Infatti

$$\frac{f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t}.$$

È noto che $\log(1 + y) \sim y$ per $y \rightarrow 0$. Pertanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \sim \begin{cases} \cos(\theta), & \text{se } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \\ t(\sin(\theta))^2, & \text{se } \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

Quindi, facendo tendere t a zero, si mostra l'esistenza della derivata direzionale di f nella direzione ν nel punto P in quanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \rightarrow \cos \theta = \frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0), \quad t \rightarrow 0$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si dice che:

- f è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (1, 0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (1, 0)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a x in (x_0, y_0) ;

- f è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (0, 1)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (0, 1)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a y in (x_0, y_0) .

Se esistono entrambe le derivate parziali nel punto (x_0, y_0) , il vettore

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

si dice (vettore) gradiente di f nel punto (x_0, y_0) .

Diamo ora la definizione di funzione differenziabile in un punto per funzioni di due variabili.

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Preso $(x_0, y_0) \in \Omega$, si dice che f è differenziabile in (x_0, y_0) se esiste un vettore (a, b) tale che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

ovvero se, quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, si ha

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

L'applicazione lineare $(h, k) \mapsto (a, b) \cdot (h, k)$ è detta differenziale della funzione f nel punto (x_0, y_0) , e si pone $df(x_0, y_0) := (a, b)$.

Osservazione (IMPORTANTE)

- (i) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è continua nel punto.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora f ammette derivate parziali nel punto. Inoltre $df(x_0, y_0)(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$.
- (iii) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è derivabile in questo punto secondo qualsiasi direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nu \rangle.$$

- (iv) Dire che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ equivale a dire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avente equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

- (v) Se f è una funzione differenziabile in (x_0, y_0) con $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la direzione $\mathbf{v} = \nabla f(x_0, y_0) / |\nabla f(x_0, y_0)|$ individuata dal gradiente risulta essere quella di massima pendenza nel senso che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) : \nu = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Osservazione (Come provare che f non è differenziabile)

- (i) Se proviamo che **non esiste** una derivata parziale o una derivata direzionale di f in (x_0, y_0) , allora f non sarà differenziabile. Ad esempio la funzione $f(x, y) = |x|$ non ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0, 0)$. Quindi in tale punto non sarà differenziabile.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora la funzione

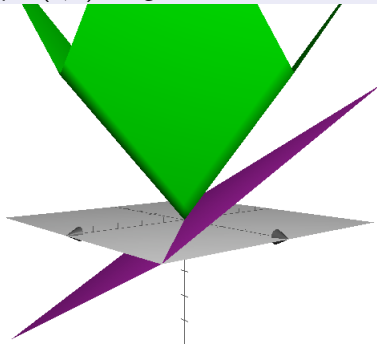
$$\nu \mapsto \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla u(x_0, y_0), \nu \rangle$$

deve risultare lineare in ν_1 e ν_2 .

Quando questa funzione è non lineare, se ne conclude che f non è differenziabile.

Esempio

Esistono funzioni continue ma non differenziabili: $f(x, y) = |x| + |y|$ non è differenziabile nei punti degli assi coordinati. Per convincersi, basta osservare che ivi non esiste il piano tangente. Si veda per esempio $(0, 0)$ in figura.



Esempio

Esistono funzioni derivabili parzialmente secondo una qualsiasi direzione in un punto ma ivi non differenziabili. Ad esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- *non è differenziabile in $(0, 0)$*
- *esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ qualsiasi sia la direzione ν .*

Si veda il testo per i dettagli.

Esempio

Esistono funzioni derivabili parzialmente secondo una qualsiasi direzione in un punto ma ivi non continue. Ad esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- *non è continua in $(0, 0)$*
- *esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ qualsiasi sia la direzione ν .*

Si veda il testo per i dettagli.

Osservazione

Per provare che una funzione è differenziabile in un punto si fanno tre passi

- *si calcola $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$*
- *si calcola $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$*
- *si verifica che*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Il prossimo teorema identifica un'ampia classe di funzioni differenziabili.
Risulta molto importante perchè molto semplice da utilizzare.

Teorema (Teorema del differenziale totale)

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data e (x_0, y_0) un punto di Ω . Supponiamo che esistano le derivate parziali di f in un intorno di (x_0, y_0) e che siano continue in (x_0, y_0) . Allora f è differenziabile in (x_0, y_0) .

Esempio

- (i) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^4 y^2 - 3x^2 y + 2y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4 y - 3x^2 + 4y,$$

Essendo le derivate parziali di f funzioni continue su $\mathbb{R}^2$, grazie al teorema del differenziale totale possiamo concludere che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$. Più in generale ogni polinomio è una funzione continua - e differenziabile - su $\mathbb{R}^2$.

- (ii) Alcuni esempi:

- ▶ la funzione $f(x, y) = \tan(x) \cos(y^2 - 1)$ è differenziabile in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$
- ▶ $g(x, y) = e^x$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$
- ▶ $h(x, y) = \log(y)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Osservazione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$. Il piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle,$$

Dunque

“il vettore $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale al vettore tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in P , che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$ ”.

L'equazione del piano tangente si scrive anche

$$\langle (\nabla f(x_0, y_0), -1), (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \rangle = 0,$$

e si legge:

“la normale al piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è data da $(\nabla f(x_0, y_0), -1)$ ”.

L'equazione della retta tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in (x_0, y_0) , con sostegno l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$, è data da

$$0 = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

Esempio

Sia $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2$. Scrivere

- l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, 4)$
- la retta tangente al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$ che parametrizzi l'insieme di livello $\{f(x, y) = 4\}$.

Soluzione

- f è un polinomio di terzo grado, e quindi è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
- $\nabla f(1, 2) = (1, 8)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, 4)$ è

$$z = 4 + \langle (1, 8), (x - 1, y - 2) \rangle$$

cioè $z = x + 8y - 13$.

- il vettore tangente nel punto $(1, 2)$ al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$, che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(1, 2)\}$, è ortogonale a $\nabla f(1, 2)$.
- Ne segue che la direzione di tale vettore tangente si ottiene cercando un vettore (a, b) tale che $(a, b) \cdot (1, 8) = 0$. Ad esempio $(a, b) = (-8, 1)$.

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data. f si dice di classe C^1 (in Ω) se f ammette derivate parziali continue in tutto Ω . Lo spazio delle funzioni di classe C^1 in Ω si denota con $C^1(\Omega)$.

Corollario (del teorema del differenziale totale)

Se $f \in C^1(\Omega)$, allora f è differenziabile in Ω .

Derivate di ordine superiore, punti stazionari e loro natura

Come nel caso di funzioni di una sola variabile, anche per funzioni di due variabili, si parla di derivate di ordine superiore.

Definizione

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto e siano ν e ξ due direzioni date. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ammette la derivata direzionale di ordine due $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \nu}$ nel punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ se

- esiste la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ in un intorno di (x_0, y_0)
- la funzione $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ è derivabile in (x_0, y_0) lungo la direzione ξ .

In tal caso si pone

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \nu}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \nu} \right)(x_0, y_0).$$

Osservazione

Sono MOLTO importanti le derivate seconde fatte rispetto alle direzioni degli assi coordinati

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y},$$

che sono dette derivate parziali di ordine 2 di f . Le derivate

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

sono dette derivate miste di f .

(i) Nel calcolo della derivata direzionale seconda lungo due direzioni **è importante l'ordine in cui le direzioni vengono considerate**. Può accadere che in (x_0, y_0) esista $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \nu}(x_0, y_0)$, ma non ESISTA la derivata direzionale $\frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial \xi}(x_0, y_0)$.

• Ad esempio si consideri $f(x, y) = x + |y|$.

▶ esiste $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$,

▶ non esiste $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$: infatti f non è derivabile parzialmente rispetto a y in $(0, 0)$.

(ii) Anche quando esistono entrambe le derivate direzionali, non è detto che coincidano.

• Ad esempio, presa

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

esistono in $(0, 0)$ entrambe la derivate miste di f , però

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Si veda il testo per i dettagli.

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data. f si dice di classe C^2 (in Ω) se f ammette derivate direzionali di ordine due per ogni coppia di direzioni ξ e ν e tali derivate sono continue in tutto Ω . Lo spazio delle funzioni di classe C^2 in Ω si denota con $C^2(\Omega)$.

Il seguente teorema fornisce un criterio sufficiente affinché le due derivate parziali miste esistano e siano uguali in un punto.

Teorema (Schwarz)

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) un punto di Ω . Supponiamo che $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sia di classe C^2 in un intorno di (x_0, y_0) . Allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Osservazione

Il teorema vale, più in generale, quando:

- (i) le direzioni degli assi coordinati sono sostituite da due generiche direzioni ξ e ν ;*
- (ii) esistono le derivate miste $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in (x_0, y_0) , ed almeno una di queste è continua in (x_0, y_0) .*

Punti stazionari, massimi e minimi liberi

Vogliamo ora determinare delle condizioni necessarie e delle condizioni sufficienti per stabilire se un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ (aperto di R^2) è un massimo/minimo di $f : \Omega \rightarrow R$.

Definizione

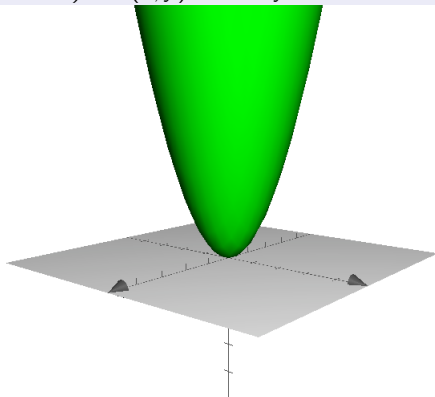
Sia $f : \Omega \rightarrow R$, con $\Omega \subseteq R^2$ aperto, una funzione differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$. Il punto (x_0, y_0) si dice stazionario per f (o critico) se $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Osservazione

In termini di piano tangente, il punto (x_0, y_0) è stazionario per f se, e soltanto se, il piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è orizzontale ed ha equazione $z = f(x_0, y_0)$.

(Punti stazionari)

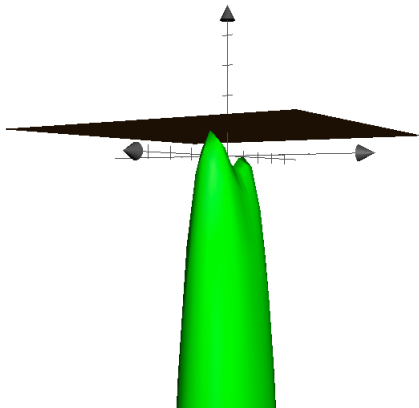
Un punto stazionario (minimo) di $f(x, y) = x^2 + y^2$.



(Punti stazionari)

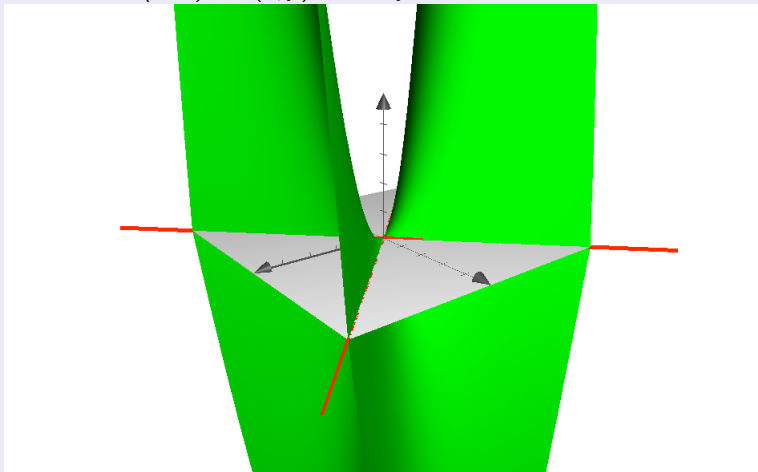
Un punto stazionario (massimo) di

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 - y^2) - \frac{1}{5}((x - 1)^2 + (y - 1)^2)$$



(Punti stazionari)

Un punto stazionario (sella) di $f(x, y) = x^2 - y^2$



Teorema

*Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, una funzione differenziabile in Ω .
Se $(x_0, y_0) \in \Omega$ è un punto di minimo (massimo) relativo interno per f ,
allora (x_0, y_0) è stazionario per f .*

La dimostrazione è immediata:

- se (ad esempio) il punto (x_0, y_0) è di minimo relativo interno per f , allora x_0 è di minimo relativo interno per la restrizione $g(x) = f_{\{y=y_0\}}(x) = f(x, y_0)$;
- un noto risultato per funzioni di una variabile, permette di concludere che $g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.
- Analogamente si prova che $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.



Osservazione

- (i) Il Teorema precedente implica che *i punti di massimo e minimo relativo interni vanno ricercati tra le soluzioni dell'equazione $\nabla f(x, y) = (0, 0)$.*
- (ii) **ATTENZIONE:** la stazionarietà d'un punto, ovvero l'avere piano tangente orizzontale, non permette di concludere che il punto sia di minimo o di massimo.
- ▶ la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ ha in $(0, 0)$ un punto stazionario che è punto di minimo assoluto di f ;
 - ▶ la funzione $g(x, y) = -x^2 - y^2$ ha in $(0, 0)$ un punto stazionario che è punto di massimo assoluto di f ;
 - ▶ la funzione $k(x, y) = x^2 - y^2$ ha in $(0, 0)$ un punto stazionario che non è di massimo né di minimo, in quanto $k(0, 0) = 0$, ma

$$k \leq 0 \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \geq |x|,$$

$$k \geq 0 \quad \text{per ogni } (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \leq |x|\}.$$

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che esistano le derivate parziali di ordine due nel punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si dice matrice Hessiana di f nel punto (x_0, y_0) la matrice

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla(f_x) \\ \nabla(f_y) \end{pmatrix}(x_0, y_0).$$

Osservazione

- In generale si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),$$

e quindi $H_f(x_0, y_0)$ non è una matrice simmetrica.

- Quando $f \in C^2(\Omega)$, vale il Teorema di Schwarz, e quindi $H_f(x_0, y_0)$ è sicuramente simmetrica.
- Quando $H_f(x_0, y_0)$ è simmetrica, essa possiede due autovalori reali λ_1, λ_2 (contati con la dovuta molteplicità).
- Gli autovalori di $H_f(x_0, y_0)$ sono, per definizione le radici dell'equazione in λ

$$\det(H_f(x_0, y_0) - \lambda I) = 0,$$

dove I è la matrice identità.

- Quando $H_f(x_0, y_0)$ è simmetrica, si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det H_f(x_0, y_0) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \end{cases}$$

Esempio

Consideriamo le funzioni

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2 \quad k(x, y) = x^2 - y^2,$$

Queste hanno $(0,0)$ come punto stazionario.

- *Per f tale punto è punto di minimo assoluto,*
- *per g è di massimo assoluto,*
- *per k non è né di massimo né di minimo.*

Studiando la matrice Hessiana nel punto $(0,0)$ possiamo distinguere queste tre funzioni.

Esempio (...continua...)

- la matrice Hessiana di f in $(0,0)$ è

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

che ha entrambi gli autovalori positivi

- la matrice Hessiana di g in $(0,0)$ è

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

che ha entrambi gli autovalori negativi.

- la matrice Hessiana di k in $(0,0)$ è la matrice

$$H_k(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

che ha un autovalore positivo e uno negativo.

Osservazione

Pertanto il segno degli autovalori della matrice Hessiana nel punto stazionario permette di distinguere i comportamenti delle tre funzioni nel punto $(0,0)$.

Il teorema che segue ci permette di generalizzare l'esempio precedente.

Teorema (Fondamentale per studiare max/min liberi)

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto stazionario per f . Valgono le seguenti proprietà:

- (i) se $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, allora (x_0, y_0) è punto di minimo relativo interno per f ;*
- (ii) se $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, allora (x_0, y_0) è punto di massimo relativo interno per f ;*
- (iii) se $\det H_f(x_0, y_0) < 0$, allora (x_0, y_0) è punto di sella per f .*

Una (parziale) dimostrazione di questo risultato è presentata nel testo.

Osservazione (Importante)

Le condizioni (i) e (ii) nel teorema precedente forniscono condizioni sufficienti affinché un punto stazionario di una funzione di classe C^2 sia di massimo o di minimo. Tali condizioni sono solo sufficienti. Infatti, consideriamo ad esempio la funzione $f(x, y) = x^2 + y^4$. La matrice Hessiana in $(0, 0)$ è la matrice

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono 0 e 2. Il punto $(0, 0)$ è punto di minimo assoluto di f in quanto $f \geq 0$ in $\mathbb{R}^2$ ed f si annulla in $(0, 0)$.

Analogamente se consideriamo la funzione $g(x, y) = -x^2 - y^4$ abbiamo che la matrice Hessiana in $(0, 0)$ è la matrice

$$H_g(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha per autovalori 0 e 2. Il punto $(0, 0)$ è di massimo assoluto per g .

Nei due esempi precedenti

- gli autovalori di $H_f(0,0)$ sono entrambi non negativi,
- gli autovalori di $H_g(0,0)$ sono entrambi non positivi.

Questo non è un caso. Infatti si può provare il seguente teorema

Teorema (Condizione necessaria)

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\Omega)$ in Ω aperto e $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto stazionario di f .

- *Se (x_0, y_0) è di massimo relativo per f allora gli autovalori della matrice $H_f(x_0, y_0)$ sono entrambi non positivi.*
- *Se (x_0, y_0) è di minimo relativo per f allora gli autovalori della matrice $H_f(x_0, y_0)$ sono entrambi non negativi.*

Osservazione

La precedente è solo una condizione necessaria. Infatti la funzione $f(x, y) = -x^3 + y^2$ ha in $(0,0)$ un punto stazionario e la matrice Hessiana in tale punto ha 0 e 2 come autovalori. Ma $f(0,0) = 0$ mentre $f(x,0) > 0$ se $x > 0$ e $f(x,0) < 0$ se $x < 0$. Quindi $(0,0)$ non è un punto di massimo di f .

Esempio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$. Determiniamone gli estremi relativi, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f in $\mathbb{R}^2$.

- $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$;
- $\nabla f(x, y) = (6x^2 - 6x, 3y^2 - 3)$;
- I punti stazionari di f sono le soluzioni di $\nabla f(x, y) = (0, 0)$;
- si trovano i punti $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$ $(-1, 1)$.

Esempio (...continua...)

- *Calcoliamo l'Hessiana. Si ha che:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x - 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y,$$

$$H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad H_f(0, -1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},$$

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},$$

da cui si deduce che

- ▶ $(0, 1)$ e $(1, -1)$ sono punti di sella, $f(0, 1) = -2$ e $f(1, -1) = 1$
- ▶ $(0, -1)$ è di massimo relativo, $f(0, -1) = 2$
- ▶ $(1, 1)$ è di minimo relativo, $f(1, 1) = -3$.
- Poiché $f(x, 0) = 2x^3 - 3x^2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = -\infty$.
- Quindi $\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = -\infty$ e $\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = +\infty$.

Massimi e minimi vincolati

(Descrizione del problema)

Sia E un chiuso limitato di R^2 e sia $f : E \rightarrow R$ una funzione continua. Il Teorema di Weierstrass garantisce che f ammette massimo e minimo assoluti in E , **però** non dice come calcolarli.

I sopra/sottolivelli sono un metodo grafico per calcolare tali valori. Risulta necessario saper rappresentare

- *gli insiemi di livello di f*
- *l'insieme E*

Ovvero, avendo l'espressione analitica di E nella forma $E = \{g(x, y) \leq 0\}$ sappiamo risolvere

$$\begin{cases} f(x, y) = k, \\ g(x, y) \leq 0, \end{cases}$$

cercando il (più piccolo)/(più grande) valore di k per cui il precedente sistema ammette soluzione?

Osservazione

- *In generale non è semplice rappresentare l'insieme E e gli insiemi di livello di f .*
- *Quindi bisogna utilizzare un modo alternativo per determinare il massimo e il minimo assoluti di f in E .*

(Procedimento)

Supponiamo che $f \in C^2(E \setminus \partial E)$. Ricordiamo $E \setminus \partial E$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$. Per determinare massimo e minimi assoluti di f su E si può procedere così

- (i) se $E \setminus \partial E \neq \emptyset$, determinare i punti stazionari di f in $E \setminus \partial E$ e studiarne la natura;*
- (ii) determinare i massimi ed i minimi della funzione f sull'insieme ∂E ; (∂E è chiuso e limitato, quindi l'esistenza di tali punti segue dal Teorema di Weierstrass)*
- (iii) confrontare i massimi e minimi assoluti di f su ∂E con i massimi e minimi relativi interni ottenuti al punto (i). Il valore più grande tra questi fornirà il massimo assoluto di f su E , il valore più piccolo, il minimo assoluto di f su E .*

(Procedimento)

Resta da vedere come studiare f su ∂E .

Supponiamo che esista $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1 tale che $\varphi([a, b]) = \partial E$. È immediato osservare che

- un punto $(x_0, y_0) \in \partial E$ è di massimo (risp. minimo) relativo di f ristretto a ∂E
- se, e solo se,
- posto $(x_0, y_0) = \varphi(t_0)$, il punto t_0 è di massimo (risp. minimo relativo) della funzione di una variabile $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(t) = f(\varphi(t))$

Lo studio di questa funzione può essere effettuato usando i metodi del calcolo differenziale per funzioni di una sola variabile.

Osservazione

Nel caso in cui $E = \{g(x, y) = k\}$ e non si sappia/riesca parametrizzare l'insieme, allora bisogna ricorrere al Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange, che esula dal programma di questo corso.

Osservazione (Importante)

Spesso $\partial E = \bigcup_{i=1}^n S_i$ risulta essere l'unione di sostegni $S_1, \dots, S_n$ di più curve di classe C^1 .

In questo caso, è possibile costruire una curva C^1 a tratti che abbia per sostegno ∂E , "incollando" le curve φ_j che hanno per sostegno S_j ($j = 1, \dots, n$). Ma per lo studio di f su ∂E è sufficiente

- considerare $f|_{S_j}$ ($j = 1, \dots, n$),
- studiare le funzioni $f \circ \varphi_j$ determinandone massimi e minimi assoluti
- confrontare tali valori al variare di j : il più grande di questi valori sarà il massimo di f su ∂E , il più piccolo, il minimo di f su ∂E .

Esempio

Determinare max/min di $f : \overline{B(0,0;1)} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \frac{1+|x|}{1+x^2+y^2}$.

Soluzione

f è una funzione continua, $\Omega = \overline{B(0,0;1)}$ è chiuso e limitato, e quindi per il Teorema di Weierstrass esistono max/min assoluti di f su Ω .

- f non è differenziabile in tutto $B(0,0;1)$ (non lo è nei punti della forma $(x,0)$ con $|x| < 1$, a causa del $|x|$ che compare all'interno di f)
- essendo $f(x,y) = f(-x,y)$ per ogni $(x,y) \in \overline{B(0,0;1)}$, possiamo studiare la funzione in

$$E = \{(x,y) \in \overline{B(0,0;1)} : x \geq 0\}.$$

- In E si ha $f(x,y) = \frac{1+x}{1+x^2+y^2}$, quindi f è di classe C^2 in $E \setminus \partial E = \{(x,y) \in B(0,0;1) : x > 0\}$.
- Si ottiene

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1-2x-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, -\frac{2y(1+x)}{(1+x^2+y^2)^2} \right),$$

per ogni $(x,y) \in E \setminus \partial E$.

Esempio (...continua...)

- $(-1 + \sqrt{2}, 0)$ è l'unico punto stazionario di f in $E \setminus \partial E$.
- **Attenzione:** risolvendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si ottiene anche $(-1 - \sqrt{2}, 0) \notin E \setminus \partial E$, e quindi va trascurato!
- $H_f(-1 + \sqrt{2}, 0)$ ha come autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = -3\sqrt{2}/4 - 1 < 0$. Quindi $(-1 + \sqrt{2}, 0)$ è un massimo locale interno di f e $f(-1 + \sqrt{2}, 0) = (\sqrt{2} + 1)/2$.
- Studiamo f su ∂E . $\partial E = S_1 \cup S_2$, ove
 - ▶ $S_1 := \{(0, y) : |y| \leq 1\}$ (segmento)
 - ▶ $S_2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$ (semicirconferenza).
- La funzione $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $\varphi(t) = (0, t)$ è una curva di classe C^1 e $\varphi([-1, 1]) = S_1$.
- Poniamo $g_1 = f \circ \varphi$: si ha che $g_1(t) = \frac{1}{1+t^2}$ per ogni $t \in [-1, 1]$.
- g_1 ha massimo in $t = 0$ e minimo in $t = \pm 1$. Di conseguenza $f|_{S_1}$ ha massimo nel punto $(0, 0)$ e minimo nei punti $(0, -1)$ e $(0, 1)$. Il massimo di $f|_{S_1}$ è 1 mentre il minimo è $1/2$.

Esempio (...continua...)

- Consideriamo ora $S_2 = \psi([-\pi/2, \pi/2])$, dove $\psi(t) = (\cos(t), \sin(t))$. La curva ψ è di classe C^1 .
- posto $g_2 = f \circ \psi$ si ha che $g_2(t) = \frac{1 + \cos(t)}{2}$ per ogni $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- g_2 ha massimo in $t = 0$ e minimo in $t = \pm \frac{\pi}{2}$. Di conseguenza $f|_{S_2}$ ha massimo nel punto $(1, 0)$ e minimo nei punti $(0, -1)$ e $(0, 1)$. Il massimo di $f|_{S_2}$ è 1 mentre il minimo è $1/2$.
- Poiché $(\sqrt{2} + 1)/2 > 1$, si deduce che

$$\max_{(x,y) \in E} f(x,y) = \max\{f(-1 + \sqrt{2}, 0), 1, 1\} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2},$$

$$\min_{(x,y) \in E} f(x,y) = \max\{f(0, -1), f(0, 1)\} = \frac{1}{2}.$$

Concludiamo questo esempio osservando che i punti di minimo che abbiamo trovato sono simmetrici rispetto all'asse delle y . Non è un caso; infatti: $f(x, -y) = f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in E$. Pertanto lo studio di f poteva essere ristretto all'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$ ma in questo modo avremmo avuto tre insiemi da parametrizzare.

Osservazione

Il motivo per cui massimi e minimi su insiemi non aperti sono detti vincolati, sta nel fatto che mentre un punto (x_0, y_0) di massimo/minimo relativo interno è di massimo/minimo per la restrizione di f ad ogni retta che passa per il punto (x_0, y_0) , se il punto (x_0, y_0) è di massimo/minimo per E ma non è interno ad E , non tutte le direzioni di avvicinamento a (x_0, y_0) sono ammesse. Il punto resta di max/min per f ristretta a curve che stanno sulla frontiera (il vincolo!)

Osservazione

Nell'Appendice ?? vedremo un altro metodo per determinare i massimi e minimi di funzioni regolari sul bordo di un aperto: il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.