Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Docente:
Marino Belloni

16 marzo 2009

Definizione

- *Un punto* (x_0, y_0) *è detto* `di accumulazione` *per* A *se per ogni* $r > 0$ $(B(x_0, y_0; r) \setminus \{(x_0, y_0)\}) \cap A \neq \emptyset$.
- *Analogamente, si dice che* ∞ *è* `di accumulazione` *per* A *se, per ogni* $R > 0$, $A \cap \mathcal{C}(B(0, 0; R)) \neq \emptyset$.

Osservazione

- *Un punto* $(x_0, y_0) \in R^2$ *di accumulazione per* A *può appartenere ad* A*, ma può anche non appartenere ad* A.
- *Se* (x_0, y_0) *è un punto interno di* A*, allora è di accumulazione per* A.
- *L'insieme* Q *di tutti i punti di accumulazione dell'insieme* $B(x_0, y_0; r)$ *è* $Q = B(x_0, y_0; r) \cup \partial B(x_0, y_0; r)$.

Definizione

Un punto $(x_0, y_0) \in R^2$ *è* `isolato` *per* A *se*

- *appartiene ad* A *e*
- *non è di accumulazione per* A.

Ovvero (x_0, y_0) *è isolato per* A *se esiste* $r > 0$ *tale che* $B(x_0, y_0; r) \cap A = \{(x_0, y_0)\}$.

Insiemi connessi

Definizione

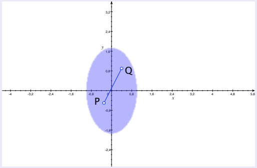
Un insieme A è detto connesso *se,*

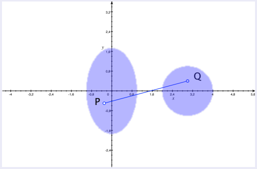
- *fissati comunque (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in A$,*
- *esiste $\varphi : [a, b] \to A$ continua tale che $\varphi(a) = (x_0, y_0)$ e $\varphi(b) = (x_1, y_1)$*

Osservazione

La definizione di connesso recita che per ogni coppia di punti (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in A$ esiste una curva continua con supporto tutto contenuto in A avente punto iniziale (x_0, y_0) e punto finale (x_1, y_1).

Vediamo un esempio di insieme connesso (l'ellisse) e di insieme non connesso (unione disgiunta di un'ellisse e di un cerchio).





Esercizio

- *In R gli insiemi connessi non banali (cioè non ridotti ad un solo punto) sono tutti e soli gli intervalli.*
- *L'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : 1 - x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ è connesso.*

Esempio

L'insieme $A = B(0, 0; 1) \cup B(4, 0; 1)$ **non***è connesso.*
Infatti, presi $(0, 0)$ e $(2, 0)$, son esiste nessuna curva che li congiunga avente sostegno contenuto in A.

- *per assurdo, esista $\varphi : [a, b] \to A$ cosifatta,*
- *la sua prima componente, $\varphi_1 : [a, b] \to R$ sarebbe una funzione continua tale che $\varphi_1(a) = 0$ e $\varphi_1(b) = 4$.*
- *Per il Teorema dei valori intermedi, $\varphi_1([a, b]) \supseteq [0, 4]$, cioè esiste $t \in]a, b[$ tale che $\varphi_1(t) = 2$.*
- *Ma A non contiene alcun punto con ascissa 2. Abbiamo quindi ottenuto l'assurdo.*

Insiemi convessi

Definizione

Un insieme $A \subseteq R^2$ è detto `convesso` *se, presi due qualsiasi $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1) \in A$,*

$$tP_0 + (1-t)P_1 \in A \qquad \forall t \in [0,1]$$

Osservazione

Un insieme è convesso se, presi due punti P_0 e P_1, il segmento che congiunge P_0 con P_1 è tutto contenuto in A.

Esempio

- *Il generico cerchio $B(x_0, y_0; r)$ è un esempio di insieme convesso,*
- *una corona circolare* `non` *è un insieme convesso (ma è un connesso).*
- *L'insieme $A = \{(x,y) \in R^2 : x, y > 0,\ xy > 1\}$ è convesso. (esercizio risolto sul testo)*

Osservazione

- *In R un insieme*

$$A \text{ connesso} \Longleftrightarrow A \text{ convesso} \Longleftrightarrow A \text{ intervallo}.$$

- *In R^2 (e più in generale in R^n)*

$$A \text{ convesso} \Longrightarrow \; A \text{ connesso},$$

ma, in generale, non vale il viceversa. Si pensi ad esempio ad una corona circolare

Esercizio

Siano $A, B \subseteq R^2$ convessi. Quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali sono false:

(i) $A \cup B$ *è un insieme convesso;*
- *FALSO*

(ii) $A \cap B$ *è un insieme convesso;*
- *VERO*

(iii) $A \setminus B$ *è un insieme convesso;*
- *FALSO*

(iv) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ *è un insieme convesso;*
- *FALSO*

(v) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *è un insieme convesso.*
- *FALSO*: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \equiv (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Esercizio

Determinare e disegnate il dominio massimale della funzione $f(x, y) = (6 + 2x + 5y)\log(x^2 + 3y)$.

Esercizio

Siano $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ *e* $g(x,y) = x^2 + y^2$*. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.*

(i) $\{f > 1\} \cap \{g > 1\} = \emptyset$.

- *VERA:* $f(x,y) \leq 1$ *per ogni* (x,y).

(ii) $\{f > 0\} \cap \{g < 0\} \neq \emptyset$.

- *VERA:* $g(x,y) \geq 0$ *per ogni* (x,y)

(iii) $\{f > \frac{1}{2}\} \subseteq \{g > \frac{1}{2}\}$.

- *FALSA:* $f(0,0) = 1 > \frac{1}{2}$, *mentre* $g(0,0) = 0 < \frac{1}{2}$

(iv) $\{f \leq \frac{1}{2}\} \cup \{g \geq \frac{1}{4}\} = R^2$.

- *FALSA:* $f(0,0) = 1 > \frac{1}{2}$, *come pure* $g(0,0) = 0 < \frac{1}{4}$

Esercizio

Sia $f : R^2 \to R$ *una funzione continua tale che* $\{f \geq 1\} = R^2$. *Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali non sono vere in generale.*

(i) *Esiste* $(x_0, y_0) \in R^2$ *tale che* $\min_{R^2} f = f(x_0, y_0)$.

- *FALSA: si prenda* $f(x, y) = e^{-x^2} + 1$, *che ha massimo* $M = f(0, 0) = 2$ *ma non ha minimo e* $f > 1$ *per ogni* (x, y)

(ii) f *è limitata inferiormente.*

- *VERA:* $f > 1$ *per ogni* (x, y)

(iii) *Esiste* $k > 1$ *tale che* $\{f > k\}$ *è limitato.*

- *FALSA: si prenda* $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$. *Questa soddisfa* $f \geq 2 > 1$ *per ogni* (x, y), *ma* $\{f > k\} = \{x^2 + y^2 > k - 1\}$ *che è illimitato per ogni* $k > 1$

(iv) f *è limitata superiormente.*

- *FALSA: si prenda* $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

Osservazione

Sia data una funzione f *di tipo radiale, cioè della forma*

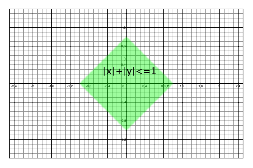
$$f(x,y) = h(x^2 + y^2)$$

per qualche funzione h *definita su un intervallo* $I \subseteq [0, +\infty[$

- *per queste funzioni il valore in un punto* (x, y) *dipende solo da* $d((x, y), (0, 0))$
- f *sarà definita in*
$$A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \in I\}$$
- *per determinare i punti di minimo/massimo di* f *su* A *basta studiare i punti di minimo e massimo di* h *su* I.
- *Ad esempio, se* $t_0 \in I$ *è un punto di minimo relativo (risp. assoluto) di* h*, allora ogni punto di* $B(0, 0; \sqrt{t_0})$ *sarà un punto di minimo relativo (risp. assoluto) di* f *e il minimo sarà* $h(t_0)$.

Esempio

Sia $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$*; vogliamo determinare il massimo ed il minimo di* f *sull'insieme* $A = \{(x,y) \in R^2 : \ |x|+|y| \leq 1\}$.



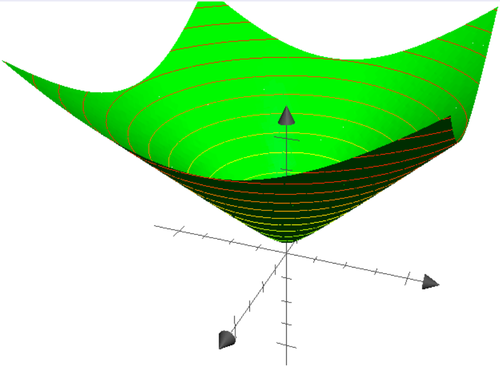
- *Gli insiemi di livello di* f *sono circonferenze centrate nell'origine.*
- $f(x,y) \geq 1$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$ *e* $f(0,0)=1$*, quindi*

$$1 = f(0,0) = \min\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}.$$

- $\{f \geq \sqrt{2}\} \cap A$ *è formato dai 4 vertici del rombo* A*,*
- $\{f > \sqrt{2}\} \cap A = \emptyset$*,*
- *ne segue che*

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= f(0,1) = f(1,0) = f(0,-1) = f(-1,0) \\ &= \max\{f(x,y) \in R^2 : \ (x,y) \in A\}. \end{aligned}$$

(Grafico di $f = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$)



Limiti

Definizione (Limite al finito)

Siano $f : A \subseteq R^2 \to R$ *e* $(x_0, y_0) \in R^2$ *un punto di accumulazione per* A. *Fissato* $\ell \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$, *si dice che* f *tende a* ℓ *per* (x, y) *tendente a* (x_0, y_0) *se*

$$\forall J \in \mathcal{U}_\ell \ \exists\, H \in \mathcal{U}_{(x_0,y_0)} : \ f(x, y) \in J, \ \forall (x, y) \in H \cap A \setminus \{(x_0, y_0)\},$$

e si scrive

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell.$$

Definizione (Limite all'infinito)

Sia $f : A \subseteq R^2 \to R$ *e sia* ∞ *punto di accumulazione di* A. *Fissato* $\ell \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$, *si dice che* f *tende a* ℓ *per* $\|(x, y)\| \to +\infty$ *se*

$$\forall\, J \in \mathcal{U}_\ell \ \exists\, H \in \mathcal{U}_\infty : \ f(x, y) \in J, \ \forall (x, y) \in H \cap A,$$

e si scrive

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x, y) = \ell.$$

Osservazione

Come nel caso di funzioni di una variabile, il limite, se *esiste, è unico .*

Definizione

Sia $f : A \subseteq R^2 \to R$ *una funzione data e* $B \subset A$. *Diciamo* `restrizione di f a` B, *e si scrive* $f_{|B}$, *la funzione*

- *definita su* B
- *tale che* $f_{|B}(x, y) = f(x, y)$ *per ogni* $(x, y) \in B$.

Osservazione (Importante)

Se $f \to \ell \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ *quando* $(x, y) \to (x_0, y_0)$ *di accumulazione per il suo dominio, allora ogni* $f_{|B} \to \ell$, *qualunque sia* $B \subset A$, *tale che* (x_0, y_0) *sia di accumulazione per* B

Questa osservazione è utile per dimostrare che non esiste il limite di $f : A \to R$ *in* (x_0, y_0). *Infatti, se troviamo due restrizioni di* f *per le quali esistono, e sono diversi, i limiti per* $(x, y) \to (x_0, y_0)$, *oppure una restrizione di* f *che non ammette limite per* $(x, y) \to (x_0, y_0)$, *allora non esiste il limite per* (x, y) *tendente a* (x_0, y_0) *di* f.

Gli stessi risultati valgono se sostituiamo (x_0, y_0) *con* ∞.

Osservazione

Se esiste il limite di una restrizione non è detto che esista il limite della funzione.

Osservazione

Per funzioni di due variabili, a differenza del caso unidimensionale, ci sono infiniti modi per "avvicinarsi" a ∞ (o ad un punto $(x_0, y_0) \in R^2$).
Sia f definita in tutto R^2. Possiamo avvicinarci a ∞

- *lungo l'asse delle x, cioè muovendoci all'interno dell'insieme $\{(x, 0) : x \in R\}$,*
- *lungo l'asse delle y, cioè muovendoci all'interno dell'insieme $\{(x, 0) : x \in R\}$,*
- *lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante,*
- *lungo la parabola $y = x^2$, etc.*

Esempio

La funzione $f(x, y) = x^2 - y^4$ non ha limite in ∞. Infatti:

- $f_{|\{y=0\}}(x, y) = f(x, 0) = x^2 \to +\infty$ *quando* $|x| \to +\infty$;
- $f_{|\{x=0\}}(x, y) = f(0, y) = -y^4 \to -\infty$ *quando* $|y| \to +\infty$;
- *dato che il limite, se esiste, è unico, segue che il limite in esame non esiste.*

Teorema (Polari finito/∞)

Sia $f : \Omega \to R$, *con* $\Omega \supseteq \mathcal{C}(B(0,0;R))$ *per qualche* $R > 0$. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $f \to \ell \in R$ *quando* $\|(x,y)\| \to +\infty$;

(ii) *esistono* $\rho_0 > 0$ *e una funzione* $g :]\rho_0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *tale che*

- $g(\rho)$ *tende a* 0 *quando* $\rho \to +\infty$;
- $|f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) - \ell| \leq g(\rho)$ *per ogni* $\rho > \rho_0$ *e per ogni* $\theta \in [0, 2\pi]$.

Teorema (Polari $+\infty/\infty$)

Sia $f : \Omega \to R$, *con* $\Omega \supseteq \mathcal{C}(B(0,0;R))$ *per qualche* $R > 0$. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $f \to +\infty$ *quando* $\|(x,y)\| \to +\infty$;

(ii) *esistono* $\rho_0 > 0$ *e una funzione* $g :]\rho_0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *tali che*

- $g(\rho)$ *tende a* $+\infty$ *quando* $\rho \to +\infty$;
- $f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \geq g(\rho)$ *per ogni* $\rho > \rho_0$ *e per ogni* $\theta \in [0, 2\pi]$.

Analoghi risultati valgono per il calcolo del limite in (x_0, y_0).

Teorema (Polari finito/finito)

Sia $f : \Omega \to R$, con Ω aperto di R^2 contenente il punto (x_0, y_0). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) *$f \to \ell \in R$ quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$;*

(ii) *esistono $\rho_0 > 0$ e una funzione $g :]0, \rho_0[\to [0, +\infty[$ tale che*
- *$g(\rho)$ tende a 0 quando $\rho \to 0^+$;*
- *$|f(x_0 + \rho\cos(\theta), y_0 + \rho\sin(\theta)) - \ell| \leq g(\rho)$ per ogni $\rho \in]0, \rho_0[$ e per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.*

Teorema (Polari $+\infty$/finito)

Sia $f : \Omega \to R$, con Ω aperto di R^2 contenente il punto (x_0, y_0). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) *$f \to +\infty$ quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$;*

(ii) *esistono $\rho_0 > 0$ e una funzione $g :]0, \rho_0[\to [0, +\infty[$ tale che*
- *$g(\rho)$ tende a $+\infty$ quando $\rho \to 0^+$;*
- *$f(x_0 + \rho\cos(\theta), y_0 + \rho\sin(\theta)) \geq g(\rho)$ per ogni $\rho \in]0, \rho_0[$ e per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.*

Esempio

Studiamo l'esistenza del

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \tag{0.1}$$

- $f(0,y) = y$ *per ogni* $y \neq 0$. *Quindi* $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$.
- $f(x,mx) = \dfrac{1+m^3}{1+m^2}x$ *per ogni* $x \neq 0$ *e ogni* $m \in R$. *Quindi,*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,mx) = 0.$$

- *Questo non basta a garantire l'esistenza del limite in* $(0,0)$*però è un buon indizio ...*
- *Dimostriamo che il limite esiste e vale* 0. *Si ha*

$$\begin{aligned} |f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))| &= \left|\frac{\rho^3((\cos(\theta))^3+(\sin(\theta))^3)}{\rho^2}\right| \qquad \forall\rho>0,\ \forall\theta\in[0,2\pi] \\ &\leq \rho(|\cos(\theta)|^3+|\sin(\theta)|^3) \leq \rho, \end{aligned}$$

- *Per il Teorema (Polari finito/finito) e si trova che il limite esiste e vale 0.*

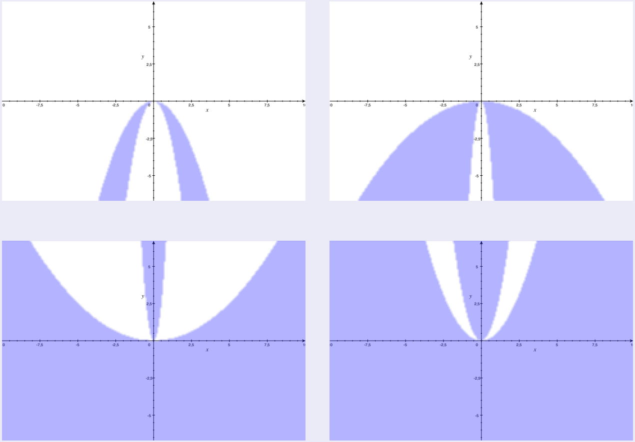
Esempio

La funzione $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ *non ha limite per* $(x,y) \to (0,0)$.

- $f(x,0) = 0$, $f(0,y) = 0$ *per ogni* $x \neq 0$ *e ogni* $y \neq 0$.
- *Inoltre*
  $$f(x,mx) = \frac{m^2 x^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{m^2 x}{x^2 + m^2}, \qquad x \neq 0,$$
  per ogni $m \neq 0$.
- *Di conseguenza,*
  $$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{y \to 0} f(0,y) = \lim_{x \to 0} f(x,mx) = 0.$$
- *Consideriamo* $f_{|\{y=x^2\}}$. *Si ha*
  $$f(x,x^2) = \frac{1}{2},$$
  e quindi $f(x,x^2)$ *tende a* $1/2$ *per* $x \to 0$.
- *Per l'unicità del limite,* f *non ammette limite per* $(x,y) \to (0,0)$.

(Sottolivelli di $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$)

Nelle varie figure troviamo i sottolivelli $\{f < -0,4\}$, $\{f < -0,1\}$, $\{f < 0,1\}$ *e* $\{f < 0,4\}$.



Osservazione (Importante)

I risultati che valevano in R continuano a valere in R^n

- *il limite della somma è uguale alla somma dei limiti,*
- *il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti,*
- *il limite del rapporto di due funzioni è uguale al rapporto dei limiti,*

purché abbia senso calcolare la somma, il rapporto, il quoziente dei limiti.
Continuano a valere anche

- *i Teoremi di confronto (in particolare il Teorema dei due Carabinieri.*
- *il Teorema sul limite della funzione composta.*

Teorema

Sia data $f : A \subseteq R \to R$*. Sia* (x_0, y_0) *di accumulazione per* A*. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- *esiste* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$*;*
- *comunque si prenda* $\{(x_n, y_n)\} \subseteq (A \setminus (x_0, y_0))$*, tale che* $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ *per* $n \to +\infty$*, allora* $f(x_n, y_n) \to \ell$*.*

Teorema

Sia data $f : A \subseteq R \to R$*. Sia* ∞ *di accumulazione per* A*. Le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti:*

- *esiste il* $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = \ell$*;*
- *comunque si prenda* $\{(x_n, y_n)\} \subseteq A$*, tale che* $x_n^2 + y_n^2 \to +\infty$ *per* $n \to +\infty$*, allora* $f(x_n, y_n) \to \ell$*.*

Esempio

Proviamo che **non** *esiste il limite* $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} \sin(|x| + |y|)$.

- *Sia* $\{(x_n, y_n)\} = \{\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 0)\}$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$.
  - $x_n^2 + y_n^2 \to +\infty$ *per* n *tendente a* $+\infty$.
  - *Inoltre* $f(x_n, y_n) = 1$ *per ogni* n *e quindi* $\lim_{n \to +\infty} f(x_n, y_n) = 1$.
- *Sia ora* $\{(\hat{x}_n, \hat{y}_n)\} = \{(0, \pi + 2\pi n)\}$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$.
  - $\hat{x}_n^2 + \hat{y}_n^2 \to +\infty$ *per* n *tendente a* $+\infty$
  - $f(\hat{x}_n, \hat{y}_n) = 0$ *per ogni* n*. Quindi* $\lim_{n \to +\infty} f(\hat{x}_n, \hat{y}_n) = 0$
- *per l'enunciato (ii) del Teorema precedente non esiste il limite di* f *per* $\|(x, y)\| \to +\infty$.

Funzioni continue

Definizione

La funzione $f : \Omega \to R$ *si dice* `continua in` $(x_0, y_0) \in \Omega$ *se*

$$\forall\ J \in \mathcal{U}_{f(x_0,y_0)}\ \exists\ I \in \mathcal{U}_{(x_0,y_0)} :\ f(x,y) \in J\ \ \forall\ (x,y) \in I \cap \Omega.$$

Osservazione

(i) *Se* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *è un punto isolato, allora la funzione è continua in* (x_0, y_0).

(ii) *Se* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *è punto di accumulazione di* Ω*, allora* f *è continua in* (x_0, y_0) *se, e solo se,* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Osservazione

Siano $f, g : \Omega \subseteq R^2 \to R$ *due funzioni continue in* $(x_0, y_0) \in \Omega$*. Allora*

- $f + g$ *è continua in* (x_0, y_0);
- fg *è continua in* (x_0, y_0);
- *se* $g(x_0, y_0) \neq 0$, f/g *è continua in* (x_0, y_0);

Teorema (Continuità della funzione composta)

Sia $f : \Omega \to R$ una funzione continua in $(x_0, y_0) \in \Omega$. Allora

(i) *se $\varphi : I \to R$ è una curva tale che $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$, allora la funzione $f \circ \varphi$ è continua in t_0;*

(ii) *se $g : A \subseteq R \to R$ è continua in $f(x_0, y_0)$, allora $g \circ f$ è continua in (x_0, y_0).*

Esempio

(i) *Le funzioni* $f(x,y) = x$ *e* $g(x,y) = y$ *sono continue su tutto* R^2.

(ii) *Se* $f(x,y) = h(x)$ *o* $g(x,y) = k(y)$ *con* h *e* k *funzioni continue su un insieme* $A \subseteq R$, *allora le funzioni* f *e* g *sono continue, rispettivamente, in* $A \times R$ *e in* $R \times A$. *Quindi sono continue su* R^2 *le funzioni*

- $f(x,y) = \sin(x)$,
- $f(x,y) = \cos(y)$,
- $f(x,y) = \mathrm{e}^x$,
- ...

(iii) *Ogni polinomio in due variabili è una funzione continua in* R^2.

(iv) *La funzione*

$$f(x,y) = \log(2 + \mathrm{e}^{x+y} + \sin(xy))$$

è continua su tutto R^2.

I seguenti due teoremi sono l'estensione al caso di funzioni di due variabili di ben noti risultati per funzioni di variabile reale.

Teorema (Teorema di esistenza degli zeri)

Sia $\Omega \subseteq R^2$ *un connesso e sia* $f : \Omega \to R$ *continua. Se esistono* (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in \Omega$ *tali che* $f(x_0, y_0) < 0 < f(x_1, y_1)$, *allora esiste* $(x, y) \in \Omega$ *tale che* $f(x, y) = 0$.

Teorema (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : C \to R$ *una funzione continua nell'insieme chiuso e limitato* $C \subset R^2$. *Allora* f *ammette minimo* m *e massimo* M *assoluti in* C, *cioè esistono* $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in C$ *tali che*

$$m = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1) = M, \qquad \text{per ogni } (x, y) \in C.$$

Corollario (del teorema di Weierstrass)

Sia $f : R^2 \to R$ *continua tale che esiste* $\ell = \lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y)$.

(i) *Se* $\ell = +\infty$, *allora esiste* $m = \min_{(x,y) \in R^2} f(x,y)$.

(ii) *Se* $\ell = -\infty$, *allora esiste* $M = \max_{(x,y) \in R^2} f(x,y)$.

(iii) *Se* $\ell = 0$ *ed esiste* $(\hat{x}, \hat{y}) \in R^2$ *tale che* $f(\hat{x}, \hat{y}) > 0$, *allora esiste*

$$M = \max_{(x,y) \in R^2} f(x,y).$$

(iv) *Se* $\ell = 0$ *ed esiste* $(\hat{x}, \hat{y}) \in R^2$ *tale che* $f(\hat{x}, \hat{y}) < 0$, *allora esiste*

$$m = \min_{(x,y) \in R^2} f(x,y).$$

Dimostrazione di (i).

- Poiché $\ell = +\infty$, esiste $r > 0$ tale che $f(x,y) \geq f(0,0) + 1$ per ogni $(x,y) \in R^2$ tale che $x^2 + y^2 > r^2$.
- Ne segue che
$$\inf_{(x,y)\in R^2} f(x,y) = \inf_{(x,y)\in \overline{B(0,0;r)}} f(x,y)$$
- Ora $\overline{B(0,0;r)}$ è un insieme chiuso e limitato.
- Quindi per il Teorema di Weierstrass la restrizione di f a $\overline{B(0,0;r)}$ ammette minimo assoluto su $\overline{B(0,0;r)}$ e tale minimo risulta minimo assoluto anche per f.

Per dimostrare la (ii) basta applicare la precedente dimostrazione alla funzione $-f$
Le dimostrazioni delle proprietà (iii) e (iv) sono del tutto analoghe e quindi sono lasciate al lettore. $\square$