Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Docente:
Marino Belloni

09 marzo 2009

Coordinate Polari

È noto che è possibile individuare un generico punto (x, y) *di* $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ *attraverso due numeri* ρ *e* θ *detti coordinate polari di* (x, y). *Sia* $P \neq O = (0,0)$ *e consideriamo il segmento* OP.

- ρ *rappresenta la* lunghezza del segmento OP
- θ *rappresenta* la misura (in radianti!) dell'angolo *formato da* OP *con la semiretta* $\{(x,0) : x > 0\}$

θ è l'angolo corrispondente alla rotazione *in verso antiorario necessaria per sovrapporre la semiretta delle ascisse positive alla semiretta con origine il punto* O *e contenente* P.
Si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e* $]0, +\infty[\times [0, 2\pi[$

Coordinate Polari

È noto che è possibile individuare un generico punto (x, y) *di* $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ *attraverso due numeri* ρ *e* θ *detti coordinate polari di* (x, y)*. Sia* $P \neq O = (0,0)$ *e consideriamo il segmento* OP*.*

- ρ *rappresenta la* `lunghezza del segmento` OP
- θ *rappresenta* `la misura (in radianti!) dell'angolo` *formato da* OP *con la semiretta* $\{(x,0) : x > 0\}$

θ è `l'angolo corrispondente alla rotazione` *in verso antiorario necessaria per sovrapporre la semiretta delle ascisse positive alla semiretta con origine il punto* O *e contenente* P*.*

Si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e* $]0, +\infty[\, \times [0, 2\pi[$

Coordinate Polari

È noto che è possibile individuare un generico punto (x, y) *di* $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ *attraverso due numeri* ρ *e* θ *detti coordinate polari di* (x, y). *Sia* $P \neq O = (0,0)$ *e consideriamo il segmento* OP.

- ρ *rappresenta la* `lunghezza del segmento` OP
- θ *rappresenta* `la misura (in radianti!) dell'angolo` *formato da* OP *con la semiretta* $\{(x, 0) : x > 0\}$

θ è `l'angolo corrispondente alla rotazione` *in verso antiorario necessaria per sovrapporre la semiretta delle ascisse positive alla semiretta con origine il punto* O *e contenente* P.

Si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e* $]0, +\infty[\times [0, 2\pi[$

Coordinate Polari

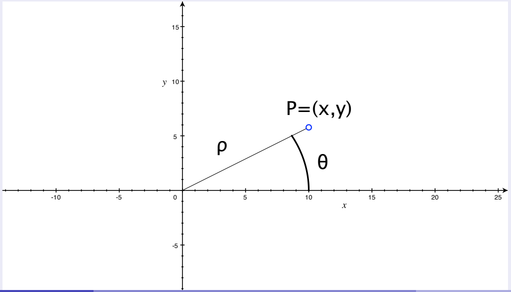
È noto che è possibile individuare un generico punto (x, y) *di* $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ *attraverso due numeri* ρ *e* θ *detti coordinate polari di* (x, y). *Sia* $P \neq O = (0,0)$ *e consideriamo il segmento* OP.

- ρ *rappresenta la* `lunghezza del segmento` OP
- θ *rappresenta* `la misura (in radianti!) dell'angolo` *formato da* OP *con la semiretta* $\{(x, 0) : x > 0\}$

θ è `l'angolo corrispondente alla rotazione` *in verso antiorario necessaria per sovrapporre la semiretta delle ascisse positive alla semiretta con origine il punto* O *e contenente* P.
Si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi
$R^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e* $]0, +\infty[\, \times [0, 2\pi[$

Coordinate Polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & se\ x>0,\ y\geq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & se\ x=0\ e\ y>0, \\ \pi+\arctan\left(\frac{y}{x}\right), & se\ x<0, \\ \pi+\frac{\pi}{2}, & se\ x=0\ e\ y<0. \\ 2\pi+\arctan\left(\frac{y}{x}\right), & se\ x>0,\ y<0, \end{cases} \end{cases}$$



Una curva in coordinate polari si può esprimere come

$$\rho = f(\theta), \quad \theta \in I$$

e le equazioni parametriche diventano

$$\begin{cases} x(t) = f(t)\cos(t) \\ y(t) = f(t)\sin(t) \end{cases} \qquad t \in I.$$

Se invece l'equazione in coordinate polari si scrive come

$$\theta = g(\rho), \quad \rho \in J \subseteq [0, +\infty[$$

le equazioni parametriche diventano

$$\begin{cases} x(t) = t\cos(g(t)) \\ y(t) = t\sin(g(t)) \end{cases} , \quad t \in J.$$

Una curva in coordinate polari si può esprimere come

$$\rho = f(\theta), \quad \theta \in I$$

e le equazioni parametriche diventano

$$\begin{cases} x(t) = f(t)\cos(t) \\ y(t) = f(t)\sin(t) \end{cases} \qquad t \in I.$$

Se invece l'equazione in coordinate polari si scrive come

$$\theta = g(\rho), \quad \rho \in J \subseteq [0, +\infty[$$

le equazioni parametriche diventano

$$\begin{cases} x(t) = t\cos(g(t)) \\ y(t) = t\sin(g(t)) \end{cases} , \quad t \in J.$$

Esempio (La Circonferenza)

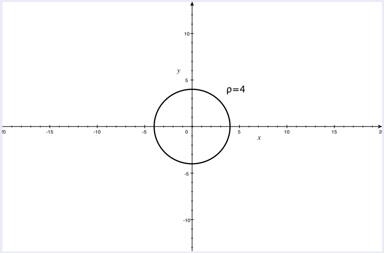
(i) *La curva*

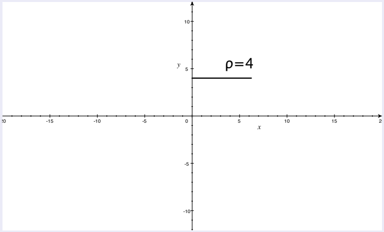
$$\begin{cases} x(t) = 4\cos(t) \\ y(t) = 4\sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

in coordinate polari diventa

$$\rho = 4, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Nelle figure si può vedere il sostegno della curva sia in coordinate cartesiane che in coordinate polari.





Esempio (La Spirale di Archimede)

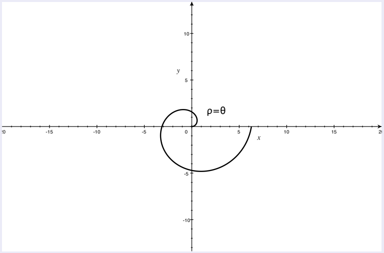
(ii) *La curva di equazione polare*

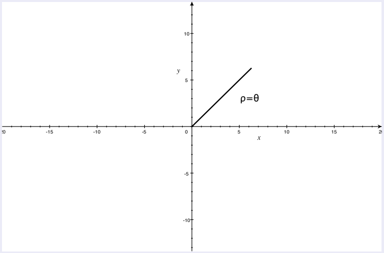
$$\rho = \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

in coordinate cartesiane diventa

$$\begin{cases} x(t) = t\cos(t) \\ y(t) = t\sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Il sostegno della curva è rappresentato in figura sia in coordinate cartesiane che in coordinate polari.





Esempio

Determiniamo il sostegno della curva, espressa in coordinate polari dalla relazione $\rho = 6\sin(\theta)$ *per ogni* $\theta \in [0, \pi]$.

Le equazioni parametriche della curva sono le seguenti:

$$(x(\theta), y(\theta)) = (6\sin(\theta)\cos(\theta),\ 6\sin(\theta)\sin\theta), \qquad \textit{per ogni } \theta \in [0, \pi].$$

Ma $6\sin\theta\cos\theta = 3\sin(2\theta)$ *mentre*

$$\begin{aligned} 3 - 3\cos(2\theta) &= 3 - 3(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= 3 - 3(1 - 2\sin^2\theta) \\ &= 6\sin^2\theta \end{aligned}$$

e quindi si arriva alla seguente rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x(t) = 3\sin(2t) \\ y(t) = 3 - 3\cos(2t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi],$$

da cui segue che il sostegno della curva è la circonferenza con centro nel punto $(0, 3)$ *e raggio 3, percorsa in senso antiorario.*

Esempio

Determiniamo il sostegno della curva, espressa in coordinate polari dalla relazione $\rho = 6\sin(\theta)$ *per ogni* $\theta \in [0, \pi]$.
Le equazioni parametriche della curva sono le seguenti:

$$(x(\theta), y(\theta)) = (6\sin(\theta)\cos(\theta),\ 6\sin(\theta)\sin\theta), \qquad \textit{per ogni } \theta \in [0, \pi].$$

Ma $6\sin\theta\cos\theta = 3\sin(2\theta)$ *mentre*

$$\begin{aligned} 3 - 3\cos(2\theta) &= 3 - 3(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= 3 - 3(1 - 2\sin^2\theta) \\ &= 6\sin^2\theta \end{aligned}$$

e quindi si arriva alla seguente rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x(t) = 3\sin(2t) \\ y(t) = 3 - 3\cos(2t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi],$$

da cui segue che il sostegno della curva è la circonferenza con centro nel punto $(0, 3)$ *e raggio 3, percorsa in senso antiorario.*

Esempio

Determiniamo il sostegno della curva, espressa in coordinate polari dalla relazione $\rho = 6\sin(\theta)$ *per ogni* $\theta \in [0, \pi]$.
Le equazioni parametriche della curva sono le seguenti:

$$(x(\theta), y(\theta)) = (6\sin(\theta)\cos(\theta),\ 6\sin(\theta)\sin\theta), \qquad \textit{per ogni } \theta \in [0, \pi].$$

Ma $6\sin\theta\cos\theta = 3\sin(2\theta)$ *mentre*

$$\begin{aligned} 3 - 3\cos(2\theta) &= 3 - 3(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= 3 - 3(1 - 2\sin^2\theta) \\ &= 6\sin^2\theta \end{aligned}$$

e quindi si arriva alla seguente rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x(t) = 3\sin(2t) \\ y(t) = 3 - 3\cos(2t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi],$$

da cui segue che il sostegno della curva è la circonferenza con centro nel punto $(0, 3)$ *e raggio 3, percorsa in senso antiorario.*

Esempio

Determiniamo il sostegno della curva, espressa in coordinate polari dalla relazione $\rho = 6\sin(\theta)$ *per ogni* $\theta \in [0, \pi]$.

Le equazioni parametriche della curva sono le seguenti:

$$(x(\theta), y(\theta)) = (6\sin(\theta)\cos(\theta),\ 6\sin(\theta)\sin\theta), \qquad \textit{per ogni } \theta \in [0, \pi].$$

Ma $6\sin\theta\cos\theta = 3\sin(2\theta)$ *mentre*

$$\begin{aligned} 3 - 3\cos(2\theta) &= 3 - 3(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= 3 - 3(1 - 2\sin^2\theta) \\ &= 6\sin^2\theta \end{aligned}$$

e quindi si arriva alla seguente rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x(t) = 3\sin(2t) \\ y(t) = 3 - 3\cos(2t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi],$$

da cui segue che il sostegno della curva è la circonferenza con centro nel punto $(0, 3)$ *e raggio 3, percorsa in senso antiorario.*

Esempio

Determiniamo il sostegno della curva, espressa in coordinate polari dalla relazione $\rho = 6\sin(\theta)$ *per ogni* $\theta \in [0, \pi]$.
Le equazioni parametriche della curva sono le seguenti:

$$(x(\theta), y(\theta)) = (6\sin(\theta)\cos(\theta),\ 6\sin(\theta)\sin\theta), \qquad \text{per ogni } \theta \in [0, \pi].$$

Ma $6\sin\theta\cos\theta = 3\sin(2\theta)$ *mentre*

$$\begin{aligned} 3 - 3\cos(2\theta) &= 3 - 3(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= 3 - 3(1 - 2\sin^2\theta) \\ &= 6\sin^2\theta \end{aligned}$$

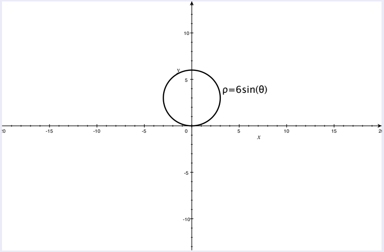
e quindi si arriva alla seguente rappresentazione parametrica

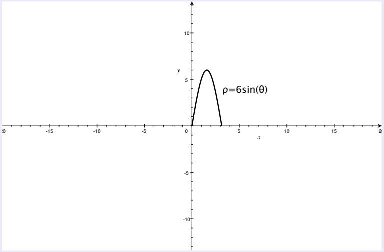
$$\begin{cases} x(t) = 3\sin(2t) \\ y(t) = 3 - 3\cos(2t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi],$$

da cui segue che il sostegno della curva è la circonferenza con centro nel punto $(0, 3)$ *e raggio* 3*, percorsa in senso antiorario.*

(Cerchio di equazione $\rho = 6\sin\theta$)

Il sostegno della curva è rappresentato in figura sia in coordinate cartesiane che in coordinate polari.





Esempio

(ii) *Determiniamo le equazioni parametriche della curva* $\rho = \tan(\theta)$ *con* $\theta \in [0, \pi/2[$. *In questo caso otteniamo come equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \dfrac{(\sin(t))^2}{\cos(t)} \end{cases} , \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

Per determinare l'equazione del sostegno della curva basta ricordare che, quando $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(t) = \sqrt{1 - (\sin(t))^2}$. *Quindi,*

$$y(t) = \frac{x^2(t)}{\sqrt{1 - x^2(t)}}, \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

Pertanto l'equazione cartesiana del sostegno è $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lunghezza di una curva

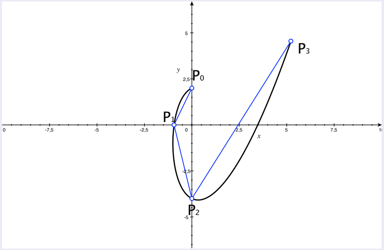
Data $\varphi : [a, b] \to R^2$, *sia data* $\mathcal{A} = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ *una suddivisione di* $[a, b]$. *Allora risultano individuati dei punti sul sostegno della curva*

$$\{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\} \longrightarrow \{P_0 = \varphi(t_0), P_1 = \varphi(t_1), \ldots, P_n = \varphi(t_n)\}$$

che determinano una spezzata (curva lineare a tratti)

$$\varphi_{\mathcal{A}} = \overline{P_0P_1} \cup \overline{P_1P_2} \cup \ldots \cup \overline{P_{n-1}P_n},$$

che approssima la curva tanto meglio quanto più fitta è la suddivisione.



La lunghezza della spezzata è

$$L(\varphi_{\mathcal{A}}) = d(P_0, P_1) + d(P_1, P_2) + \ldots + d(P_{n-1}, P_n) = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i),$$

Lunghezza di una curva

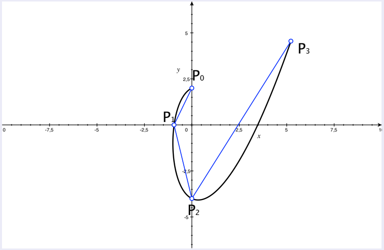
Data $\varphi : [a,b] \to R^2$, sia data $\mathcal{A} = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una suddivisione di $[a,b]$. Allora risultano individuati dei punti sul sostegno della curva

$$\{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\} \longrightarrow \{P_0 = \varphi(t_0), P_1 = \varphi(t_1), \ldots, P_n = \varphi(t_n)\}$$

che determinano una spezzata (curva lineare a tratti)

$$\varphi_{\mathcal{A}} = \overline{P_0P_1} \cup \overline{P_1P_2} \cup \ldots \cup \overline{P_{n-1}P_n},$$

che approssima la curva tanto meglio quanto più fitta è la suddivisione.



La lunghezza della spezzata è

$$L(\varphi_{\mathcal{A}}) = d(P_0, P_1) + d(P_1, P_2) + \ldots + d(P_{n-1}, P_n) = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i),$$

Lunghezza di una curva

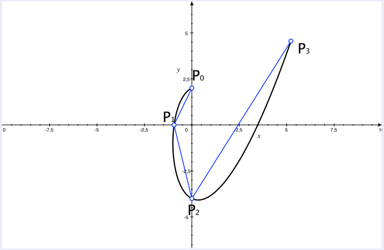
Data $\varphi : [a, b] \to R^2$, *sia data* $\mathcal{A} = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ *una suddivisione di* $[a, b]$. *Allora risultano individuati dei punti sul sostegno della curva*

$$\{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\} \longrightarrow \{P_0 = \varphi(t_0), P_1 = \varphi(t_1), \ldots, P_n = \varphi(t_n)\}$$

che determinano una spezzata (curva lineare a tratti)

$$\varphi_{\mathcal{A}} = \overline{P_0 P_1} \cup \overline{P_1 P_2} \cup \ldots \cup \overline{P_{n-1} P_n},$$

che approssima la curva tanto meglio quanto più fitta è la suddivisione.



La lunghezza della spezzata è

$$L(\varphi_{\mathcal{A}}) = d(P_0, P_1) + d(P_1, P_2) + \ldots + d(P_{n-1}, P_n) = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i),$$

Lunghezza di una curva

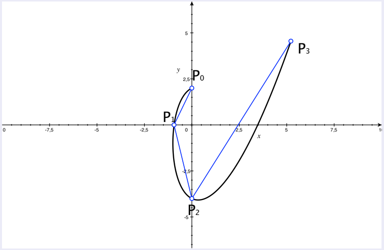
Data $\varphi : [a, b] \to R^2$, *sia data* $\mathcal{A} = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ *una suddivisione di* $[a, b]$. *Allora risultano individuati dei punti sul sostegno della curva*

$$\{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\} \longrightarrow \{P_0 = \varphi(t_0), P_1 = \varphi(t_1), \ldots, P_n = \varphi(t_n)\}$$

che determinano una spezzata (curva lineare a tratti)

$$\varphi_{\mathcal{A}} = \overline{P_0 P_1} \cup \overline{P_1 P_2} \cup \ldots \cup \overline{P_{n-1} P_n},$$

che approssima la curva tanto meglio quanto più fitta è la suddivisione.



La lunghezza della spezzata è

$$L(\varphi_{\mathcal{A}}) = d(P_0, P_1) + d(P_1, P_2) + \ldots + d(P_{n-1}, P_n) = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i),$$

Lunghezza di una curva

Definizione

Data una curva $\varphi : [a, b] \to R^2$*, diciamo che il valore (finito o infinito)*

$$L(\varphi) = \sup_{\mathcal{A}} L(\varphi_{\mathcal{A}})$$

è la `lunghezza della curva`*. La curva* φ *si dice* `rettificabile` *se* $L(\varphi) < +\infty$*.*

Osservazione

Alcune note:

(i) *questa definizione di lunghezza è costruttiva, in quanto si mostrano esplicitamente le spezzate approssimanti il sostegno della curva;*

(ii) *la lunghezza può essere* $+\infty$*.*

Lunghezza di una curva

Nel caso in cui la curva φ sia di classe C^1 (ovvero esiste φ' continua su $[a, b]$), vale il seguente teorema che permette di calcolare la lunghezza di una curva attraverso il calcolo di un integrale definito.

Teorema

Sia $\varphi : [a, b] \to R^2$ una curva di classe C^1, allora

- $L(\varphi) < +\infty$;
- $L(\varphi) = \displaystyle\int_a^b |\varphi'(t)| \, dt = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2} dt.$

Lunghezza di una curva

Osservazione

(i) *La lunghezza* **non** *cambia con la parametrizzazione.*

a. *Siano* $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ *e* $\psi : [c, d] \to \mathbf{R}^2$ *siano due curve equivalenti di classe* C^1*.*
b. *Sia* $g : [a, b] \to [c, d]$, $g'(t) \neq 0$ *per ogni* $[a, b]$, *t.c* $\varphi(t) = \psi(g(t))$ *per ogni* $t \in [a, b]$.

Allora per il Teorema del cambiamento di variabili si ha

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|dt = \int_a^b |\psi'(g(t))||g'(t)|dt = \int_c^d |\psi(t)|dt = L(\psi).$$

(ii) *La lunghezza di una curva tiene conto di quante volte il sostegno è percorso. Infatti si considerino due curve con sostegno la circonferenza di raggio 1 e con centro nell'origine.*

a. $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, *definita da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *per ogni* $t \in [0, 2\pi]$ $\mathcal{L}(\varphi) = 2\pi$
b. $\psi : [0, 4\pi] \to \mathbf{R}^2$, *definita da* $\psi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *per ogni* $t \in [0, 4\pi]$ $\mathcal{L}(\psi) = 4\pi$.

Lunghezza di una curva

Osservazione

(i) *La lunghezza* **non** *cambia con la parametrizzazione.*

a. *Siano* $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ *e* $\psi : [c,d] \to \mathbf{R}^2$ *siano due curve equivalenti di classe* C^1.

b. *Sia* $g : [a,b] \to [c,d]$, $g'(t) \neq 0$ *per ogni* $[a,b]$, *t.c* $\varphi(t) = \psi(g(t))$ *per ogni* $t \in [a,b]$.

Allora per il Teorema del cambiamento di variabili si ha

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \int_a^b |\psi'(g(t))||g'(t)| dt = \int_c^d |\psi(t)| dt = L(\psi).$$

(ii) *La lunghezza di una curva tiene conto di quante volte il sostegno è percorso. Infatti si considerino due curve con sostegno la circonferenza di raggio 1 e con centro nell'origine.*

a. $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, *definita da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *per ogni* $t \in [0, 2\pi]$ $\mathcal{L}(\varphi) = 2\pi$

b. $\psi : [0, 4\pi] \to \mathbf{R}^2$, *definita da* $\psi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *per ogni* $t \in [0, 4\pi]$ $\mathcal{L}(\psi) = 4\pi$.

Ascissa curvilinea

Definizione

Data una curva $\varphi : [a, b] \to R^2$ *regolare a tratti, diciamo* `ascissa curvilinea` *la funzione* $s(t)$ *così definita*

$$s(t) := \int_a^t |\varphi'(\sigma)| \, d\sigma, \quad t \in [a, b].$$

Osservazione

Fissata che sia l'origine nel punto iniziale $\varphi(a)$*, assegnare un valore* $s \in [0, L(\varphi)]$ *equivale ad assegnare in modo univoco la posizione di un punto sulla curva.*

Ascissa curvilinea

Osservazione

Quando φ è **regolare**, *la funzione $s(t)$ è strettamente crescente in $[a, b]$, in quanto*

$$s'(t) = |\varphi'(t)| > 0, \qquad \forall t \in [a, b].$$

- *Pertanto $s : [a, b] \to [0, L(\varphi)]$ è invertibile con inversa di classe C^1: infatti $|\varphi'(t)| \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$.*
- *Di conseguenza, detta $s \mapsto t(s)$ l'inversa di $t \mapsto s(t)$, si ha che $\psi : [0, L(\varphi)] \to R^2$ data da $\psi(s) = \varphi(t(s))$ è equivalente alla curva φ.*

Osservazione

Se una curva è parametrizzata dall'`ascissa curvilinea`*, allora*

(vettore tangente)$\equiv$ (versore tangente).

Infatti, dalla regola di derivazione della funzione composta, si ottiene

$$\frac{d}{ds}\psi(s) = \varphi'(t(s))\frac{d}{ds}t(s) = \frac{\varphi'(t(s))}{|\varphi'(t(s))|}.$$

Esempio

La curva $\varphi :]0,1] \to R^2$ *data da* $\varphi(t) = (t, 1/t)$ *è*

- *regolare,*
- *semplice,*
- **non** *chiusa*
- $L(\varphi) = +\infty$.

Infatti, preso l'intervallo $[\varepsilon, 1]$, *con* $0 < \varepsilon < 1$, *si ha che*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}}\, dt \geq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^2} dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} - 1 = +\infty.$$

Osservazione

- `Curve in forma parametrica`: *se la curva è data come* $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, *allora*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt;$$

- `Curve in forma cartesiana`: *se la curva è data come* $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ *la forma parametrica diventa*

$$\varphi(t) = (t, f(t)), \qquad \textit{per ogni } t \in [a, b],$$

allora

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt;$$

- `Curve in forma polare`: *se la curva è data come* $\rho = \rho(\theta)$, *con* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, *la forma parametrica diventa*

$$\varphi(t) = (\rho(t)\cos(t), \rho(t)\sin(t)), \qquad \textit{per ogni } t \in [\theta_1, \theta_2],$$

allora

$$L(\varphi) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho(t))^2 + (\rho'(t))^2}\, dt.$$

Osservazione

- `Curve in forma parametrica`: *se la curva è data come* $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, *allora*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt;$$

- `Curve in forma cartesiana`: *se la curva è data come* $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ *la forma parametrica diventa*

$$\varphi(t) = (t, f(t)), \quad \textit{per ogni } t \in [a, b],$$

allora

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt;$$

- `Curve in forma polare`: *se la curva è data come* $\rho = \rho(\theta)$, *con* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, *la forma parametrica diventa*

$$\varphi(t) = (\rho(t)\cos(t), \rho(t)\sin(t)), \qquad \textit{per ogni } t \in [\theta_1, \theta_2],$$

allora

$$L(\varphi) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho(t))^2 + (\rho'(t))^2}\, dt.$$

Osservazione

- `Curve in forma parametrica`: *se la curva è data come* $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, *allora*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt;$$

- `Curve in forma cartesiana`: *se la curva è data come* $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ *la forma parametrica diventa*

$$\varphi(t) = (t, f(t)), \qquad \textit{per ogni } t \in [a, b],$$

allora

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt;$$

- `Curve in forma polare`: *se la curva è data come* $\rho = \rho(\theta)$, *con* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, *la forma parametrica diventa*

$$\varphi(t) = (\rho(t)\cos(t), \rho(t)\sin(t)), \qquad \textit{per ogni } t \in [\theta_1, \theta_2],$$

allora

$$L(\varphi) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho(t))^2 + (\rho'(t))^2}\, dt.$$

Esempio

(i) *Data la curva* $\varphi : [-2, 0] \to R^2$, *definita da* $\varphi(t) = (t + 2, 3t + 6)$ *per ogni* $t \in [-2, 0]$, *calcolare la lunghezza* $L(\varphi)$.

Il sostegno della curva, regolare, semplice e non chiusa, è un segmento di retta e si ha $\varphi'(t) = (1, 3)$ *e dunque*

$$L(\varphi) = \int_{-2}^{0} \sqrt{1 + 3^2}\, dt = 2\sqrt{10}.$$

(ii) *Data la curva* $\varphi : [0, \pi] \to R^2$, *definita da* $\varphi(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$ *per ogni* $t \in [0, \pi]$, *calcolare* $L(\varphi)$.

Il sostegno della curva, che è regolare e semplice, è una semicirconferenza e si ha $\varphi'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t))$ *per ogni* t. *Dunque*

$$L(\varphi) = \int_{0}^{\pi} \sqrt{9(\sin(t))^2 + 9(\cos(t))^2}\, dt = \int_{0}^{\pi} 3\, dt = 3\pi.$$

Esempio

(i) *Data la curva* $\varphi : [-2,0] \to R^2$, *definita da* $\varphi(t) = (t+2, 3t+6)$ *per ogni* $t \in [-2,0]$, *calcolare la lunghezza* $L(\varphi)$.
Il sostegno della curva, regolare, semplice e non chiusa, è un segmento di retta e si ha $\varphi'(t) = (1,3)$ *e dunque*

$$L(\varphi) = \int_{-2}^{0} \sqrt{1+3^2}\, dt = 2\sqrt{10}.$$

(ii) *Data la curva* $\varphi : [0,\pi] \to R^2$, *definita da* $\varphi(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$ *per ogni* $t \in [0,\pi]$, *calcolare* $L(\varphi)$.
Il sostegno della curva, che è regolare e semplice, è una semicirconferenza e si ha $\varphi'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t))$ *per ogni* t. *Dunque*

$$L(\varphi) = \int_{0}^{\pi} \sqrt{9(\sin(t))^2 + 9(\cos(t))^2}\, dt = \int_0^{\pi} 3\, dt = 3\pi.$$

Esempio

(i) *Data la curva* $\varphi : [-2, 0] \to R^2$, *definita da* $\varphi(t) = (t + 2, 3t + 6)$ *per ogni* $t \in [-2, 0]$, *calcolare la lunghezza* $L(\varphi)$.
Il sostegno della curva, regolare, semplice e non chiusa, è un segmento di retta e si ha $\varphi'(t) = (1, 3)$ *e dunque*

$$L(\varphi) = \int_{-2}^{0} \sqrt{1 + 3^2}\, dt = 2\sqrt{10}.$$

(ii) *Data la curva* $\varphi : [0, \pi] \to R^2$, *definita da* $\varphi(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$ *per ogni* $t \in [0, \pi]$, *calcolare* $L(\varphi)$.
Il sostegno della curva, che è regolare e semplice, è una semicirconferenza e si ha $\varphi'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t))$ *per ogni* t. *Dunque*

$$L(\varphi) = \int_{0}^{\pi} \sqrt{9(\sin(t))^2 + 9(\cos(t))^2}\, dt = \int_{0}^{\pi} 3\, dt = 3\pi.$$

Esempio

(i) *Data la curva* $\varphi : [-2, 0] \to R^2$*, definita da* $\varphi(t) = (t + 2, 3t + 6)$ *per ogni* $t \in [-2, 0]$*, calcolare la lunghezza* $L(\varphi)$*.*
Il sostegno della curva, regolare, semplice e non chiusa, è un segmento di retta e si ha $\varphi'(t) = (1, 3)$ *e dunque*

$$L(\varphi) = \int_{-2}^{0} \sqrt{1 + 3^2}\, dt = 2\sqrt{10}.$$

(ii) *Data la curva* $\varphi : [0, \pi] \to R^2$*, definita da* $\varphi(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$ *per ogni* $t \in [0, \pi]$*, calcolare* $L(\varphi)$*.*
Il sostegno della curva, che è regolare e semplice, è una semicirconferenza e si ha $\varphi'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t))$ *per ogni* t*. Dunque*

$$L(\varphi) = \int_{0}^{\pi} \sqrt{9(\sin(t))^2 + 9(\cos(t))^2}\, dt = \int_{0}^{\pi} 3\, dt = 3\pi.$$

Integrale Curvilineo

Definizione (Integrale Curvilineo)

Data una curva $\varphi : [a,b] \to R^2$ *di classe* C^1 *con sostegno* $\varphi([a,b])$ *e una funzione* $f : \varphi([a,b]) \to R$ *continua, definiamo*

$$\int_{\varphi} f ds := \int_a^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt$$

`integrale curvilineo di` f `su` φ.

Definizione (Baricentro)

Data una curva $\varphi : [a,b] \to R^2$ *di classe* C^1, *data una densità di massa per unità di lunghezza* $f : \varphi([a,b]) \to R$, *i numeri*

$$x_b = \frac{\int_{\varphi} xf\, ds}{\int_{\varphi} f\, ds}, \qquad y_b = \frac{\int_{\varphi} yf\, ds}{\int_{\varphi} f\, ds}$$

sono detti `coordinate del baricentro di` φ `relativo alla densità di massa` f. *Nel caso in cui* $f = 1$, *si parla di* `coordinate del baricentro (geometrico) di` φ.

Integrale Curvilineo

Definizione (Integrale Curvilineo)

Data una curva $\varphi : [a, b] \to R^2$ *di classe* C^1 *con sostegno* $\varphi([a, b])$ *e una funzione* $f : \varphi([a, b]) \to R$ *continua, definiamo*

$$\int_\varphi f ds := \int_a^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt$$

`integrale curvilineo di` f `su` φ.

Definizione (Baricentro)

Data una curva $\varphi : [a, b] \to R^2$ *di classe* C^1*, data una densità di massa per unità di lunghezza* $f : \varphi([a, b]) \to R$*, i numeri*

$$x_b = \frac{\int_\varphi xf\, ds}{\int_\varphi f\, ds}, \qquad y_b = \frac{\int_\varphi yf\, ds}{\int_\varphi f\, ds}$$

sono detti `coordinate del baricentro di` φ `relativo alla densità di massa` f*. Nel caso in cui* $f = 1$*, si parla di* `coordinate del baricentro (geometrico) di` φ.

Esempio

Calcoliamo il baricentro geometrico della curva

$$\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)), \qquad \textit{per ogni } t \in [0, \pi].$$

Il sostegno di φ *è una semicirconferenza di raggio* 1, $L(\varphi) = \pi$.

$$\int_\varphi x ds = \int_0^\pi \cos(t) dt = \sin(\pi) - \sin(0) = 0,$$

da cui segue $x_b = 0$.*(era ragionevole aspettarsi che l'ascissa del baricentro fosse 0?). Per quanto riguarda l'ordinata del baricentro, osserviamo che*

$$\int_\varphi y ds = \int_0^\pi \sin(t) dt = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

Le coordinate del baricentro geometrico sono $(0, \frac{2}{\pi})$.

Esempio

Calcoliamo il baricentro geometrico della curva

$$\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)), \qquad \textit{per ogni } t \in [0, \pi].$$

Il sostegno di φ *è una semicirconferenza di raggio* 1*,* $L(\varphi) = \pi$*.*

$$\int_\varphi x ds = \int_0^\pi \cos(t) dt = \sin(\pi) - \sin(0) = 0,$$

da cui segue $x_b = 0$*.(era ragionevole aspettarsi che l'ascissa del baricentro fosse 0?). Per quanto riguarda l'ordinata del baricentro, osserviamo che*

$$\int_\varphi y ds = \int_0^\pi \sin(t) dt = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

Le coordinate del baricentro geometrico sono $(0, \frac{2}{\pi})$*.*

Esempio

Calcoliamo il baricentro geometrico della curva

$$\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)), \qquad \textit{per ogni } t \in [0, \pi].$$

Il sostegno di φ è una semicirconferenza di raggio 1, $L(\varphi) = \pi$.

$$\int_\varphi x ds = \int_0^\pi \cos(t) dt = \sin(\pi) - \sin(0) = 0,$$

da cui segue $x_b = 0$.(era ragionevole aspettarsi che l'ascissa del baricentro fosse 0?). Per quanto riguarda l'ordinata del baricentro, osserviamo che

$$\int_\varphi y ds = \int_0^\pi \sin(t) dt = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

Le coordinate del baricentro geometrico sono $(0, \frac{2}{\pi})$.

Esempio

Calcoliamo il baricentro geometrico della curva

$$\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)), \qquad \textit{per ogni } t \in [0, \pi].$$

Il sostegno di φ è una semicirconferenza di raggio 1, $L(\varphi) = \pi$.

$$\int_\varphi x ds = \int_0^\pi \cos(t) dt = \sin(\pi) - \sin(0) = 0,$$

da cui segue $x_b = 0$.(era ragionevole aspettarsi che l'ascissa del baricentro fosse 0?).
Per quanto riguarda l'ordinata del baricentro, osserviamo che

$$\int_\varphi y ds = \int_0^\pi \sin(t) dt = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

Le coordinate del baricentro geometrico sono $(0, \frac{2}{\pi})$.

Esempio

Calcoliamo il baricentro geometrico della curva

$$\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)), \qquad \textit{per ogni } t \in [0, \pi].$$

Il sostegno di φ è una semicirconferenza di raggio 1, $L(\varphi) = \pi$.

$$\int_\varphi x ds = \int_0^\pi \cos(t)dt = \sin(\pi) - \sin(0) = 0,$$

da cui segue $x_b = 0$.(era ragionevole aspettarsi che l'ascissa del baricentro fosse 0?).
Per quanto riguarda l'ordinata del baricentro, osserviamo che

$$\int_\varphi y ds = \int_0^\pi \sin(t)dt = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

Le coordinate del baricentro geometrico sono $(0, \frac{2}{\pi})$.

Curve in R^3

Esempio (L'Elica Cilindrica)

La curva $\varphi : [0, 2\pi] \to R^3$ *data da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$, *è un'elica cilindrica.*

- $\varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, $\varphi'(t) \neq (0, 0, 0)$ *per ogni* $t \in [0, 2\pi]$*: la curva è regolare e di classe* C^1.
- *La curva è semplice:* $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ *se* $0 < t \neq s < 2\pi$. *Infatti la funzione* $\varphi_3(t) = t$ *è iniettiva.*
- *La curva* **non***è chiusa:* $\varphi(0) = (1, 0, 0) \neq (1, 0, 2\pi) = \varphi(2\pi)$.
- *Non esiste nessun piano contenente la curva: infatti* $\varphi(0)$, $\varphi(\pi/2)$, $\varphi(\pi)$, *e* $\varphi(3\pi/2)$ *non possono stare tutti su di uno stesso piano (perché?).*
- *La lunghezza di* φ *è*

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} |\varphi'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Curve in R^3

Esempio (L'Elica Cilindrica)

La curva $\varphi : [0, 2\pi] \to R^3$ *data da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$*,* $t \in [0, 2\pi]$*, è un'elica cilindrica.*

- $\varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, $\varphi'(t) \neq (0, 0, 0)$ *per ogni* $t \in [0, 2\pi]$*: la curva è regolare e di classe* C^1*.*
- *La curva è semplice:* $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ *se* $0 < t \neq s < 2\pi$*. Infatti la funzione* $\varphi_3(t) = t$ *è iniettiva.*
- *La curva* **non***è chiusa:* $\varphi(0) = (1, 0, 0) \neq (1, 0, 2\pi) = \varphi(2\pi)$*.*
- *Non esiste nessun piano contenente la curva: infatti* $\varphi(0)$*,* $\varphi(\pi/2)$*,* $\varphi(\pi)$*, e* $\varphi(3\pi/2)$ *non possono stare tutti su di uno stesso piano (perché?).*
- *La lunghezza di* φ *è*

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} |\varphi'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Curve in R^3

Esempio (L'Elica Cilindrica)

La curva $\varphi : [0, 2\pi] \to R^3$ *data da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$, *è un'elica cilindrica.*

- $\varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, $\varphi'(t) \neq (0, 0, 0)$ *per ogni* $t \in [0, 2\pi]$: *la curva è regolare e di classe* C^1.
- *La curva è semplice:* $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ *se* $0 < t \neq s < 2\pi$. *Infatti la funzione* $\varphi_3(t) = t$ *è iniettiva.*
- *La curva* **non***è chiusa:* $\varphi(0) = (1, 0, 0) \neq (1, 0, 2\pi) = \varphi(2\pi)$.
- *Non esiste nessun piano contenente la curva: infatti* $\varphi(0)$, $\varphi(\pi/2)$, $\varphi(\pi)$, *e* $\varphi(3\pi/2)$ *non possono stare tutti su di uno stesso piano (perché?).*
- *La lunghezza di* φ *è*

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} |\varphi'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Curve in R^3

Esempio (L'Elica Cilindrica)

La curva $\varphi : [0, 2\pi] \to R^3$ *data da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$, *è un'elica cilindrica.*

- $\varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, $\varphi'(t) \neq (0, 0, 0)$ *per ogni* $t \in [0, 2\pi]$*: la curva è regolare e di classe* C^1.
- *La curva è semplice:* $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ *se* $0 < t \neq s < 2\pi$. *Infatti la funzione* $\varphi_3(t) = t$ *è iniettiva.*
- *La curva* **non***è chiusa:* $\varphi(0) = (1, 0, 0) \neq (1, 0, 2\pi) = \varphi(2\pi)$.
- *Non esiste nessun piano contenente la curva: infatti* $\varphi(0)$, $\varphi(\pi/2)$, $\varphi(\pi)$, *e* $\varphi(3\pi/2)$ *non possono stare tutti su di uno stesso piano (perché?).*
- *La lunghezza di* φ *è*

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} |\varphi'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Curve in R^3

Esempio (L'Elica Cilindrica)

La curva $\varphi : [0, 2\pi] \to R^3$ *data da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$, *è un'elica cilindrica.*

- $\varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, $\varphi'(t) \neq (0,0,0)$ *per ogni* $t \in [0, 2\pi]$: *la curva è regolare e di classe* C^1.
- *La curva è semplice:* $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ *se* $0 < t \neq s < 2\pi$. *Infatti la funzione* $\varphi_3(t) = t$ *è iniettiva.*
- *La curva* **non***è chiusa:* $\varphi(0) = (1,0,0) \neq (1,0,2\pi) = \varphi(2\pi)$.
- *Non esiste nessun piano contenente la curva: infatti* $\varphi(0)$, $\varphi(\pi/2)$, $\varphi(\pi)$, *e* $\varphi(3\pi/2)$ *non possono stare tutti su di uno stesso piano (perché?).*
- *La lunghezza di* φ *è*

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} |\varphi'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Curve in R^3

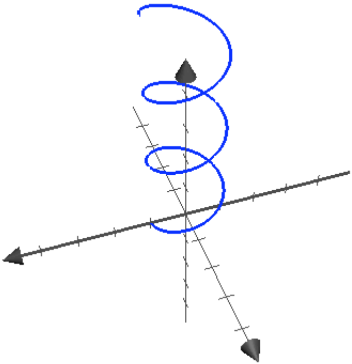
Esempio (L'Elica Cilindrica)

La curva $\varphi : [0, 2\pi] \to R^3$ *data da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$, *è un'elica cilindrica.*

- $\varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, $\varphi'(t) \neq (0, 0, 0)$ *per ogni* $t \in [0, 2\pi]$: *la curva è regolare e di classe* C^1.
- *La curva è semplice:* $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ *se* $0 < t \neq s < 2\pi$. *Infatti la funzione* $\varphi_3(t) = t$ *è iniettiva.*
- *La curva* **non***è chiusa:* $\varphi(0) = (1, 0, 0) \neq (1, 0, 2\pi) = \varphi(2\pi)$.
- *Non esiste nessun piano contenente la curva: infatti* $\varphi(0)$, $\varphi(\pi/2)$, $\varphi(\pi)$, *e* $\varphi(3\pi/2)$ *non possono stare tutti su di uno stesso piano (perché?).*
- *La lunghezza di* φ *è*

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} |\varphi'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

(Elica Cilindrica)



Curve in R^3

Esempio

Sia $\varphi : [0,2] \to R^3$ *data da* $\varphi(t) = (\frac{2}{3}t, t^2, t^3)$, $t \in [0,2]$.

(i) *Questa curva ha supporto contenuto nell'intersezione tra le due superfici* $z = \frac{27}{8}x^3$ *e* $y = \frac{9}{4}x^2$. *Infatti* $(x,y,z) \in \varphi([0,2])$ *se, e solo se, esiste* $t \in [0,2]$ *tale che*

$$x = \frac{2}{3}t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$

Esplicitando $t = t(x)$ *e sostituendo nelle restanti due relazioni, si ottiene*

$$y = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = \frac{9}{4}x^2, \qquad z = \left(\frac{3}{2}x\right)^3 = \frac{27}{8}x^3.$$

Quindi

$$\varphi([0,2]) \subset \left\{(x,y,z) \in R^3 : z = \frac{27}{8}x^3,\ y = \frac{9}{4}x^2\right\}.$$

(ii) $\varphi'(t) = (\frac{2}{3}, 2t, 3t^2)$, *e* $\varphi'(t) \neq (0,0,0)$ *per ogni* $t \in [0,2]$*: la curva è regolare e di classe* C^1.

Curve in R^3

Esempio

Sia $\varphi : [0,2] \to R^3$ *data da* $\varphi(t) = (\frac{2}{3}t, t^2, t^3)$, $t \in [0,2]$.

(i) *Questa curva ha supporto contenuto nell'intersezione tra le due superfici* $z = \frac{27}{8}x^3$ *e* $y = \frac{9}{4}x^2$. *Infatti* $(x,y,z) \in \varphi([0,2])$ *se, e solo se, esiste* $t \in [0,2]$ *tale che*

$$x = \frac{2}{3}t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$

Esplicitando $t = t(x)$ *e sostituendo nelle restanti due relazioni, si ottiene*

$$y = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = \frac{9}{4}x^2, \qquad z = \left(\frac{3}{2}x\right)^3 = \frac{27}{8}x^3.$$

Quindi

$$\varphi([0,2]) \subset \left\{(x,y,z) \in R^3 : z = \frac{27}{8}x^3,\ y = \frac{9}{4}x^2\right\}.$$

(ii) $\varphi'(t) = (\frac{2}{3}, 2t, 3t^2)$, *e* $\varphi'(t) \neq (0,0,0)$ *per ogni* $t \in [0,2]$*: la curva è regolare e di classe* C^1.

Curve in R^3

Esempio

Sia $\varphi : [0,2] \to R^3$ *data da* $\varphi(t) = (\frac{2}{3}t, t^2, t^3)$, $t \in [0,2]$.

(i) *Questa curva ha supporto contenuto nell'intersezione tra le due superfici* $z = \frac{27}{8}x^3$ *e* $y = \frac{9}{4}x^2$. *Infatti* $(x,y,z) \in \varphi([0,2])$ *se, e solo se, esiste* $t \in [0,2]$ *tale che*

$$x = \frac{2}{3}t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$

Esplicitando $t = t(x)$ *e sostituendo nelle restanti due relazioni, si ottiene*

$$y = \left(\tfrac{3}{2}x\right)^2 = \tfrac{9}{4}x^2, \qquad z = \left(\tfrac{3}{2}x\right)^3 = \tfrac{27}{8}x^3.$$

Quindi

$$\varphi([0,2]) \subset \left\{(x,y,z) \in R^3 : z = \tfrac{27}{8}x^3,\ y = \tfrac{9}{4}x^2\right\}.$$

(ii) $\varphi'(t) = (\frac{2}{3}, 2t, 3t^2)$, *e* $\varphi'(t) \neq (0,0,0)$ *per ogni* $t \in [0,2]$: *la curva è regolare e di classe* C^1.

Curve in R^3

Esempio

Sia $\varphi : [0,2] \to R^3$ *data da* $\varphi(t) = (\frac{2}{3}t, t^2, t^3)$, $t \in [0,2]$.

(i) *Questa curva ha supporto contenuto nell'intersezione tra le due superfici* $z = \frac{27}{8}x^3$ *e* $y = \frac{9}{4}x^2$. *Infatti* $(x,y,z) \in \varphi([0,2])$ *se, e solo se, esiste* $t \in [0,2]$ *tale che*

$$x = \frac{2}{3}t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$

Esplicitando $t = t(x)$ *e sostituendo nelle restanti due relazioni, si ottiene*

$$y = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = \frac{9}{4}x^2, \qquad z = \left(\frac{3}{2}x\right)^3 = \frac{27}{8}x^3.$$

Quindi

$$\varphi([0,2]) \subset \left\{(x,y,z) \in R^3 : z = \frac{27}{8}x^3,\ y = \frac{9}{4}x^2\right\}.$$

(ii) $\varphi'(t) = (\frac{2}{3}, 2t, 3t^2)$, *e* $\varphi'(t) \neq (0,0,0)$ *per ogni* $t \in [0,2]$*: la curva è regolare e di classe* C^1.

Curve in R^3

Esempio

Sia $\varphi : [0,2] \to R^3$ *data da* $\varphi(t) = (\frac{2}{3}t, t^2, t^3)$, $t \in [0,2]$.

(i) *Questa curva ha supporto contenuto nell'intersezione tra le due superfici* $z = \frac{27}{8}x^3$ *e* $y = \frac{9}{4}x^2$. *Infatti* $(x,y,z) \in \varphi([0,2])$ *se, e solo se, esiste* $t \in [0,2]$ *tale che*

$$x = \frac{2}{3}t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$

Esplicitando $t = t(x)$ *e sostituendo nelle restanti due relazioni, si ottiene*

$$y = \left(\tfrac{3}{2}x\right)^2 = \tfrac{9}{4}x^2, \qquad z = \left(\tfrac{3}{2}x\right)^3 = \tfrac{27}{8}x^3.$$

Quindi

$$\varphi([0,2]) \subset \left\{(x,y,z) \in R^3 : z = \tfrac{27}{8}x^3,\ y = \tfrac{9}{4}x^2\right\}.$$

(ii) $\varphi'(t) = (\frac{2}{3}, 2t, 3t^2)$, *e* $\varphi'(t) \neq (0,0,0)$ *per ogni* $t \in [0,2]$: *la curva è regolare e di classe* C^1.

Curve in R^3

Esempio

Sia $\varphi : [0,2] \to R^3$ *data da* $\varphi(t) = (\frac{2}{3}t, t^2, t^3)$, $t \in [0,2]$.

(i) *Questa curva ha supporto contenuto nell'intersezione tra le due superfici* $z = \frac{27}{8}x^3$ *e* $y = \frac{9}{4}x^2$. *Infatti* $(x,y,z) \in \varphi([0,2])$ *se, e solo se, esiste* $t \in [0,2]$ *tale che*

$$x = \frac{2}{3}t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$

Esplicitando $t = t(x)$ *e sostituendo nelle restanti due relazioni, si ottiene*

$$y = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = \frac{9}{4}x^2, \qquad z = \left(\frac{3}{2}x\right)^3 = \frac{27}{8}x^3.$$

Quindi

$$\varphi([0,2]) \subset \left\{(x,y,z) \in R^3 : z = \frac{27}{8}x^3,\ y = \frac{9}{4}x^2\right\}.$$

(ii) $\varphi'(t) = (\frac{2}{3}, 2t, 3t^2)$, *e* $\varphi'(t) \neq (0,0,0)$ *per ogni* $t \in [0,2]$: *la curva è regolare e di classe* C^1.

(iii) *La curva è semplice:* $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ *se* $t \neq s$, *e basta osservare che tutte le componenti di* φ *sono funzioni iniettive.*

(iv) *La curva* **non** *è chiusa.*

(v) *La lunghezza di* φ *è data da*

$$L(\varphi) = \int_0^2 \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt = \int_0^2 (3t^2 + \tfrac{2}{3})\, dt = \dots$$

Osservazione

L'unica vera differenza tra curve piane e curve in R^3 *è legata al concetto di* `versore normale`. *Per una curva in* R^3 *e un punto* $t \in I$ *non si parla dunque di vettore tangente e di vettore normale ma di* `triedro principale`. *Noi non approfondiremo questo argomento.*

(iii) *La curva è semplice:* $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ *se* $t \neq s$, *e basta osservare che tutte le componenti di* φ *sono funzioni iniettive.*

(iv) *La curva* **non***è chiusa.*

(v) *La lunghezza di* φ *è data da*

$$L(\varphi) = \int_0^2 \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt = \int_0^2 (3t^2 + \tfrac{2}{3})\, dt = \dots$$

Osservazione

L'unica vera differenza tra curve piane e curve in R^3 *è legata al concetto di* `versore normale`. *Per una curva in* R^3 *e un punto* $t \in I$ *non si parla dunque di vettore tangente e di vettore normale ma di* `triedro principale`. *Noi non approfondiremo questo argomento.*

(iii) *La curva è semplice:* $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ *se* $t \neq s$, *e basta osservare che tutte le componenti di* φ *sono funzioni iniettive.*

(iv) *La curva* **non** *è chiusa.*

(v) *La lunghezza di* φ *è data da*

$$L(\varphi) = \int_0^2 \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt = \int_0^2 (3t^2 + \tfrac{2}{3})\, dt = \ldots$$

Osservazione

L'unica vera differenza tra curve piane e curve in R^3 *è legata al concetto di* `versore normale`. *Per una curva in* R^3 *e un punto* $t \in I$ *non si parla dunque di vettore tangente e di vettore normale ma di* `triedro principale`. *Noi non approfondiremo questo argomento.*

(iii) *La curva è semplice:* $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ *se* $t \neq s$, *e basta osservare che tutte le componenti di* φ *sono funzioni iniettive.*

(iv) *La curva* **non***è chiusa.*

(v) *La lunghezza di* φ *è data da*

$$L(\varphi) = \int_0^2 \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt = \int_0^2 (3t^2 + \tfrac{2}{3})\, dt = \dots$$

Osservazione

L'unica vera differenza tra curve piane e curve in R^3 *è legata al concetto di* `versore normale`. *Per una curva in* R^3 *e un punto* $t \in I$ *non si parla dunque di vettore tangente e di vettore normale ma di* `triedro principale`. *Noi non approfondiremo questo argomento.*