Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Esercitazione del 19 marzo 2009

19 marzo 2009

Esercizio (1)

Sia $\varphi : [-2\pi, \pi] \to R^2$ *la curva* $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ *definita da*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \cos(t) \end{cases} \quad , \quad t \in [-2\pi, 0[\,, \qquad \begin{cases} x(t) = -2t \\ y(t) = 1 + 2t \end{cases} \quad , \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}[\,,$$

$$\begin{cases} x(t) = -\pi + \pi\cos(t) \\ y(t) = 1 + \pi\sin(t) \end{cases} \quad , \quad t \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi]\,.$$

(i) *Disegnare il sostegno di* φ*, specificando il verso di percorrenza, il punto iniziale e finale, l'equazione (cartesiana o implicita) di ciascuno dei tre tratti.*

(ii) *Scrivere l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva nel punto corrispondente a* $t = -\frac{5}{6}\pi$*.*

Esercizio (2)

Sia $E = \{(x, y) \in R^2 : -\frac{1}{3}(x-3)^2 \leq y \leq -x+3,\ x^2+y^2 \leq 9\}$.

(i) *Disegnare* E.

(ii) *Scrivere una parametrizzazione, orientata in verso antiorario, di ogni tratto del bordo di* E.

Esercizio (3)

Data la curva $\varphi : [0,3] \to R^2$ definita da

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ y(t) = \frac{1}{2} t \end{cases}, \quad t \in [0,1], \qquad \begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y(t) = \frac{3}{2} - t \end{cases}, \quad t \in]1,2],$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ y(t) = \frac{1}{2} t - \frac{3}{2} \end{cases}, \quad t \in]2,3],$$

calcolare gli integrali

$$\int_\varphi x ds, \qquad \int_\varphi y ds.$$

Esercizio (4)

Data la curva

$$\rho = 4(\sin(\theta) + \cos(\theta)), \quad \theta \in [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}],$$

(i) determinate la retta tangente alla curva nel piano (θ, ρ) in corrispondenza al punto $(\frac{\pi}{2}, 4)$;

(ii) dopo aver determinato le equazioni cartesiane della curva, disegnatene il sostegno nel piano (x, y);

(iii) determinate la tangente alla curva nel piano (x, y) in corrispondenza al punto $(0, 4)$;

(iv) che relazione esiste tra le rette calcolate nei punti (i) e (iii)?

Esercizio (Esercizio 5)

Data $f(x,y,z) = 5xy^2z$*, calcolare l'integrale curvilineo*

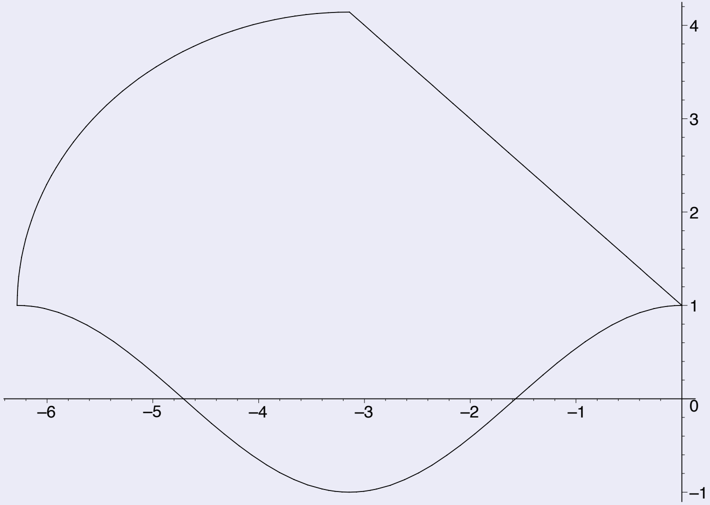
$$\int_{\varphi} fds,$$

quando $\varphi : [0,1] \to R^3$ *è la curva definita da* $\varphi(t) = (\frac{t^5}{5}, t, 2)$ *per ogni* $t \in [0,1]$.

Soluzione (Esercizio 1)

(i) *La curva* φ *è chiusa con punto iniziale/finale* $\varphi(-2\pi) = (-2\pi, 1) = \varphi(\pi)$. *Percorre il suo sostegno in senso antiorario.*

- *il primo tratto ha equazione cartesiana* $y = \cos(x)$, $x \in [-2\pi, 0]$, *e* $\varphi(-2\pi) = (-2\pi, 1)$, $\varphi(0) = (0, 1)$;
- *il secondo tratto ha equazione cartesiana* $y = 1 - x$, $x \in [-\pi, 0]$, *e* $\varphi(0) = (0, 1)$, $\varphi(\pi/2) = (-\pi, 1 + \pi)$;
- *il terzo tratto ha equazione implicita* $(x + \pi)^2 + (y - 1)^2 = \pi^2$ *(ovvero il sostegno di* $\varphi_{|[\frac{\pi}{2}, \pi]}$ *è il quarto di circonferenza con centro* $(-\pi, 1)$ *e raggio* π *di estremi* $\varphi(\pi/2) = (-\pi, \pi + 1)$ *e* $\varphi(\pi) = (-2\pi, 1)$.


4
3
2
1
0
–1
–6
–5
–4
–3
–2
–1

Soluzione (Esercizio 1 – continua ...)

(ii) *Il parametro* $t = -\frac{5}{6}\pi$ *corrisponde al punto* $P = (-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. *Siccome la curva è regolare in* $t = -\frac{5}{6}$ *ed è semplice, ha senso calcolare il vettore e la retta tangente in* P. *Si ha che*

$$\varphi'(t) = \begin{cases} (1, -\cos t) & \textit{se } t \in [-2\pi, 0[\\ (-2, 2) & \textit{se } t \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ (-\pi \sin t, \pi \cos t) & \textit{se } t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

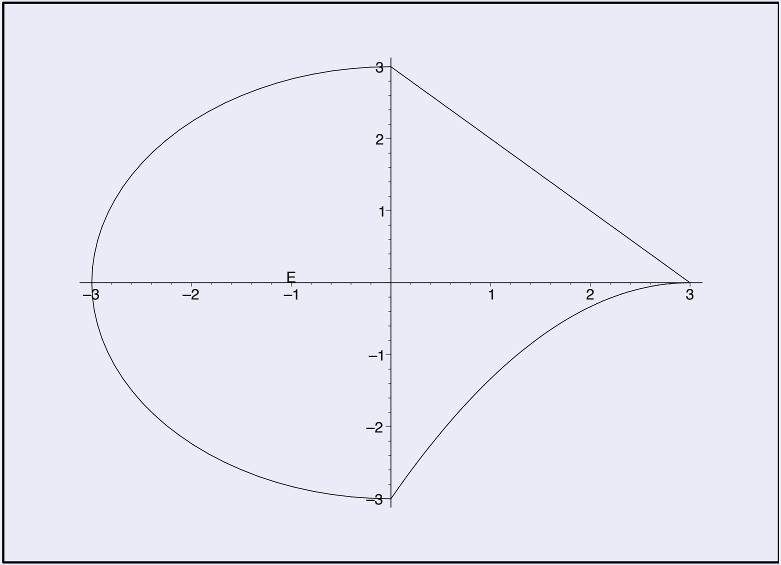
e quindi $\varphi'(-\frac{5}{6}) = (1, \frac{1}{2})$, *dunque la retta tangente ha equazione parametrica*

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{5\pi}{6} + t \\ y(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases} \quad , \quad t \in R,$$

ed equazione cartesiana $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{12}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluzione (Esercizio 2)

(i) *L'insieme E è rappresentato nella Figura*



Soluzione (Esercizio 2 – continua ...)

(ii) *Parametrizziamo ciascuno dei tre tratti che costituiscono il bordo di E in senso antiorario.*

- *Il segmento di estremi* $(3,0)$, $(0,3)$ *è il sostegno della curva* $\varphi_1 : [0,1] \to R^2$, *definita da*

$$\begin{cases} x(t) = 3 - 3t \\ y(t) = 3t \end{cases} , \quad t \in [0,1];$$

- *La semicirconferenza di estremi* $(0,3)$ *e* $(0,-3)$ *è il sostegno della curva* $\varphi_2 : [1,3] \to R^2$, *definita da*

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(\frac{\pi}{2}t) \\ y(t) = 3\sin(\frac{\pi}{2}t) \end{cases} , \quad t \in [1,3];$$

- *Il ramo di parabola risulta essere il grafico della funzione* $f : [0,3] \to R$, *definita da* $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2$, *e questo è il sostegno della curva* $\varphi_3 : [3,6] \to R^2$ *definita da*

$$\begin{cases} x(t) = t - 3 \\ y(t) = f(t-3) \end{cases} , \quad t \in [3,6].$$

Soluzione (Esercizio 3)

$$\int_\varphi x ds = \sqrt{3}, \qquad \int_\varphi y ds = 0.$$

Questo risultato si può ottenere in modo diretto calcolando, ad esempio, ($|\varphi'(t)| = 1$ *per ogni* t)

$$\int_\varphi x ds = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2} t dt + \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{2} dt + \int_2^3 \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) dt = \ldots = \sqrt{3}$$

ed analogamente per $\int_\varphi y ds$. *Oppure si può osservare che la curva è il perimetro di un triangolo equilatero di lato* 1, *e il baricentro di questa curva ha coordinate* $(\sqrt{3}/3, 0)$. *Dunque*

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\int_\varphi x ds}{\int_\varphi ds} \qquad 0 = \frac{\int_\varphi y ds}{\int_\varphi ds}$$

ed essendo

$$\int_\varphi ds = \mathcal{L}(\varphi) = \textit{perimetro del triangolo equilatero} = 3$$

si ha il risultato voluto

Soluzione (Esercizio 4)

(i) *L'equazione cercata è* $\rho = 4 + 2\pi - 4\theta$, $\theta \leq 1 + \pi/2$.

(ii) *Le equazioni parametriche sono*

$$\begin{cases} x(t) = 4\sin(t)\cos(t) + 4(\cos(t))^2 \\ y(t) = 4(\sin(t))^2 + 4\sin(t)\cos(t) \end{cases}, \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}],$$

da cui si deduce che

$$x(t) + y(t) = 4(1 + 2\sin(t)\cos(t)), \quad (x(t))^2 + (y(t))^2 = 16(1 + 2\sin(t)\cos(t)),$$

per ogni $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. *Pertanto*

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = 4(x(t) + y(t)), \qquad \text{per ogni } t \in [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}],$$

da cui si deduce che il sostegno della curva è contenuto nella circonferenza con centro nel punto $(2, 2)$ *e raggio* $2\sqrt{2}$. *In realtà il sostegno è tutta la circonferenza, in quanto* θ *può variare in un intervallo di ampiezza* 2π. *Inoltre la curvfina è chiusa e il sostegno è percorso in senso antiorario a partire dal punto* $(0, 0)$.

Soluzione (Esercizio 4 – continua...)

(iii) *L'equazione cercata è* $y = 4 + x$.

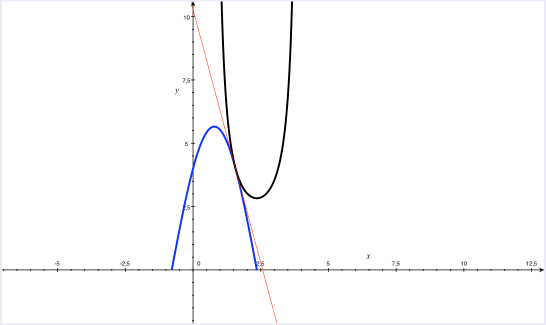
(iv) *La retta* $y = 4 + x$ *diventa, in coordinate polari,* $\rho = 4/(\sin\theta - \cos\theta)$, $\theta \in]\pi/4, 5\pi/4[$. *Le curve*

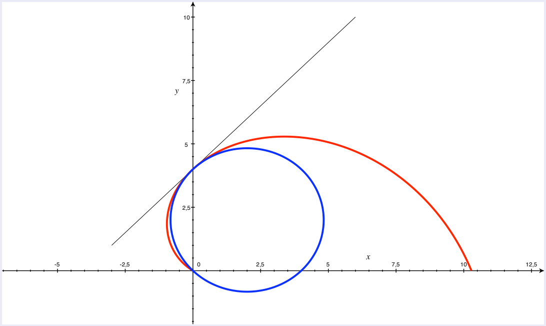
$$\rho = 4(\sin\theta + \cos\theta) \quad e \quad \rho = 4/(\sin\theta - \cos\theta)$$

hanno nel punto $(\pi/2, 4)$ *la stessa retta tangente* $\rho = 4 + 2\pi - 4\theta$.
Analogamente la retta $\rho = 4 + 2\pi - 4\theta$ *diventa, in coordinate cartesiane, la spirale di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x(t) = (4 + 2\pi - 4t)\cos t \\ y(t) = (4 + 2\pi - 4t)\sin t \end{cases} \qquad t \leq 1 + \pi/2. \tag{0.1}$$

La spirale (0.1) e la circonferenza $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$ *possiedono, nel punto* $(0, 4)$, *la stessa retta tangente* $y = 4 + x$.


y
x
10
7,5
5
2,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
10
12,5


y
x
10
7,5
5
2,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
10
12,5

Soluzione (Esercizio 5)

La curva $\varphi(t)$ *è*

- *semplice, poichè* $\varphi_2(t) = t$ *è iniettiva*
- *non chiusa, in quanto* $\varphi(0) \neq \varphi(1)$
- *è una curva piana, in quanto il suo sostegno* $\{\varphi(t) : t \in [0,1]\} \subset \{z = 2\}$
- *regolare, poichè* $\varphi'(t) = (t^4, 1, 0) \neq (0,0,0)$ *per ogni* $t \in [0,1]$
- *di classe* C^1

Inoltre $|\varphi'(t)| = \sqrt{t^8 + 1}$ *e quindi*

$$\begin{aligned}
\int_\varphi f ds &= \int_0^1 f(\tfrac{t^5}{5}, t, 2)\sqrt{t^8+1}dt \\
&= \int_0^1 5 \cdot \tfrac{t^5}{5} \cdot t^2 \cdot 2\sqrt{t^8+1}dt \\
&= \int_0^1 2t^7\sqrt{t^8+1}dt \\
&= \left[\tfrac{1}{6}(x^8+2)^{3/2}\right]_0^1 \\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$