Esercitazione del 26 marzo 2009

March 27, 2009

Esercizio1

Sia $\varphi : [0, \pi/2] \to R^2$ la curva
$\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in [0, \pi/2]$

- Dite se la curva è di classe C^1, regolare, semplice, chiusa.
- Scrivete l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva nel punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.
- Calcolate $\mathcal{L}(\varphi)$, la lunghezza di φ.
- Data la funzione $f(x, y) = x + y$, calcolate l'integrale curvilineo $\int_\varphi f\, ds$.
- Scrivete l'equazione (cartesiana o implicita) del sostegno di φ, specificando punto iniziale e punto finale.

Esercizio2

Date le funzioni $f(x, y) = |x| + |y|$ *e* $g(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$,

- *Disegnate gli insiemi* $\{f \leq 4\}$ *e* $\{g \geq 4\}$.
- *Parametrizzate in verso orario ciascun tratto del bordo dell'insieme* $\{f \leq 4\} \cap \{g \geq 4\}$.

Esercizio3

Data la funzione $f(x,y) = (y-x-3)\log(y+2x^2)$

- *Determinate il dominio massimale* $dom(f)$ *della funzione.*
- *Disegnate gli insiemi* $\{f=0\}$, $\{f\leq 0\}$ *e* $\{f\geq 0\}$.

Esercizio4

Data la funzione $f(x,y) = xy$

- Disegnate gli insiemi $\{f=1\}$, $\{f\leq 1\}$, $\{f\geq 1\}$, $\{f=0\}$, $\{f\leq 0\}$, $\{f\geq 0\}$, $\{f=-1\}$, $\{f\leq -1\}$ e $\{f\geq -1\}$.
- Attraverso lo studio degli insiemi di livello, determinate i punti di massimo e minimo assoluti della funzione f sul triangolo di vertici $(-1,3)$, $(2,0)$ e $(-1,-3)$.

Soluzione Esercizio1

(i) *Essendo* $\varphi'(t) = (-3\cos^2 t \sin t,\ 3\sin^2 t \cos t)$, *la curva è di classe* C^1.

- $\varphi'(t) \neq (0,0)$ *in* $]0, \frac{\pi}{2}[$, *ovvero la curva è regolare all'interno,*
- $\varphi'(0) = \varphi'(\pi/2) = 0$.
- *Ambo le componenti sono iniettive su* $]0, \frac{\pi}{2}[$, *quindi la curva risulta essere semplice.*

(ii) *Si ha che* $\varphi(\pi/4) = (\sqrt{2}/4,\ \sqrt{2}/4)$, *e* $\varphi'(\pi/4) = (-3\sqrt{2}/4,\ 3\sqrt{2}/4)$ *e dunque la retta tangente ha equazioni parametriche*

$$(x, y) = \varphi(\pi/4) + t\varphi'(\pi/4)$$

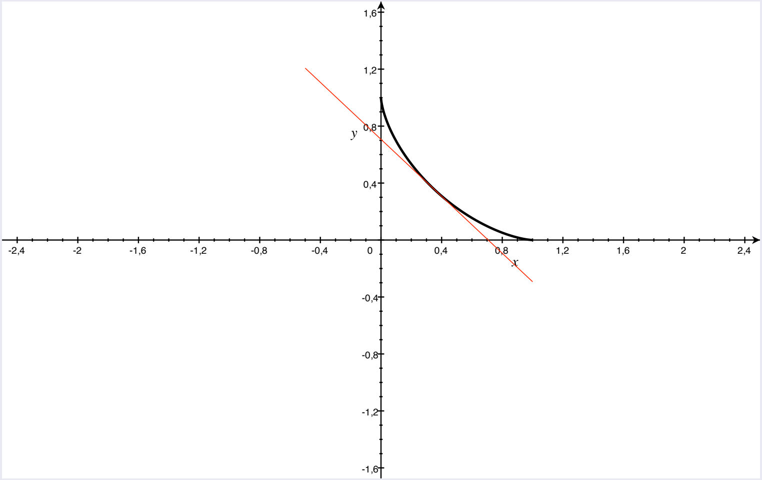
e quindi

$$(x, y) = (\sqrt{2}/4,\ \sqrt{2}/4) + t(-3\sqrt{2}/4,\ 3\sqrt{2}/4), \qquad t \in R$$

ed equazione cartesiana

$$y = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Figura



Soluzione Esercizio1 (...continua...)

(iii) *Si ha che* $|\varphi'(t)| = 3 \sin t \cos t$, *e dunque*

$$\mathcal{L}(\varphi) = \int_0^{\pi/2} |\varphi'(t)| dt = \int_0^{\pi/2} 3 \sin t \cos t dt = \ldots = \frac{3}{2}$$

(iv) *Essendo* $f(\varphi(t)) = (\cos^3 t + \sin^3 t)$, *si ha che*

$$\int_\varphi f\, ds = \int_0^{\pi/2} f(\varphi(t))|\varphi'(t)| dt = \int_0^{\pi/2} (\cos^3 t + \sin^3 t) 3 \sin t \cos t\, dt = \ldots = \frac{6}{5}$$

(v) $\varphi(0) = (1, 0)$ *e* $\varphi(\pi/2) = (0, 1)$. *Inoltre*

$$x^{1/3}(t) = \cos t, \qquad y^{1/3}(t) = \sin t,$$

e dunque l'equazione implicita della curva è $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Soluzione Esercizio2

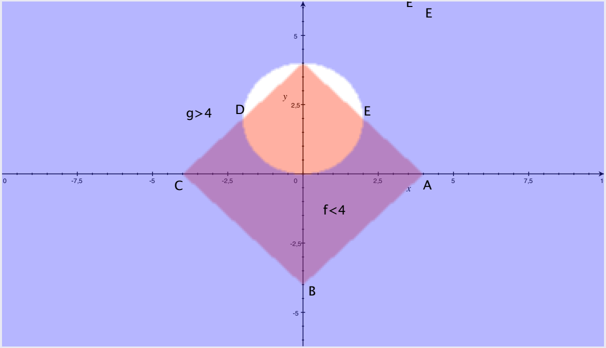
(i) *L'insieme*

$$\{f \leq 4\} = \{(x, y) \ : \ |x| + |y| \leq 4\}$$

è il rombo di vertici
$A = (4, 0)$, $B = (0, -4)$, $C = (-4, 0)$ *e* $F = (0, 4)$.
L'insieme

$$\{g \geq 4\} = \{(x, y) \ : \ x^2 + (y - 2)^2 \geq 4\}$$

è l'esterno del cerchio di centro $(0, 2)$ *e raggio* 2.



Soluzione Esercizio2 (...continua...)

(ii) *Detti* $E = (2,2)$ *ed* $D = (-2,2)$ *le intersezioni tra il bordo del rombo e la circonferenza, una parametrizzazione in verso antiorario di ognuno dei* 5 *tratti che compongono la frontiera dell'insieme* $\{f \leq 4\} \cap \{g \geq 4\}$ *è la seguente*

- *da D a E* $\varphi_1(t) = (2\cos t,\ 2 + 2\sin t)\ \ t \in [\pi, 2\pi]$;
- *da E ad A* $\varphi_2(t) = t(4,0) + (1-t)(2,2),\ t \in [0,1]$;
- *da A ad B* $\varphi_3(t) = t(0,-4) + (1-t)(4,0),\ t \in [0,1]$;
- *da B ad C* $\varphi_4(t) = t(-4,0) + (1-t)(0,-4),\ t \in [0,1]$;
- *da C ad D* $\varphi_5(t) = t(-2,2) + (1-t)(-4,0),\ t \in [0,1]$.

Soluzione Esercizio3

(i) *Il dominio massimale della funzione f è*

$$dom(f) = \{(x,y)\ :\ y > -2x^2\}.$$

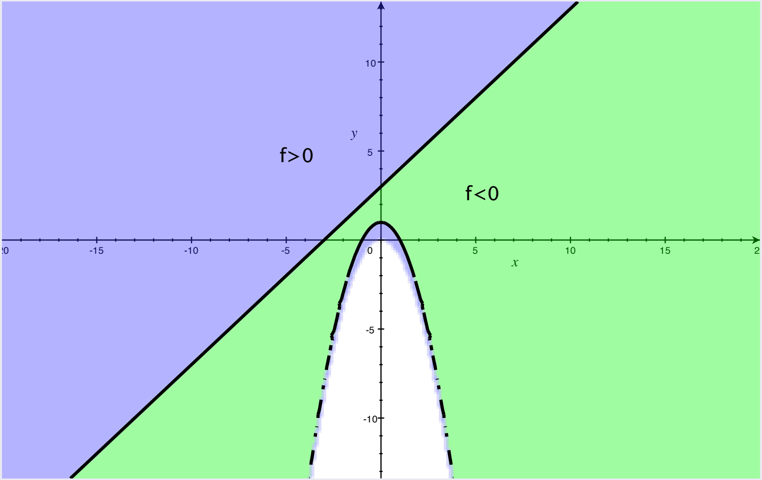
(ii) *Si ha che*

$$\begin{aligned}\{f=0\} &= \{(x,y)\ :\ y > -2x^2,\ y = x+3\} \cup \{(x,y)\ :\ y = -2x^2+1\}\\ &= \{(x,y)\ :\ y = x+3\} \cap \{(x,y)\ :\ y = -2x^2+1\}\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\{f \le 0\} &= \{(x,y)\ :\ -2x^2+1 \le y \le x+3\}\\ \{f \ge 0\} &= \{(x,y)\ :\ -2x^2 < y \le -2x^2+1\} \cup \{(x,y)\ :\ x+3 \le y\}.\end{aligned}$$

Figura

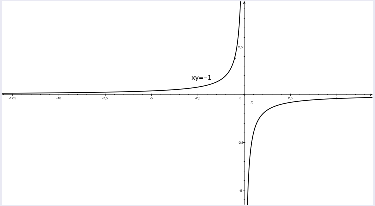


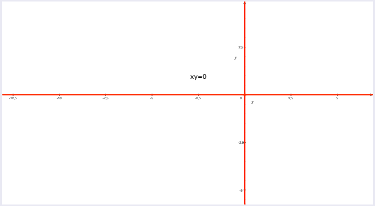
Soluzione Esercizio4

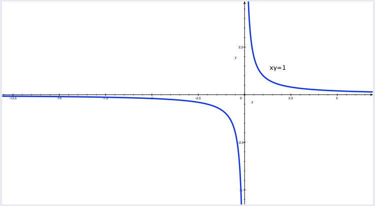
(i) *Gli insiemi di livello della funzione in esame sono i grafici dell'iperbole*

$$xy = k, \qquad k \in R.$$

Osserviamo che, nel caso $k = 0$, $\{f = 0\}$ *diventa la coppia di rette* $x = 0$ *e* $y = 0$.







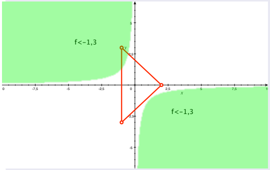
Soluzione Esercizio4 (...continua...)

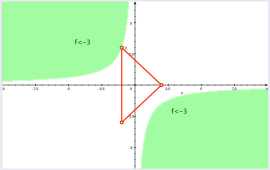
(ii) *Detto T il triangolo di vertici $(-1,3)$, $(2,0)$ e $(-1,-3)$, si trova che*

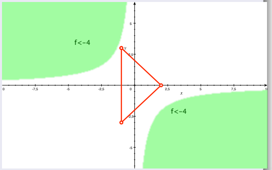
- $\min_T f = f(-1,3) = -3$: *infatti*

$$\begin{aligned} \{f \le -3\} \cap T &= \{(-1,3)\} \\ \{f \le -3-\varepsilon\} \cap T &= \emptyset \end{aligned} \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

e quindi il punto di minimo è $(-1,3)$ ed il minimo della funzione vale -3.







Soluzione Esercizio4 (...continua...)

- *Analogamente si ha che* $\max_T f = f(-1,-3) = 3$*: infatti*

$$\left.\begin{aligned} \{f \geq 3\} \cap T &= \{(-1,-3)\} \\ \{f \geq 3+\varepsilon\} \cap T &= \emptyset \end{aligned}\right. \qquad \forall \varepsilon > 0.$$