Esercizi di Analisi Matematica C

Ingegneria Matematica Politecnico Milano

Marco Squassina

AA 2005-2006

Indice

Capitolo 1. Esercizi di Analisi Matematica C 5
1. Equazioni del Primo Ordine 5
2. Equazioni a Coefficienti Costanti 8
3. Analisi Qualitativa 9
4. Sistemi Lineari 14
5. Sistemi Nonlineari 16
6. Sistemi Dinamici Discreti 21

Bibliografia 23

CAPITOLO 1

Esercizi di Analisi Matematica C

Questa raccolta contiene i testi di 130 esercizi di analisi, alcuni dei quali verranno svolti durante le esercitazioni del corso di Analisi Matematica C, AA 2005-2006, tenuto dal Prof. M. Grasselli.

Particolare enfasi è stata posta sull'analisi qualitativa del problema di Cauchy (Sezione 3) e sullo studio della stabilità dell'equilibrio per i sistemi differenziali nonlineari due per due (Sezione 5).

Alcuni tra questi problemi sono piuttosto avanzati e non verranno svolti a lezione. Comunque, è possibile concordare un appuntamento all'indirizzo e-mail sotto indicato per discuterne eventualmente la soluzione.

Marco Squassina
marco.squassina@mate.polimi.it
Tel. 02 2399 4631, Piano IV.
Milano, 6 febbraio 2006

1. Equazioni del Primo Ordine

(1.1) Esercizio *Si integrino le seguenti equazioni a variabili separabili*

$$t(1+u^2)u' = 3, \qquad u' = tu^3,$$
$$ue^{2t} - (1+e^{2t})u' = 0.$$

(1.2) Esercizio *Si integrino le seguenti equazioni a variabili separabili*

$$u' = \frac{te^u}{tu-u},$$
$$(2u-1)\,dt - e^t\,du = 0.$$

(1.3) Esercizio *Si integrino le seguenti equazioni differenziali lineari*

$$(1+t^2)u' + tu = \frac{1}{1+t^2},$$
$$u' = u\tan(t) + \sin(t),$$
$$u' = \frac{2}{t}u + \frac{t+1}{t}.$$

(1.4) Esercizio *Si integrino le seguenti equazioni a variabili separabili*

$$u' = \frac{te^u}{tu-u}, \qquad u' = \frac{2tu}{t^2u+2t^2-u-2},$$

$$\frac{\sin t}{2+u}u' = \cos t, \qquad u' = (t-u)^2 + (t-u) + 1.$$

(1.5) Esercizio *Si integrino le seguenti equazioni lineari*

$$u' + \frac{1}{t}u - (t^2+1) = 0, \qquad u' - u(t^2+3t-1) = 0,$$
$$tu' - 2u + t^3(2-t)e^t = 0, \qquad u' + 3tu = 2t.$$

(1.6) Esercizio *Si integrino le seguenti equazioni di Bernoulli*

$$u' - tu = tu^3, \qquad t^2u - t^3u' = u^4 \sin t,$$
$$tu' + u = t^2u^2, \qquad 2u' + u = (t-1)u^3.$$

(1.7) Esercizio *Si integrino le seguenti equazioni esatte*

$$(3t^2u - u^2)dt + (t^3 - 2tu)du = 0, \qquad 2(tu-1)dt + t^2du = 0,$$
$$u(\cos(tu)+1)dt + t(\cos(tu)+1)du = 0, \qquad (t+u-1)u' + (t+u+1) = 0.$$

(1.8) Esercizio *Si integrino le seguenti equazioni omogenee*

$$u' = \frac{t^2+u^2}{2tu}, \qquad 3u\cos\frac{t}{u}dt - (2u\sin\frac{t}{u} + 3t\cos\frac{t}{u})du = 0,$$
$$(t^3 - 3tu^2)u' = u^3 - 3t^2u, \qquad 2t(t+u) + (t^2+u^2)u' = 0.$$

(1.9) Esercizio *Si determini la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = -\frac{2t}{1+t^2}u + \frac{1}{t(1+t^2)} \\ u(-1) = 0. \end{cases}$$

(1.10) Esercizio *Si determini la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' + 2tu^2 = 0 \\ u(0) = -1. \end{cases}$$

(1.11) Esercizio *Discutere l'esistenza e unicità locale dei problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = 3u^{\frac{2}{3}} \\ u(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

(1.12) Esercizio *Si integrino le seguenti equazioni differenziali omogenee*

$$u' = \frac{t^3+u^3}{tu^2}, \qquad u' = \frac{x+y}{x-y}, \qquad u' = \frac{2tu}{u^2+t^2}.$$

(1.13) Esercizio *Si integrino le seguenti equazioni differenziali*

$$(3t^2 + 4tu)dt + (2t^2 + 3u^2)du = 0, \qquad u' = \frac{e^{2t} - tu^2}{t^2u}.$$

(1.14) Esercizio *Si integrino le seguenti equazioni differenziali omogenee*
$$u' = \frac{t^2+u^2}{2tu}, \qquad (3u-t)\,dt - (u+t)\,du = 0.$$

(1.15) Esercizio *Si integri la seguente equazione differenziale*
$$3u\cos\left(\frac{t}{u}\right)\,dt - \left(2u\sin\left(\frac{t}{u}\right) + 3t\cos\left(\frac{t}{u}\right)\right)\,du = 0.$$

(1.16) Esercizio *Risolvere la seguente equazione differenziale*
$$u' = \sec(t+u) - 1.$$

(1.17) Esercizio *Risolvere la seguente equazione differenziale*
$$u' = (t-u)^2 + (t-u) + 1.$$

(1.18) Esercizio *Si consideri il problema*
$$\begin{cases} u'' = u' + \arctan(u) \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$
Trasformare l'equazione del secondo ordine in un sistema del primo ordine e dimostrare che ammette una unica soluzione su tutto $\mathbb{R}$.

(1.19) Esercizio *Si consideri il problema*
$$\begin{cases} u' = t^2 u \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$
Verificare se il problema dato verifica le ipotesi del Teorema di esistenza ed unicità e dire se esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il problema ammette soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.

(1.20) Esercizio *Si discutano esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni del problema*
$$\begin{cases} u' = |u|^\alpha \\ u(0) = \beta\,, \end{cases}$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

(1.21) Esercizio *Dire se il problema*
$$\begin{cases} u'' = t^3(u+u') \\ u(0) = 1\,, \\ u'(0) = \frac{1}{2}\,, \end{cases}$$
ammette una ed una sola soluzione su $\mathbb{R}$.

(1.22) Esercizio *Si integri la seguente equazione differenziale esatta*
$$y' = \frac{\frac{t}{y}}{\frac{1}{2}\left(\frac{t}{y}\right)^2 + y}.$$

(1.23) Esercizio *Si integrino le seguenti equazioni differenziali esatte*

$$y' = -\frac{3t^2y - y^2}{t^3 - 2ty},$$

$$y' = -\frac{t - 1 + y\cos(ty)}{y^2 + t\cos(ty)}.$$

(1.24) Esercizio *Si risolva il seguente problema agli autovalori*

$$u'' + \lambda u = 0,$$

con

$$\begin{cases} u(0) + u'(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

(1.25) Esercizio *Si determini l'integrale generale delle equazioni di Eulero*

$$t^2u'' + tu' + u = 0, \qquad t^2u'' - 4tu' + 6u = 0,$$

$$t^4u^{(4)} + 2t^3u^{(3)} + 2t^2u^{(2)} - 2tu' + 2 = 0.$$

Si cercano soluzioni (da combinare linearmente) della forma

$$t^\lambda,\ t^\lambda\log(t), \dots, t^\lambda(\log(t))^{m-1}$$

dove $m \geq 1$ denota la molteplicita' della radice λ della corrispondente equazione caratteristica, ottenuta sostituendo $u(t) = t^\lambda$ in equazioni del tipo

$$a_nt^nu^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1tu' + a_0u + b = 0.$$

Osservare che λ potrebbe essere complesso, per cui, se $\lambda = \alpha + i\beta$, per t^λ, si intende:

$$t^\lambda = t^\alpha t^{i\beta} = t^\alpha e^{i\beta\log(t)} = t^\alpha\cos(\beta\log(t)) + it^\alpha\sin(\beta\log(t)).$$

2. Equazioni a Coefficienti Costanti

(2.26) Esercizio *Si determini l'integrale generale delle equazioni*

$$u^{(4)} - 3u^{(3)} = t + 1, \qquad u''' + 6u'' + 11u' + 6u = \sinh(t).$$

(2.27) Esercizio *Si determini l'integrale generale delle equazioni*

$$u'' + 4u = 2\tan(t), \qquad u''' - u' = 2\cosh(t), \qquad u^{(4)} + 2u^{(2)} + u = t^2.$$

(2.28) Esercizio *Si determini l'integrale generale delle equazioni*

$$3u'' + 8u' + 4u = e^{-t} + \sin(t), \qquad u'' - u = e^{-t^2}.$$

(2.29) Esercizio *Si determini, se esiste, la soluzione dell'equazione differenziale*

$$u^{(4)} - 16u = 0,$$

tale che $u(0) = 1$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$.

(2.30) Esercizio *Si determini un integrale generale delle equazioni di Eulero*

$$t^2u'' + tu' + u = \log|t|,$$

$$t^2u'' + 5tu' + 3u = \frac{1}{t}.$$

(2.31) Esercizio *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} t^2u'' - 3tu' + 4u = t + 1 \\ u(1) = 1 \\ u'(1) = 1\,. \end{cases}$$

3. Analisi Qualitativa

(3.32) Esercizio *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy autonomo*

$$\begin{cases} u' = u^3 - u \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Si risolva inoltre esplicitamente il problema determinando i tempi di esplosione t_α delle soluzioni che hanno intervallo massimale $I_\alpha \neq \mathbb{R}$.

(3.33) Esercizio *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy autonomo*

$$\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

(3.34) Esercizio *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy autonomo*

$$\begin{cases} u' = \arctan(u^2 - 1) \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

(3.35) Esercizio *Studiare, al variare del punto iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \frac{e^{t-y}}{y} \\ u(\alpha) = 1. \end{cases}$$

Determinare, in particolare, il dominio di u_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3.36) Esercizio *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2} \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

(3.37) Esercizio *Sia $g \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione strettamente crescente, limitata e con $g(0) = 0$. Dimostrare che esiste uno ed un solo $\gamma > 0$ tale che la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = u - g(t) \\ u(0) = \gamma \end{cases}$$

ammette limite per $t \to +\infty$.

(3.38) Esercizio *Si consideri il problema*

$$\begin{cases} u' = (e^u - 1)(1 - u) \\ u(0) = \alpha\,. \end{cases}$$

Al variare di α determinare
(a) *le soluzioni stazionarie;*
(b) *il segno di u';*
(c) *i limiti, se esistono, di $u(t)$ per $t \to \pm\infty$;*
(d) *il segno di u''.*

(3.39) Esercizio *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che*

$$f(0) = 0, \qquad f'(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Si consideri l'equazione

$$u' = f(u).$$

Si discutano i seguenti punti:
(a) *gli intervalli di esistenza massimali sono della forma $I =]-\infty, \lambda[$, con $\lambda \in \mathbb{R}$;*
(b) *si esibisca un esempio di f per cui $\lambda = +\infty$ per qualche dato iniziale;*
(c) *si esibisca un esempio di f per cui $\lambda < +\infty$ per qualche dato iniziale;*
(d) *supponiamo che $f(1) = 0$ (e ora non necessariamente che $f' \geq 0$ su $\mathbb{R}$) e si consideri il Problema di Cauchy*

$$(P_\alpha) \qquad \begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Per quali valori di α la soluzione massimale di P_α è sempre definita su tutto $\mathbb{R}$?
(e) *supponiamo che*

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \ell < \infty.$$

Mostrare che ℓ è una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$;
(f) *se $\alpha > 0$ le soluzioni di P_α sono convesse?*
(g) *se $\alpha < 0$ le soluzioni di P_α sono concave?*
(h) *se $\alpha > 0$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$ con f convessa, allora le soluzioni di P_α verificano $u''' \geq 0$?*
(i) *Sia $\alpha_k \subset (0,1)$ con $\alpha_k \to 0$. La successione di soluzioni (u_k) di P_{α_k} converge a 0 uniformemente sugli intervalli $[a, b]$ con $-\infty < a < b < +\infty$?* Suggerimento*: scrivere l'equazione nella forma integrale*

$$u_k(x) = \alpha_k + \int_0^x f(u_k(\tau))d\tau, \qquad x \in \mathbb{R}$$

e applicare il lemma di Gronwall per dedurre una stima del tipo

$$\sup_{x\in[a,b]} |u_k(x)| \le C\alpha_k, \qquad C > 0 \text{ costante indipendente da } k \ge 1.$$

(f è localmente Lipschitziana e $f(0) = 0$, per cui $f(u_k) \le cu_k$ su $[a, b]$).
(l) *la conclusione di (i) vale anche per $a = -\infty$ e/o $b = +\infty$?*
(g) *sia $\alpha > 0$ e $f(u) = e^u - 1$. Fornire delle stime dal basso per le soluzioni u di P_α.*

(3.40) Esercizio *Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione limitata e si consideri il problema di Cauchy*

$$(P) \qquad \begin{cases} u' = u^2 - \varphi^2 \\ u(\alpha) = \beta. \end{cases}$$

Si discutano i seguenti punti:
(a) *esistenza ed unicità locale per P;*
(b) *esistenza globale per P se $\varphi \equiv c \in \mathbb{R}$, al variare di α, β;*
(c) *esistenza globale per P al variare di α, β;*
(d) *supponiamo che la soluzione u sia definita su $\mathbb{R}$ e che esistano i limiti*

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \ell^+, \qquad \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \ell^-$$

con

$$-\infty < \ell^- < \ell^+ < +\infty.$$

Si discuta l'esistenza (o meno) dei limiti

$$\lim_{x\to+\infty} u(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} u(x).$$

Se tali limiti esistono, quanto valgono?
(e) *si ragioni, più in dettaglio, nel caso $\varphi(x) = \arctan(x)$.*

(3.41) Esercizio *Siano $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ e si consideri il problema di Cauchy*

$$(P) \qquad \begin{cases} u' = u(u - \alpha)(u - \beta) \\ u(0) = \lambda. \end{cases}$$

Si discutano i seguenti punti:
(a) *esistenza ed unicità locale per P al variare di $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$;*
(b) *esistenza globale per P al variare di $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$;*
(c) *sia $\beta > \alpha > 0$ e sia $\lambda = \lambda_k = \alpha + e^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$. Le corrispondenti soluzioni u_k sono limitate in $\mathbb{R}$?*
(d) *è vero che su ogni intervallo $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ le soluzioni u_k convergono uniformemente? se si, a quale funzione?*

(3.42) Esercizio *Sia $\varepsilon > 0$ e si consideri il problema di Cauchy*

$$(P_{\lambda,\varepsilon}) \qquad \begin{cases} u' = u - \varepsilon u^2 \\ u(0) = \lambda. \end{cases}$$

Si discutano i seguenti punti:
(a) *esistenza ed unicità locale per $P_{\lambda,\varepsilon}$ al variare di λ e ε;*
(b) *esistenza globale per $P_{\lambda,\varepsilon}$ al variare di λ e ε;*

(c) *stimare l'ampiezza degli intervalli massimali delle soluzioni che esplodono;*
(d) *calcolare esplicitamente le soluzioni* $u_{\lambda,\varepsilon}$ *di* $P_{\lambda,\varepsilon}$*;*
(e) *fissato* $\varepsilon > 0$*, studiare il comportamento delle soluzioni* u *al variare di* λ*;*
(f) *fissato* λ*, studiare il comportamento delle soluzioni* u *per* $\varepsilon \to 0$*;*
(g) *studiare il comportamento asintotico per* $\varepsilon \to 0$ *del problema di Cauchy*

$$(P_{\lambda,\varepsilon}) \qquad \begin{cases} u' = u - \varepsilon u^2 \\ u(0) = \frac{1}{2\varepsilon}. \end{cases}$$

è vero che, se $-\infty < a < b < +\infty$*,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{x \in [a,b]} |u_\varepsilon(x)| = \infty?$$

(h) *rivisitare i quesiti precedenti nel contesto del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = u - \varepsilon g(u) \\ u(0) = \lambda, \end{cases}$$

al variare di $g \in C^1(\mathbb{R})$*.*

(3.43) Esercizio *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \frac{y-1}{e^y+1} \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a) *Verificare che per ogni* α*, la soluzione esiste ed è unica. Se ne discuta inoltre la prolungabilità e la regolarità;*

(b) *Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al secondo ordine della soluzione e tracciarne il grafico vicino a* 0*;*

(c) *Trovare le soluzioni costanti (punti di equilibrio) dell'equazione*

$$y' = \frac{y-1}{e^y+1};$$

(d) *Studiare il comportamento della soluzione ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

(e) *Verificare che la soluzione è concava se* $\alpha < 1$ *ed ha un punto di flesso se* $\alpha > 1$*;*

(f) *Disegnare un grafico qualitativo delle soluzioni con le informazioni dedotte in (a-f);*

(g) *Tracciare il diagramma di fase associato all'equazione* $y'(x) = \frac{y(x)-1}{e^{y(x)}+1}$*. Qual è la natura dei punti di equilibrio?*

(3.44) Esercizio *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = t\, y e^{-y^2}, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a) *Discutere esistenza, unicità e prolungabilità della soluzione al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Se ne discuta inoltre la regolarità;*

(b) *Scrivere lo sviluppo di MacLaurin (ordine 2) della soluzione e tracciarne il grafico vicino a* 0*;*

(c) *Trovare i punti di equilibrio dell'equazione* $y' = t\, y(t) e^{-y^2(t)}$*;*
(d) *Discutere eventuali simmetrie delle soluzioni;*
(e) *Discutere l'esistenza di eventuali punti di massimo/minimo e studiare il comportamento della soluzione ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*
(f) *Disegnare un grafico qualitativo delle soluzioni raccogliendo le informazioni dedotte in (a-e).*

(3.45) Esercizio *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = t^2 \cos(y), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) *Discutere esistenza, unicità, prolungabilità e regolarità della soluzione;*
(b) *Trovare i punti di equilibrio dell'equazione* $y'(t) = t^2 \cos(y(t))$*;*
(c) *Studiare il comportamento della soluzione ai limiti dell'intervallo massimale di esistenza;*
(d) *Studiare la convessità/concavità della soluzione;*
(e) *Disegnare un grafico qualitativo della soluzione raccogliendo le informazioni dedotte in (a-d);*

(3.46) Esercizio *Si trovi la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{\frac{x}{y(x)}}{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y(x)}\right)^2 + y(x)}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

e se ne disegni il grafico.

(3.47) Esercizio *Cercando un opportuno fattore integrante, risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y^2(x)}{1 - x\, y(x)}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Si disegni il grafico della soluzione. Su quale intervallo la soluzione è definita?

(3.48) Esercizio *Studiare la stabilita' degli equilibri dell'equazione*

$$u' = u(u^2 - 1).$$

(3.49) Esercizio *Studiare la stabilita' degli equilibri dell'equazione*

$$u' = (u - \alpha)(u - \beta)$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\beta \in \mathbb{R}$ *con* $\alpha \neq \beta$*.*

(3.50) Esercizio *Provare che la condizione di stabilita' del generico equilibrio* α_i *dell'equazione*

$$u' = (u - \alpha_1)(u - \alpha_2) \cdots (u - \alpha_n)$$

e' data da

$$\prod_{j \neq i}^{n} (\alpha_i - \alpha_j) < 0.$$

Si suppone che $\alpha_i \neq \alpha_j$ *per ogni* $i, j = 1, \ldots, n$.

4. Sistemi Lineari

(4.51) Esercizio *Integrare i seguenti sistemi a coefficienti costanti*

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 3x - 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -4y \\ \dot{y} = x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - y\,. \end{cases}$$

(4.52) Esercizio *Integrare i seguenti sistemi a coefficienti costanti*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 3y\,. \end{cases}$$

(4.53) Esercizio *Integrare i seguenti sistemi a coefficienti costanti*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y - 2z \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = y + 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x + y - 2z \\ \dot{z} = 3x + 2y + z\,. \end{cases}$$

(4.54) Esercizio *Integrare i seguenti sistemi a coefficienti costanti*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = y + z \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 3y - 2z \\ \dot{z} = y + z\,. \end{cases}$$

(4.55) Esercizio *Risolvere il problema di Cauchy lineare*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} x$$

con $x(0) = (1, 0, 1)\,.$

(4.56) Esercizio *Integrare l'equazione differenziale lineare*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

(4.57) Esercizio *Integrare i seguenti sistemi a coefficienti costanti*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y - 2z \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = y + 2z, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x + y - 2z \\ \dot{z} = 3x + 2y + z. \end{cases}$$

(4.58) Esercizio *Integrare i seguenti sistemi a coefficienti costanti*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = y + z \\ \dot{z} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 3y - 2z \\ \dot{z} = y + z. \end{cases}$$

(4.59) Esercizio *Risolvere il problema di Cauchy lineare*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = x_0 = (1, 0, 1).$$

(4.60) Esercizio *Stabilità e ritratto di fase per i seguenti sistemi lineari* 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 3x - 2y, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -4y \\ \dot{y} = x, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

(4.61) Esercizio *Stabilità e ritratto di fase per i seguenti sistemi lineari* 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$

(4.62) Esercizio *Al variare di* λ *e* μ *in* $\mathbb{R}$*, studiare il seguente sistema* 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + \lambda y \\ \dot{y} = \lambda x + \mu y, \end{cases}$$

(4.63) Esercizio *Dato il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

(a) *determinare la matrice esponenziale associata al sistema;*
(b) *determinare l'integrale generale del sistema;*
(c) *determinare la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale* $(0, 1)$.

(4.64) Esercizio *Dato il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -5x + 2y. \end{cases}$$

(a) *determinare la matrice esponenziale associata al sistema;*
(b) *determinare l'integrale generale del sistema;*
(c) *determinare la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale* $(0, 2)$.

(4.65) Esercizio *Dato il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 3y - 2z \\ \dot{z} = y + z. \end{cases}$$

(a) *determinare la matrice esponenziale associata al sistema;*
(b) *determinare l'integrale generale del sistema;*
(c) *determinare la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale* $(0, 0, 1)$.

(4.66) Esercizio *Trovare l'integrale generale del sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 4x - 2y. \end{cases}$$

(4.67) Esercizio *Si consideri, per* $n \in \mathbb{N}$, *i problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}_n = (2n+1)x_n - ny_n \\ \dot{y}_n = (2n+2)x_n - ny_n, \end{cases}$$

con $(x_n(n), y_n(n)) = (e^n, 2e^n)$. *Calcolare*

$$\lim_{n \to \infty} x_n(1) + y_n(1).$$

5. Sistemi Nonlineari

(5.68) Esercizio *Studiare il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

(5.69) Esercizio *Studiare il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - x^3 \\ \dot{y} = -y + x^2. \end{cases}$$

(5.70) Esercizio *Studiare il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -y + x^2. \end{cases}$$

(5.71) Esercizio *Studiare il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = xy^2 \\ \dot{y} = -4yx^2. \end{cases}$$

(5.72) Esercizio *Studiare il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 + x^2 - 2x. \end{cases}$$

(5.73) Esercizio *Studiare il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2x^3 + y(4 - x^2 - 4y^2). \end{cases}$$

(5.74) Esercizio *Studiare il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y + x^2 + y^2. \end{cases}$$

(5.75) Esercizio *Studiare il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - 2x^3 - y. \end{cases}$$

(5.76) Esercizio *Studiare la natura dell'origine per il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^2 x - x - y \\ \dot{y} = y^3 + x^2 y + x - y. \end{cases}$$

(5.77) Esercizio *Studiare la natura dell'origine per il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - y)(x^2 + y^2 - 1) - 2y \\ \dot{y} = (y - x)(x^2 + y^2 - 1) + 2x. \end{cases}$$

(5.78) Esercizio *Si consideri l'equazione*

$$\ddot{x} = f(x).$$

Studiarla per

$$f(x) = 1 - x^2, \qquad f(x) = -x + x^2.$$

(5.79) Esercizio *Si consideri l'equazione*

$$\ddot{x} = f(x).$$

Studiarla per

$$f(x) = \sin(x), \qquad f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

(5.80) Esercizio *Determinare l'equazione delle traiettorie per i sistemi*

$$\begin{cases} \dot{x} = e^y \\ \dot{y} = e^y \cos(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y(y - 2x) \\ \dot{y} = (1 - x)(y - 2x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = x(1 + y^2). \end{cases}$$

(5.81) Esercizio *Stabilire se la soluzione nulla è stabile per il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

(5.82) Esercizio *Stabilire se* $(0, 0)$ *è stabile per il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \sin^3 x \\ \dot{y} = -4x - \sin^3 y. \end{cases}$$

(5.83) Esercizio *Cercare una funzione di Liapunov del tipo* $V(x,y) = ax^n + by^m$, $a, b > 0$, n, m *interi pari, per il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + y - x \\ \dot{y} = -x^3 - y, \end{cases}$$

(5.84) Esercizio *Dato il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(x+1) - 2 \\ \dot{y} = -(x+1), \end{cases}$$

stabilire la natura dei punti critici usando sia il metodo di Liapunov sia il metodo di linearizzazione.

(5.85) Esercizio *Si consideri il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^k, \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{N}$. *Studiare la natura di* $(0,0)$.

(5.86) Esercizio *Si discuta la stabilità della soluzione nulla per l'equazione*

$$\ddot{x} = -x + x^3 - x^2\dot{x}.$$

(5.87) Esercizio *Si discuta la stabilità dell'origine per il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + 2xz - z \\ \dot{y} = -yz - 3y \\ \dot{z} = -x^2 + \frac{x}{2} + y^2. \end{cases}$$

(5.88) Esercizio *Dato il sistema non lineare*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(\cos(x^2+y^2) - 1)(\sin(x^2+y^2) - 1) \\ \dot{y} = -x + y(\cos(x^2+y^2) - 1)(\sin(x^2+y^2) - 1), \end{cases}$$

(a) *trovare i punti critici e studiare il sistema linearizzato nei punti critici;*
(b) *scrivere il sistema in coordinate polari;*
(c) *studiare il ritratto di fase.*

(5.89) Esercizio *Stabilire la natura dell'origine per il sistema non lineare*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2+y^2)\cos\frac{\pi}{x^2+y^2} \\ \dot{y} = x + y(x^2+y^2)\cos\frac{\pi}{x^2+y^2}, \end{cases}$$

(5.90) Esercizio *Dato il sistema non lineare*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 \\ \dot{y} = -y^2, \end{cases}$$

studiare il comportamento qualitativo delle orbite.

(5.91) Esercizio *Dato il sistema non lineare*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 \\ \dot{y} = -x^2, \end{cases}$$

studiare il comportamento qualitativo delle orbite.

(5.92) Esercizio *Dato il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x\,(k + \cos y) \\ \dot{y} = \sin y\,(k - \cos x), \end{cases}$$

(a) *dire per quali valori del parametro $k \in \mathbf{R}$ il sistema è hamiltoniano e per tali valori scrivere un'hamiltoniana;*
(b) *per $k = 0$, trovare i punti critici, stabilirne la natura e descrivere il diagramma di fase.*

(5.93) Esercizio *Dato il sistema non lineare*

$$\begin{cases} \dot{x} = 16(y-1)(x^2 - y^2 - 1) \\ \dot{y} = -x(x^2 - y^2 - 1), \end{cases}$$

(a) *trovare i punti stazionari;*
(b) *determinare un integrale primo e disegnare le orbite;*
(c) *discutere l'esistenza di orbite periodiche.*

(5.94) Esercizio *Si mostri che il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^2 x - x - y \\ \dot{y} = y^3 + x^2 y + x - y \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ha orbite limitate se il dati iniziali $x_0^2 + y_0^2 \leq 1$.

(5.95) Esercizio *Si studi il sistema predatore-preda*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - ax - y) \\ \dot{y} = y(-c + x - by) \end{cases}$$

dove $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ e $ac < 1$.

(5.96) Esercizio *Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Si discuta la stabilitá nell'origine delle soluzioni dell'equazione*

$$\ddot{u} + \dot{u} + \varphi(u) = 0.$$

(5.97) Esercizio *Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\alpha \neq \beta$. Si studi la stabilita' dell'origine per il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \alpha x + y^2 \\ \dot{y} = x^2 + \beta y + y^2. \end{cases}$$

(5.98) Esercizio *Si ricavi la formula delle traiettorie per i seguenti sistemi*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = e^y \\ \dot{y} = e^y \cos(x). \end{cases}$$

(5.99) Esercizio *Supponiamo che le funzioni $f(x,y)$ e $g(x,y)$ siano tali che*

$$f(0,0) = g(0,0) = 0$$

e

$$xf(x,y) \leq 0, \qquad yg(x,y) \leq 0,$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Provare che l'origine e' stabile per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y). \end{cases}$$

(5.100) Esercizio *Supponiamo che la funzione $f(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ sia positiva e positivamente omogenea di grado $\alpha > 0$ con $\nabla f(0,0) = 0$. Provare che l'origine e' stabile per il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \end{cases}$$

(5.101) Esercizio *Consideriamo il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - g(t)x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x - g(t)y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

dove $g \in C^1(\mathbb{R}^+)$, limitata e $g(t) \geq k > 0$ per $t \geq 0$. L'origine e' asintoticamente stabile per il sistema? e' esponenzialmente stabile?

(5.102) Esercizio *Consideriamo il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a\sin(x) - kx - dy - cz \\ \dot{z} = -z + y \end{cases}$$

dove i parametri sono positivi e $k > a$. Mostrare che l'origine e' asintoticamante stabile, usando la funzione

$$\Upsilon(x,y,z) = 2a \int_0^x \sin(\tau)d\tau + kx^2 + y^2 + pz^2.$$

6. Sistemi Dinamici Discreti

(6.103) Esercizio *Determinare la soluzione esplicita dell'equazione alle differenze*

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \qquad x_{k+3} - 4x_{k+2} + 5x_{k+1} - 3x_k = 0.$$

(6.104) Esercizio *Determinare la soluzione esplicita dell'equazione alle differenze*

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \qquad x_{k+1} - x_k - x_{k-1} = 0, \ \ k \geq 1.$$

(6.105) Esercizio *Determinare la soluzione esplicita dell'equazione alle differenze*

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \qquad x_{k+1} + x_k = 0, \ \ k \geq 1.$$

(6.106) Esercizio *Determinare la famiglia di soluzioni dell'equazione*

$$x_{k+2} - 2x_{k+1} - 3x_k = 0.$$

(6.107) Esercizio *Determinare la famiglia di soluzioni dell'equazione*

$$x_{k+3} - x_{k+2} + x_{k+1} - x_k = 0.$$

(6.108) Esercizio *Discutere l'equazione alle differenze*

$$x_{k+2} + \alpha x_{k+1} + \beta x_k = 0$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ con $\beta \neq 0$.

(6.109) Esercizio *Determinare la famiglia di soluzioni dell'equazione*

$$x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = 1.$$

(6.110) Esercizio *Determinare la famiglia di soluzioni dell'equazione*

$$6x_{k+2} - 5x_{k+1} + x_k = 2$$

e discutere la stabilita' dell'equilibrio.

(6.111) Esercizio *Discutere la stabilita' dell'origine per l'equazione*

$$x_{k+2} + \alpha x_{k+1} + \beta x_k = 0$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

(6.112) Esercizio *Determinare la soluzione generale per le equazioni*

$$\begin{gathered}
x_{k+2} - 2x_{k+1} - 3x_k = (-3)^k, \\
x_{k+3} + 5x_{k+2} + 7x_{k+1} + 3x_k = (-1)^k, \\
x_{k+2} - 4x_{k+1} + 3x_k = 2^k, \\
x_{k+3} - x_{k+2} + x_{k+1} - x_k = \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right).
\end{gathered}$$

(6.113) Esercizio *Sia $x_0 \in (0, \pi)$ e si consideri la successione definita da*

$$x_{k+1} = x_k + \sin x_k.$$

(a) *provare che $x_k \in (0, \pi)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;*
(b) *provare che (x_k) cresce;*
(c) *calcolare il limite di (x_k) per $k \to \infty$.*

(6.114) Esercizio *Data la successione* (x_k) *definita da*

$$x_0 = a, \qquad x_{k+1} = \max\left\{\frac{1}{4}, x_k^2\right\}$$

dire se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, *il limite di* (x_k) *per* $k \to \infty$.

(6.115) Esercizio *Calcolare il limite della successione definita da*

$$x_1 = 1, \qquad x_{k+1} = \int_0^{x_k} e^{-t^2} dt.$$

(6.116) Esercizio *Si consideri l'equazione*

$$x^k = \cos\frac{x}{k}.$$

(a) *provare che esiste un'unica soluzione* x_k;
(b) *provare che* (x_k) *rimane limitata;*
(c) *calcolare il limite di* (x_k) *per* $k \to \infty$.

(6.117) Esercizio *Si consideri la successione definita da*

$$x_1 = \lambda, \qquad x_{k+1} = \frac{x_k}{1 + x_k},$$

con $\lambda \geq 0$. *Calcolare il limite di* (x_k) *per* $k \to \infty$.

(6.118) Esercizio *Sia* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Si studi la successione definita da*

$$x_1 = \lambda, \qquad x_{k+1} = 4\int_0^{x_k} \frac{e^{2\tau}}{(e^{2\tau} + 1)^2} d\tau.$$

(6.119) Esercizio *Sia* $\lambda > 0$. *Si studi la successione definita da*

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \lambda, \qquad x_{k+1} = x_k + x_{k-1}^2.$$

(6.120) Esercizio *Sia* $\lambda > 0$. *Si studi la successione definita da*

$$x_1 = \lambda, \qquad x_{k+1} = \log(1 + x_k).$$

Bibliografia

[1] E. ACERBI, L. MODICA, S. SPAGNOLO, Problemi scelti di Analisi Matematica II, *Liguori*, (1986) .

[2] V. E. BONONCINI, Lezioni di Analisi Matematica, *Cedam*, (1974) .

[3] J. P. CECCONI, L.C. PICCININI, G. STAMPACCHIA, Esercizi e problemi di Analisi Matematica, Volume 2. *Liguori*, (1981) .

[4] M. DEGIOVANNI, Dispense di Analisi Matematica II, *Univ. Catt. Sacro Cuore*.

[5] G. DE MARCO, C. MARICONDA, Esercizi di Analisi Matematica II, *Zanichelli & Decibel Ed. Padova*, (1998) .

[6] N. FUSCO, P. MARCELLINI, C. SBORDONE, Esercizi di Analisi Matematica II, *Liguori*, (1996) .

[7] G. GILARDI, Spazi di Hilbert, serie di Fourier e applicazioni alle equazioni alle derivate parziali, *Almo Collegio Borromeo*, Pavia (1997) .

[8] S. SALSA, A. SQUELLATI Esercizi di Analisi Matematica II, parte III *Masson*, 1999 .