

FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

Esercizi proposti

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente :

- (a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $\left[\left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \right]$
- (b) $f(x, y) = \log(1 - x^2) + \log(1 - y^2)$ $\left[\left\{ (x, y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1 \right\} \right]$
- (c) $f(x, y) = \tan \frac{y}{x}$ $\left[\mathbf{R}^2 \setminus \left\{ (x, y) : y = \frac{\pi}{2}x + k\pi x \ (k \in \mathbf{Z}) \cup x = 0 \right\} \right]$
- (d) $f(x, y) = \arcsin \frac{x - y}{x + y}$ $\left[\left\{ (x, y) : (x \geq 0, y \geq 0) \cup (x \leq 0, y \leq 0) \right\} \setminus \{(0, 0)\} \right]$
- (e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$ $\left[\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right]$

2. Determinare le linee di livello e l'immagine delle seguenti funzioni:

- (a) $f(x, y) = 2x + 3y$ $\left[\left\{ (x, y) : y = \frac{k - 2x}{3} \right\} \forall k, \quad Im(f) = \mathbf{R} \right]$
- (b) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ $\left[\left\{ (x, y) : \frac{x^2}{(\sqrt{k})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{k}/2)^2} = 1 \right\} \forall k \geq 0, \quad Im(f) = [0, +\infty) \right]$
- (c) $f(x, y) = xy$ $\left[\left\{ (x, y) : xy = k \right\} \forall k, \quad Im(f) = \mathbf{R} \right]$
- (d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ $\left[\left\{ (x, y) : \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{(k/2)^2} = 1 \right\} \forall k > 0, \{(0, 0)\} \ k = 0, \quad Im(f) = [0, +\infty) \right]$
- (e) $f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{2x^2 + 1}}$ $\left[\left\{ (x, y) : y = 2k^2x^2 + k^2 \right\} \forall k \geq 0, \quad Im(f) = [0, +\infty) \right]$

3. Calcolare i seguenti limiti :

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ $\left[\text{non esiste} \right]$
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$ $\left[0 \right]$
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log(x^2 + y^2)$ $\left[0 \right]$
- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{x - y}$ $\left[\text{non esiste} \right]$

4. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni

- (a) $f(x, y) = \frac{y}{\sin x}$ $\left[\left(\frac{-y \cos x}{\sin^2 x}, \frac{1}{\sin x} \right) \right]$
- (b) $f(x, y) = \tan \frac{y}{x}$ $\left[\left(\frac{-y}{x^2 \cos^2(y/x)}, \frac{1}{x \cos^2(y/x)} \right) \right]$
- (c) $f(x, y) = e^{x/y}$ $\left[\left(\frac{e^{x/y}}{y}, -\frac{xe^{x/y}}{y^2} \right) \right]$
- (d) $f(x, y) = y^{\log x}$ $\left[\left(\frac{y^{\log x} \log y}{x}, y^{\log x - 1} \log x \right) \right]$
- (e) $f(x, y) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^y$ $\left[\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{y-1} \left(-\frac{y}{x^2}\right), \left(1 + \frac{1}{x}\right)^y \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \right]$

5. Determinare il gradiente (se esiste) delle seguenti funzioni nei punti indicati:

- (a) $f(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ in $(0, 0)$ [non esiste]
 (b) $f(x, y) = |\sin x - \sin y|(x^2 + y^2)$ in $(0, 0)$ $\left[(0, 0) \right]$
 (c) $f(x, y) = (xy - x - y)|x - y^2|$ in $(1, 1)$ [non esiste]

6. Calcolare le derivate parziali prime e seconde, verificando la validità del teorema di Schwarz:

- (a) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$

$$\left[\nabla f(x, y) = (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2e^{x^2+y^2}(1 + 2x^2), \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2e^{x^2+y^2}(1 + 2y^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4xye^{x^2+y^2} \right]$$

 (b) $f(x, y) = \sqrt{y - 2x^2}$

$$\left[\nabla f(x, y) = \left(\frac{-2x}{\sqrt{y - 2x^2}}, \frac{1}{2\sqrt{y - 2x^2}} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-2y}{(y - 2x^2)^{3/2}}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{1}{4(y - 2x^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{x}{(y - 2x^2)^{3/2}} \right]$$

 (c) $f(x, y) = \log \frac{1}{x + y}$

$$\left[\nabla f(x, y) = \left(-\frac{1}{x + y}, -\frac{1}{x + y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{(x + y)^2}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{(x + y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{1}{(x + y)^2} \right]$$

7. Determinare le derivate delle seguenti funzioni lungo le direzioni e nei punti assegnati:

- (a) $f(x, y) = \frac{y + x^2}{x - y^4 - y}$ in $(1, 0)$ nella direzione $\vec{v} = (2, 1)$ $\left[4 \right]$
 (b) $f(x, y) = e^{-x^2+y^4}$ in $(1, 0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1, 1)$ $\left[-\frac{2}{e} \right]$.

8. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni :

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ nel punto $(0, 1, 2)$ $\left[z = 2y \right]$
 (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ nel punto $P(1, 1, 0)$ $\left[z = 2(x - y) \right]$
 (c) $f(x, y) = x^4 - x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$ nel punto $P(0, 1, 2)$ $\left[z = 4y - 2 \right]$

9. Determinare lo sviluppo di Taylor di secondo grado centrato nell'origine delle seguenti funzioni :

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy \sin(xy)$ $\left[f(x, y) = x^2 + y^2 + o(x^2 + y^2) \right]$
 (b) $f(x, y) = \log(1 + x^2y^2)$ $\left[f(x, y) = o(x^2 + y^2) \right]$
 (c) $f(x, y) = ye^x$ $\left[f(x, y) = y + xy + o(x^2 + y^2) \right]$

10. Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

- (a) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ $[(-4, 6) \text{ sella}]$
- (b) $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ $[(0, 0) \text{ sella}; (1, 1) \text{ minimo}]$
- (c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - (1 + x + y)^3$ $[(-1/3, -1/3) \text{ massimo}; (-1, -1), (1, -1), (-1, 1) \text{ selle}]$
- (d) $f(x, y) = x^4 - x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$ $[(-1, 0), (1, 0) \text{ minimi}; (0, 0), (\pm\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ selle}]$
- (e) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{x}{8} - y$ $[(-64, -8) \text{ sella}]$
- (f) $f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$ $[(-1, 0) \text{ minimo}; (1, 0) \text{ massimo}]$
- (g) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{4 + x^2} + \frac{1}{2}y$ $[(0, -1) \text{ minimo}; (2, -2), (-2, -2) \text{ selle}]$
- (h) $f(x, y) = \sqrt{-x^2 - y^2 + 3}$ $[(0, 0) \text{ massimo}, \{(x, y) : x^2 + y^2 = 3\} \text{ minimi}]$
- (i) $f(x, y) = e^{x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2}$ $[(0, 2), (-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0) \text{ selle}; (0, 0), (\sqrt{2}, 2), (-\sqrt{2}, 2) \text{ massimi}]$
- (j) $f(x, y, z) = xyz$ $[\text{gli assi coordinati sono punti di sella}]$

11. Data la funzione $z = y^{2x}$, si chiede di:

- (a) Determinarne il dominio. $\left[\left\{ (x, y) : y > 0 \right\} \right]$
- (b) Scriverne la formula di Taylor nell'intorno del punto $(1, 1)$, esplicitandone i termini fino al secondo ordine compreso. $\left[2 - 2x - 2y + 2xy + y^2 + o(x^2 + y^2) \right]$
- (c) Trovarne i punti stazionari e stabilirne il tipo. $\left[(0, 1) \text{ sella} \right]$

12. Data la funzione $f(x, y) = -x^3 + x^2 + y^2 - xy^2 + 4x - 4$, cercarne i punti critici e caratterizzarli con la matrice Hessiana. Calcolare inoltre la derivata direzionale di f nel punto di coordinate $(1, 1)$ e nella direzione del vettore $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

$$\left[(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}) \text{ selle}, \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}, 0\right) \text{ massimo}, \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}, 0\right) \text{ minimo}, \frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(1, 1) = \sqrt{2} \right]$$

13. Calcolare ∇f e $\nabla^2 f$ del campo scalare $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

$$\left[\nabla f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (x, y, z), \nabla^2 f = 0 \right]$$

14. Calcolare divergenza e rotore dei seguenti campi vettoriali :

- (a) $F(x, y, z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$ $\left[\nabla \cdot F = x^2 + y^2 + z^2, \nabla \wedge F = (2yz, 2xz, 2xy) \right]$
- (b) $F(x, y, z) = (xe^z, ye^x, ze^y)$ $\left[\nabla \cdot F = e^x + e^y + e^z, \nabla \wedge F = (-e^y z, -e^z x, -e^x y) \right]$
- (b) $F(x, y, z) = (x, y, z)$ $\left[\nabla \cdot F = 3, \nabla \wedge F = (0, 0, 0) \right]$
- (d) $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$ $\left[\nabla \cdot F = 0, \nabla \wedge F = (0, 0, 0) \right]$