FUNZIONI DI PIU' VARIABILI
Esercizi svolti

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente :

   (a) $f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2)$
   (b) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$
   (c) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^4}$
   (d) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$
   (e) $f(x,y) = \log(xy^2 + x^2y)$

2. Determinare le linee di livello e l'immagine delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = 2x - 5y$
   (b) $f(x,y) = x^2y$
   (c) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2}{y+1}}$
   (d) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

3. Calcolare i seguenti limiti :

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$
   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2 + y^2)$
   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$
   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^4}$
   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin xy}{x^2 + y^2}$

4. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni

   (a) $f(x,y) = x^2 + 2xy - xy^2$
   (b) $f(x,y) = ye^{2x^2}$
   (c) $f(x,y) = y^2e^{-x}$
   (d) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$
   (e) $f(x,y) = e^{x/y}$

5. Calcolare (se esiste) il gradiente delle seguenti funzioni nei punti indicati:

   (a) $f(x,y) = xy\ e^{\sqrt{|x+y|}}$ in $(0,0)$
   (b) $f(x,y) = |x+y|\ \sin(x^2 + y)$ in $(0,0)$
   (c) $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $(0,0)$
   (d) $f(x,y) = (x-y)\sqrt{|y - x^2|}$ in $(1,1)$

6. Calcolare le derivate parziali prime e seconde, verificando la validità del teorema di Schwarz:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{7x + 4y - 2}}$
   (b) $f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2)$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{y}$

7. Determinare le derivate delle seguenti funzioni lungo le direzioni e nei punti assegnati:

   (a) $f(x,y) = x^2 + xy - 2$ in $P(1,0)$ nella direzione $\vec{v} = (2,1)$
   (b) $f(x,y) = e^x \cos y$ in $P(0,0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1,2)$
   (c) $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $P(0,0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1,1)$

8. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni :

   (a) $f(x,y) = x^3 - y^3$ nel punto $(0,1,-1)$
   (b) $f(x,y) = x^y + y^x$ nel punto $(1,1,2)$
   (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ nel punto $(2,0,2)$

9. Determinare lo sviluppo di Taylor di secondo grado centrato nell'origine delle seguenti funzioni :

   (a) $f(x,y) = \sin x \sin y$
   (b) $f(x,y) = xe^{xy}$
   (c) $f(x,y) = x^2 \sin(y^2)$

10. Data la funzione $f(x,y) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2 y}$, si verifichi che non è differenziabile in $(1,0)$ e si calcolino le sue derivate direzionali in tale punto, per ogni vettore v non nullo.

11. Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

    (a) $f(x,y) = x^2 y + x^2 - 2y$
    (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$
    (c) $f(x,y) = \log(1 + x^2 y^2)$
    (d) $f(x,y) = x \cos y$
    (e) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
    (f) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$
    (g) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + 2y^2}$
    (h) $f(x,y,z) = 2(x^4 + y^4 + z^4) + 8xy$

12. Calcolare ∇f e $\nabla^2 f$ dei seguenti campi scalare

    (a) $f(x,y,z) = xy^2 + yz^3 - z^2$
    (b) $f(x,y,z) = y \sin z + x \sin y$
    (c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

13. Calcolare divergenza e rotore dei seguenti campi vettoriali :

    (a) $F(x,y,z) = (xy,\ yz,\ zx)$
    (b) $F(x,y,z) = (x^2 + yz,\ xyz,\ x + zy^2)$
    (c) $F(x,y,z) = (x \cos z,\ y \sin x,\ z \cos y)$.

FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

Esercizi svolti - SOLUZIONI

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente :

   (a) $f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2)$: $\qquad D = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 < 1\}$
   Essendo $\log x$ definita per $x > 0$ si ha che $f(x,y)$ risulta definita per $1 - x^2 - y^2 > 0$, da cui il risultato.

   (b) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$: $\qquad D = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$
   Essendo $\log x$ definita per $x > 0$ si ha che $f(x,y)$ risulta definita per $x^2 + y^2 > 0$, cosa verificata per tutti i punti di $\mathbf{R}^2$ esclusa l'origine degli assi.

   (c) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^4}$: $\qquad D = \{(x,y) :\ y \ge x^2\ \vee\ y \le -x^2\}$
   Essendo $\sqrt{x}$ definita per $x \ge 0$ si ha che $f(x,y)$ risulta definita per $y^2 - x^4 \ge 0 \leftrightarrow y^2 \ge x^4 \leftrightarrow y \ge x^2$ oppure $y \le -x^2$.

   (d) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$: $\qquad D = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \in [2k\pi, (2k+1)\pi],\ k \in \mathbf{Z}\}$
   Essendo la funzione $\sqrt{x}$ definita per $x \ge 0$ si ha che la funzione $f(x,y)$ risulta definita per (x,y) tali che $\sin(x^2 + y^2) \ge 0 \leftrightarrow x^2 + y^2 \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, per qualche $k \in \mathbf{Z}$.

   (e) $f(x,y) = \log(xy^2 + x^2y)$: $\qquad D = \{(x,y) :\ (x > 0,\ y > 0) \vee (x < 0,\ 0 < y < -x) \vee (x > 0,\ y < -x)\}$
   Essendo $\log x$ definita per $x > 0$ si ha che $f(x,y)$ risulta definita per $xy^2 + x^2y > 0 \leftrightarrow xy(y + x) > 0$. Studiando il segno delle funzioni xy e $x + y$ separatamente e utilizzando la regola dei segni si ottiene il risultato.

2. Determinare le linee di livello e l'immagine delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = 2x - 5y$:

   Ponendo $f(x,y) = k$ si ottiene $2x - 5y = k \leftrightarrow 2x - k = 5y \leftrightarrow y = \dfrac{2x - k}{5}$. $Im(f) = \mathbf{R}$.

   (b) $f(x,y) = x^2y$

   Ponendo $f(x,y) = k$ si ottiene $x^2y = k \leftrightarrow y = \dfrac{k}{x^2}$, se $k \ne 0$ e $xy = 0$ (insieme dei punti degli assi) se $k = 0$. $Im(f) = \mathbf{R}$.

   (c) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2}{y+1}}$

   Il dominio della funzione $f(x,y)$ è $D = \{(x,y) : y > -1\} \cup \{(x,y) : x = 0,\ y < -1\}$. Ponendo $f(x,y) = k$ e $k > 0$ si ottiene :

   $$\sqrt{\frac{x^2}{y+1}} = k \leftrightarrow \frac{x^2}{y+1} = k^2 \leftrightarrow x^2 = k^2(y+1) \leftrightarrow y = \frac{x^2}{k^2} - 1.$$

   Le linee di livello per $k > 0$ risultano quindi essere $\{(x,y) : y = \dfrac{x^2}{k^2} - 1,\ x \ne 0\}$. Si ottiene invece $\emptyset$ per $k < 0$ e $\{(x,y) \in D : x = 0\}$ per $k = 0$. $Im(f) = [0, +\infty)$.

   (d) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

   Ponendo $f(x,y) = k$ si ottiene $\dfrac{1}{x^2 + y^2} = k \leftrightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{1}{k}$, per $k > 0$, e $\emptyset$ per $k \le 0$. $Im(f) = (0, +\infty)$.

3. Calcolare i seguenti limiti :

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

Calcolando il limite lungo le rette passanti per l'origine si ottiene 0 e quindi il limite è 0 oppure non esiste. Passando alle coordinate polari si ottiene : $\left|\dfrac{\rho\cos\theta\,\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right| = \left|\rho\cos\theta\,\sin^2\theta\right| \le \rho \to 0.$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2+y^2) = 0$

Calcolando il limite lungo le rette passanti per l'origine si ottiene 0 e quindi il limite è 0 oppure non esiste. Passando alle coordinate polari si ottiene : $\left|\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\,\log(\rho^2)\right| \le \rho^2|\log(\rho^2)| \to 0.$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2}$ non esiste

Pongo $y = mx$ e calcolo il limite lungo le rette passanti per $(0,0)$.

$$\frac{x^3-2x(mx)+(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{x^3-2mx^2+m^2x^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{x-2m+m^2}{(1+m^2)} \to \frac{-2m+m^2}{(1+m^2)} \text{ per } x\to 0.$$

Siccome il risultato varia al variare della direzione il limite non può esitere.

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^2+y^4}$ non esiste

Eseguendo il limite lungo le rette $y = mx$ si ottiene 0. Quindi il limite di $f(x,y)$ è 0 oppure non esiste. Lungo la retta $x = 0$ il limite risulta però essere 1. Il limite quindi non esiste.

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} = 0$

Calcolando il limite lungo le rette passanti per l'origine si ottiene 0 e quindi il limite è 0 oppure non esiste. Passando alle coordinate polari si ottiene :

$$\left|\frac{\rho\cos\theta\,\sin(\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta)}{\rho^2}\right| \le \frac{|\sin(\rho^2\cos\theta\,\sin\theta)|}{\rho} \le \frac{\rho^2|\cos\theta\,\sin\theta|}{\rho} \le \rho \to 0.$$

4. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni

(a) $f(x,y) = x^2+2xy-xy^2$: $\nabla f(x,y) = (2x+2y-y^2,\ 2x-2xy)$

(b) $f(x,y) = ye^{2x^2}$: $\nabla f(x,y) = (4xye^{2x^2},\ e^{2x^2})$

(c) $f(x,y) = y^2e^{-x}$: $\nabla f(x,y) = (-y^2e^{-x},\ 2ye^{-x})$

(d) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$: $\nabla f(x,y) = (\dfrac{2x}{x^2+y^2},\ \dfrac{2y}{x^2+y^2})$

(e) $f(x,y) = e^{x/y}$: $\nabla f(x,y) = (\dfrac{e^{x/y}}{y},\ \dfrac{-xe^{x/y}}{y^2})$

5. Calcolare (se esiste) il gradiente delle seguenti funzioni nei punti indicati:

(a) $f(x,y) = xy\,e^{\sqrt{|x+y|}}$ in $(0,0)$:

Essendo $f(x,y)$ nulla lungo gli assi il gradiente esiste ed è $(0,0)$.

(b) $f(x,y) = |x+y|\ \sin(x^2+y)$ in $(0,0)$:

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{|h|\sin\,(h^2)}{h} = 0$, quindi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$,
$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{|h|\sin\,(h)}{h} = 0$, quindi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,
da cui segue $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

(c) $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $(0,0)$:

Essendo $f(x,y)$ nulla lungo l'asse y si ha immediatamente che $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$\displaystyle\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{|h|}{h} = \pm 1,$

da cui segue che $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste, e di conseguenza non esiste $\nabla f(0,0)$.

(d) $f(x,y) = (x-y)\sqrt{|y-x^2|}$ in $(1,1)$:

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h-1)\sqrt{|1-(1+h)^2|}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sqrt{|h||2+h|}}{h} = 0$, quindi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0$,

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(1,1+h)-f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1-h-1)\sqrt{|1+h-1|}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h\sqrt{|h|}}{h} = 0$, quindi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$,

da cui segue $\nabla f(1,1) = (0,0)$.

6. Calcolare le derivate parziali prime e seconde, verificando la validità del teorema di Schwarz:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{7x+4y-2}}$:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{7}{2}(7x+4y-2)^{-3/2}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(7x+4y-2)^{-3/2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{147}{4}(7x+4y-2)^{-5/2}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12(7x+4y-2)^{-5/2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 21(7x+4y-2)^{-5/2}$

(b) $f(x,y) = \log(1-x^2-y^2)$:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-2x}{1-x^2-y^2}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-2y}{1-x^2-y^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2\dfrac{1+x^2-y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2\dfrac{1-x^2+y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{-4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{y}$:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-1}{2y\sqrt{1-x}}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\sqrt{1-x}}{y^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{-1}{4y}(1-x)^{-3/2}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2\sqrt{1-x}}{y^3}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{1}{2y^2\sqrt{1-x}}$

7. Determinare le derivate delle seguenti funzioni lungo le direzioni e nei punti assegnati:

(a) $f(x,y) = x^2 + xy - 2$ in $P(1,0)$ nella direzione $\vec{v} = (2,1)$

Per definizione $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+2t,t)-f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+2t)^2+(1+2t)t-2+1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{6t^2+5t}{t} = 5$

Siccome $f(x,y)$ è differenziabile in $(1,0)$ si può procedere anche facendo il prodotto scalare tra il gradiente in $(1,0)$ e il vettore $\vec{v}$:

$\nabla f(x,y) = (2x+y, x)$ e quindi $\nabla f(1,0) = (2,1)$, da cui segue $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \vec{v} = (2,1)\cdot(2,1) = 5$

(b) $f(x,y)=e^x\cos y$ in $P(0,0)$ nella direzione del vettore $\vec{v}=(1,2)$

Per definizione $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to0}\dfrac{f(t,2t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\dfrac{e^t\cos(2t)-1}{t}=\lim_{t\to0}(e^t\cos(2t)-2e^t\sin(2t))=1$
Siccome $f(x,y)$ è differenziabile in $(0,0)$ si può procedere anche facendo il prodotto scalare tra il gradiente in $(0,0)$ e il vettore $\vec{v}$:
$\nabla f(x,y)=(e^x\cos y,-e^x\sin y)$ e quindi $\nabla f(0,0)=(1,0)$, da cui segue :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\vec{v}=(1,0)\cdot(1,2)=1$$

(c) $f(x,y)=\sqrt{|x^2-xy|}$ in $P(0,0)$ nella direzione del vettore $\vec{v}=(1,1)$

Come visto nel punto (c) esercizio 5 la funzione $f(x,y)$ non ammette gradiente. Non rimane quindi che utilizzare la definizione :
$\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to0}\dfrac{f(t,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\dfrac{\sqrt{|t^2-t^2|}}{t}=0$

8. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni :

(a) $f(x,y)=x^3-y^3$ nel punto $(0,1,-1)$:

$f(0,1)=-1$, $\nabla f(x,y)=(3x^2,-3y^2)$ e quindi $\nabla f(0,1)=(0,-3)$. Il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(0,1,-1)$ è quindi : $z=f(0,1)+\nabla f(0,1)\cdot(x,y-1)=2-3y$.

(b) $f(x,y)=x^y+y^x$ nel punto $(1,1,2)$:

$f(1,1)=2$, $\nabla f(x,y)=(yx^{y-1}+y^x\log y,\ x^y\log x+xy^{x-1})$ e quindi $\nabla f(1,1)=(1,1)$. Il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(1,1,2)$ è quindi : $z=f(1,1)+\nabla f(1,1)\cdot(x-1,y-1)=x+y$.

(c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ nel punto $(2,0,2)$:

$f(2,0)=2$, $\nabla f(x,y)=(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ e quindi $\nabla f(2,0)=(1,0)$. Il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(2,0,2)$ è quindi : $z=f(2,0)+\nabla f(2,0)\cdot(x-2,y)=x$.

9. Determinare lo sviluppo di Taylor di secondo grado centrato nell'origine delle seguenti funzioni :

(a) $f(x,y)=\sin x\sin y$:

$\nabla f(x,y)=(\cos x\ \sin y,\ \sin x\ \cos y)$ e quindi $\nabla f(0,0)=(0,0)$.
Le derivate di ordine due sono :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\sin x\ \sin y$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\cos x\ \cos y$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1$
Ottengo quindi lo sviluppo : $f(x,y)=xy+o(x^2+y^2)$.

(b) $f(x,y)=xe^{xy}$:

$\nabla f(x,y)=(e^{xy}+xy\,e^{xy},\ x^2\,e^{xy})$ e quindi $\nabla f(0,0)=(1,0)$.
Le derivate di ordine due sono :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2y\,e^{xy}+xy^2\,e^{xy}$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=x^3\,e^{xy}$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=2x\,e^{xy}+x^2y\,e^{xy}$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0$
Ottengo quindi lo sviluppo : $f(x,y)=x+o(x^2+y^2)$.

(c) $f(x,y) = x^2 \sin(y^2)$:

$\nabla f(x,y) = (2x \sin y^2,\ 2yx^2 \cos y^2)$ e quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Le derivate di ordine due sono :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\sin y^2$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4y^2x^2 \sin y^2 + 2x^2 \cos y^2$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4xy \cos y^2$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$
Ottengo quindi lo sviluppo : $f(x,y) = o(x^2 + y^2)$.

10. Data la funzione $f(x,y) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2 y}$, si verifichi che non è differenziabile in $(1,0)$ e si calcolino le sue derivate direzionali in tale punto, per ogni vettore v non nullo.

Pongo $\vec{v} = (a,b)$. Per definizione si ha che : $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(1+at, bt) - f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{1 + \sqrt[3]{(at)^2 bt} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{t\sqrt[3]{a^2 b}}{t} = \sqrt[3]{a^2 b}$, da cui segue $\nabla f(1,0) = (0,0)$. Non essendo verificata la formula $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot \vec{v}$, concludo quindi che $f(x,y)$ non è differenziabile in $(1,0)$.

11. Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y) = x^2 y + x^2 - 2y$:
Calcolo il gradiente di $f(x,y)$: $\nabla f(x,y) = (2x + 2xy, x^2 - 2)$. Ponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si ottengono i due punti stazionari $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$. Per determinare la natura dei due punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservo che $H(\sqrt{2},-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ e $H(-\sqrt{2},-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ sono entrambe indefinite. I due punti stazionari sono quindi due punti di sella.

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$:
Calcolo il gradiente di $f(x,y)$: $\nabla f(x,y) = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$. Ponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si ottengono i due punti stazionari $(0,0)$ e $(-1/3,-1/3)$. Per determinare la natura dei due punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :
$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$, e osservo che $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice indefinita) e $H(-1/3,-1/3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (matrice definita negativa). Il punto $(0,0)$ risulta quindi essere una sella e il punto $(-1/3,-1/3)$ un massimo relativo.

(c) $f(x,y) = \log(1 + x^2y^2)$:
Essendo la funzione logaritmo una funzione strettamente crescente sul suo dominio posso ridurmi a studiare la funzione $g(x,y) = 1 + x^2y^2$. Calcolo il gradiente di $g(x,y)$: $\nabla g(x,y) = (2xy^2, 2yx^2)$. Ponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si ottiene che tutti i punti dei due assi coordinati sono punti stazionari. Per determinare la natura dei punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Purtroppo la matrice Hessiana risulta nulla su $(0,0)$ e solo semidefinita sugli altri punti dei due assi. In ogni caso quindi non posso concludere nulla sulla natura dei punti stazionari. Posso però concludere con la seguente argomentazione : $x^2y^2 \geq 0 \to 1 + x^2y^2 \geq 1 \to f(x,y) = \log(1+x^2y^2) \geq 0$. Essendo $f(x,y)$ nulla sugli assi, tutti i punti stazionari risultano essere punti di minimo assoluto e quindi di minimo relativo.

(d) $f(x,y) = x\cos y$:
Calcolo il gradiente di $f(x,y)$: $\nabla f(x,y) = (\cos y, -x\sin y)$. Ponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si ottengono gli infiniti punti stazionari $P_k = (0, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, per $k \in \mathbf{Z}$. Per determinare la natura dei punti stazionari P_k calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin y \\ -\sin y & -x\cos y \end{pmatrix},$$

e osservo che $H(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice indefinita. Gli infiniti punti stazionari P_k sono quindi tutti punti di sella.

(e) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$:
Essendo la funzione radice una funzione strettamente crescente sul suo dominio posso ridurmi a studiare la funzione $g(x,y) = 1 + x^2 + y^2$. Calcolo il gradiente di $g(x,y)$: $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$. Ponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si ottiene l'unico punto stazionaro $(0,0)$. Per determinare la natura del punto stazionaro calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

matrice definita positiva. Il punto $(0,0)$ risulta quindi essere punto di minimo locale per la funzione $g(x,y)$, e di conseguenza anche per la funzione $f(x,y)$. Si osservi che $(0,0)$ è anche punto di minimo assoluto per $g(x,y)$ e quindi per $f(x,y)$, essendo $g(0,0) = 1$ e $g(x,y) \geq 1$ per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(f) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$:
Essendo la funzione e^{-x} una funzione strettamente decrescente su $\mathbf{R}$ posso ridurmi a studiare la funzione $g(x,y) = x^2 + y^2$. In modo perfettamente analogo all'esercizio precedente ottengo che la funzione $g(x,y)$ ha il solo punto stazionario $(0,0)$, che risulta essere punto di minimo locale e assoluto. Posso quindi concludere che la funzione $f(x,y)$ ha il solo punto stazionario $(0,0)$, che risulta essere punto di massimo locale e assoluto.

(g) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+2y^2}$:
Calcolo il gradiente di $f(x,y)$: $\nabla f(x,y) = (\frac{-2x}{(x^2+2y^2)^2}, \frac{-4y}{(x^2+2y^2)^2})$. Si ha quindi che $\nabla f(x,y) = (0,0)$ non è mai verificata sul dominio $D = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$. Non esistono quindi punti stazionari.

(h) $f(x,y,z) = 2(x^4 + y^4 + z^4) + 8xy$:
Calcolo il gradiente di $f(x,y,z)$: $\nabla f(x,y,z) = (8x^3 + 8y, 8y^3 + 8x, 8z^3)$. Ponendo $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ si ottengono i tre punti stazionari $(0,0,0)$, $(1,-1,0)$ e $(-1,1,0)$. Per determinare la natura dei punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 24x^2 & 8 & 0 \\ 8 & 24y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 24z^2 \end{pmatrix}.$$

Osservo che

$$H(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (matrice indefinita)}$$

$$H(1,-1,0) = H(-1,1,0) = \begin{pmatrix} 24 & 8 & 0 \\ 8 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \text{ (matrice definita positiva) .}$$

Ho quindi che $(0,0,0)$ risulta punto di sella e i punti $(1,-1,0)$ e $(-1,1,0)$ risultano invece di minimo relativo.

12. Calcolare ∇f e Δf (Laplaciano di f) dei seguenti campi scalare

(a) $f(x,y,z) = xy^2 + yz^3 - z^2$: $\nabla f(x,y,z) = (y^2,\, 2xy + z^3,\, 3yz^2 - 2z)$ $\Delta f(x,y,z) = 2x + 6yz - 2$

(b) $f(x,y,z) = y\sin z + x\sin y$: $\nabla f(x,y,z) = (\sin y,\, \sin z + x\cos y,\, y\cos z)$ $\Delta f(x,y,z) = -x\sin y - y\sin z$

(c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$: $\nabla f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,(x,\, y,\, z)$ $\Delta f(x,y,z) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

13. Calcolare divergenza e rotore dei seguenti campi vettoriali :

(a) $F(x,y,z) = (xy,\ yz,\ zx)$:

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + z + x$$

$$\text{rot } F = \nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = (-y,\ -z,\ -x)$$

(b) $F(x,y,z) = (x^2 + yz,\ xyz,\ x + zy^2)$:

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = 2x + xz + y^2$$

$$\text{rot } F = \nabla \wedge F = (2yz - yx,\ y - 1,\ yz - z)$$

(c) $F(x,y,z) = (x \cos z,\ y \sin x,\ z \cos y)$:

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \cos z + \sin x + \cos y$$

$$\text{rot } F = \nabla \wedge F = (-z \sin y,\ -x \sin z,\ y \cos x)$$