

## Maurizio Prazzoli

Gli appunti sono stati scritti utilizzando materiale proveniente da varie fonti. Ho cercato per quanto possibile di riportare i riferimenti ai testi originali. Tali appunti potrebbero contenere errori ed inesattezze. Chiedo di inviarmi i Vostri suggerimenti.

[maurizio@prazzoli.it](mailto:maurizio@prazzoli.it)

## Appunti di Comunicazioni Elettriche A

### Testi di riferimento:

| Acronimo | Titolo                                                                                                          |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| VOL_1    | A. Bruce Carlson, Paul B. Crilly, and Janet C. Rutledge: Communication systems, 4th edition, McGraw Hill, 2002. |
| VOL_2    | Couch Leon W. Fondamenti di telecomunicazioni                                                                   |
| VOL_3    | Simon Haykin, Communication Systems 4th Edition                                                                 |

Comunque risulti possibile, utilizzare qualunque tipo di segnale, è utile considerare alcune convenzioni nel tipo di segnale che verrà generalmente utilizzato nel seguito.

Definiamo  $m(t)$  come il generico segnale prodotto da una sorgente di informazioni per questo elenchiamo alcune caratteristiche.

- Ha banda limitata  $W$ . Il segnale è in banda-base, vedere definizione nel seguito, per cui è possibile affermare che il contenuto spettrale relativo a frequenze  $|f| > W$  è nullo.
- $|m(t)| \leq 1$  questo serve per semplificare i calcoli matematici, in quanto impone un limite alla potenza media; limitandolo  $\leq 1$ .

## SEGNALE SINUSOIDALE / TONO

Talvolta si farà riferimento a segnali sinusoidali o Tono:

$$x(t) = A_m \cos \omega_c t$$

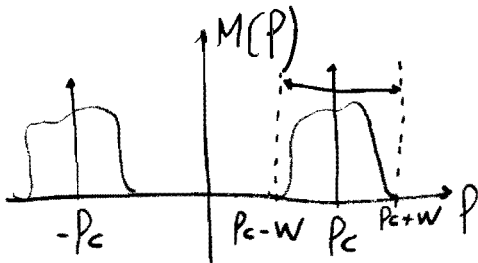
$$A_m = \text{ampiezza} \leq 1$$

$$\omega_c = 2\pi f_c$$

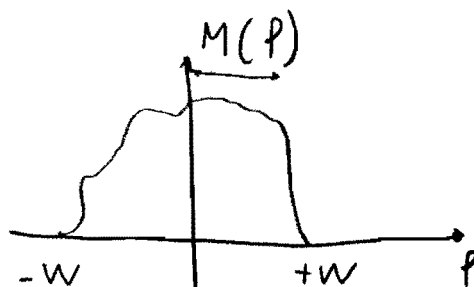
$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \quad f_c \leq W$$

## LARGHEZZA DI BANDA

La larghezza di banda fornisce una misura utile per valutare l'estensione del contenuto ritenuto significativo in frequenza - le frequenze di interesse, sono solamente quelle positive - Esmp:



Larghezza di Banda:  $2W$



Larghezza di Banda:  $W$

Consideriamo la famiglia delle sinusoidi.

Queste vengono rappresentate in termini di COSENO per convenzione.

Esempio:

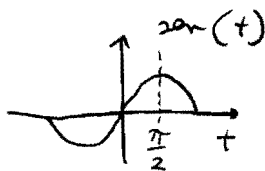
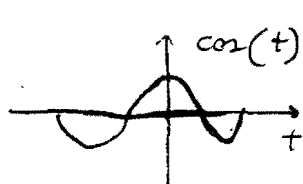
$$v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (1)$$

$A$  = valore di picco dell'ampiezza

$\omega_0$  = frequenza radiale

$\phi$  = Fase

La fase rappresenta il fatto che il picco, non avviene in corrispondenza dell'origine ma è spostato rispetto ad essa di:  $t = -\phi/\omega_0$ . Questo è quello che si vede considerando:



$$\cos(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

L'equazione (1) indica che il segnale  $v(t)$  si ripete nel tempo con periodo  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Il reciproco del periodo è la frequenza ciclica.

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Nell'analisi vettoriale, i fasori ricoprono un ruolo fondamentale. Questi discendono dalla formula di Eulero.

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$$

$$j = \sqrt{-1}$$

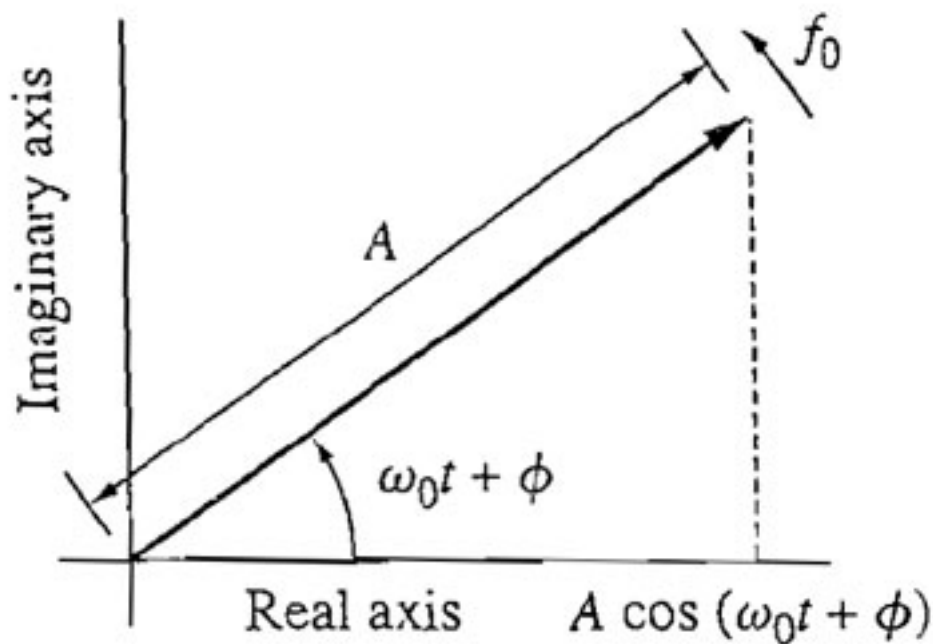
$\theta$  = angolo orbitario

Se consideriamo  $\theta = \omega_0 t + \phi$ , possiamo scrivere:

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = A \cos(\omega_0 t + \phi) =$$

$$A \operatorname{Re} \{ e^{j(\omega_0 t + \phi)} \} = A \operatorname{Re} \{ e^{j\omega_0 t} e^{j\phi} \} \quad (2)$$

Questa è definita rappresentazione con fasori, in quanto i termini tra le  $\{ \}$  possono essere rappresentati come vettori rotanti nel piano complesso.





Il fasore ha lunghezza  $A$ , ruota in senso ORARIO a una frequenza di  $f_0$  rivoluzioni per secondo. Al tempo  $t=0$  questo fasore è in angolo  $\phi$  con l'asse positivo reale.

Osserviamo dunque che sono sufficienti tre parametri per descrivere un fasore: AMPIEZZA, ANGOLO DI FASE, FREQUENZA DI ROTAZIONE. Per descrivere un fasore nel dominio della frequenza, dobbiamo mettere in corrispondenza l'ampiezza e la fase con una particolare frequenza. Questi corrispondono a due grafici AMPIEZZA vs FREQUENZA e FASE vs FREQUENZA. Occorre stabilire alcune convenzioni:

1. In tutte le rappresentazioni e diagrammi, la variabile indipendente è la frequenza ciclica  $f_0$ .
2. L'angolo di fase è misurato rispetto al coseno o in alternativa rispetto all'asse reale della frequenza.  

$$\cos \omega t = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$
3. Ampiezza è sempre una quantità positiva. Quando questa assume valori negativi, questi vengono assorbiti dalla fase.  

$$-A \cos \omega t = A \cos(\omega t \pm \pi)$$

#### CONVENZIONI SU GRAFICI DI SPETTRI

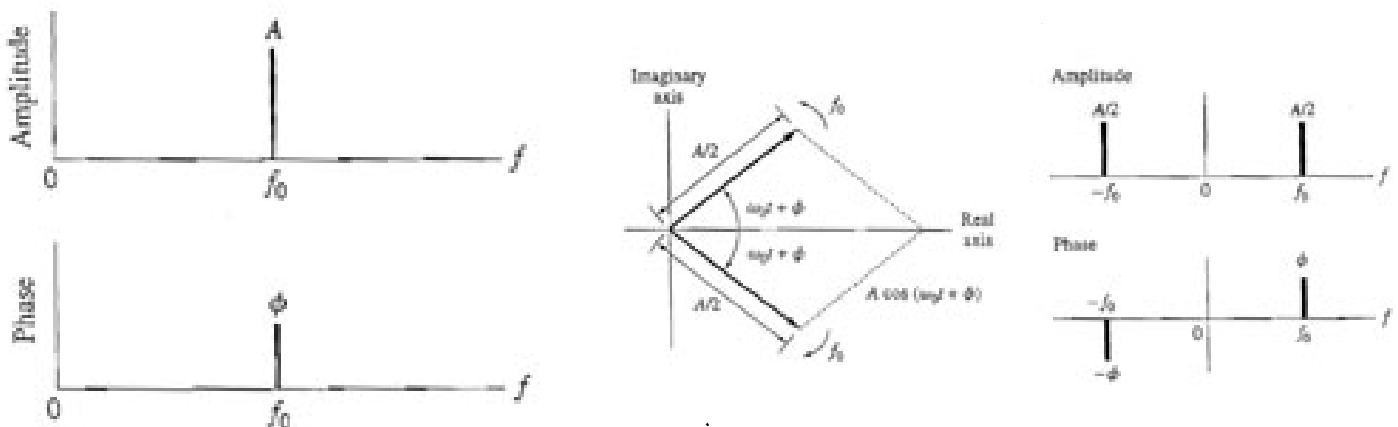


Figura A

La figura A viene definita ONE-SIDE (monolatero)

può essere costruita per qualunque combinazione lineare di sinusoidi.  
Un'altra rappresentazione include le frequenze negative.

Ricordiamo che

$$\operatorname{Re}\{z\} = \frac{1}{2} (z + z^*)$$

$$z = A e^{j(\omega_0 t + \phi)}$$

$$z^* = A e^{-j(\omega_0 t + \phi)}$$

L'eq (2) diventa:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} \left[ e^{j(\omega_0 t + \phi)} + e^{-j(\omega_0 t + \phi)} \right]$$

Abbiamo ora una coppia di frequenze coniugate.

Il diagramma può essere rappresentato ora in modo BILATERO includendo anche le frequenze negative.

Ricordiamo che quando si lavora con segnali reali è sempre soddisfatta la simmetria Hermetiana.

$$x(t) \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} X_R(-P) = X_R(P) \\ X_I(-P) = -X_I(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x(-P) = A_x(P) \\ \phi_x(-P) = -\phi_x(P) \end{cases}$$

$$x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(-P) = X^*(P).$$

Dunque nei prossimi capitoli, i segnali sono reali, salvo diversa identificazione.

Dai grafici si vede che una sola linea nel grafico MONOLATERO rappresenta un COSENO, una sola linea nel grafico MONOLATERO, rappresenta l'angolo complesso, occorre aggiungere altra forza, il coniugato per ottenere il COSENO REALE.

07/06/2009

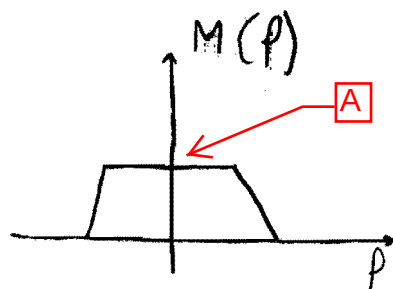
7

Parchi abbiamo bisogno di modulo?

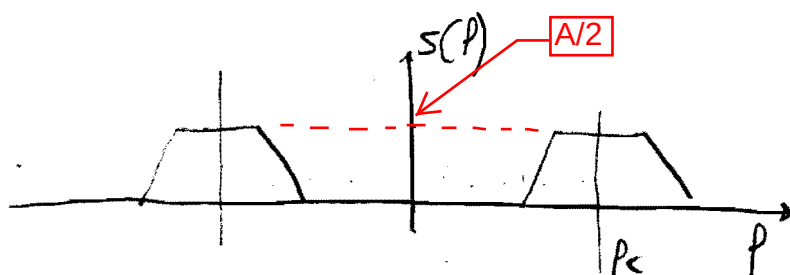
Se vogliamo trasformare il segnale originale come può essere per esempio un segnale vocale; lo cui occupazione spettrale varia da  $-4 \text{ KHz}$  a  $4 \text{ KHz}$ , possiamo pensare il segnale centrato nella frequenza zero.

Modulare il segnale significa dotare il segnale che intendiamo trasmettere in modo tale che questo possa "viaggiare" nel canale che abbiamo a disposizione e poterlo poi ricostruire inalterato.

Per esempio supponiamo di voler trasmettere il segnale in banda base



Il segnale è in banda base e base frequenza dunque per ricevere bene frequenze occorrono antenne molto lunghe essendo la lunghezza dell'antenna proporzionale a  $\frac{1}{f}$  è possibile vedere come ad esempio trasmettere il segnale in questa modo:



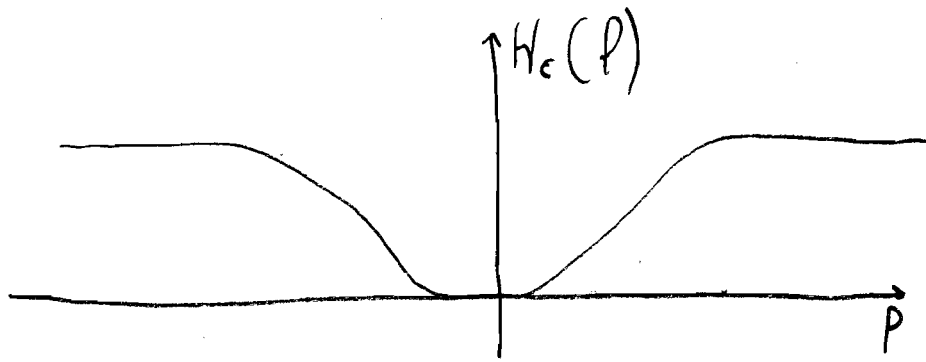
Modulazione di ampiezza  
moltiplicando per un coseno  
l'ampiezza si dimezza.  
Pag 69 Vannucci

Le dimensioni dell'antenna si riducono

- Possiamo dire che uno dei primi obiettivi della modulazione è quello del dimensionamento delle antenne

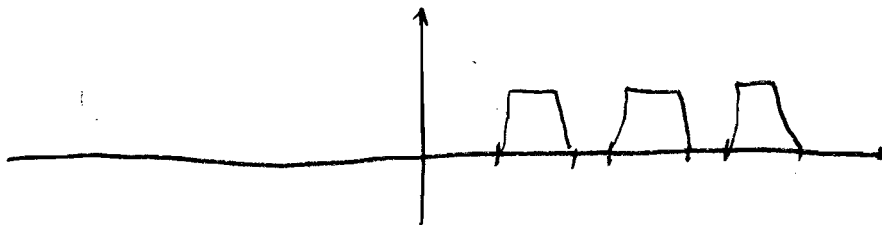
Il canale in cui vogliamo inviare il segnale qui non deve avere caratteristiche in relazione alla banda di frequenza in cui il segnale è basato riferendoci sempre al segnale  $m(t)$  il cui spettro è  $M(f)$

È possibile che il canale su cui debbo transire il segnale possa essere trasversale alla una risposta in frequenza simile a:



Come si vede, questo tipo porta forti attenuazioni per le basse frequenze mentre lascia passare quasi inalterate le frequenze alte, vedendo che trasmettendo  $s(t)$  nel canale, questo può passare inalterato. Altro tipo della modulazione è dunque quello di adattare alle caratteristiche del canale.

Supponiamo di avere molte stazioni trasmettenti che devono utilizzare lo stesso canale contemporaneamente. È necessario che i segnali appartenenti alle diverse stazioni, possano transitare insieme nel canale, senza interferenze tra di loro, e che in fase di ricezione sia possibile selezionare il segnale che si intende tra i vari presenti nel canale. Si pensi ad una radio molte stazioni trasmettenti, tutti i segnali nella stessa canale in contemporanea, possibilità di scegliere in fase di ricezione quello di interesse. Come si fa? Ogni segnale viaggia in una banda dedicata di frequenza. Frenpa

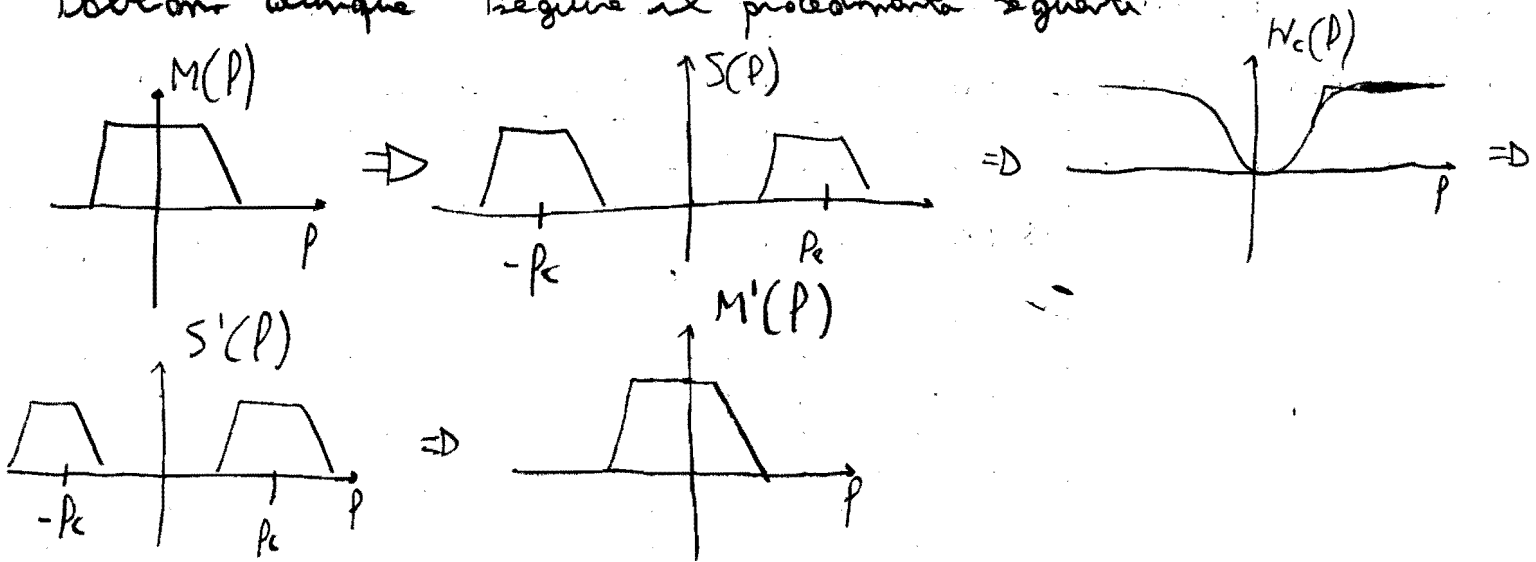


Questa tecnica è detta MULTIPLEXING.

Come portare il segnale in banda base in banda passante e viceversa?

Si potrebbe pensare di lavorare direttamente in banda passante cioè in fase di ricezione del segnale in banda passante si potrebbe supporre di operare sul segnale senza riportarlo in banda base, ma questo crea notevoli disagi perché tutti i componenti dovrebbero lavorare in alta frequenza dunque costi alti e difficoltà di realizzazione.

Dobbiamo dunque seguire il procedimento seguente:



$M(p)$  segnale sorgente in banda base

$S(p)$  segnale equivalente a  $M(p)$  ma in banda passante

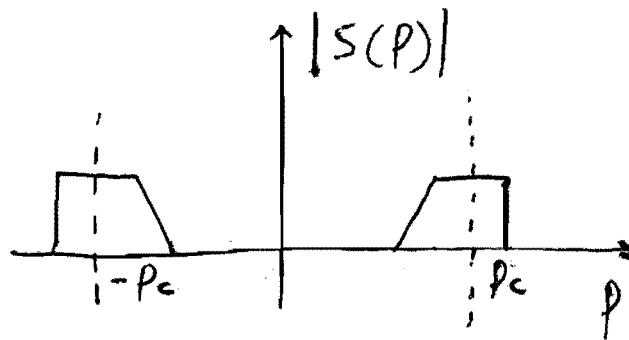
$H_c(p)$  imposta in frequenza del canale

$S'(p)$  segnale ricevuto banda passante

$M'(p)$  segnale ricevuto banda base

Lo caso che dobbiamo vedere è come passare da  $M(p)$  a  $S(p)$  e da  $S'(p)$  a  $M'(p)$

Insieme con il considerare un segnale passa banda sempre:



Possiamo pensare ad  $S(p)$  come il segnale ricevuto e attenuato da un processo di modulazione (vedete sempre precedente per avere un'idea)

Tale segnale nel dominio del tempo si può dimostrare essere

$$s(t) = F^{-1}[S(p)]$$

Dal grafico sopra osserviamo che  $S(p)$  è reale e simmetrica Hermitiana.

Dalla teoria sappiamo che essendo  $S(p)$  segnale reale probando  $s(t)$  avrà una forma del tipo:

$$s(t) = A(t) \cos(2\pi p_c t + \theta(t)) \quad (1)$$

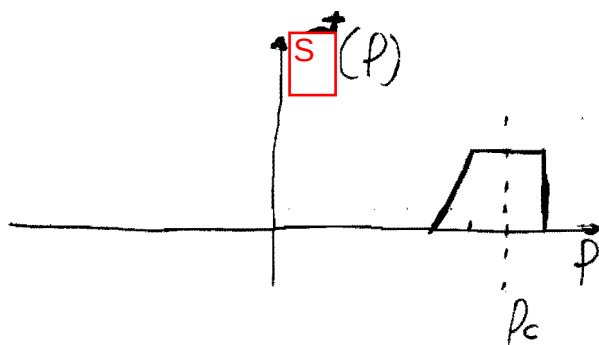
Dove  $A(t)$  è definito inviluppo e  $\theta(t)$  è la fase.

Il nostro obiettivo è quello di definire un procedimento matematico che ci consenta di ricavare il segnale  $s(t)$

di tipo passabanda in un segnale in banda base e viceversa. L'utilità di questi passaggi è legata a semplificazioni analitiche di calcolo che di realizzazione pratica dei dispositivi. Le frequenze impiegate in alcune applicazioni possono arrivare anche a 30 GHz e progettare componenti che lavorino a tale frequenza è costoso e complesso. Risulta dunque più semplice elaborare il segnale in banda base e portarlo in passabanda per la trasmissione.

1. Si elimina la parte delle frequenze negative di  $S(p)$ .  
 Il modo più semplice è quello di definire una nuova  
 segnale che chiamiamo  $\boxed{S}^+(p)$ , la cui corrispondenza nel  
 dominio del tempo  $\mathcal{F}^{-1}[\boxed{S}^+(p)] = \boxed{S}^+(t)$

$$\boxed{S}^+(p) = [S(p) \cup(p)]$$



Come si calcola  $z(t)$

$$\boxed{S}^+(t) = s(t) * \mathcal{F}^{-1}[\cup(p)]$$

$$\boxed{S}^+(t) = s(t) * \left[ \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \right]$$

$z(t)$  SEGNALE ANALITICO

$$\boxed{S}^+(t) = \frac{1}{2} [s(t) + j \hat{s}(t)]$$

$\hat{s}$  è la Trasformata di  
Hilbert, vedere

così come  $S+(f)$

VOL1 PAG 120

vediamo che  $z(t)$  è un segnale complesso.

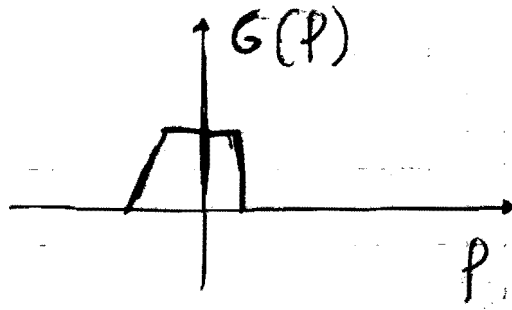
$z(p)$  non ha simmetria Hermitiana. Definiamo ora

l'inviluppo complesso come  $g(t)$ .

L'inviluppo complesso è il segnale analitico traslato in banda base

dunque  $z(t)$  portata in banda base cioè

$$g(t) = [\boxed{S}^+(t) + j \hat{s}(t)] e^{-j2\pi p_c t} = z(t) e^{-j2\pi p_c t}$$



Abbiamo definito l'involuppo complesso come

$$g(t) = [s(t) + j\hat{s}(t)] e^{-j2\pi p_c t}$$

La regola EQUIVALENTE PASSABASSO è definita come

$$S_{LP}(t) = \frac{1}{2} [g(t)]$$

Analogamente

$$S_{LP}(p) = \frac{1}{2} [G(p)]$$

$g(t)$  e  $S_{LP}(t)$  sono segnali complessi periodici.  
Non hanno simmetria Hermitiana.

L'involuppo complesso lo posso definire   essendo un segnale COMPLESSO in vari modi cioè:

$$g(t) = A(t) e^{j\theta(t)} \quad (2)$$

$$g(t) = \text{span style{border: 1px solid red; padding: 0 5px;">  } s_I(t) + j s_Q(t)$$

$$A(t) = \sqrt{[s_I(t)]^2 + [s_Q(t)]^2}$$

$$\theta(t) = \text{span style{border: 1px solid red; padding: 0 20px;">$$

$$\text{oppure } \left[ \frac{s_Q(t)}{s_I(t)} \right]$$



Come si vede l'omologia è la seguente:

$$S_{LP}(t) = \frac{1}{2} \left[ A(t) e^{j\omega(t)} \right]$$

In relazione con la scrittura (1) del segnale portante.

$$S_{LP}(t) = \frac{1}{2} \left[ x_I(t) + jx_Q(t) \right] \quad S_{LP}(f) = \frac{1}{2} \left[ X_I(f) + jX_Q(f) \right]$$

A cosa corrispondono  $x_I(t)$  e  $x_Q(t)$ ?

Questi sono le componenti  $\boxed{x}_I$  = in fase  $\boxed{x}_Q$  = in quadratura del segnale  $s(t)$  e  $S_{LP}(t)$  dalla equazione (2) vediamo che:

$$g(t) = [s(t) + j\hat{s}(t)] e^{-j2\pi f_c t} = x_I(t) + jx_Q(t)$$

Cioè si ricava che

$$\text{Re}\{g(t)\} \rightarrow x_I(t) \quad \text{Im}\{g(t)\} \rightarrow x_Q(t)$$

$$g(t) = [s(t) + j\hat{s}(t)] [\cos(2\pi f_c t) - j\sin(2\pi f_c t)] =$$

$$s(t)\cos(2\pi f_c t) - j s(t)\sin(2\pi f_c t) + j\hat{s}(t)\cos(2\pi f_c t) - \hat{s}(t)\sin(2\pi f_c t)$$

$$\text{Re}\{g(t)\} = x_I(t) = s(t)\cos(2\pi f_c t) + \hat{s}(t)\sin(2\pi f_c t)$$

$$\text{Im}\{g(t)\} = x_Q(t) = \hat{s}(t)\cos(2\pi f_c t) - s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

Dalla figura 1 vediamo che  $S_{LP}(f)$  non è altro che la parte relativa alle frequenze portive di  $S(f)$  traslata nell'origine.

07/06/2009  
Abbiamo visto come si trasformano le regole di  
passabanda o passabasso.

14

Come possiamo ora ritrarre da passabasso o passabanda?

L'operazione da dobbiamo seguire è la seguente:  $e^{(-j2\pi f_c t)}$

$$z(t) = g(t) e^{j2\pi f_c t} = \left[ s(t) + j\hat{s}(t) \right] e^{j2\pi f_c t} = 2 \cdot [s_{LP}(t)] e^{j2\pi f_c t}$$

Quando abbiamo ottenuto  $z(t)$  è sufficiente calcolare:

$$s(t) = \operatorname{Re} \{ z(t) \} = 2 \cdot \operatorname{Re} \{ s_{LP}(t) e^{j2\pi f_c t} \} =$$

$$2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} [x_I(t) + jx_Q(t)] [\cos(2\pi f_c t) + j\sin(2\pi f_c t)] \right\}$$

$$\operatorname{Re} \{ x_I(t) \cos(2\pi f_c t) + jx_I(t) \sin(2\pi f_c t) + jx_Q \cos(2\pi f_c t) + j^2 x_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \} =$$

$$x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q \sin(2\pi f_c t) = (3)$$

$$x_I(t) \cos(2\pi f_c t) + x_Q \cos(2\pi f_c t + \frac{\pi}{2})$$

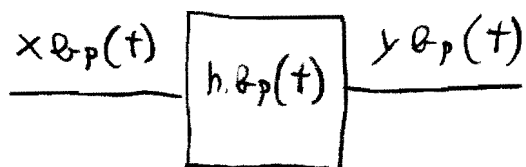
$$\text{Per cui possiamo definire } A(t) e^{\theta(t)} = s_I(t) + j s_Q(t)$$

$$\text{vediamo che } x_I(t) = A(t) \cos(\theta(t)) \quad x_Q(t) = A(t) \sin(\theta(t))$$

L'equazione (3) consente di determinare con semplicità le portanti di

$$s(f) = \frac{1}{2} [X_I(f - f_c) + X_I(f + f_c)] + \frac{j}{2} [X_Q(f - f_c) + X_Q(f + f_c)]$$

Da allora gli strumenti adatti per analizzare le trasmissioni in banda passante. Consideriamo dunque



conviene

È possibile determinare  $y_{BP}(t)$  seguendo  $x_{BP}(t) * h_{BP}(t)$

cioè  $Y_{BP}(f) = X_{BP}(f) H_{BP}(f)$ . Ma è comune per le ragioni viste in precedenza considerare  $Y_{LP}(f) = X_{LP}(f) H_{LP}(f)$

Possiamo poi trovare  $y_{LP}(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y_{LP}(f)] = \mathcal{F}^{-1}[X_{LP}(f) H_{LP}(f)]$

Per quanto visto precedentemente cioè

$$Y_{LP}(f) = \frac{1}{2} [Y_i(f) + j Y_q(f)]$$

Dato che  $y_{LP}(t) = 1/2 [Y_i(t) + j Y_q(t)]$   
Vedere l'equazione 3 precedente

$$\mathcal{F}^{-1}[Y_{LP}(f)] = \frac{1}{2} [y_i(t) + j y_q(t)]$$

$$\text{Re}\{y_{LP}(t)\} = \frac{1}{2} y_i(t)$$

$$\text{Im}\{y_{LP}(t)\} = \frac{1}{2} y_q(t)$$

$$y_i(t) = 2 \text{Re}\{y_{LP}(t)\}$$

$$y_q(t) = 2 \text{Im}\{y_{LP}(t)\}$$

Corrispondenza tra il segnale passabasso di uscita e il corrispondente segnale passabanda. Vediamo che il segnale passabanda è rappresentato con le componenti in fase e in quadratura

$$A(t) = \sqrt{v_i^2(t) + v_q^2(t)} = 2 |y_{LP}(t)|$$

$$\phi_y(t) = \arctan \frac{y_q(t)}{v_i(t)} = \arg[y_{LP}(t)]$$

Nei sistemi di comunicazione si desidera, in generale, avere un canale che non introduca distorsione (canale ideale). Questo anche intuitivamente, si percepisce che non è realizzabile, in quanto qualunque sistema introduce un ritardo, si può accettare anche una perdita di ampiezza del segnale. Definiamo dunque un canale NON DISTORCENTE un canale che introduce una moltiplicazione per una costante  $A$  in ampiezza (dove  $A$  è il guadagno se  $A > 0$  oppure perdita se  $A < 0$ ), la fase deve essere una funzione lineare cioè esprimibile mediante  $-2\pi f T_d$  dove  $T_d$  è il ritardo. La nostra uscita  $y(t)$  assumerà la forma:

$$y(t) = A x(t - T_d)$$

$T_d$  è il ritardo

$A$  è il guadagno che forse volta è

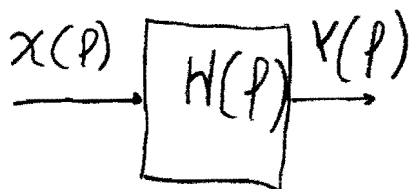
Vediamo ora l'espressione nel dominio della frequenza

molto minore di 1

dunque perdita.

$$Y(p) = A X(p) e^{-j2\pi p T_d}$$

Al fine di avere una trasmissione senza distorsioni occorre valutare che.



$$Y(p) = X(p) H(p)$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = A e^{-j2\pi p T_d}$$

Cioè:

1) Risposta in ampiezza piatta **costante**

2) Risposta in fase funzione lineare della frequenza cioè

$$\theta(p) = \angle H(p) = -2\pi p T_d$$

Ricordando che  $H(p) = |H(p)| e^{j\angle H(p)}$

Quando la prima condizione è verificata, diciamo che non è presente  
distorsione in ampiezza. Quando il secondo è verificato, non c'è distorsione di  
fase.

La seconda requisito è spesso riformulata utilizzando la nozione di ritardo  
di fase del sistema definita come

$$T_d(f) = - \frac{1}{2\pi f} \quad \phi(f) = - \frac{1}{2\pi f} < H(f)$$

Affinché non ci siano distorsioni di fase, il ritardo di fase deve essere costante.

$$T_d(f) = \text{COSTANTE}$$

Se  $T_d(f)$  non è costante, allora la risposta in fase  $\phi(f)$  non è  
una funzione lineare della frequenza.

# RITARDO DI PORTANTE E INVILUPPO

Consideriamo un sistema passabanda che abbia ampiezza costante ma fase non lineare.

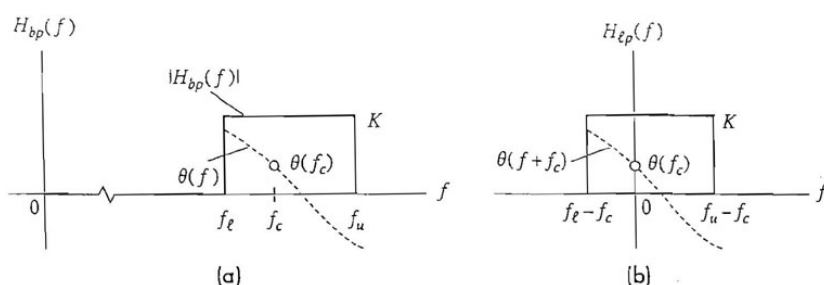
cioè:

$$H_{bp}(p) = K e^{j\theta(p)} \quad p_l < |p| < p_u$$

Possiamo rappresentare il sistema in banda base come:

$$H_{bp}(p) = K e^{j\theta(p+p_c)} u(p+p_c) \quad p_l - p_c < p < p_u - p_c$$

Come mostrato in figura:



Se supponiamo che le non linearità sono piccole, possiamo usare

$$\theta(p+p_c) \approx -2\pi(t_0 p_c + t_1 p)$$

$$t_0 = -\frac{\theta(p_c)}{2\pi p_c} \quad t_1 = -\frac{1}{2\pi} \left. \frac{d\theta(p)}{dp} \right|_{p=p_c}$$

L'approssimazione della delle espansione in serie di Taylor di  $\theta(p+p_c)$

Vediamo come interpretare i parametri  $t_0$  e  $t_1$ . Supponiamo che il segnale di ingresso abbia 2a fase, in modo tale che

$$x_{bp}(t) = A_x(t) \cos(\omega_c t) \quad \text{questo deriva dalla natura generata da un passabanda.}$$

$$x_{bp}(t) = \frac{1}{2} A_x(t)$$

Supponiamo ora che lo spettro di  $X_{bp}(p)$  cada tutto nella banda di frequenze del filtro co.

07/06/2009

$$Y_{ep}(p) = \underbrace{K e^{j\omega_c(p+p_c)}}_{H_{ep}(p)} \cdot X_{ep}(p)$$

19

Per l'approssimazione a una prima:

$$K e^{-j[2\pi(t_0 p_c + t_1 p)]} X_{ep}(p) = \underbrace{K e^{-j\omega_c t_0}}_{\text{costante}} [X_{ep}(p) e^{-j2\pi p t_1}]$$

Valutiamo ora  $y_{ep}(t) = F^{-1}[Y_{ep}(p)]$

$$y_{ep}(t) = K e^{-j\omega_c t_0} [x_{ep}(t - t_1)] = K e^{-j\omega_c t_0} \left( \frac{1}{2} A_x(t - t_1) \right)$$

Terminiamo ora valutando  $y_{ep}(t)$

$$y_{ep}(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ y_{ep}(t) e^{j2\pi p_c t} \right\}$$

$$\omega_c = 2\pi f_c$$

$$y_{ep}(t) = K A_x(t - t_1) \cos \omega_c(t - t_0)$$

Arrivati qui, possiamo affermare che  $t_0$  è il ritardo di fase mentre  $t_1$  è il ritardo di inviluppo. Il ritardo di inviluppo è chiamato anche ritardo di gruppo.

tipicamente, ( nelle nostre descrizioni SEMPRE )

Le tecniche di modulazione, consistono nella modulazione di una portante sinusoidale mediante un segnale analogico o digitale in banda base.

La modulazione è dunque definita come il procedimento mediante il quale alcune caratteristiche del segnale portante, vengono variate in accordo con  il segnale modulante. Una forma molto comune di segnale utilizzata come portante è il segnale sinusoidale, in questa caso si parla di modulazione continuous-wave. Il segnale originale è il segnale modulante, il segnale ottenuto dal processo di modulazione, è il segnale modulato. La modulazione è il processo seguito in fase di trasmissione, in fase di ricezione si segue il procedimento inverso demodulazione. Nel seguito verranno considerate due tipologie di CW modulation (continuous wave modulation) modulazioni di ampiezza, dove l'ampiezza della portante varia in accordo con il segnale modulante e modulazioni d'angolo, dove l'angolo della portante, varia con il segnale modulante.

L'approccio che viene utilizzato consiste nel rappresentare il segnale modulato che è un segnale passabanda come:

$$s(t) = \text{Re} \left\{ g(t) e^{j 2\pi f_c t} \right\}$$

Dove  $f_c$  è la frequenza della portante -

Il segnale modulato desiderato  $s(t)$ , è ottenuto in base alla portante funzione  $g[m(t)]$ .  $m(t)$  è il segnale modulante in banda base, analogico o digitale.



$g(t)$  è l'involuppo complesso  
 $s(t)$  è il segnale modulato  
 $x(t)$  è il segnale modulante  
 $s(t)$  è un segnale reale passabasso  
 dunque rappresentabile mediante:  
 $A(t)e^{j\theta(t)}$

$$g(t) = A_c [1 + x(t)]$$

$$s(t) = A_c [1 + x(t)] \cos \omega_c t \quad (1)$$

$$s(t) = [A_c + A_c x(t)] \cos \omega_c t$$

$$s(t) = A_c \cos \omega_c t + A_c x(t) \cos \omega_c t$$

Questa è rappresentabile mediante

dalla (1)

$$x_{ca}(t) = g(t)$$

$$x_{cg}(t) = \emptyset$$

questo perchè  $x(t)$   
non ha la fase  
variabile

Al calcolo la trasformata di

$s(t)$

$$S(p) = A_c \left\{ \mathcal{F} [\cos \omega_c t + x(t) \cos \omega_c t] \right\}$$

$$A_c \left\{ \mathcal{F} [\cos \omega_c t] + \mathcal{F} [x(t) \cos \omega_c t] \right\}$$

$$A_c \left\{ \frac{1}{2} [\delta(p - p_c) + \delta(p + p_c)] + \frac{1}{2} [\chi(p - p_c) + \chi(p + p_c)] \right\}$$

$$\frac{A_c}{2} \left\{ \delta(p - p_c) + \delta(p + p_c) + \chi(p - p_c) + \chi(p + p_c) \right\}$$

Il calcolo della potenza è ottenibile mediante

$$S_T = \langle s^2(t) \rangle$$

Vedere eq. (1)

$$\langle A_c^2 \cdot [1 + 2x(t) + x^2(t)] \cdot \cos^2 \omega_c t \rangle$$

$$A_c^2 \langle \cos^2(\omega_c t) + 2x(t)\cos^2(\omega_c t) + \cos^2(\omega_c t) x^2(t) \rangle$$

$$A_c^2 \left\{ \langle \cos^2 \omega_c t \rangle + 2 \langle x(t) \cos^2 \omega_c t \rangle + \langle \cos^2(\omega_c t) x^2(t) \rangle \right\}$$

$x(t)$  segnale a media nulla

$$A_c^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \langle x^2(t) \rangle \right\}$$

22

$$A_c^2 \left\{ \frac{1}{2} (1 + \langle x^2(t) \rangle) \right\}$$

$$\frac{A_c^2}{2} \left\{ 1 + \langle x^2(t) \rangle \right\}$$

Se ora considero  $\langle x^2(t) \rangle = S_x$  che è la potenza media del segnale in ingresso posso scrivere che

$$S_T = \frac{A_c^2}{2} (1 + S_x)$$

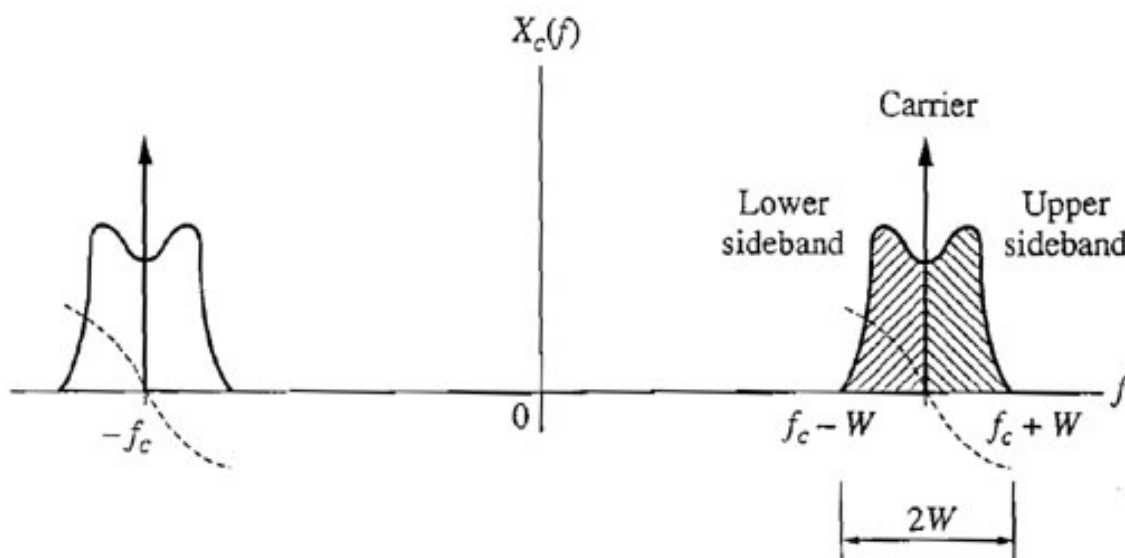
$S_T$  = POTENZA TOTALE

$P_C$  = POTENZA PORTANTE

$$S_T = P_C + 2 P_{SB}$$

$P_C$  ora rappresenta la potenza della portante non modulata

$P_{SB}$  rappresenta la potenza per banda -



La spettro del segnale AM è composta da due impulsi relativi alla portante e due simmetriche bande laterali centrate a  $\pm f_c$ .

La presenza di queste bande laterali, dà il nome alla modulazione, doppia banda laterale - la lunghezza di banda è  $2W$ .

Questa lunghezza di banda, corrisponde al doppio di quella del segnale modulante  $m(t)$ .

La potenza nella portante che indichiamo con  $P_c$  corrisponde a  $\frac{1}{2} A_c^2$ ; mentre la potenza nelle bande laterali è  $P_{SB}$  che corrisponde a  $\frac{A_c^2}{4} S_x$  come si vede nella eq (1)

Da introduciamo la convenzione per cui  $x(t)$  ha ampiezza  $\leq 1$  cioè  $|x(t)| \leq 1$ ; questo limita la potenza media del segnale modulante a  $P_x \leq 1$ . Se ora poniamo l'eq (2)

verifichiamo che  $P_{SB} = \frac{A_c^2}{4} S_x$  che lo possiamo scrivere come  $P_{SB} = \frac{P_c}{2} S_x$  la fatto che  $S_x$  sia  $\leq 1$  dice che

$P_{SB} \leq \frac{P_c}{2}$  Sapendo poi che  $P_c = S_T - 2 P_{SB}$  si ha che  $2 P_{SB}$  è al massimo uguale a  $P_c$  poniamo dire che la potenza totale  $S_T$  è distribuita  $S_T = P_c + 2 P_{SB}$  ciò che almeno il 50% della potenza totale (quando  $2 P_{SB} = P_c$ ) è nella portante.

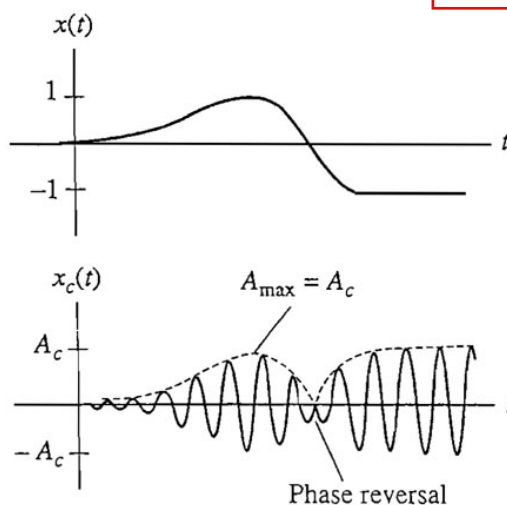
**NOTA.2** Nel testo Carlson e negli altri testi viene rappresentata l'inciluppo

$g(t) = A_c [1 + \mu x(t)]$   $\mu$  è un indice di modulazione che se scelto

$\mu \leq 1$  assicura che la  $g(t)$  non diventi negativa essendo  $|x(t)| \leq 1$ . Questa è molto utile per il

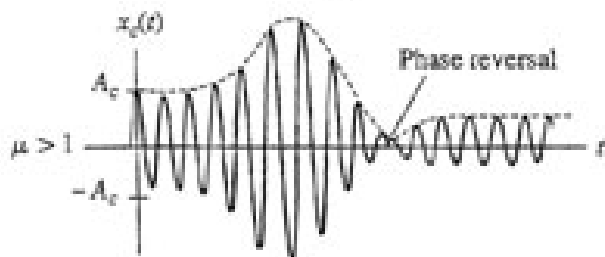
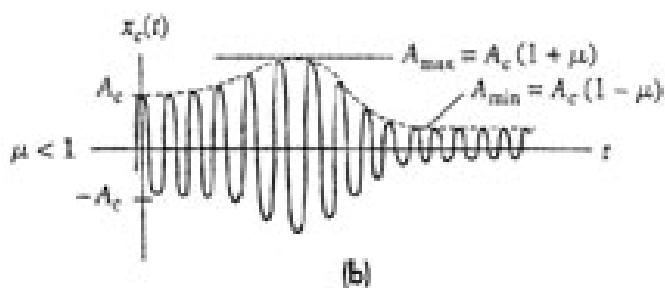
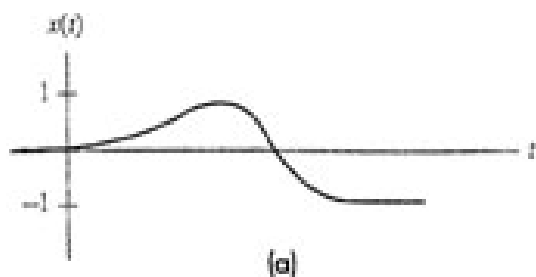
plot che come si vede in figura. Il segnale AM ha la proprietà che l'inciluppo del segnale modulato ha la stessa forma del messaggio che si intende trasmettere.

Prosegue NOTA3



## NOTA 3

Il fatto che  $g(t)$  non scenda sotto lo zero è utile in quanto la ricostruzione del segnale  $s(t)$  modulato, può avvenire mediante un semplice rivelatore di inviluppo. Se  $g(t)$  va sotto lo zero per ricostruire il segnale serve un rivelatore di inversione di fase.



Mi propongo ora di limitare la potenza usata con la portante dunque considero la seguente trasformazione:

$$g(t) = A_c x(t)$$

$$s(t) = [A_c x(t)] \cos(\omega_c t) \quad (1)$$

$g(t)$  è l'involuppo complesso  
 $s(t)$  è il segnale modulato  
 $x(t)$  è il segnale modulante

Osservo che

$$g(t) = A_c x(t)$$

$$\phi(t) = \phi$$

questo perché  $x(t)$   
 non ha la fase  
 variabile

Posso anche scrivere

$$g(t) = A_c |x(t)| \quad \text{con} \quad \phi(t) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \pm \pi & x < 0 \end{cases}$$

Questo mostra che per la ricostruzione del segnale è complicata in quanto il solo rivelatore di involuppo non è sufficiente ma occorre anche un rivelatore di intersezione di fase.

La trasformata di  $s(t)$  risulta

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [\chi(f - f_c) + \chi(f + f_c)]$$

$$S_T = \langle x_c^2(t) \rangle \quad \text{POTENZA TOTALE}$$

$$S_T = \langle A_c^2 x^2(t) \cos^2(\omega_c t) \rangle \quad \text{Vedere eq. (1)}$$

$$S_T = \frac{A_c^2}{2} \langle x^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2} S_x$$

Bottonizzando  $S_x$  come la potenza media del segnale modulante.

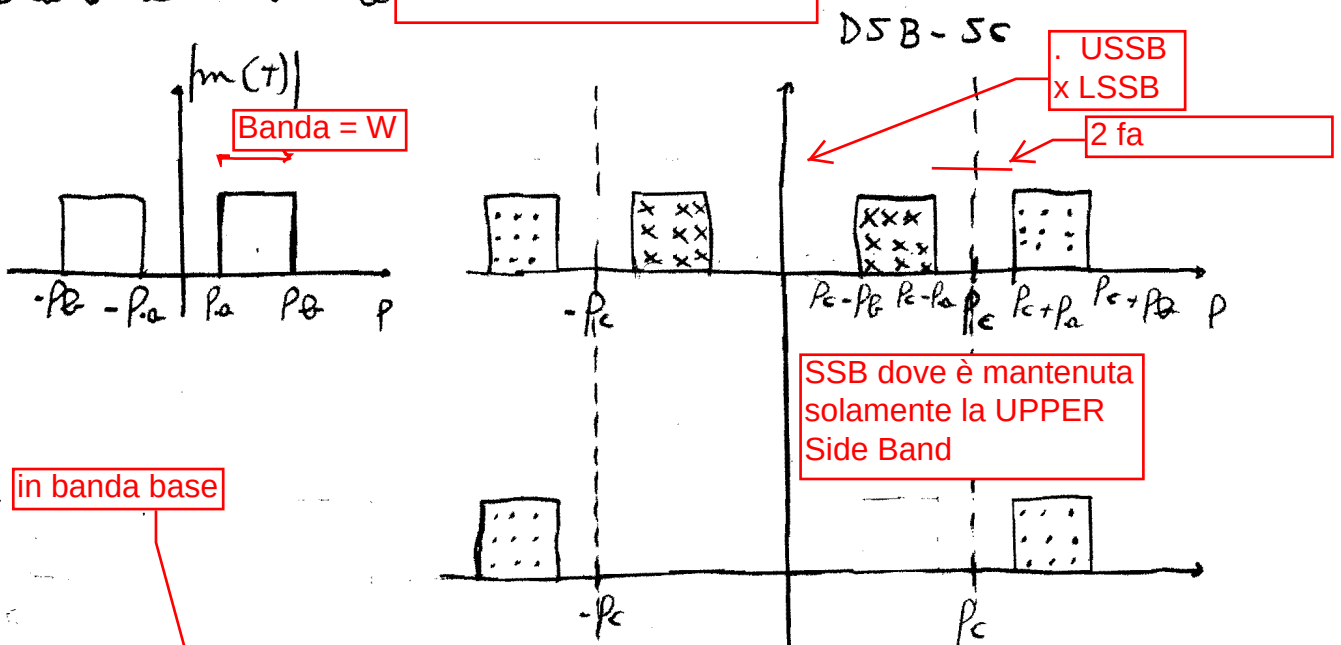
Paragonando  $S_T$  per DSB-SC, vediamo che questa utilizza la potenza in modo migliore rispetto all'AM con portante trasmessa. I trasmettitori reali / pratici impongono un limite a  $A^2_{\max}$  che è il picco di potenza dell'involuppo. Analizziamo ora il rapporto  $P_{sb} / A^2_{\max}$  sotto le migliori massime condizioni di modulazione. Per AM abbiamo picco di involuppo =  $2A_c$  per DSB-SC picco di involuppo =  $A_c$  (vedere figura pagina precedente). Dunque  $P_{sb} / A^2_{\max} = S_x / 2$  per DSB-SC e  $S_x / 16$  per AM. Dunque se  $A^2_{\max}$  è fissato e tutti gli altri fattori uguali, si vede che DSB-SC produce bande laterali con potenza 4 volte tanto AM!

Nella modulazione SSB, solamente la upper o la lower sideband vengono trasmesse. Per consentire la generazione di detta segnale, consideriamo l'utilizzo di un discriminatore di frequenza.

Questa consiste in due passaggi:

- Doppio viene generata la DSB-SC, successivamente, il segnale transito per un sideband Filter che elimina una sideband, mantenendone solamente una.

Dal punto di vista pratico la cosa più complessa risulta essere quella di eliminare la sideband non desiderata:



Come si vede dalla figura, la frequenza più vicina della sideband non desiderata, dista solamente  $2 f_a$  dalla frequenza che deve venire prota. Questa implica che per poter generare un segnale SSB la portante del segnale messaggio, deve portatore un buco nell'origine.

Dunque il filtro utilizzato deve avere le seguenti caratteristiche:

- La sideband desiderata deve cadere all'interno della frequenza di passaggio per il filtro,
- le frequenze non desiderate devono cadere all'interno delle frequenze non accettate dal filtro al massimo
- la banda di transizione del filtro, ossia la ripresenza tra le freq. di passaggio e quelle tagliate, deve essere

il doppio della frequenza più bassa del segnale in banda base.

07/06/2009

27

Dalle equazioni utilizzate nel calcolo della potenza, vediamo che sia nel caso di VSB che LSSB la banda utilizzata è  $W$  e la potenza totale del segnale modulato è  $S_T = P_{SB} = \frac{1}{4} A_c^2 S_x$

VSB



il segnale  $m(t)$  deve presentare un "buco" in prossimità dello zero

Consideriamo ora un segnale con una larga banda con una buona continuità di base frequenza. Per quanto visto precedentemente la modulazione SSB, non è indicata per i segnali a bassa frequenza anche se presenta un buon risparmio della banda. La modulazione DSB occupa invece molta banda. L'obiettivo è dunque quello di trovare un compromesso tra le due modulazioni. Per comporre il fenomeno si utilizza la figura sotto.

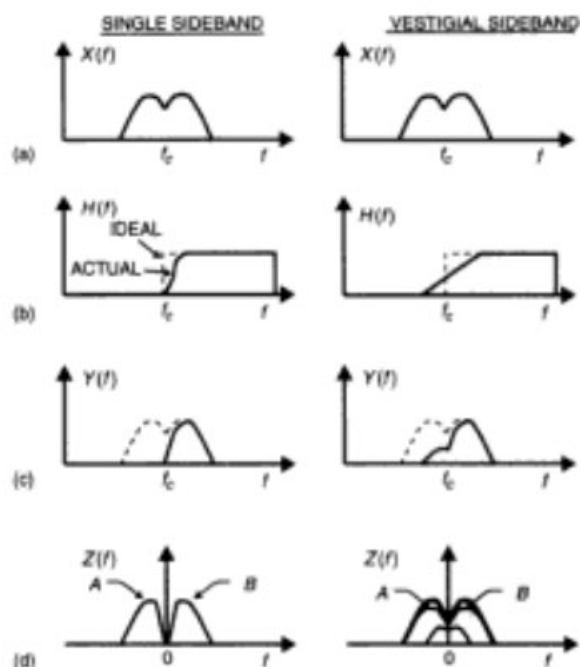


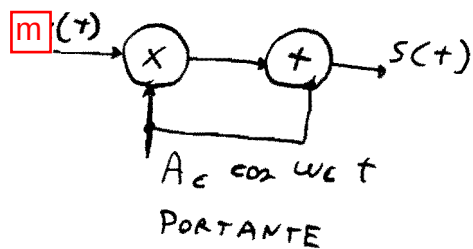
FIGURE 77.16 Comparison of SSB and VSB generation: (a) DSB-SC spectrum, (b) SSB and VSB sideband filter response, (c) spectra of filtered signal, (d) reconstruction of baseband signal.

Occupiamoci ora di vedere come è possibile generare i segnali modulati ed  
07/06/2009 28  
seguire le operazioni di demodulazione.

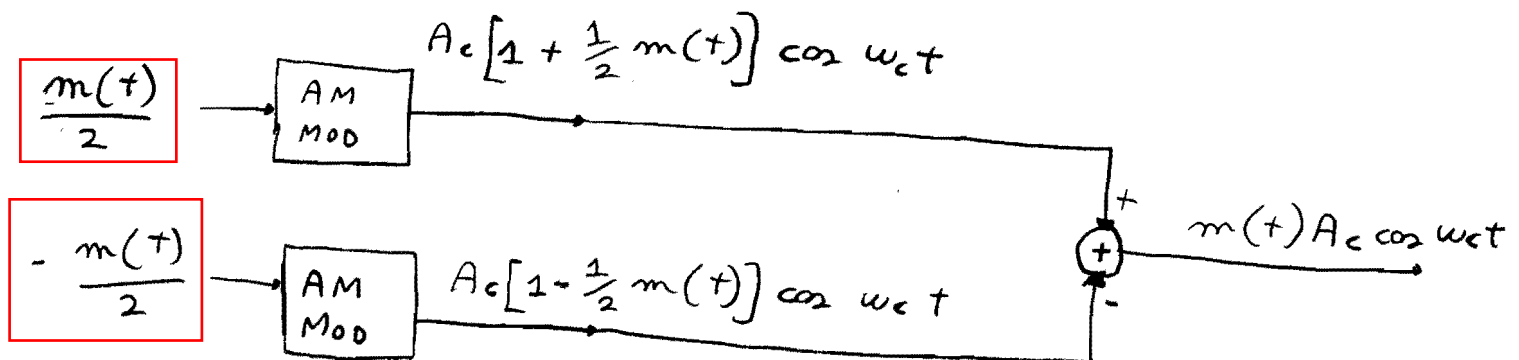
### Modulatore di Involuppo

Il modulatore utilizzato per generare un segnale AM è quello più semplice infatti questo è realizzabile considerando la struttura del generico segnale modulato AM.

$$s(t) = A_c \cos \omega_c t + A_c m(t) \cos \omega_c t$$



Per la generazione del segnale DSB-SC si utilizza un modulatore bilanciato:



Verifichiamo:

$$\left[ A_c + \frac{A_c}{2} m(t) \right] \cos \omega_c t = A_c \cos \omega_c t + \frac{A_c}{2} m(t) \cos \omega_c t \quad (1)$$

$$- \left[ A_c - \frac{A_c}{2} m(t) \right] \cos \omega_c t = -A_c \cos \omega_c t + \frac{A_c}{2} m(t) \cos \omega_c t \quad (2)$$

$$(1) + (2) = A_c m(t) \cos \omega_c t$$



poniamo il caso di avere il messaggio  $m(t)$ . La cosa più semplice, è quella di considerare come già detto l'ingresso DSB-SC e filtrarlo con un filtro passa-banda.

Per descrivere il filtro piuttosto che il messaggio da passa banda a passa basso e spieghiamo che le cose si semplificano.

L'ingresso di potenza su cui lavorare è l'uscita da un modulatore DSB-SC

$$s(t) = s(t)_{DSB-SC} = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \leftarrow \text{Segnale passabanda}$$

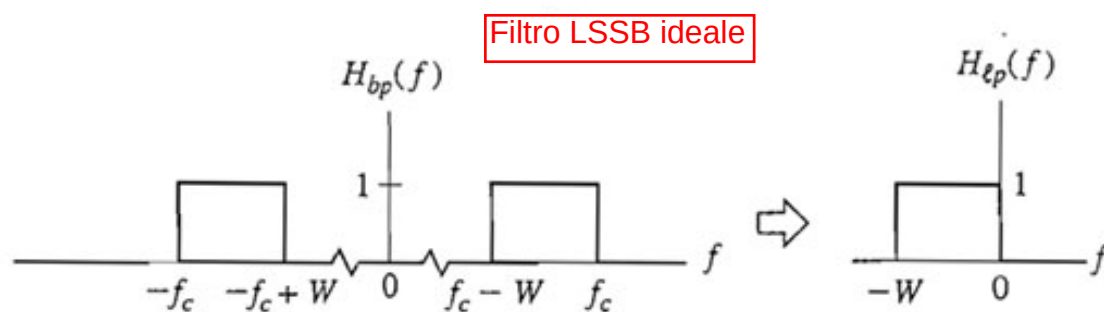
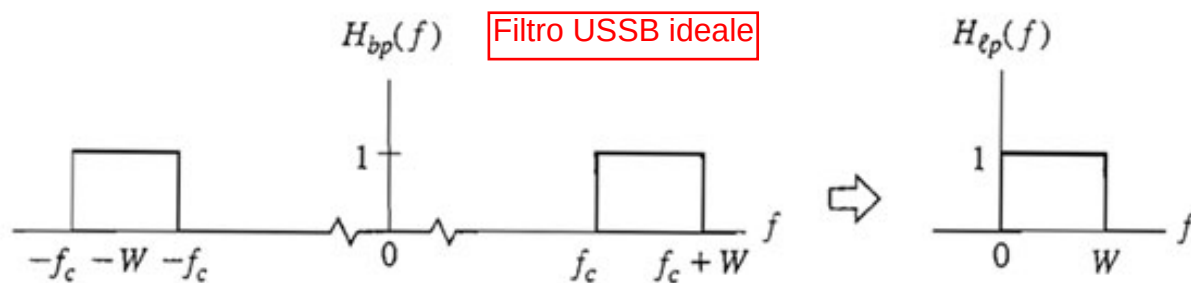
Da qui considero il segnale in banda base.

$x_{lp}(t) = 1/2[x_i(t) + jx_q(t)]$  vedere sezione trasformazione lp bp. Da sopra si vede che la fase è zero.  $x_q(t) = 0$

$$x_{LP}(t) = \frac{1}{2} A_c m(t)$$

$$X_{LP}(f) = \frac{1}{2} A_c M(f)$$

Adesso vediamo come valutare il filtro.



Dalla figura si vede l'equivalente del filtro in banda base.

Matematicamente scriveremo che:

$$H_{LP}(f) = H_{BP}(f + f_c) \cdot u(f + f_c) = u(f) - u(f - W) \quad \text{USSB UPPER}$$

Allo stesso modo per il filtro utile alla LSSB LOWER

$$H_{LP}(f) = u(f + W) - u(f)$$

S: può essere come i due filtri possono venire rappresentati come

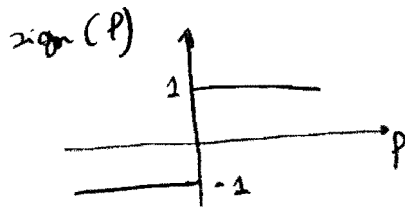
07/06/2009

+ USSB  
- LSSB

30

$$H(p)_{LP} = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \text{sign}(p) \right] \quad |p| \leq W$$

In quanto:



se considero il segno +

$$H(p) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 & \text{se } p > 0 \text{ e } p \leq W \\ \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 & \text{se } p < 0 \text{ e } p \geq -W \end{cases}$$

Ora per considerare l'uscita voluttaria.

$$Y_{LP}(p) = H_{LP}(p) X_{LP}(p) = \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \text{sign}(p) \right] \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} A_c M(p) \right\}$$

$$\left[ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \text{sign}(p) \right] \cdot \left[ \frac{1}{2} A_c M(p) \right] = \frac{1}{4} A_c M(p) \pm \frac{1}{4} \text{sign}(p) A_c M(p)$$

$$\frac{1}{4} A_c \left[ M(p) \pm \text{sign}(p) M(p) \right]$$

Viene utilizzata la formula  $-1/j = j$

Ora ricordando che  $(-j \text{sign}(p)) M(p) = F[\hat{m}(t)]$  dove  $\hat{m}(t)$  è la trasformata di Hilbert di  $m(t)$ . Questo introduce una notevole semplificazione in quanto  $F^{-1}[\text{sign}(p) M(p)] = j \hat{m}(t)$  viene utilizzato il teorema della dualità.

$$x(t) \xrightarrow{F} X(p) \quad X(p) \xrightarrow{F} x(-p) \quad \text{PAG 63 VANUCCI}$$

$$\text{Da ricavare l'espressione di } y_{LP}(t) = \frac{1}{4} A_c \left[ m(t) \pm j \hat{m}(t) \right]$$

Da dobbiamo riportare l'espressione in banda pronta in quanto siamo in banda base

$$y_{BP} = 2 \text{Re} \left\{ y_{LP}(t) e^{j\omega_c t} \right\}$$

$$y_{BP}(t) = \frac{1}{2} A_c \left[ m(t) \cos \omega_c t \mp \hat{m}(t) \sin \omega_c t \right]$$

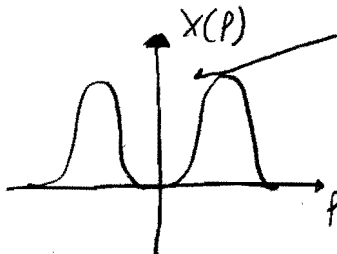
L'equazione risultante è di una certa complessità pertanto eventuali calcoli vengono eseguiti volendo per semplicità modulazione SSB di una sinusoidale o tono.

Come si può vedere genera il segnale SSB?

Considerando in ingresso un segnale sinusoidale

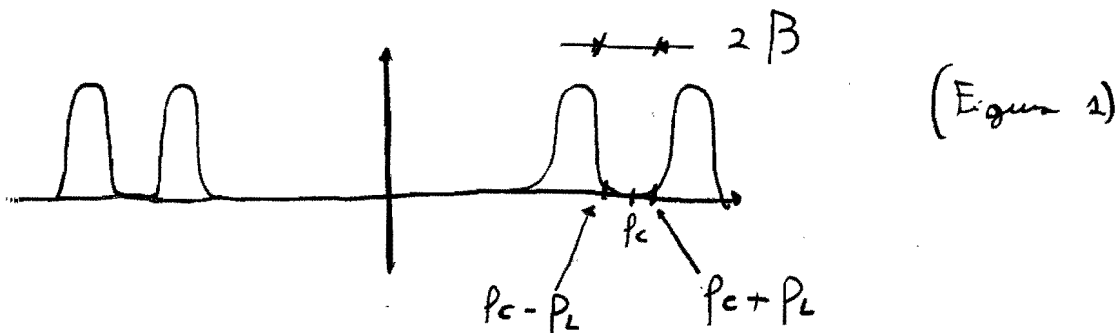
Da quanto detto in precedenza per generare SSB sarebbe sufficiente un filtro rispondendo ideale, e comunque che pesati con scelta molto rapida.

Come visto in precedenza la maggior parte del segnale, visto in precedenza, pesato un buco nella frequenza intorno alla zero esempio:



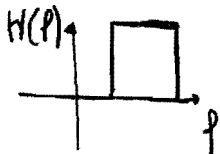
Spazio in prossimità dello zero, questo significa che hanno contenuto molto basso oppure nullo di basse frequenze.

Quando questo messaggio viene trasmitto in banda passante si ottiene:

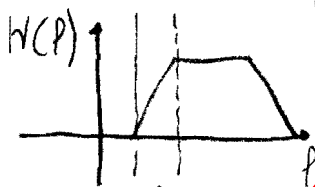


Il "buco" tra le frequenze si apre in prossimità di  $f_c$ .

Se ora consideriamo un filtro ideale, vediamo come la generazione del segnale sarebbe possibile, i filtri ideali hanno regione di transizione nulla:



I filtri reali però hanno una regione di transizione non nulla e dunque occorre valutare questo fattore:



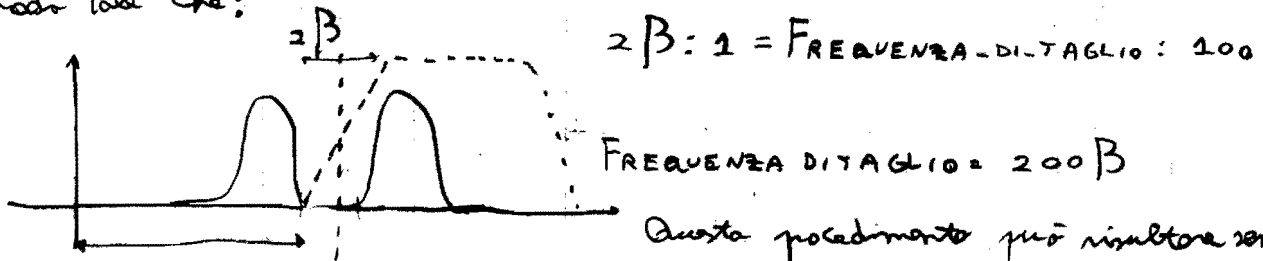
REGIONE DI TRANSIZIONE

Al filtro è dunque concessa una regione di transizione di ampiezza massima  $2B$

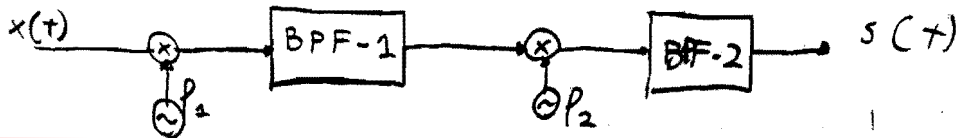
Per quanto visto nella (figura 1) la zona di transizione del filtro dovrebbe cadere all'interno dell'intervallo  $2B$ , in modo tale da riuscire ad escludere le bande che si desidera eliminare, preservando quelle di interesse.

07/06/2009

Alcune regole pratiche pongono già un limite al valore di  $2\beta$  imponendo questa ad assumere valori, che non sono più piccoli dell'1% della frequenza di taglio nominale. Dunque, affinché il tutto si svolga senza perdita di informazioni occorre che la frequenza di taglio sia  $\leq 200\beta$  in modo tale che:



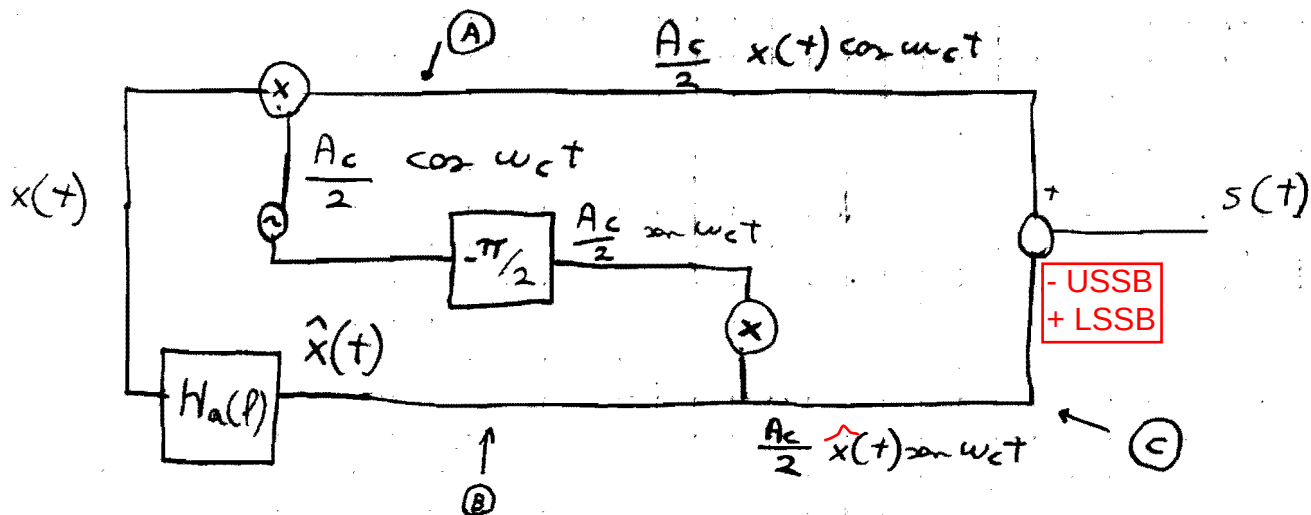
Questo procedimento può risultare sempre più complesso al crescere della frequenza dunque l'operazione viene eseguita iterando il procedimento in due o più fasi in modo tale che la condizione esposta sopra risulti soddisfatta.



Altra metodo consiste nel considerare l'equazione del segnale modulato SSB così:

$$s(t) = \frac{A_c}{2} x(t) \cos \omega_c t \quad \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \quad \frac{A_c}{2} \hat{x} \cos \left( \omega_c t - \frac{\pi}{2} \right)$$

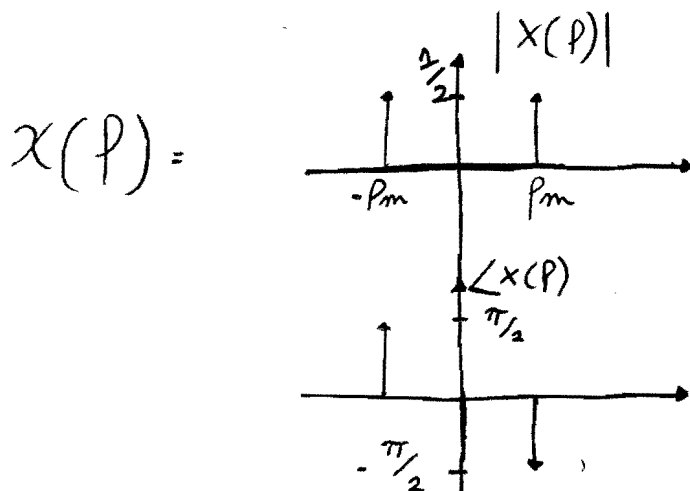
Possiamo dunque pensare di realizzare il seguente schema.



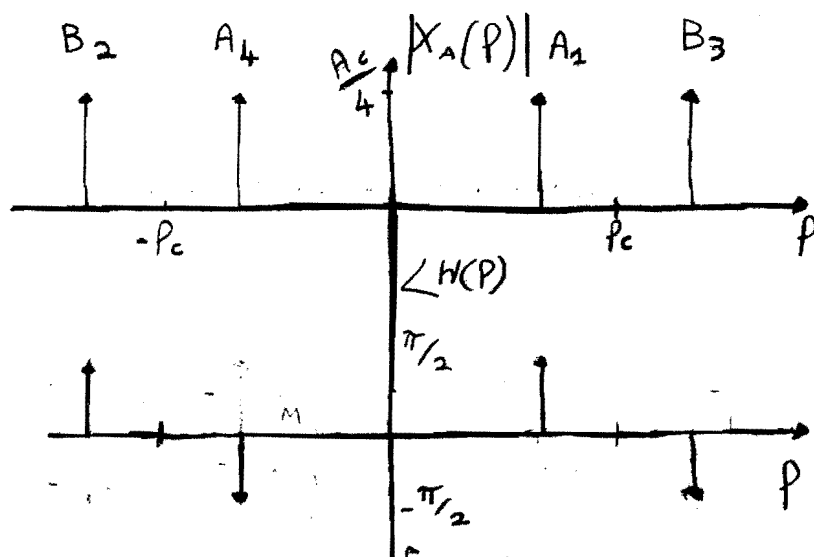
07/06/2009  
 Questo tipo di modulatore, è in grado di produrre sia USSB che LSSB dipende dal segno dell commutatore, prende il nome di PHASE-SHIFT e non richiede l'utilizzo del sideband filter. In quanto i segnali sono posti in modo che le sideband non desiderate, si elidono a vicenda.

Valutiamo il comportamento di detta modulatore, introducendo il segnale

$$x(t) = \cos(2\pi f_m t)$$



Lo spettro nel punto (A) sarà



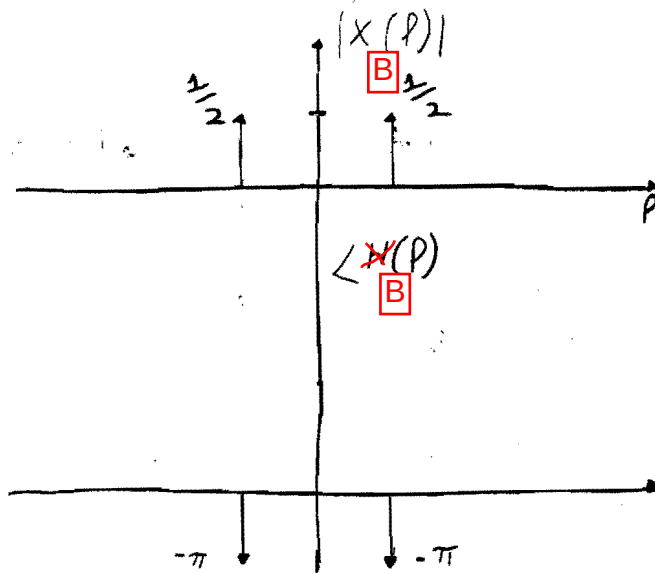
$$X_A(p) = X(p) * \boxed{F[\cos(2\pi f_c t)] = \frac{J}{2} (\delta(p + f_m) - \delta(p - f_m))} * \left[ \frac{A_c}{2} (\delta(p - f_c) + \delta(p + f_c)) \right]$$

$$\frac{A_c J}{4} \left[ \underbrace{\delta(p + f_m) * \delta(p - f_c)}_{A_1} + \underbrace{\delta(p + f_m) * \delta(p + f_c)}_{B_2} - \underbrace{\delta(p - f_m) * \delta(p - f_c)}_{B_3} - \underbrace{\delta(p - f_m) * \delta(p + f_c)}_{A_4} \right]$$

$$\frac{A_c J}{4} \left[ \delta(p + f_m - f_c) + \delta(p + f_m + f_c) - \delta(p - f_m - f_c) - \delta(p - f_m + f_c) \right]$$

$$X_A(t) = \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_m t)$$

Lo spettro nel punto B sarà:



$$X_B(p) = X(p) H(p)$$

$$p > 0$$

$$\left[ \frac{j}{2} (-\delta(p - p_m)) \right] \cdot [-j] = \left( -\frac{j^2}{2} \delta(p - p_m) \right) = \frac{j^2}{2} \delta(p - p_m)$$

$$= -\frac{1}{2} \delta(p - p_m)$$

$$p < 0$$

$$\left[ \frac{j}{2} (+\delta(p + p_m)) \right] \cdot [+j] = \left( \frac{j^2}{2} \delta(p + p_m) \right) = -\frac{1}{2} \delta(p + p_m)$$

$$X_B(t) = -\cos(2\pi p_m t)$$

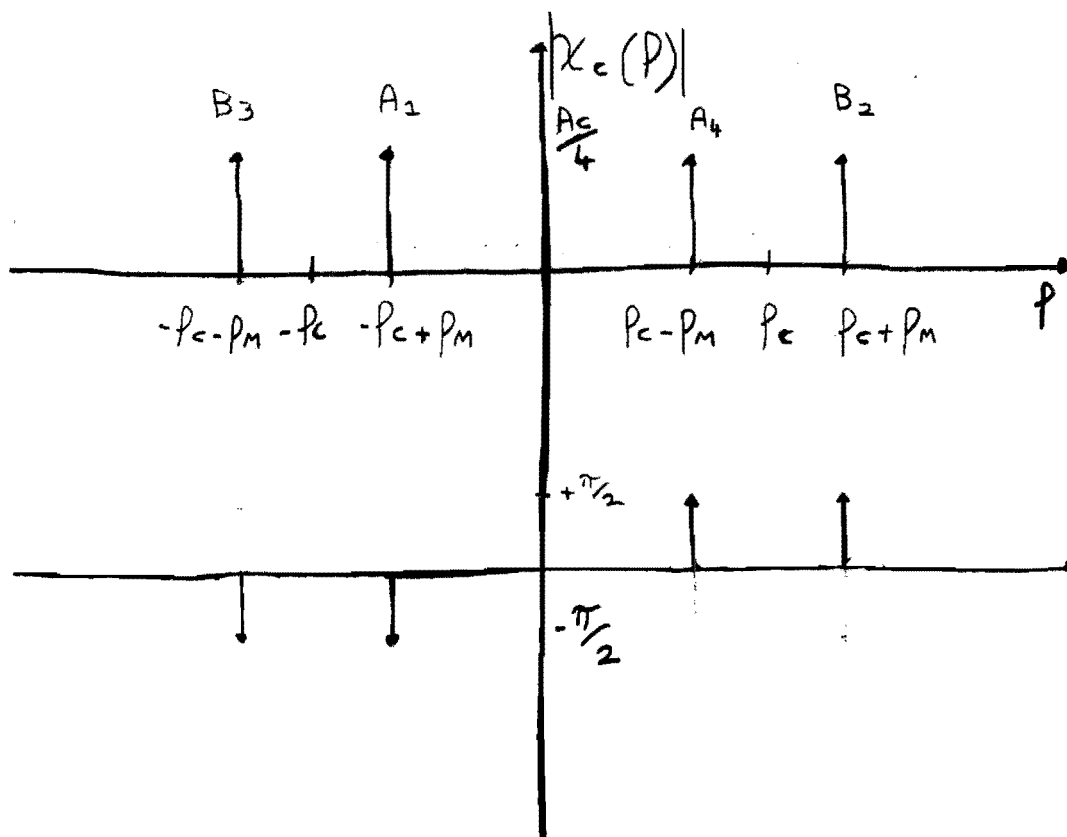
← E' la trasformata di Hilbert del seno

$$\chi_B(P) = -\frac{1}{2} \left( \delta(P-P_m) + \delta(P+P_m) \right)$$

$$\chi_c(P) = \left[ -\frac{1}{2} \left( \delta(P-P_m) + \delta(P+P_m) \right) \right] * \left[ \frac{A_c J}{2} \left( \delta(P+P_c) - \delta(P-P_c) \right) \right]$$

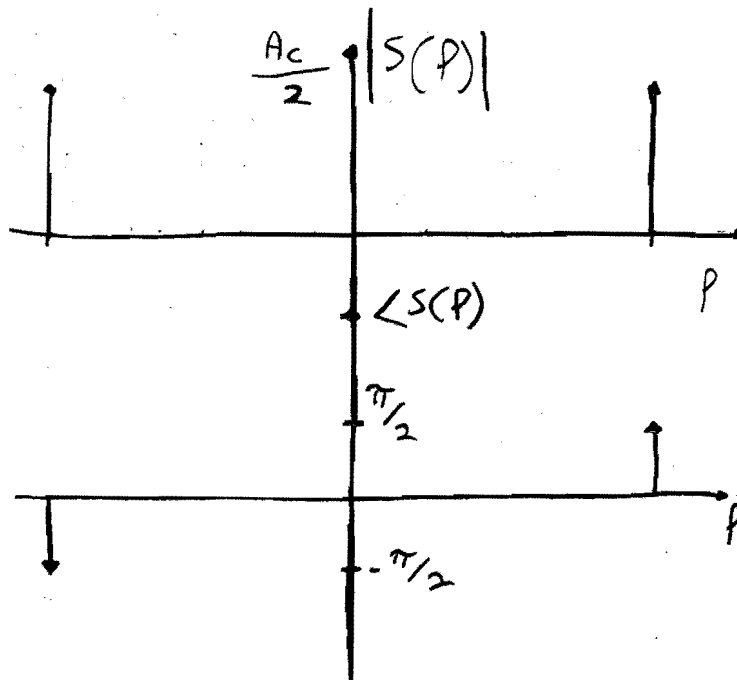
$$-\frac{A_c J}{4} \left[ \delta(P-P_m) * \delta(P+P_c) - \delta(P-P_m) * \delta(P-P_c) + \delta(P+P_m) * \delta(P+P_c) - \delta(P+P_m) * \delta(P-P_c) \right]$$

$$-\frac{A_c J}{4} \left[ \overbrace{\delta(P+P_c-P_m)}^{A_2} - \overbrace{\delta(P-P_c-P_m)}^{B_2} + \overbrace{\delta(P+P_c+P_m)}^{B_3} - \overbrace{\delta(P-P_c+P_m)}^{A_4} \right]$$



Per generare USSB segue dunque:

$$s(t) = x_A(t) - x_c(t) = \mathcal{F}^{-1} [\chi_A(p) - \chi_c(p)]$$

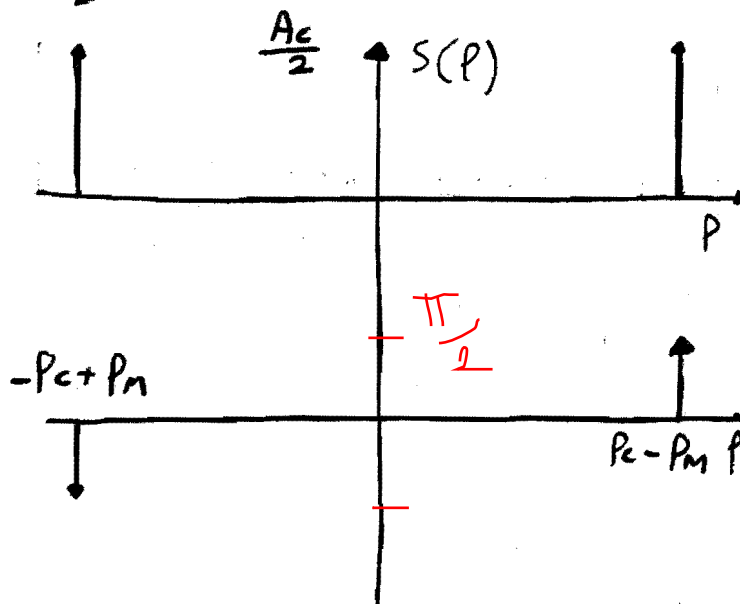


Per generare LSSB segue

$$s(t) = x_A(t) + x_c(t) = \mathcal{F}^{-1} [\chi_A(p) + \chi_c(p)]$$

$$S(p) = \frac{A_c}{4} \left[ \delta(p + p_m - p_c) + \delta(p + p_m + p_c) - \delta(p - p_m - p_c) - \delta(p - p_m + p_c) + \right. \\ \left. - \delta(p + p_c - p_m) + \delta(p - p_c - p_m) - \delta(p + p_c + p_m) + \delta(p - p_c + p_m) \right]$$

$$S(p) = \frac{A_c}{4} \left[ 2 \delta(p + p_m - p_c) - 2 \delta(p - p_m + p_c) \right]$$

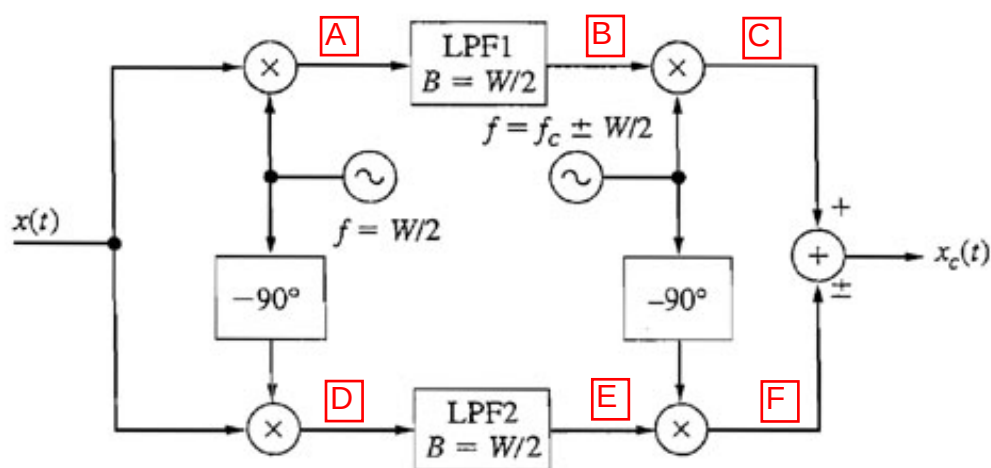




07/06/2009

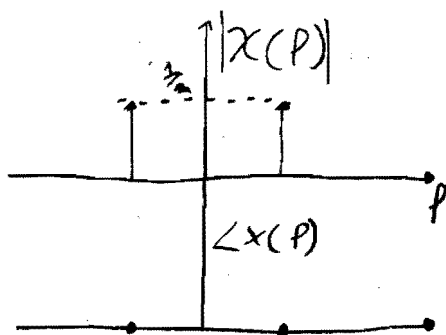
37.

Altro metodo per costruire il segnale SSB è quello di utilizzare il modulatore di Weaver, il cui diagramma è rappresentato in figura.



Analizziamo, anche per questo il diagramma e la costruzione della rete analizzandone, a voi porgeggi.

Supponiamo di introdurre il segnale  $x(t) = \cos 2\pi f_m t$



$$x(t) = \cos(2\pi f_m t)$$

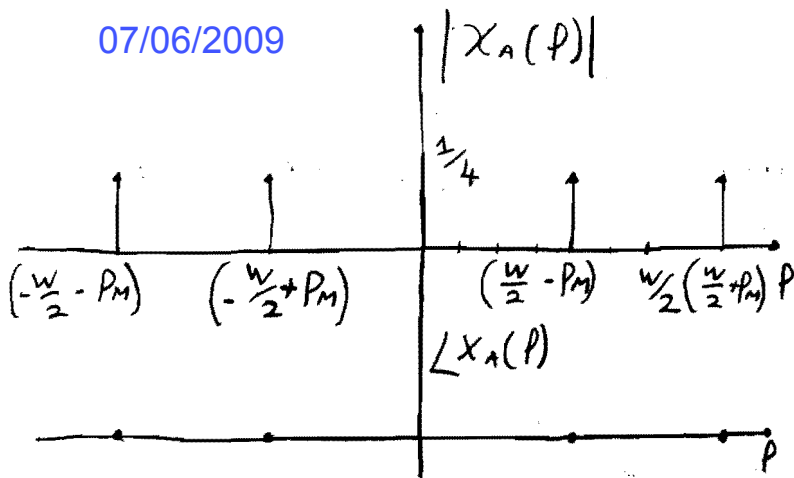
$$X_A(p) = X(p) \cdot \frac{1}{2} \left[ \delta\left(p - \frac{W}{2}\right) + \delta\left(p + \frac{W}{2}\right) \right]$$

$$X_A(p) = \left[ \frac{1}{2} \left( \delta(p - f_m) + \delta(p + f_m) \right) \right] \cdot \left[ \frac{1}{2} \left( \delta\left(p - \frac{W}{2}\right) + \delta\left(p + \frac{W}{2}\right) \right) \right]$$

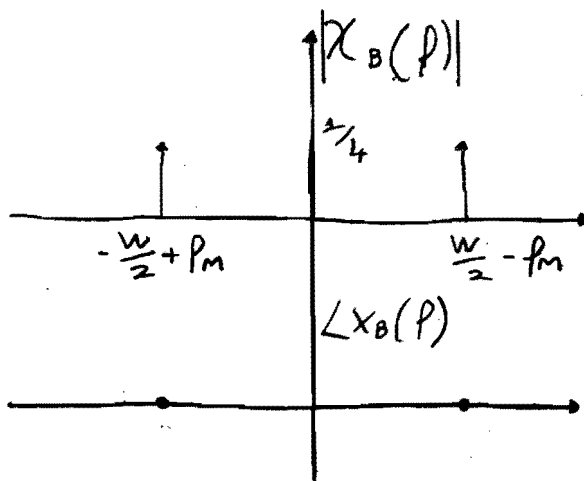
$$= \frac{1}{4} \left[ \delta(p - f_m) \delta\left(p - \frac{W}{2}\right) + \delta(p - f_m) \delta\left(p + \frac{W}{2}\right) + \delta(p + f_m) \delta\left(p - \frac{W}{2}\right) + \delta(p + f_m) \delta\left(p + \frac{W}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \delta\left(p - \frac{W}{2} - f_m\right) + \delta\left(p + \frac{W}{2} - f_m\right) + \delta\left(p - \frac{W}{2} + f_m\right) + \delta\left(p + \frac{W}{2} + f_m\right) \right]$$

$$x_A(t) = \left[ \cos(2\pi f_M t) \cos\left(2\pi \frac{W}{2} t\right) \right]$$



Introduciamo ora  $X_A(p)$  nel filtro passa banda con banda  $\frac{W}{2}$



$$x_B(t) = \cos\left(2\pi \left[\frac{W}{2} - f_M\right] t\right)$$

L'output  $X_B(p)$  viene ora moltiplicata per  $p_0 = p_c + \frac{W}{2}$  per generare la USSB, mentre viene moltiplicata per  $p_0 = p_c - \frac{W}{2}$  per generare la LSSB



$$X_C(p) = \left[ X_B(p) \left[ \frac{1}{2} \left( \delta(p - p_0) + \delta(p + p_0) \right) \right] \right]$$

$$\frac{1}{4} \left\{ \left[ \delta\left(p - \left[\frac{W}{2} - f_M\right]\right) + \delta\left(p + \left[\frac{W}{2} - f_M\right]\right) \right] \cdot \left[ \left( \delta(p - p_0) + \delta(p + p_0) \right) \right] \right\} =$$

$$\frac{1}{8} \left\{ \underbrace{\delta\left(p - \frac{W}{2} + f_M\right)^* \delta(p - p_0)}_B + \underbrace{\delta\left(p - \frac{W}{2} + f_M\right)^* \delta(p + p_0)}_A + \underbrace{\delta\left(p + \frac{W}{2} - f_M\right)^* \delta(p - p_0)}_A + \underbrace{\delta\left(p + \frac{W}{2} - f_M\right)^* \delta(p + p_0)}_B \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ \delta\left(p - p_0 - \frac{W}{2} + f_M\right) + \delta\left(p + p_0 - \frac{W}{2} + f_M\right) + \delta\left(p - p_0 + \frac{W}{2} - f_M\right) + \delta\left(p + p_0 + \frac{W}{2} - f_M\right) \right\}$$



Questo corrisponde a:

$$x_c(t) = \frac{1}{4} \left\{ \cos \left[ 2\pi \left( f_0 - \frac{W}{2} + f_M \right) t \right] + \cos \left[ 2\pi \left( f_0 + \frac{W}{2} - f_M \right) t \right] \right\}$$

Con le sostituzioni fatte ricaviamo che:

$$X_c(f) = \frac{1}{4} \left\{ \cos \left[ 2\pi \left( f_c \pm \frac{W}{2} - \frac{W}{2} + f_M \right) t \right] + \cos \left[ 2\pi \left( f_c \pm \frac{W}{2} + \frac{W}{2} - f_M \right) t \right] \right\}$$

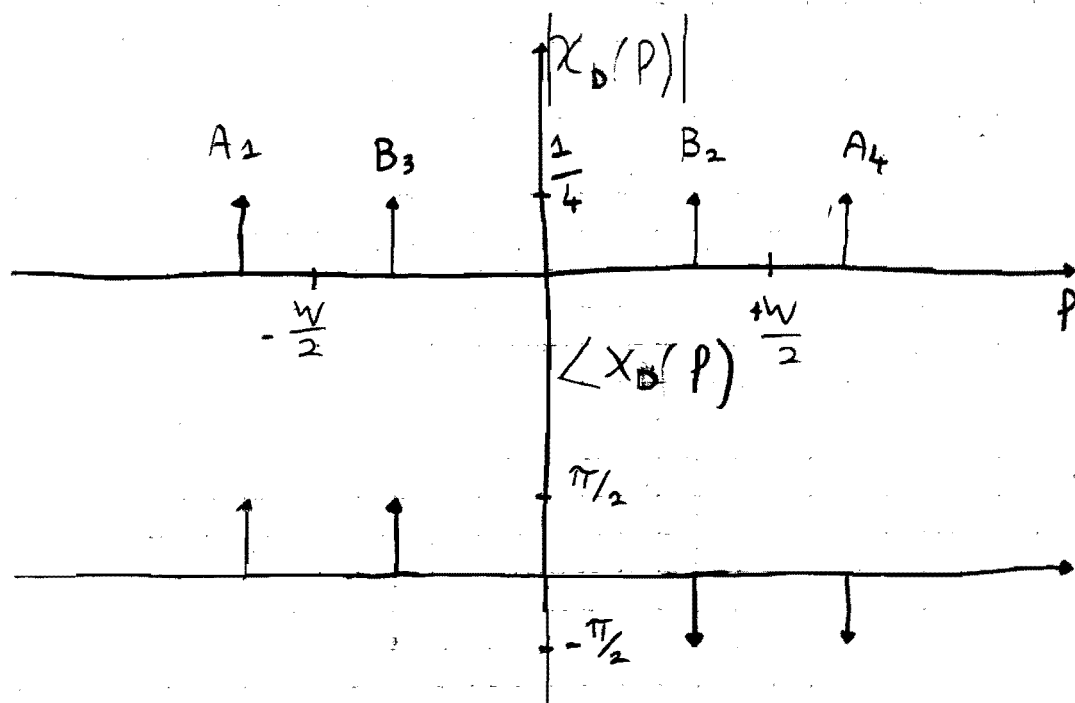
Analizziamo ora cosa succede nel ramo inferiore.

$$X_D(f) = X_A(f) * \left[ \frac{J}{2} \left( \delta \left( f + \frac{W}{2} \right) - \delta \left( f - \frac{W}{2} \right) \right) \right]$$

$$X_D(f) = \frac{1}{2} \left[ \delta(f + f_M) + \delta(f - f_M) \right] * \left[ \frac{J}{2} \left( \delta \left( f + \frac{W}{2} \right) - \delta \left( f - \frac{W}{2} \right) \right) \right]$$

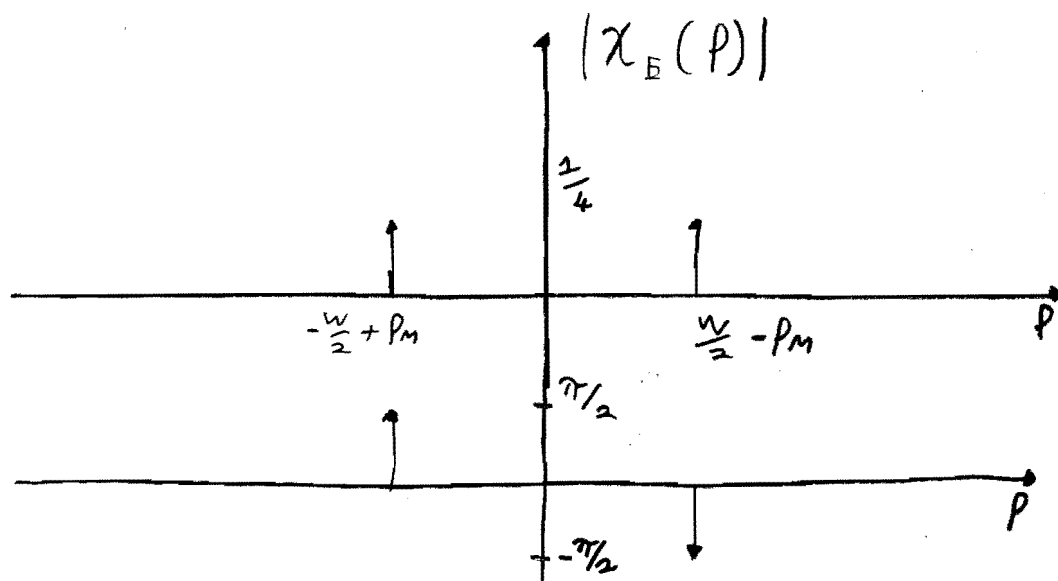
$$X_D(f) = \frac{J}{4} \left[ \underbrace{\delta(f + f_M) * \delta \left( f + \frac{W}{2} \right)}_{A_1} - \underbrace{\delta(f + f_M) * \delta \left( f - \frac{W}{2} \right)}_{B_2} + \underbrace{\delta(f - f_M) * \delta \left( f + \frac{W}{2} \right)}_{B_3} - \underbrace{\delta(f - f_M) * \delta \left( f - \frac{W}{2} \right)}_{A_4} \right]$$

$$X_D(f) = \frac{J}{4} \left[ \delta \left( f + \frac{W}{2} + f_M \right) - \delta \left( f - \frac{W}{2} + f_M \right) + \delta \left( f + \frac{W}{2} - f_M \right) - \delta \left( f - \frac{W}{2} - f_M \right) \right]$$



Introduciamo ora le regole  $X_D(f)$  nel filtro LPF 2 di banda

$$\frac{W}{2}.$$



La segnale  $X_E(t)$ , viene ora moltiplicata per  $p_0 = \cos(p_c + \frac{w}{2})$  per generare VSSB e poi  $p_0 = \cos(p_c - \frac{w}{2})$  per generare LSSB.

$$X_F(p) = X_E(p) * \left[ \frac{1}{2} [\delta(p + p_0) - \delta(p - p_0)] \right]$$

$$X_F(p) = \frac{1}{8} \left\{ \left[ \delta\left(p + \frac{w}{2} - p_m\right) - \delta\left(p - \frac{w}{2} + p_m\right) \right] * \left[ \delta(p + p_0) - \delta(p - p_0) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ \left[ \delta\left(p + \frac{w}{2} - p_m\right) * \delta(p + p_0) - \delta\left(p + \frac{w}{2} - p_m\right) * \delta(p - p_0) - \delta\left(p - \frac{w}{2} + p_m\right) * \delta(p + p_0) + \delta\left(p - \frac{w}{2} + p_m\right) * \delta(p - p_0) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ \left[ \overbrace{\delta\left(p + p_0 + \frac{w}{2} - p_m\right)}^A - \overbrace{\delta\left(p - p_0 + \frac{w}{2} - p_m\right)}^B - \overbrace{\delta\left(p + p_0 - \frac{w}{2} + p_m\right)}^B + \overbrace{\delta\left(p - p_0 - \frac{w}{2} + p_m\right)}^A \right] \right\}$$

Come visto nel caso precedente, questa corrisponde a:

$$X_F(t) = \frac{1}{4} \left[ \cos^{2\pi} \left( \left( p_c + \frac{w}{2} - \frac{w}{2} + p_m \right) t \right) - \cos^{2\pi} \left( \left( p_c + \frac{w}{2} + \frac{w}{2} - p_m \right) t \right) \right]$$

Andando ora a sommare o sottrarre  $X_F(t)$  con  $X_C(t)$  a seconda della sideband desiderata, otteniamo il risultato cercato.

Le tecniche di phase-shift descritte consentono dunque di partire da un segnale DSB e eseguire uno sfasamento di una delle bande laterali (quella che si desidera rimuovere) di  $180^\circ$  in modo che andandola a sommare con il segnale originale questa elide la sideband non voluta e aumenta l'altra. Questo procedimento (in particolare eseguire lo sfasamento esatto di  $180^\circ$ ) è molto complesso da eseguire soprattutto alle alte frequenze, per questo si valuta la VSB.

# GENERAZIONE VSB



07/06/2009

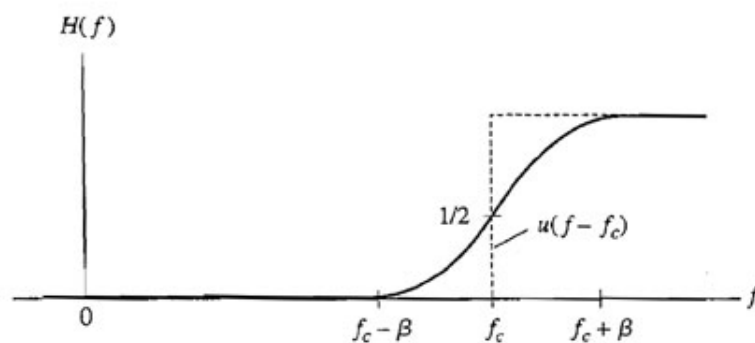
41

Possiamo vedere che un segnale VSB è generato utilizzando un sideband filter, come nel caso di modulazione SSB, ma in questo caso, una parte dello sideband non desiderata, viene mantenuta. La parte da mantenere è chiaramente nota e definita a priori. Dalla figura si vede come le componenti a bassa frequenza, vengano attenuate durante il transito nel filtro, motivo per cui la SSB non è adatta alla trasmissione di segnali con alta contenuto di basse frequenze. Utilizzando la VSB si può vedere come nella ricostruzione in banda base, le componenti positive e negative, interagiscono tra loro, compensando il "taglio" richiesto in precedenza dal filtro.

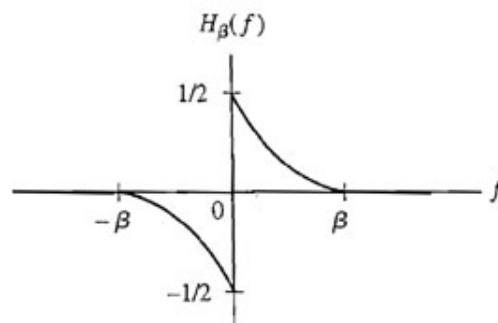
Sebbene la forma esatta del filtro non è di forte importanza, è fondamentale che questo abbia **SIMMETRIA DISPARI** centrata nella portante e in tale punto ( $f_c$ ) valga  $\frac{1}{2}$ .

Per esempio considerando la USB possiamo considerare:

$$H(f) = u(f - f_c) - H_B(f - f_c)$$



(a)



(b)

Il filtro  $0.5/0.5$  ripeta un campo di filtro per la generazione  $42$  VSB  
Il segno - toglie o aggiunge dalla funzione  $v(f-f_c)$  la parte di  
frequenza recessione allo scopo.

Il filtro VSB ha banda di trasmissione  $2\beta$ . Siccome la larghezza  
della banda di trasmissione che cade nelle sideband da eliminare è  
metà della banda di trasmissione totale possiamo affermare che

$$B_T = W + \beta \approx W$$

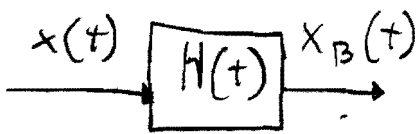
Nella maggior parte dei casi  $W \gg \beta$  - Lo spettro del segnale  
assume la forma di SSB. - Tale simmetria vale anche nel dominio  
del tempo dunque:

$$s(t) = \frac{1}{2} A_c [x(t) \cos \omega_c t - x_q(t) \sin \omega_c t]$$

Dove  $x_q(t)$  è la componente in quadratura del messaggio.

$$x_q(t) = \hat{x}(t) + x_B(t)$$

$x_B(t)$  corrisponde al segnale  $x(t)$  volutato dopo il transito nel  
filtro  $H_B$  cioè:



$$x_B(t) = \mathcal{F}^{-1} [X(f) H_B(f)]$$

Il filtro  $H(p)$  ripete un campo di filtro per la generazione della VSB  
 Il segno - toglie o aggiunge dalla funzione  $v(p-p_c)$  la parte di  
 frequenza superiore alla segno.

Il filtro VSB ha banda di trasmissione  $2\beta$ . Siccome la larghezza  
 della banda di trasmissione che cade nella sideband da eliminare è  
 metà della banda di trasmissione totale possiamo affermare che

$$B_T = W + \beta \approx W$$

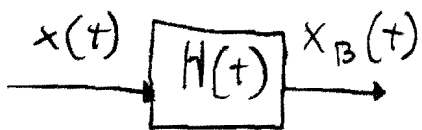
Nella maggior parte dei casi  $W \gg \beta$  - La spettro del segnale  
 assume la forma di SSB. - Tale simmetria vale anche nel dominio  
 del tempo dunque:

$$s(t) = \frac{1}{2} A_c [x(t) \cos \omega_c t - x_q(t) \sin \omega_c t]$$

Dove  $x_q(t)$  è la componente in quadratura del messaggio.

$$x_q(t) = \hat{x}(t) + x_B(t)$$

$x_B(t)$  corrisponde al segnale  $x(t)$  valutato dopo il transito nel  
 filtro  $H_B$  cioè:

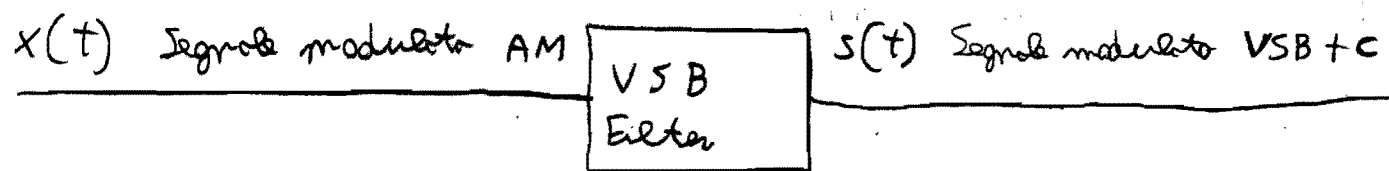


$$x_B(t) = \mathcal{F}^{-1} [X(f) H_B(f)]$$





07/06/2005  
O sinal  $B + C$ , não dunque pode ser representado como: 45



$$s(t) = \frac{1}{2} A_c \left[ x(t) \cos 2\pi f_c t - x_q(t) \sin 2\pi f_c t \right]$$

$$x(t) = A_c [1 + x(t)]$$

Il ricevitore comprende elementi circuitali che ricavano un segnale in banda base, dal segnale portabanda ricevuto. Questi dispositivi sono chiamati rilevatori.

### RILEVATORE DI INVILUPPO

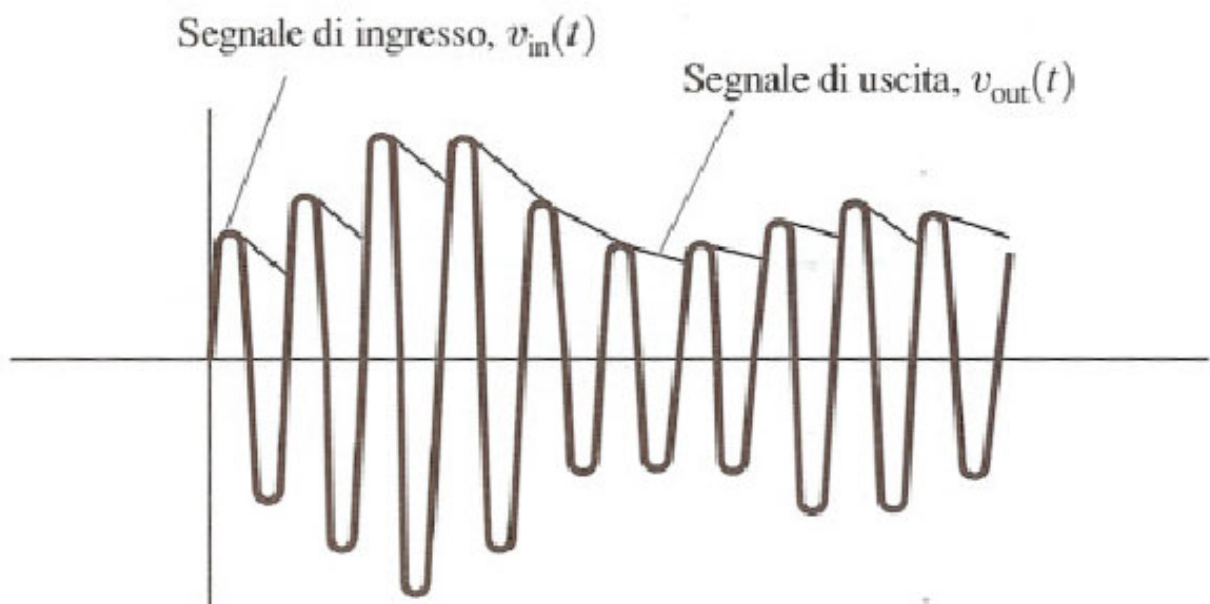
Circuito che fornisce in uscita un'onda proporzionale all'inviluppo complesso dell'ingresso.

Il rilevatore di inviluppo, viene comunemente utilizzato nella demodulazione dei segnali AM. In questo caso  $v_{in}(t)$  ha inviluppo complesso  $g(t) = A_c [1 + m(t)]$  dove  $A_c > 0$  rappresenta l'intensità del segnale AM  $m(t)$  è il modulante.

$$v_{out} = K A_c + K A_c m(t)$$

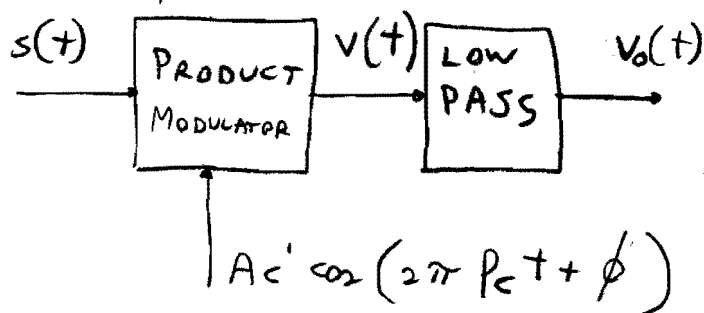
La componente  $K A_c$  può essere utilizzata per il controllo automatico del guadagno.

Questo tipo di rilevatore, si basa sul fatto che l'inviluppo del segnale AM ha la stessa forma del messaggio modulante. Vedere la figura sotto:



Il segnale in banda base  $m(t)$  può essere recuperato in modo analogo, da un segnale DSB-SC tratta come  $s(t)$  moltiplicando dapprima  $s(t)$  con una sinuside generata in locale e successivamente segue un filtraggio passa basso. Assumiamo che l'oscillatore locale è esattamente coerente o sincronizzato sia in frequenza che in fase con la portante  $c(t)$  utilizzata per generare il segnale modulato  $s(t)$ .

Il metodo è chiamato rilevazione coerente oppure demodulazione sincrona. È intuitiva e utile pensare che la frequenza generata localmente, presenti un sfasamento  $\phi$  rispetto alla portante  $c(t)$ .



questo da il nome coerente, sincrono

Non è più coerente, se riusciamo a lavorare con i ricevitori NON COERENTI basta porre la fase a zero per portarci nel caso COERENTE

$$v(t) = A_c' \cos(2\pi f_c t + \phi) \cdot s(t)$$

Dato  $s(t)$  è il segnale modulato AM DSB-SC

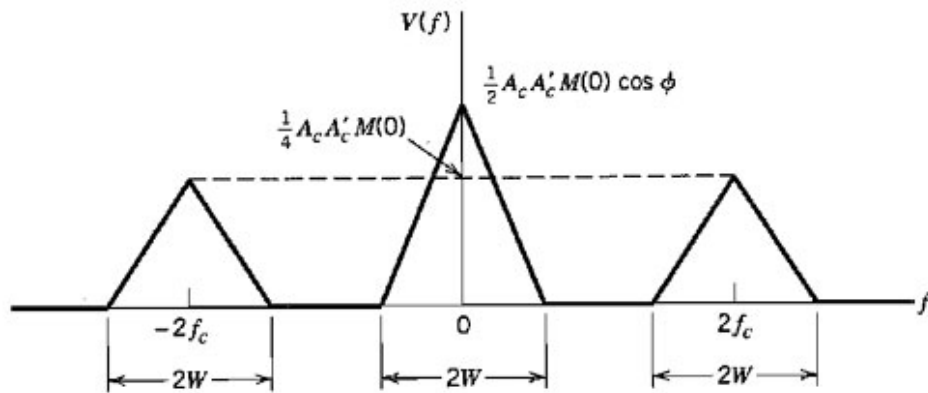
$$v(t) = A_c A_c' \cos(2\pi f_c t + \phi) \cos(2\pi f_c) m(t) =$$

$$\frac{1}{2} A_c A_c' \cos(4\pi f_c t + \phi) m(t) + \frac{1}{2} A_c A_c' \cos \phi m(t)$$

Ora vediamo che il primo termine, rappresenta il segnale DSB-SC modulato con una portante  $2f_c$ , il secondo è proporzionale al segnale in banda base  $m(t)$ . Ora il filtro passa basso si occuperà di eliminare la prima parte dell'equazione dunque:

$$V_o(t) = \frac{1}{2} A_c A_c' \cos \phi m(t)$$

È importante notare che la spectra del segnale  $V(f)$  sarà



Il filtro deve "tagliare"  $> W$  ma meno di  $2f_c - W$ .

Dunque si sceglie  $f_c > W$ . Vedere come il segnale di uscita varia in relazione a  $\cos \phi$ . L'uscita sarà massima quando  $\phi = 0$  e minimo (nulla) se  $\phi = \pm \pi/2$  in teoria  $\phi$  è costante ma in pratica varia continuamente con il tempo, producendo effetti indesiderati occorre dunque trovare una soluzione per mettere in perfetto sincronismo segnali.

La modulazione di fase PM e la modulazione di frequenza FM sono casi particolari di modulazione d'angolo, per le quali l'involuppo complesso è:

$$g(t) = A_c e^{j\phi(t)}$$

In questo caso il modulo dell'involuppo complesso  $R(t) = |g(t)| = A_c$  è costante e la fase  $\phi(t)$  è una funzione lineare del segnale modulante  $m(t)$ .  
completamente  $g(t)$  è una funzione non lineare del segnale modulante, in quanto l'esponenziale è una funzione non lineare.

Per rendere chiara il significato di modulazione d'angolo, si può osservare che l'informazione è contenuta nell'angolo  $\omega_c t + \phi(t)$ , per enfatizzare il concetto della NON LINEARITÀ DI QUESTA MODULAZIONE intesa come relazione lineare tra  $s(t)$  e  $m(t)$  si definisce modulazione angolare.



07/06/2009

50

È possibile definire l'angolo istantaneo totale:

$$\theta_c(t) = \omega_c t + \phi(t)$$

In questa moda  $s(t)$  può essere espressa come  $s(t) = A_c \cos(\theta_c(t)) = A_c \operatorname{Re}[e^{j\theta_c(t)}]$ .  
L'informazione contenuta nel segnale risiede in  $\theta_c(t)$ . Per questa la modulazione è chiamata angolo o spaziale. Non c'è relazione lineare tra  $m(t)$  e  $s(t)$ .

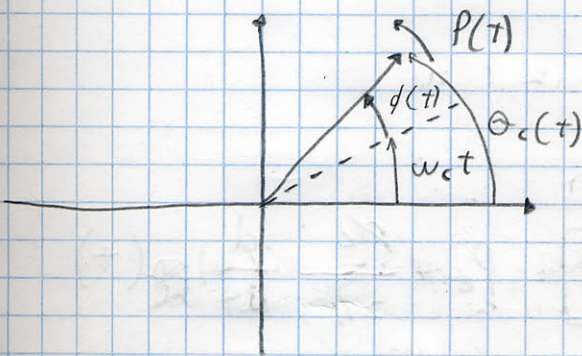
la modulazione di fase è espressa come

$$\phi(t) = \phi_\Delta m(t) \quad \phi_\Delta \leq \pi$$

Da qui è evidente la relazione lineare tra  $\phi(t)$  e  $m(t)$

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + \phi_\Delta m(t)]$$

L'introduzione  $\phi_\Delta$  rappresenta la massima variazione di fase prodotta da  $m(t)$  siccome abbiamo imposta la condizione per cui  $|x(t)| \leq 1$ . Abbiamo che la fase varierà tra  $-\pi$  e  $+\pi$ .



Osserviamo che l'angolo totale  $\theta_c(t)$  consiste nel termine costante  $\omega_c t + \phi(t)$ .  
Da qui deriva che \*

La frequenza istantanea è definita come

51

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta(t) \quad \text{nel caso in esame risulta}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\omega_c t + \phi_a m(t)] = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ \frac{d}{dt} \omega_c t \right] + \frac{d}{dt} [\phi_a m(t)] \right\} =$$
$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ \frac{d}{dt} (2\pi f_c t) \right] + \frac{d}{dt} [\phi(t)] \right\} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t)$$

Questi risultati, sono definiti nella PM.

### Modulazioni FM

Nel caso di modulazioni FM, viene definita la frequenza istantanea del segnale modulato come:

$$f(t) = f_c + f_a m(t)$$

In questo caso  $f(t)$  varia in proporzione con il segnale modulante  $m(t)$ .  
La quantità  $f_a$  rappresenta la DEVIAZIONE DI FREQUENZA, rappresenta la massima distanza con cui  $f(t)$  si può allontanare da  $f_c$ . Il limite  $f_a < f_c$  ci assicura che  $f(t) > 0$ . Solitamente si sceglie  $f_a \ll f_c$ .

Abbiamo in precedenza definita la frequenza istantanea come:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta(t)$$

Nel caso di FM abbiamo affermato che  $f(t) = f_c + f_a m(t)$

Quella che vogliamo fare ora è ricavare l'espressione del segnale FM.  
Il generico segnale modulato ad angolo con indice costante.

$$s(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \phi(t)]$$

Possiamo scrivere che:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [2\pi f_c t + \phi(t)]$$

Sostituendo ora i valori definiti per la modulazione FM ed secondo la equazione 52

$$f_c + f_\Delta m(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t)$$

da cui che

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = 2\pi \cdot f_\Delta m(t)$$

Integrando da ambo i membri

$$\phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{t_0}^t x(\alpha) d\alpha + \phi(t_0)$$

Assumiamo che  $\phi(t_0) = 0$  primo scivolo:

$$\phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{t_0}^t x(\alpha) d\alpha$$

Se ora andiamo a scrivere l'espressione del segnale FM

$$s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int_{t_0}^t x(\alpha) d\alpha\right)$$

I risultati tratti prima ad affermare che l'ampiezza di un segnale modulato spaziale è costante. Le segnali modulate non ha nessun riferimento con quella del segnale modulante, per quanto riguarda la forma d'onda.

Table 5.1-1 Comparison of PM and FM

|    | Instantaneous phase $\phi(t)$                    | Instantaneous frequency $f(t)$                |
|----|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| PM | $\phi_\Delta x(t)$                               | $f_c + \frac{1}{2\pi} \phi_\Delta \dot{x}(t)$ |
| FM | $2\pi f_\Delta \int_{t_0}^t x(\lambda) d\lambda$ | $f_c + f_\Delta x(t)$                         |

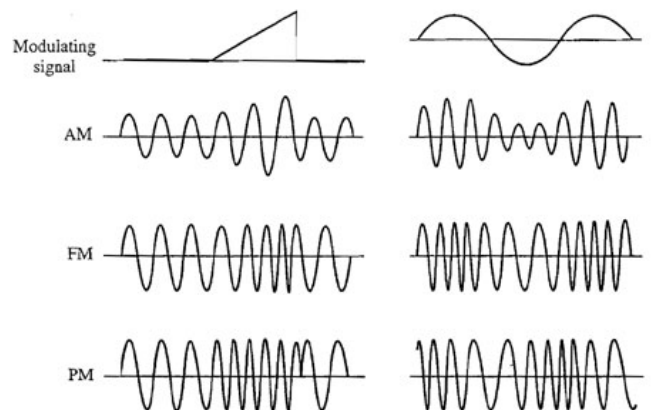


Figure 5.1-2 Illustrative AM, FM, and PM waveforms.



$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int_0^t A_m \cos(2\pi f_m d) dd \right]$$

Generico segnale modulato FM

$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \cdot A_m \cdot \sin(2\pi f_m t) \cdot \frac{1}{2\pi f_m} \right]$$

$$\beta = \frac{A_m}{f_m} \cdot f_\Delta$$

Consideriamo come segnale modulante il tono  
 $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$

$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t) \cdot \frac{1}{1} \right]$$

$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t) \right]$$

Questo per la modulazione FM.

Per quanto riguarda la modulazione PM:

$$s(t) = A_c \cdot \cos \left[ 2\pi f_c t + \phi_\Delta A_m \sin(2\pi f_m t) \right]$$

Generico segnale modulato PM

$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t) \right]$$

$$\beta = A_m \cdot \phi_\Delta$$

$\beta$  è l'indice di modulazione definito sia per le modulazioni PM sia per le modulazioni FM. Questo rappresenta la massima deviazione di fase ed è proporzionale in entrambi i casi ad  $A_m$  che è l'ampiezza del segnale modulante, nel caso in esame il tono. Notare comunque che nel caso di FM  $\beta$  è inversamente proporzionale a  $f_m$  questa in quanto  $\int_0^t \cos(2\pi f_m d) dd = \frac{\sin(2\pi f_m t)}{2\pi f_m}$  risulta  $\frac{\sin(2\pi f_m t)}{2\pi f_m}$ . Si misura in radianti.



considerando come segnale modulante il tono, con le convenzioni dette. Lo scopo è quello di definire un'espressione per la lunghezza di banda.

Vedere pagina precedente

Iniziamo considerando il caso in cui  $\beta$  sia piccola rispetto ad un radiante. Dunque siamo nel caso di NARROW BAND cioè banda stretta.

Dai risultati precedenti definiamo ricapitolando

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin 2\pi f_m t) \quad (1)$$

Questo vale sia per PM che per FM considerando le precisazioni e le convenzioni fatte.

$$\beta = \begin{cases} \phi_m A_m & \text{PM} \\ \frac{A_m}{f_m} k_f & \text{FM} \end{cases}$$

Ora ricorriamo alla formula trigonometrica:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Applichiamola a  $s(t)$  e otteniamo:

$$s(t) = A_c \left\{ \cos(2\pi f_c t) \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) - \sin(2\pi f_c t) \sin(\beta \sin(2\pi f_m t)) \right\} \quad (2)$$

L'eq sembra complessa utilizziamo il fatto che siamo in narrowband

$$\cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] \approx 1$$

$$\sin[\beta \sin(2\pi f_m t)] \approx \beta \sin(2\pi f_m t)$$

$$\beta \ll 1$$



L'eq. precedente si può ora ricondurre a:

55

$$s(t) = A_c \left\{ \cos(2\pi f_c t) - \beta \cdot \sin(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_m t) \right\}$$

Ora vedo che nell'equazione (1) posso sostituire

$$\theta(t) = \beta \sin 2\pi f_m t$$

Ripeto  $\theta(t)$  in  $s(t)$

$$s(t) = A_c \left\{ \cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t) \theta(t) \right\}$$

Valuto ora la trasformata di  $s(t) \xrightarrow{F} S(f)$

$$s(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t) - A_c \sin(2\pi f_c t) \theta(t)$$

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \left\{ \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + j \left[ \Theta(f - f_c) - \Theta(f + f_c) \right] \right\}$$

$$\Theta(f) = F[\theta(t)]$$

Vediamo il caso della FM

$$F[\theta(t)] = F[\beta \sin 2\pi f_m t] = \beta \cdot \frac{j}{2} \cdot \left[ \delta(f - f_0) - \delta(f + f_0) \right]$$

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + \frac{A_c}{4} j^2 \left[ \delta(f - f_0 - f_c) - \delta(f + f_0 - f_c) - \right. \\ \left. \delta(f + f_0 + f_c) - \delta(f - f_0 + f_c) \right]$$



07/06/2009 56  
 Ci proponiamo l'obiettivo di valutare il segnale modulato da un  
 segnale modulante sinusoidale per un valore arbitrario di  $\beta$ .

Per fare questo è possibile rinviare l'ipotesi fatta nel segnale  
 modulante dalla eq (2)

$$s(t) = A_c \left\{ \cos(2\pi f_c t) \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) - \sin(2\pi f_c t) \sin(\beta \sin(2\pi f_m t)) \right\}$$

Sebbene  $s(t)$  non sia periodico, questa può accadere in quanto  
 affinché la funzione sia periodica, deve essere che  $f_c$  sia multiplo di  $f_m$   
 si osserva che le funzioni  $\cos(2\pi f_c t)$  e  $\sin(2\pi f_m t)$   
 sono periodiche e possiamo esse essere espresse con l'aiuto utilizzando al  
 posto di  $f_c$  e  $f_m$

$$\cos(\beta \sin \omega_m t) = J_0(\beta) + \sum_{n \text{ even}}^{\infty} 2 J_n(\beta) \cos(n \omega_m t)$$

$$\sin(\beta \sin \omega_m t) = \sum_{n \text{ odd}}^{\infty} 2 J_n(\beta) \sin(n \omega_m t)$$

Dove  $n$  è positivo e  $J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin \theta - n\theta)} d\theta$

Mediante opportune semplificazioni arriviamo a sapere che:

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(2\pi (f_c + n f_m) t)$$

Da è possibile valutare la trasformata di Fourier:

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum J_n(\beta) \left[ \delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m) \right]$$



Riassumendo il tutto è possibile affermare quanto segue

- 1) Lo spettro di un segnale FM contiene la componente relativa alla portante e una serie di infinite frequenze laterali distanziate simmetricamente da entrambe le parti della portante con separazione di  $f_m$ ,  $2f_m$ ,  $3f_m$
- 2) Nel caso in cui  $\beta$  è piccolo in rapporto all'unità, solamente i coefficienti  $J_0(\beta)$  e  $J_1(\beta)$  hanno significato in questo modo il segnale FM è composto dalla portante e da due frequenze laterali, distinte a  $f_c \pm f_m$ . Questo corrisponde al caso della modulazione a NARROW BAND.
- 3) L'ampiezza della portante, varia in accordo con  $\beta$  e  $J_0(\beta)$ .  
 La spiegazione fisica di questo è che avendo ampiezza costante la modulazione FM accade che la potenza media del segnale è
 
$$P = \frac{1}{2} A_c^2$$
 Quando il segnale è modulato in FM la potenza nelle frequenze laterali, più compie solamente a 1/2 della portante



Teoricamente, i segnali FM contengono un numero infinito di frequenze laterali in questo modo, la banda necessaria per trasmettere il segnale è  $\infty$ .  
In pratica, si osserva che un segnale FM è effettivamente limitato al numero di bande compatibili con la ricezione. Possiamo dunque rappresentare un valore di banda necessario, consideriamo inizialmente un segnale generato da un segnale tono modulante di frequenza  $f_m$ .

Analizzando la figura - PAG 193 Carlson si vede che.

- le frequenze laterali che distano dalla portante più di  $\Delta f$  tendono ad assumere una ampiezza nulla
- Nel caso delle bande larghe la larghezza di banda è solo leggermente maggiore di  $2\Delta f$
- Nel caso di Narrowband la larghezza di banda è  $2f_m$

Mediante la regola di Carson, si definisce la larghezza di banda per le modulazioni FM

$$B_T = 2\Delta f + 2f_m = 2\Delta f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

La definizione considera il massimo numero di frequenze laterali la cui ampiezza è maggiore di un valore ritenuto opportuno. Questo valore è 1% dello spettro NON modulato. La larghezza di banda di un segnale FM è la distanza tra due frequenze, dove oltre nessun supera 1% della ampiezza dello spettro quando viene rimosso la modulazione.

Banda segnale PM:

$$B_{PM} = 2(\phi_{\Delta} + 1)B$$

Partendo dalla forma dell'equazione determinata per la modulazione FM quando viene utilizzata in regime sinusoidale come segnale modulante:

$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t) \right]$$

E supponendo che  $\beta$  sia piccolo confrontato con un radiante, possiamo scrivere che:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] - A_c \sin(2\pi f_c t) \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)]$$

Questa utilizzando una nota formula trigonometrica.

Come detto precedentemente, se ora ipotizziamo  $\beta$  molto piccolo, è possibile semplificare l'espressione sopra

$$\cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] \approx 1 \quad \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)] \approx \beta \sin(2\pi f_m t)$$

Così che la nostra espressione di potenza risulta ora:

$$s(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) - \beta A_c \sin(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_m t) \quad (1)$$

L'equazione sopra, rappresenta l'espressione approssimata per un segnale modulato FM quando è stato utilizzato un Tono | sinusoidale come segnale modulante  $A_m \cos(2\pi f_m t)$



Esistono principalmente due metodi per produrre segnali modulati in frequenza. Questi sono denominati, generazione diretta e generazione indiretta.

### GENERAZIONE DIRETTA

Nella generazione diretta, la frequenza della portante viene variata direttamente, in accordo con l'input del segnale modulante in banda base. Questo è eseguito utilizzando un VCO ossia un oscillatore controllato in tensione.

Lo schema sotto, ne ripete uno schema:

### GENERAZIONE INDIRETTA

Nella generazione indiretta, viene piuttosto il principio per il quale un segnale modulante integrato e introdotto in un modulatore narrowband di fase genera un segnale narrowband, modulato in frequenza (il funzionamento di questo dispositivo è stato descritto precedentemente).

Ottenuto mediante modulazione narrowband utilizzando come segnale modulante un tono

Possiamo dunque scrivere del segnale :

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) = \beta \boxed{\phantom{0}} \sin(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_m t)$$

È possibile esprimere il segnale  $s(t)$  come

$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi f_d \int_0^T m(\tau) d\tau \right]$$

Nella generazione indiretta, viene utilizzato il principio della modulazione di fase, questo in quanto:

- l'implementazione è semplice
- la portante può essere generata con un oscillatore stabile
- l'introduzione di un "segnale integrato" nel modulatore di fase, produce un segnale modulato in frequenza.

Supponiamo di avere il segnale

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \phi_\Delta m(t) \sin(2\pi f_c t)$$

ottenuto, mediante l'introduzione del segnale  $\phi_\Delta m(t)$  nel modulatore di fase analizzato precedentemente.

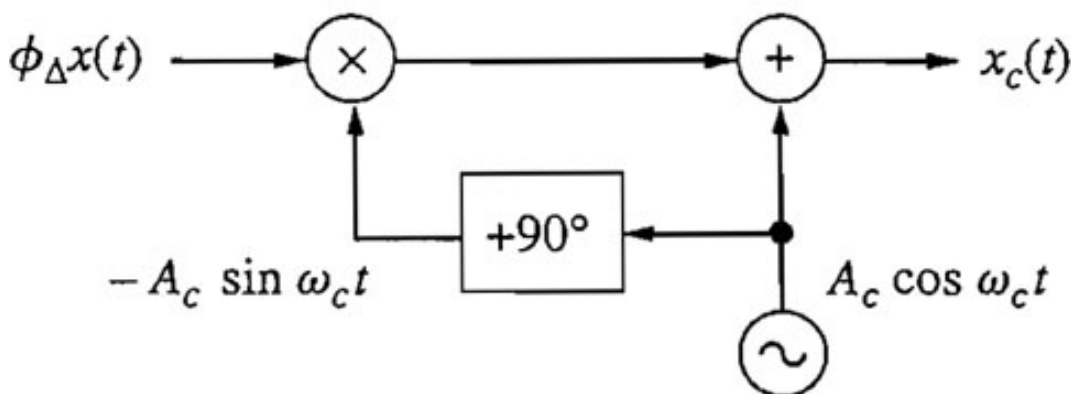
Se ora andiamo ad introdurre il segnale integrato

$\phi_\Delta \int_0^t m(\tau) d\tau$ , otteniamo un segnale Narrowband FM.

La cui frequenza istantanea sarà  $f(t) = f_c + \frac{\phi_\Delta}{2\pi} m(\tau)$

$$f_\Delta = \frac{\phi_\Delta}{2\pi}$$

Ora come mostrato in figura,



introduciamo la segnale in un moltiplicatore di frequenza che supponiamo  
 produrre frequenze  $n$ -volte la frequenza di ingresso. L'uscita da tale  
 dispositivo, sarà dunque:

$$p_2(t) = n f_1 + n p_0 m(t)$$

Successivamente, può essere seguita una traslazione in frequenza, in modo da  
 portare la portante ad un valore di  $p_c$  desiderato, dunque:

$$p_c = |n p_{c1} \pm p_{c0}| \quad \text{- La frequenza finale sarà: } p(t) = p_c m p_0 m(t)$$

L'ultimo stadio della catena, consiste in un amplificatore di potenza  
 in quanto tutte le operazioni, devono essere eseguite a buoni valori di  
 potenza -

## NOTE:

Il moltiplicatore di frequenza, consiste in un circuito NON LINEARE  
 seguito da un filtro passa banda. La relazione ingresso uscita di  
 un dispositivo NON LINEARE, può essere descritta come:

$$v(t) = a_1 s(t) + a_2 s^2(t) + a_3 s^3(t) + \dots + a_n s^n(t)$$

dove  $a_1, \dots, a_n$  sono i coefficienti che determinano il funzionamento del  
 dispositivo e  $n$  è l'ordine più alto di NON LINEARITÀ.

Per descrivere il funzionamento nei dettagli, occorre valutare il comportamento  
 rispetto delle distorsioni NON LINEARI, per ora è sufficiente affermare che  
 il segnale di ingresso è:

$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi p_c t + 2\pi K_p \int m(\tau) d\tau \right]$$

L'uscita sarà

$$s(t) = A_c' \cos \left[ 2\pi n p_c t + 2\pi n K_p \int m(\tau) d\tau \right]$$

07/06/2009

63

È possibile vedere come il detto dispositivo, modifica la portante e l'indice di modulazione, lasciando inalterata la frequenza del segnale modulante.

In fase di demodulazione, un tipico ricevitore deve eseguire principalmente tre operazioni:

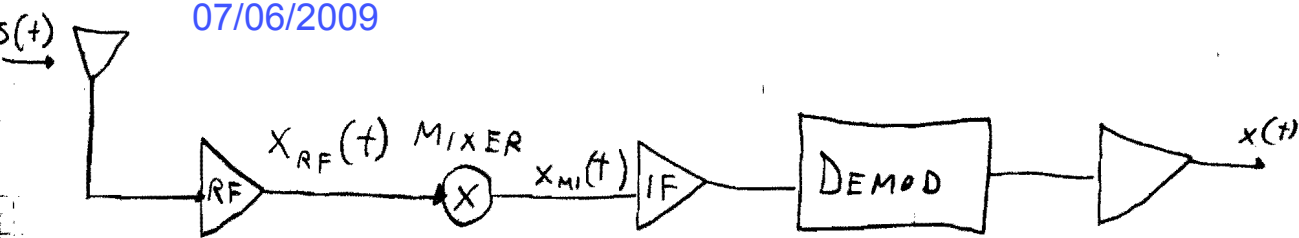
- Sintonizzarsi sulla frequenza portante di interesse, su cui è presente il segnale che si intende ricevere.
- Estrarre il segnale di interesse da eventuali altri segnali che possono essere presenti.
- Amplificare per compensare alle perdite in fase di trasmissione. Infine l'amplificazione è utile per dare al demodulatore un segnale utile ed essere demodulato che rispetti le caratteristiche dei componenti che lo compongono.

Le caratteristiche sopra descritte potrebbero essere realizzate da un unico dispositivo: un amplificatore sintonizzabile ad alto guadagno, ma per diversi motivi legati alla stabilità e alla complessità di realizzazione rendono tale dispositivo non adatto alla s.c.p.

Viene introdotto il ricevitore a supereterodina o "superhet". Il funzionamento consiste in due differenti sezioni di amplificazione e filtraggio, prima di utilizzare il segnale attenuato nel demodulatore.

che lavori direttamente ad alta frequenza





Il segnale in ingresso è  $s(t)$ : è inizialmente selezionato ed amplificato dalla sezione RF "radio frequenza" sintonizzata sulla frequenza di interesse  $f_c$ . Il circuito RF ha una larghezza di banda  $B_{RF}$  maggiore di quella del segnale che si intende ricevere, questo competerà al fatto che "alcune parti" dei canali adiacenti verranno "presi".

L'utilità del ricevitore consiste nel fatto che i circuiti contenuti nella parte di demodulazione, lavorano ad una frequenza intermedia definita a priori, questo è vantaggioso per il fatto che è possibile con un solo circuito di demodulazione che lavori sulla frequenza  $f_{IF}$  IF sta per intermediate frequency o frequenza intermedia demodulare vari segnali trasmessi in passabanda con frequenza portante  $f_c$ . È chiaro che la larghezza di banda sia del segnale  $s(t)$  che quella di funzionamento dei filtri debba essere nota a priori e fissa.

Per quanto detto, il segnale in uscita del blocco RF  $x_{RF}(t)$  viene convertito alla frequenza  $f_{IF}$ . Per compiere l'operazione viene utilizzato un mixer.

Il mixer opera con una frequenza locale  $f_{LO}$  tale che questa sia regolabile, in base al funzionamento. Il mixer è un dispositivo che esegue l'operazione di conversione di frequenza. Porta il segnale passabanda di ingresso con frequenza portante  $f_c$  in un segnale passabanda con frequenza portante  $f_{LO}$ .

07/06/2009  
 $P_{LO} = P_C + P_{IF}$

oppure  $P_{LO} = P_C - P_{IF}$

66

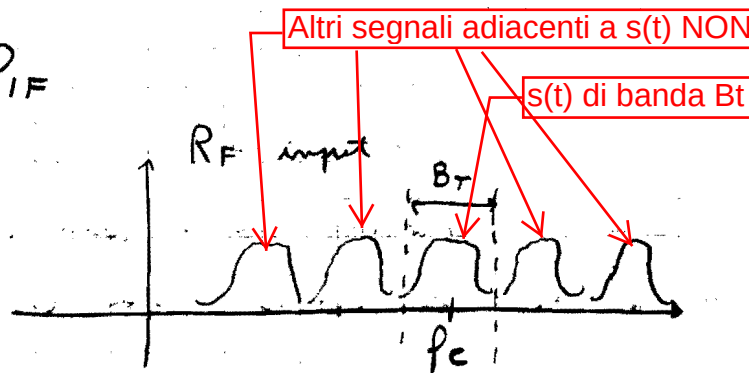
$$P_{IF} = |P_{LO} - P_C|$$

Successivamente il segnale transita in un amplificatore passabanda che ha banda  $B_{IF} \approx B_T$  questo elimina i canali adiacenti a quelli di interesse "lasciati passare" dal circuito RF - In fine il segnale viene portato al demodulatore che si occupa di portarlo in banda base e infine amplificarlo.

Vediamo come un segnale modulato con sideband simmetrica viene processato dal blocco di ricezione in questione.

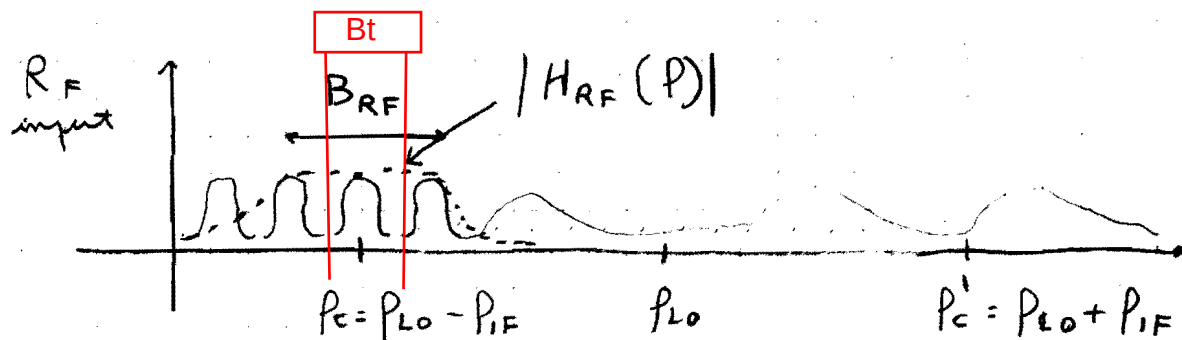
$s(t)$  ha banda  $B_T$

$$f_c = f_{LO} - f_{IF}$$



In input al circuito RF è presente il segnale riportata sopra. Sono interessati a  $s(t)$  trasmissi su portante  $f_c$  con larghezza di banda  $B_T$  ma come si vede, possono essere presenti altri segnali o disturbi adiacenti a  $s(t)$ .

Per quanto detto RF esegue amplificazione e filtraggio con larghezza di banda  $B_{RF} > B_T$ .

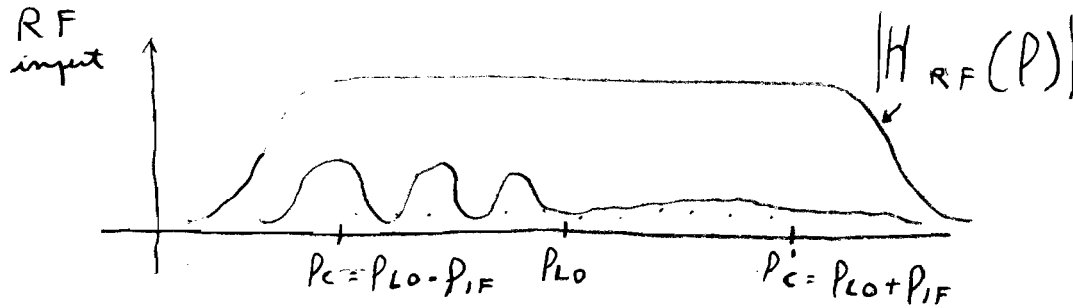


Nella scelta del

☐ filtro passabanda ☐  $|H_{RF}(f)|$  come mostrata in figura.

Occorre fare attenzione al fatto che il filtro abbia  $B_{RF}$  sufficientemente piccolo. Valutiamo ora cosa potrebbe accadere nel caso in cui la banda  $B_{RF}$  sia larga a tal punto da consentire il transito di un eventuale segnale a distanza presente sulla frequenza  $f_c' = f_{LO} + f_{IF}$ .

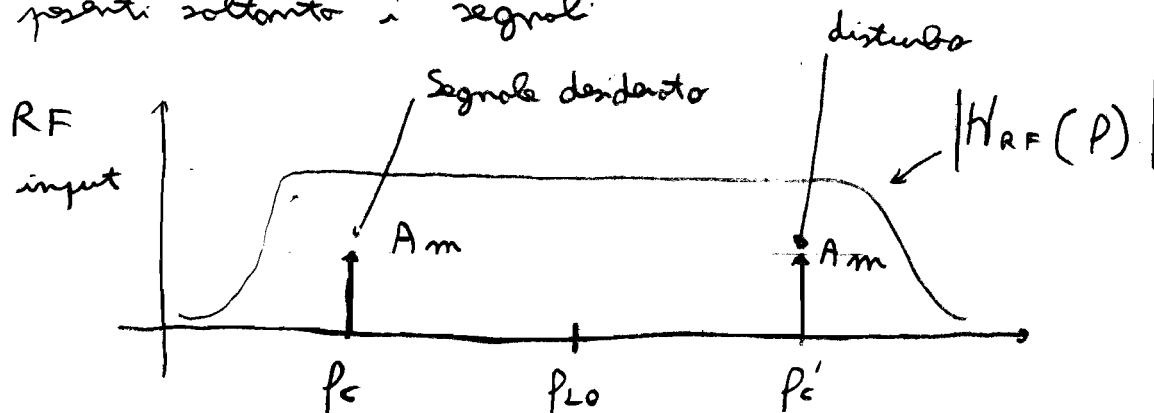
In ingresso al mixer si trovano la seguente situazione



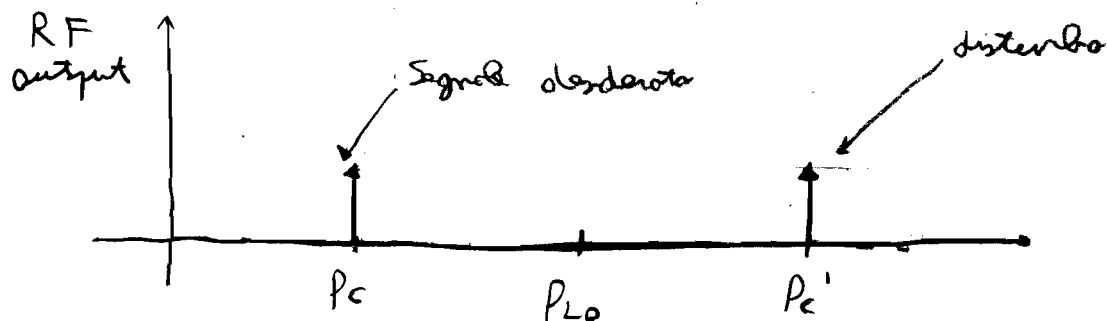
Analizziamo ora cosa accade quando il segnale si presenta al mixer,

per rendere più semplice la

spiegazione, consideriamo che all'ingresso del circuito RF sono presenti soltanto i segnali



In uscita dal circuito RF avremo.



Quando <sup>07/06/2009</sup> due segnali

$\delta(P - P_c)$  e  $\delta(P - P_c')$  vengono a trovarsi  
all'ingresso del mixer questa segue la seguente operazione:

$$X_{M1}(P) = [\delta(P - P_c) + \delta(P - P_c')] * \left[ \frac{1}{2} (\delta(P + P_{LO}) + \delta(P - P_{LO})) \right]$$

Dunque

$$X_{M1}(P) = [\delta(P - P_c) * \delta(P + P_{LO}) + \delta(P - P_c) * \delta(P - P_{LO}) + \delta(P - P_c') * \delta(P + P_{LO}) + \delta(P - P_c') * \delta(P - P_{LO})] \cdot \frac{1}{2}$$

Eseguendo i calcoli, si ottiene

$$[\delta(P + P_{LO} - P_c) + \delta(P - P_{LO} - P_c) + \delta(P + P_{LO} - P_c') + \delta(P - P_{LO} - P_c')] \cdot \frac{1}{2}$$

Da sostituire  $P_{LO} = P_c + P_{IF}$

$$[\delta(P + P_c + P_{IF} - P_c) + \delta(P - P_c - P_{IF} - P_c) + \delta(P + P_c + P_{IF} - P_c') + \delta(P - P_c - P_{IF} - P_c')] \cdot \frac{1}{2}$$

Ottengo sostituendo  $P_c' = P_{LO} + P_{IF} = P_c + P_{IF} + P_{IF} = P_c + 2 P_{IF}$

$$\frac{1}{2} [\delta(P + P_{IF}) + \delta(P - 2 P_c - P_{IF}) + \delta(P + P_c + P_{IF} - P_c - 2 P_{IF}) + \delta(P - P_c - P_{IF} - P_c - 2 P_{IF})]$$

$$\frac{1}{2} [\delta(P + P_{IF}) + \delta(P - 2 P_c - P_{IF}) + \delta(P - P_{IF}) + \delta(P - 2 P_c - 3 P_{IF})]$$

INTERFERENZA

Le due  $\delta$  si sovrappongono modificando dunque il segnale originale  
Tale problematica dovuta alla frequenza immaginaria. Per eliminare il  
problema occorre che il filtro RF preleva il filtro della componente  
 $P_c'$ .



I demodulatori di frequenza, sono dispositivi, la cui uscita è proporzionale alla frequenza istantanea dell'ingresso. Se il segnale passa banda di ingresso è  $R(t) \cos[\omega_c t + \theta(t)]$ , l'uscita del demodulatore FM ideale è:

Ricordiamo che per definizione la frequenza istantanea può essere calcolata come  $f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\omega_c t + \theta(t)]$

$$V_{OUT}(t) = K \frac{d}{dt} [\omega_c t + \theta(t)] = K \left[ \omega_c + \frac{d}{dt} \theta(t) \right]$$

Tipicamente il demodulatore FM è bilanciato dunque  $K \omega_c$  non compare in uscita. L'uscita è dunque ridotta a

$$V_{OUT}(t) = K \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Esistono tantissimi modi per implementare un demodulatore FM; la quasi totalità comunque utilizza uno dei metodi seguenti.

- CONVERSIONE FM-AM
- RILEVAZIONE A SCOSTAMENTO FASE O QUADRATURA
- RILEVAZIONE ATTRAVERSAMENTO ZERO

Il funzionamento dei demodulatori di frequenza è quello di eseguire la derivata del segnale in ingresso. ciascuno opera in modo differente ma l'importante è tenere presente che ogni modulatore implementa la derivata vista come il limite del rapporto incrementale. Il demodulatore che implementa il monostabile, genera impulsi ad ogni zero-crossing. L'importanza degli zero crossing serve a vedere quando la sinusoide modulata attraversa lo zero. E' dunque possibile rilevare la frequenza. ad ogni attraversamento dello zero viene dunque generato un impulso, successivamente, questi sono integrati e dunque sommati, se la sommatoria è sufficientemente piccola, si riesce a contare la frequenza e dunque a ricostruire il segnale originale.

Consideriamo  $s(t) = A_c \cos \theta(t)$

Come anticipato precedentemente, qualunque dispositivo che produca la derivata del input, produce l'effetto di FM-TO-AM conversion.

Proseguendo l'analisi del segnale introdotto precedentemente, vediamo che quando la derivata di  $s(t)$  otteniamo:

$$\frac{d}{dt} [s(t)] = -A_c \sin \theta(t) \cdot \frac{d}{dt} \theta(t)$$

$$\text{Se consideriamo } \frac{d}{dt} \theta(t) = 2\pi [f_c + f_a x(t)]$$

Questa deriva dalla formula della frequenza istantanea.

Il segnale che otteniamo è dunque:

$$\frac{d}{dt} [s(t)] = 2\pi A_c [f_c + f_a x(t)] \sin \theta(t)$$

Ricordiamo che  $-\sin(a) = \cos(a \pm \pi)$

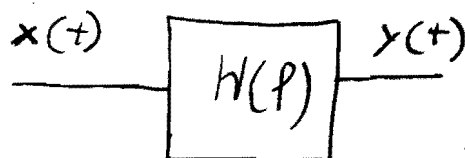
$$\frac{d}{dt} [s(t)] = 2\pi A_c [f_c + f_a x(t)] \cos [\theta(t) \pm \pi]$$

Se ora introduciamo il risultato in un rivelatore di envelope, vediamo che l'output è proporzionale a  $f_c + f_a x(t)$ .

Per avere quindi che l'ampiezza di  $s(t)$  vari, cosa che ci serviva tutto, in quanto  $2\pi A_c$  variabile mettiamo il limitatore all'ingresso, per togliere l'ultimo termine  $f_c$  che è costante, mettiamo un DC-BLOCK. Uno schema dunque:



L'analisi delle distorsioni prodotte nei segnali FM o PM introdotti da reti lineari, è un problema delicato. Possiamo analizzare il problema ponendoci nella seguente condizione:



$x(t)$  è il segnale modulato con modulazione esponenziale.

$H(p)$  è la funzione di trasferimento del sistema lineare.

$y(t)$  è l'output

Sappiamo che  $x(t)$  ha ampiezza costante, essendo un segnale modulato FM o PM. Scriviamo ora la rappresentazione in banda base:

$$x_{LP}(t) = \frac{1}{2} A_c e^{j\phi(t)} = \frac{1}{2} A_c e^{j\phi(t)}$$

↑ Ampiezza costante

L'informazione è contenuta in  $\phi(t)$ .

Analizziamo anche il comportamento del filtro in banda base.

$$H_{LP}(p) = H(p + p_c) \quad \text{(vedea esempio su ritardo di fase e di iniluppo per la trasformazione del filtro da BP a LP)}$$

$$Y_{LP}(p) = H_{LP}(p) X_{LP}(p)$$

Per analizzare il segnale di nostro interesse  $y(t)$ , occorre operare una conversione da banda base a banda passante otteniamo dunque:

$$y(t) = y_{BP}(t) = 2 \operatorname{Re} [y_{LP}(t) e^{j2\pi p_c t}]$$

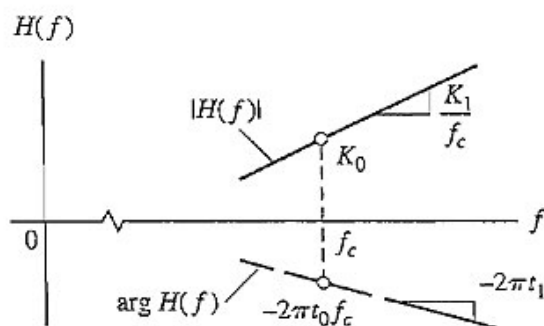
Il calcolo di  $y_{LP}(t) = \mathcal{F}^{-1} [Y_{LP}(f)]$  in generale è molto complesso. Ci concentriamo dunque su un caso particolare.

07/06/2019 Come caso particolare possiamo considerare quello di un filtro che ha funzione di trasferimento con guadagno costante  $|H(p)| = K_0$  per un certo valore  $p_c$ .  
 Questa cresce o decresce con coefficiente angolare  $\frac{K_1}{p_c}$ .

La risposta in fase corrisponde a quella unita per le ritardi di gruppo e di fase.

$$H_{LP}(p) = H(p + p_c) u(p + p_c) = \left( K_0 + \frac{K_1}{p_c} p \right) e^{-j2\pi(t_0 p_c + t_1 p)}$$

La  $H(p)$  del filtro è riportata in figura



$$\begin{aligned} Y_{LP}(p) &= H_{LP}(p) X_{LP}(p) = X_{LP}(p) \cdot \left( K_0 + \frac{K_1}{p_c} p \right) \cdot e^{-j2\pi(t_0 p_c + t_1 p)} \\ &= \underbrace{K_0 \cdot X_{LP}(p) \cdot e^{-j2\pi(t_0 p_c + t_1 p)}}_{\text{primo membro}} + \underbrace{\frac{K_1}{p_c} p e^{-j2\pi(t_0 p_c + t_1 p)} \cdot X_{LP}(p)}_{\text{secondo membro}} \end{aligned}$$

Possiamo ora manipolare l'equazione risalendo al secondo membro come

$$\frac{K_1}{2\pi p_c j} \cdot (2\pi p j) \cdot X_{LP}(p) e^{-j2\pi t_0 p_c} \cdot e^{-j2\pi t_1 p}$$

\* Applicando i teoremi di derivazione e di ritardo delle trasformate di Fourier arriviamo a scrivere:

$$\begin{aligned} y_{LP}(t) &= \underbrace{K_0 x_{LP}(t - t_1) e^{-j\omega_0}}_{\text{primo membro}} + \underbrace{\frac{K_1}{j2\pi p_c} \cdot e^{-j2\pi t_0 p_c} \cdot \frac{d}{dt} x_{LP}(t - t_1)}_{\text{secondo membro}} \\ \frac{d}{dt} x_{LP}(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} A_c e^{j\phi(t)} \right] = \frac{j}{2} A_c \frac{d}{dt} [\phi(t - t_1)] e^{j\phi(t - t_1)} \end{aligned}$$

\* Il primo membro può invece essere scritto come  $K_0 x_{LP}(p) e^{-j2\pi t_0 p_c} e^{-j2\pi t_1 p}$

Andiamo ora ad esprimere il tutto in forma d'onda

$$y(t) = A(t) \cos [w_c (t - t_0) + \phi (t - t_1)]$$

$$A(t) = \left[ K_0 + \frac{K_1}{w_c} \dot{\phi} (t - t_1) \right] \quad \dot{\phi}(t) = \frac{d}{dt} [\phi(t)]$$

Nel caso il segnale di ingresso sia modulato FM

$$\dot{\phi}(t) = [2\pi f_\Delta x(t)] \quad \text{così che:}$$

$$A(t) = A_c \left[ K_0 + \frac{K_1 P_\Delta}{P_c} x(t - t_1) \right]$$

Questo mostra che l'equazione trovata, ha la stessa forma di una onda AM con indice di modulazione  $\mu = \frac{K_1 P_\Delta}{P_c}$

Questo dimostra che la conversione da FM ad AM non presenta un problema insormontabile infatti la nostra informazione non ha subito alterazioni se non un ritardo temporale.



# DISTORSIONI NON LINEARI E LIMITATORI

07/06/2009



Siccome assumiamo la distorsione NON LINEARE definiamo  
 $y(t) = T[x(t)]$  - Per convenienza poniamo  $T[0] = 0$



Paragoniamo il dispositivo non lineare ad un conoide.

Il dispositivo NON LINEARE può avere una funzione di trasferimento analogo a:  $y(t) = a_1 x(t) + a_2 [x(t)]^2 + a_3 [x(t)]^3 \dots$

Questo conoide genera dunque distorsioni al segnale in ingresso.

Concentriamoci ora su cosa accade al segnale e che forma assume  $y(t)$ , questa ci salita può essere considerata come il segnale che entra nel circuito ricevente.

Poniamo  $x(t)$  come il tipico segnale FM:

$$x(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad \phi(t) = 2\pi \int_0^t m(\tau) d\tau$$

Se introduciamo il segnale nel dispositivo otteniamo:

$$y(t) = a_1 [A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]] + a_2 [A_c^2 \cos^2[2\pi f_c t + \phi(t)]] + a_3 A_c^3 \cos^3[2\pi f_c t + \phi(t)]$$

Esponendo i termini con le formule trigonometriche  $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$

$$\cos^3(x) = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x \quad \text{otteniamo che}$$

*Handwritten signature*

07/06/2009 76

$$v_o(t) = \frac{1}{2} a_2 A_c^2 + \left( a_1 A_c + \frac{3}{4} a_3 A_c^3 \right) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$$

$$+ \frac{1}{2} a_2 A_c^2 \cos[4\pi f_c t + 2\phi(t)]$$

$$+ \frac{1}{4} a_3 A_c^3 \cos[6\pi f_c t + 3\phi(t)]$$

L'output è dunque uguale a uno componente continuo e tre segnali modulati in frequenza. Ciascuno con portante  $f_c, 2f_c, 3f_c$   
 $\cos(2\pi \underbrace{2f_c}_{\text{portante}} t)$  portante  $2f_c$ .

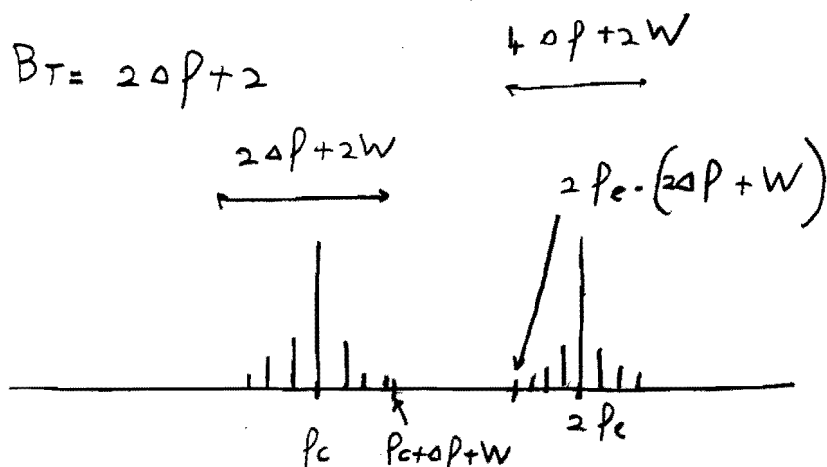
Le componenti sono dunque le componenti della distorsione lineare, secondo ordine, terzo ordine etc...

Per raggiungere il nostro scopo di riesaminare ed estrarre l'informazione del nostro segnale, dobbiamo lavorare sulla frequenza  $f_c$ .

Dobbiamo riesaminare e separare tale segnale da quello ad esso più vicino ossia quello con frequenza  $2f_c$ . Poniamo ora  $\Delta f$  come la differenza del segnale FM e  $W$  la banda del segnale  $m(t)$ . La regola di Carson:

$$B_T = 2\Delta f + 2W$$

Notiamo che l'occupazione di banda prodotta dalla distorsione lineare è



Questo ci assicura che gli spettri dei diversi segnali prodotti dalla distorsione non si sovrappongono. La condizione che deve essere soddisfatta è

$$2f_c - (2\Delta f + W) > f_c + \Delta f + W$$

Se ora ~~07/06/2008~~ 07/06/2008 abbiamo a filtro in  $f_c$  con larghezza di banda 77

$2\Delta f + 2W$  otteniamo

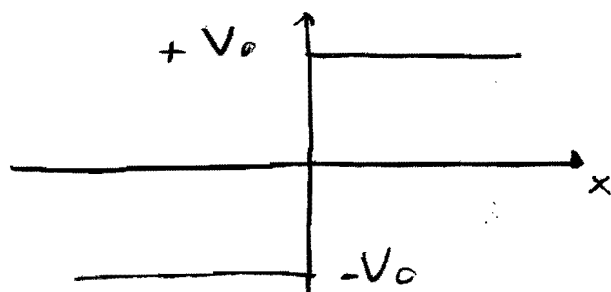
$$z(f) = \left( a_1 A_c + \frac{3}{4} a_3 A_c^3 \right) \cos \left[ 2\pi f_c t + \phi(t) \right]$$

Abbiamo dunque visto come il passaggio del segnale FM in un canale che presenta distorsioni NON LINEARI, non fa altro che produrre distorsioni di ampiezza. Questo è molto utile in quanto, molti sistemi producono distorsioni lineari di ampiezza. Occorre fare attenzione che FM è molto sensibile alle non linearità di FASE.

Dobbiamo preoccuparci più di eliminare la distorsione di ampiezza.

Vediamo che tali anomalie, possono essere eliminate mediante l'utilizzo di dispositivi detti HARD LIMITER (LIMITATORI)

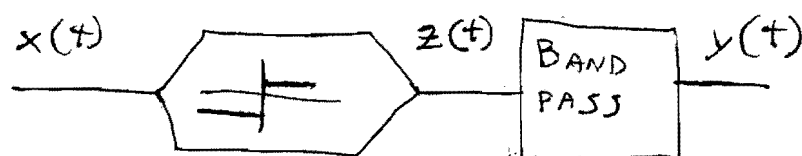
Questi dispositivi hanno una funzione di trasferimento come quella riportata in figura



L'uscita è dunque  $+V_0$  se  $x > 0$   $-V_0$  se  $x < 0$

~~Se ora applichiamo un filtro passabanda, otteniamo che l'uscita è una sinusoide in portante~~

Un limitatore in banda passante è seguito da un filtro passabanda.



Osserviamo che il dispositivo Hard Limiter è NON LINEARE.

Se ora consideriamo di introdurre un segnale esempio

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_c t + \theta(t)]$$

Cosa accade?

In  $z(t)$  avremo una onda quadra di ampiezza costante  $V_0$  che attraversa lo zero quando lo attraversa la sinusoide di ingresso.

Questo risulta fondamentale per eliminare eventuali variazioni portanti ~~nell'ampiezza~~ nell'ampiezza del segnale FM ricevuto.

Se ora filtriamo passabanda tale onda quadra, otteniamo

$$y(t) = K V_0 \cos[2\pi f_c t + \theta(t)]$$

$$K = \frac{4}{\pi}$$

# INTERFERENZE SINUSOIDALI

07/06/2009 Consideriamo un ricevitore sintonizzato su una certa frequenza portante  $f_c$ .

Supponiamo che un segnale sinusoidale con portante  $f_i$  stia interferendo con il segnale di nostra interesse.

Il risultato sarà dunque un segnale:

Segnale che contiene il messaggio, per semplicità si considera la portante non modulata

$$v(t) = \left[ A_c \cos \omega_c t \right] + \left[ A_i \cos \left[ (2\pi f_c + 2\pi f_i) t + \phi_i \right] \right] \quad (1)$$

Dove  $A_c \cos(\omega_c t)$  è la portante non modulata.

Sinusoide interferente

$A_i$  è l'ampiezza della sinusoide interferente

Portiamo ora il segnale  $v(t)$  nella scrittura envelope and phase dove la generica forma è la seguente

Notare che  $f_i$  si somma a  $f_c$ , l'interferenza avrà dunque portante  $f_c + f_i$

$$v(t) = A_v(t) \cos[\omega_c t + \phi_v(t)]$$

Per arrivare alla scrittura scelta devo manipolare la (1)

$$\rho = A_i / A_c \Rightarrow A_i = \rho A_c \quad \theta_i(t) = \omega_i t + \phi_i$$

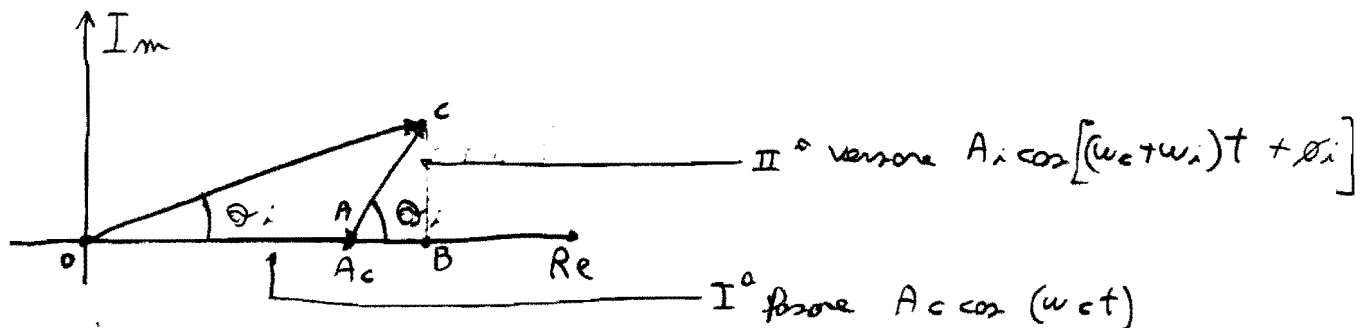
Dunque

$$v(t) = A_c \cos \omega_c t + \rho A_c \cos[\omega_c t + \theta_i(t)]$$



Come si esegue la rappresentazione di  $v(t)$ ?

Possiamo utilizzare la costruzione mediante fasori e cos.



Come misuriamo l'angolo  $\theta_i(t)$

Osserviamo che  $A \hat{=} C = B \hat{=} C$

$$AB = AC \cos \theta_i(t) = \rho A_c \cdot \cos \theta_i(t)$$

$$BC = AC \cdot \sin \theta_i(t) = \rho A_c \cdot \sin \theta_i(t)$$

Siccome siamo interessati a  $OC = Av(t)$

Applichiamo Pitagora.

$$OC = \sqrt{OB^2 + BC^2}$$

$$OB = OA + AB = A_c + \rho A_c \cdot \cos \theta_i(t) = A_c [1 + \rho \cos \theta_i(t)]$$

$$OC = \sqrt{\{A_c [1 + \rho \cos \theta_i(t)]\}^2 + \{\rho A_c \sin \theta_i(t)\}^2}$$

$$OC = \sqrt{A_c^2 [1 + 2\rho \cos \theta_i(t) + \rho^2 \cos^2 \theta_i(t)] + \rho^2 A_c^2 \sin^2 \theta_i(t)}$$

$$\sqrt{A_c^2 [1 + 2\rho \cos \theta_i(t) + \rho^2 \cos^2 \theta_i(t) + \rho^2 \sin^2 \theta_i(t)]}$$

$$A_c \sqrt{1 + 2\rho \cos \theta_i(t) + \rho^2 (\cos^2 \theta_i(t) + \sin^2 \theta_i(t))}$$

Notare che è stato  
soppresso  $\omega_c t$  per  
semplificazione e scrittura  
Sono state anche  
oppresse le  
costituzioni unite  
sopra.

$$o_c = A_v(t) = A_c \sqrt{1 + g \cos \theta_i(t) + g^2}$$

$$\phi_v(t) = \arctan \frac{B_c}{O_B} = \arctan \frac{g \cdot A_c \cdot \sin \theta_i(t)}{A_c [1 + g \cos \theta_i(t)]} = \frac{g \sin \theta_i(t)}{1 + g \cos \theta_i(t)}$$

Il risultato mostra che l'interferenza dovuta alla sinusoidale, produce modulazione sia di fase  $\phi$  di ampiezza infatti: ponendo  $p \ll 1$

$$A_v(t) \approx A_c [1 + p \cos(\omega_i t + \phi_i)]$$

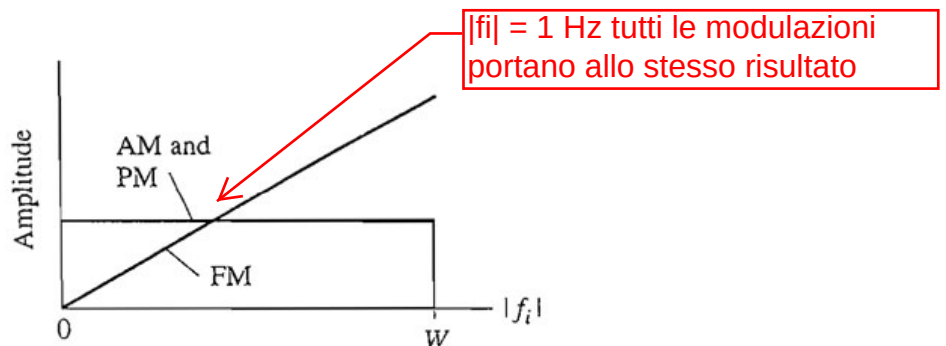
$$\phi_v(t) = p \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

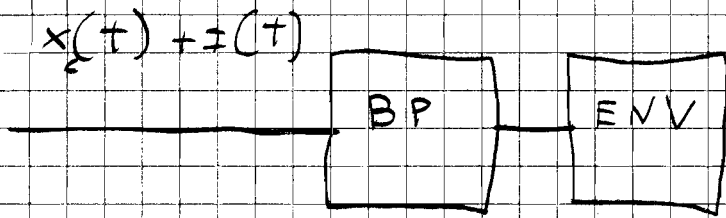
Le scritture sopra assomigliano alla modulazione di un tono alla frequenza  $f_i$  con indice di modulazione AM  $\mu = p$  e FM o PM con indice di modulazione  $\beta = p$

Ci occupiamo ora di valutare cosa accade quando il segnale  $v(t)$  viene elaborato da un ricevitore con costante di demodulazione  $K_D$

$$y_D(t) \approx \begin{cases} K_D (1 + p \cos \omega_i t) & \text{AM} \\ K_D p \sin \omega_i t & \text{PM} \\ K_D p f_i \cos \omega_i t & \text{FM} \end{cases}$$

Concentriamoci su come l'interferenza distorce il segnale ricevuto. I segnali  $y_D(t)$  sono quelli in uscita dal ricevitore, noi abbiamo trasmesso la portante non modulata, invece di quella ci ritroviamo  $y_D(t)$  che contiene l'interferenza. Vediamo come l'interferenza sinusoidale disturba il segnale ricevuto in base alla particolare modulazione. Per tutte le modulazioni assumiamo la fase zero e vediamo che: per il caso AM, il rivelatore di inviluppo produce un'uscita proporzionale a  $K_A(t)$ . Il rivelatore di frequenza produce un'uscita proporzionale alla frequenza istantanea per la PM:  $K p \sin(\omega_i t)$ , per la FM occorre derivare e dividere per  $2\pi$ . Dunque si ottiene  $K p f_i \cos(\omega_i t)$ . Cosa significa questo? Vediamo che nel caso AM e PM l'interferenza è costante al variare della frequenza, il segnale ricevuto ha ampiezza corrotta dal fattore  $p$ , mentre per la FM vediamo che l'ampiezza del segnale ricevuto varia al variare di  $p f_i$ . Dunque se  $f_i$  è piccolo, la variazione è piccola, diverso il caso in cui  $f_i$  aumenta. Ricordiamo che  $f_i$  si somma a  $f_c$ , dunque dire che  $f_i$  è piccolo significa che l'interferenza ha frequenza vicina a quella della portante. Vedere il grafico sotto.





$x_c(t)$  genera segnale AM - DSB

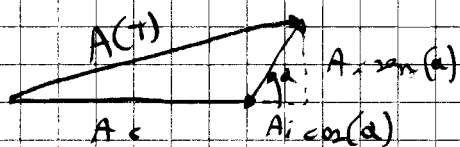
$$x_c(t) = A_c [1 + \mu x(t)] \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$$

$$i(t) = A_i \cos[2\pi(f_c + f_i)t + \phi_i]$$

Entrambi i segnali passano il filtro passabanda e vengono aggiunti al rivelatore di incastro. Il segnale che è passato al rivelatore di incastro sarà dunque:

$v(t) = x_c(t) + i(t)$ . Questo segnale rappresenta come generico segnale passabanda e cioè nella forma:  $v(t) = A(t) \cos[2\pi f_c t + \phi_v(t)]$

Sono interessati soltanto alla componente  $A(t)$  cioè



$$A_i = \rho A_c$$

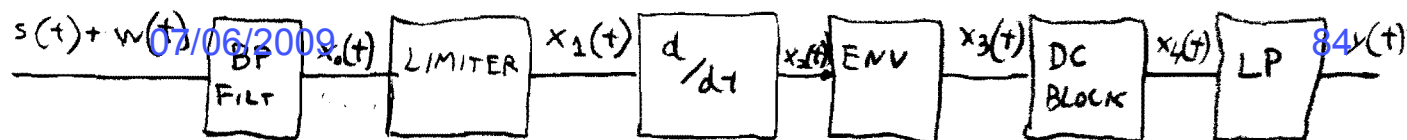
$$A(t) = \sqrt{[A_c + A_i \cos(\alpha)]^2 + [A_i \sin(\alpha)]^2}$$

Risultato utilizzando la sostituzione:

$$A(t) = \sqrt{[A_c + A_i \cos(\alpha)]^2 + [\rho A_c \sin(\alpha)]^2}$$

$$= A_c \sqrt{1 + 2\rho \cos(\alpha) + \rho^2} \quad \text{Prendendo } \rho \ll 1$$

$$= A_c [1 + \rho \cos(2\pi f_i t + \phi_i - \phi_c)]$$



$s(t)$  = generica segnale modulato FM

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_d \int x(d) dd)$$

$$I(t) = A_I \cos[2\pi(f_c + f_I)t + \phi_I]$$

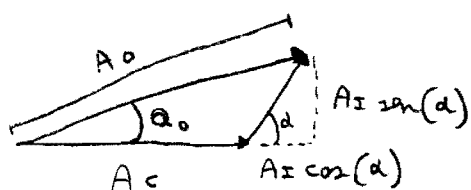
Per semplificare considero:

$$\theta_s(t) = 2\pi f_d \int x(d) dd$$

$$\theta_I(t) = 2\pi f_I t + \phi_I$$

Entrambe le segnali passano il filtro passabanda e arrivano a  $x_0(t)$  addizione.

in  $x_0(t) = s(t) + I(t)$ . L'obiettivo è riuscire a scrivere  $x_0(t)$  come un generico segnale passabanda  $x_0(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0(t))$ . Considero al solito.



$A_0$  non è di interesse, in quanto rimosso dal limiter.

$$\theta_0(t) = \theta_s(t) + \arctan \frac{A_I \sin(\alpha)}{A_c + A_I \cos(\alpha)} \quad \alpha = 2\pi f_I t + \phi_I - \theta_s(t)$$

con semplificazione tanto è più che  $A_c \gg A_I$  posso scrivere che:

$$\theta_0(t) = \theta_s(t) + \frac{A_I \sin(\alpha)}{A_c}$$

$$x_0 = A_0(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_0(t))$$

Il segnale  $x_0$  transita nel limiter, per semplicità supponiamo che questo funzioni moltiplicando per 1. Dunque in  $x_1(t) = \cos(2\pi f_c t + \theta_0(t))$



Il derivatore segue la derivata del segnale dunque

$$x_2 = \frac{d}{dt} [x_1(t)] = \dots$$

$$x_2(t) = -\sin(2\pi f_c t + \theta_0(t)) \cdot \frac{d}{dt} [2\pi f_c t + \theta_0(t)]$$

$$\frac{d}{dt} [2\pi f_c t + \theta_0(t)] = 2\pi f_c + \frac{d}{dt} [\theta_0(t)]$$

$$\frac{d}{dt} [\theta(t)] = \frac{d}{dt} \left[ \theta_s(t) + \frac{A_s}{A_c} \sin(d) \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \theta_s(t) + \frac{A_s}{A_c} \sin(d) \right] = 2\pi f_s + \frac{A_s}{A_c} \cos(d) \frac{d}{dt} [d]$$

$$\frac{d}{dt} [d] = 2\pi f_x - 2\pi f_s x(t)$$

$$x_2 = -\sin(2\pi f_c t + \theta_0(t)) \left[ 2\pi f_c + 2\pi f_s x(t) + \frac{A_s}{A_c} \cos(2\pi f_x t + \phi_x - \theta_s(t)) \cdot 2\pi f_x - 2\pi f_s x(t) \right]$$

Riscrivendo:

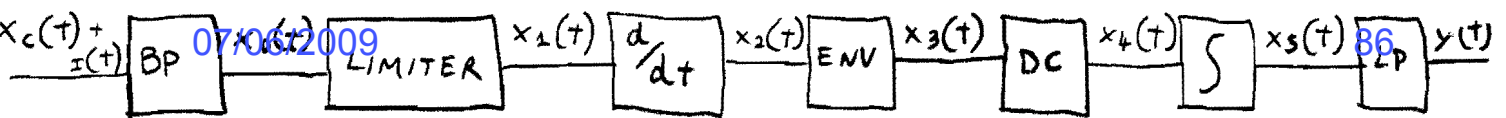
$$x_2 = \left[ 2\pi f_c + 2\pi f_s x(t) + \frac{A_s}{A_c} 2\pi f_x - 2\pi f_s x(t) \cos(2\pi f_x t + \phi_x - \theta_s(t)) \right] \cos(2\pi f_c t + \theta_0(t) + \frac{\pi}{2})$$

Rilevatore di modulazione:

$$x_3(t) = 2\pi f_c + 2\pi f_s x(t) + \frac{A_s}{A_c} 2\pi f_x - 2\pi f_s x(t) \cos(2\pi f_x t + \phi_x - \theta_s(t))$$

Il DC Block estrae dunque

$$x_4(t) = 2\pi f_s x(t) + \frac{A_s}{A_c} 2\pi f_x - 2\pi f_s x(t) \cos(2\pi f_x t + \phi_x - \theta_s(t))$$



$$x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_c x(t))$$

$$i(t) = A_i \cos(2\pi (f_c + f_i) t + \phi_i)$$

$$x_o(t) = x_c(t) + i(t)$$

Devo scrivere  $x_o(t)$  come somma di due segnali sinusoidali cioè  $x_o(t) = A_o(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_o(t))$

Non mi preoccupo di  $A_o(t)$ .

In relazione a quanto visto

$$\theta_o(t) = \phi_c x(t) + \frac{A_i}{A_c} \sin(2\pi f_i t + \phi_i - \phi_c x(t))$$

Ricavo l'espressione per  $x_1(t)$ , supponendo per semplicità che il limiter, limiti a 1 l'ampiezza della sinusoida.

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_c t + \theta_o(t))$$

Dopo il transfer nel derivatore ottengo che

$$x_2(t) = \frac{d}{dt} [x_1(t)] = \sin(2\pi f_c t + \theta_o(t)) \cdot \left[ 2\pi f_c + \frac{d}{dt} \theta_o(t) \right]$$

Envelope detector estrae

$$2\pi f_c + \frac{d}{dt} \theta_o(t)$$

Il DC-BLOCK lascia la componente continua del segnale

$$x_4(t) = \frac{d}{dt} \theta_o(t)$$

L'integratore produce:

$$x_5(t) = \theta_o(t) = \phi_c x(t) + \frac{A_i}{A_c} \sin(2\pi f_i t + \phi_i - \phi_c x(t))$$

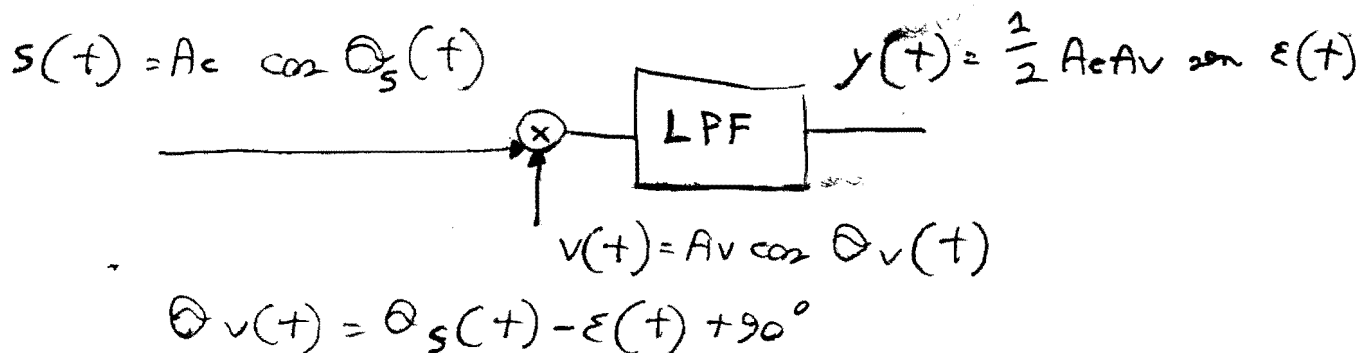
## PLL

La dispositivo PLL è un dispositivo alternata variabile. È utilizzato nei modulatori, demodulatori e in molte varietà di dispositivi.

Illustriamo alcune applicazioni.

L'obiettivo e scopo del PLL è quello di sincronizzare l'angolo (fase e frequenza) di un segnale sinusoidale con quello di un altro segnale sinusoidale.

Solitamente, ~~se~~ un segnale sinusoidale, viene generato dal PLL stesso, mediante l'utilizzo di un VCO o sia di un generatore controllato in tensione, l'altro segnale, viene invece utilizzato un segnale portante. Il PLL deve dunque riuscire ad eseguire un confronto tra le fasi dei due segnali.



Il dispositivo presentato, opera dunque un confronto tra due segnali portanti  $S(t)$  e  $V(t)$  e produce in uscita un segnale  $y(t)$  che dipende dalla differenza tra l'angolo istantaneo dei due segnali.

$$\theta_v(t) = \theta_c(t) - \varepsilon(t) + \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Se analizziamo cosa accade vediamo che

$$x(t) = s(t) \quad v(t) = A_c A_v [\cos \theta_s(t) \cos \theta_v(t)]$$

$$A_c A_v \cdot \frac{1}{2} \cdot [\cos(\theta_s(t) + \theta_v(t)) + \cos(\theta_s(t) - \theta_v(t))]$$

$$\frac{A_c A_v}{2} [\cos(\theta_s(t) + \theta_v(t))] + \frac{A_c A_v}{2} [\cos(\theta_s(t) - \theta_v(t))]$$

Eseguendo ora il filtraggio passabasso, il termine con frequenza alta sempre si rimuove:

$$y(t) = \frac{A_c A_v}{2} \cos(\theta_s(t) - \theta_v(t))$$

Andando a sostituire il contenuto dell'argomento, otteniamo che:

$$y(t) = \frac{A_c A_v}{2} \cos(\cancel{\theta_s(t)} - \cancel{\theta_s(t)} + \varepsilon(t) - \frac{\pi}{2})$$

$$y(t) = \frac{A_c A_v}{2} \cos(\varepsilon(t) - \frac{\pi}{2})$$

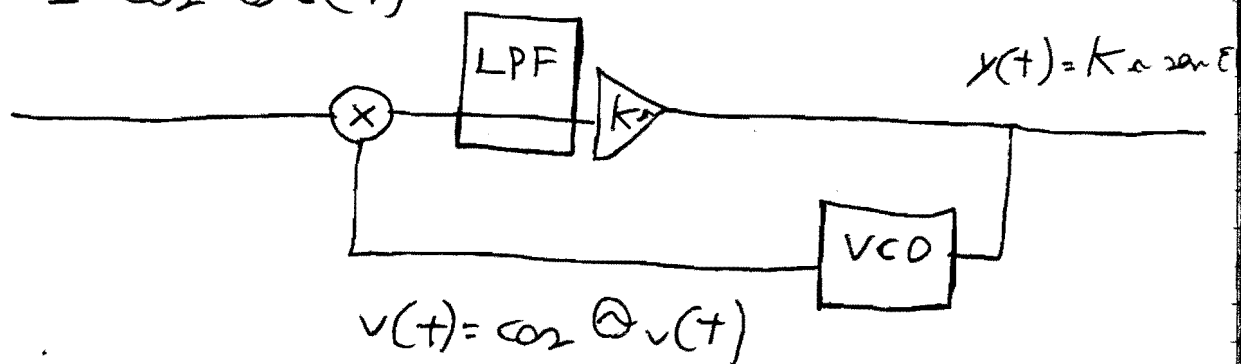
$$y(t) = \frac{A_c A_v}{2} \sin(\varepsilon(t))$$

Notevole che la fase avanzata di  $\pi/2$  ~~è~~ è stata inserita per comodità cioè se ipotizziamo di "accendere il PLL", questo inizia a generare una frequenza  $\theta_v(t)$  indipendente da  $\theta_s(t)$  questa può differire di qualunque valore da  $\theta_s(t)$  perciò introduciamo per comodità il fatto che  $\theta_v(t)$  sia  $\theta_s(t) - \varepsilon(t) + \pi/2$ .

Integrazione  $E(t)$  come l'angolo  $\theta$  è un grafico di  $y$  verso  $E$  mostra che  $y(t) = 0$  quando  $E(t) = 0$  vediamo che  $y(t)$  dipende da  $A_c A_v$  se  $E(t) \neq 0$ , questo può causare problemi se il segnale  $S(t)$  è modulato in ampiezza. Per eliminare il problema consideriamo l'utilizzo di un limitatore senza il filtro in seguito in modo che si generi un onda quadrata.

Nel seguito utilizzeremo e considereremo PLL ANALOGICI  $|E(t)| \ll \pi/2$ . Per semplificare consideriamo  $A_c = 2$

$$x_c(t) = 2 \cos \theta_c(t)$$



Assumiamo il VCO a guadagno unitario e l'output sarà dunque  $\cos \theta_v(t)$ . Introduciamo un amplificatore con guadagno  $K_a$ .

Il VCO varia liberamente in frequenza, quando  $y(t) = 0$  se VCO produce comunque una oscillazione  $f_v$  che potrebbe non essere uguale a  $f_c$ . Sciviamo dunque:

$$f_v = f_c + \Delta f \quad \Delta f \text{ errore di frequenza.}$$

Se consideriamo l'applicazione di una tensione di controllo  $v_a$  al VCO questo produce:

$$\theta_v(t) = 2\pi(f_c + \Delta f)t + \phi_v(t) + \frac{\pi}{2}$$

$$\phi_v(t) = 2\pi K_v \int^t \nu(l) dl$$

$K_v$  è il guadagno o sensibilità del VCO. La come è definita dunque il VCO produce in uscita il segnale sinusoidale che darebbe esca alla frequenza  $f_c$ , ma potrebbe esser diverso dunque  $(f_c + \Delta f)$  e uno sfasamento  $\phi_v(t)$  che è proporzionale alla differenza di fase dei due segnali. L'integrale compare per il fatto di come è definita la modulazione di frequenza.

Determiniamo adesso l'errore  $\varepsilon(t)$  dalla eq (1)

~~$$\varepsilon(t) = \phi_c(t) - \phi_v(t) + \pi/2$$~~

$$\varepsilon(t) = \phi_c(t) - \phi_v(t) + \pi/2 =$$

~~$$2\pi f_c t + \phi(t) - [2\pi f_c t + 2\pi \Delta f t + \phi_v(t) + \pi/2] + \pi/2 =$$~~

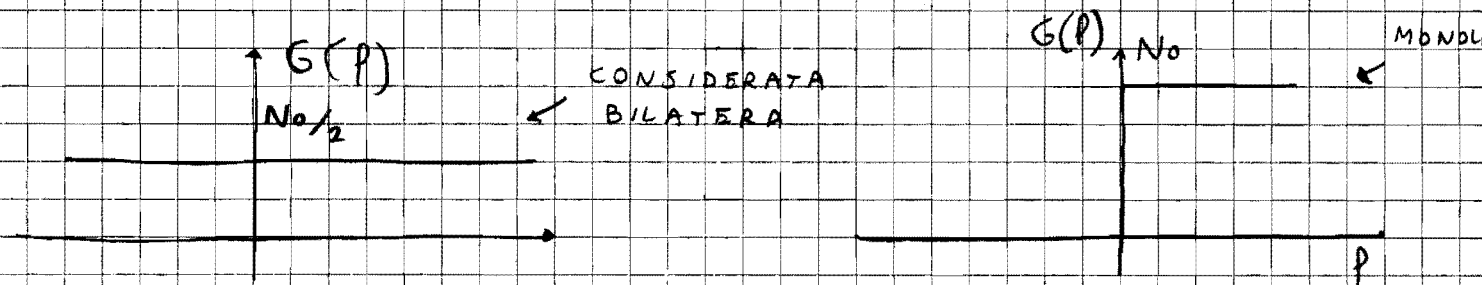
$$2\pi f_c t + \phi(t) - [2\pi f_c t + 2\pi \Delta f t + \phi_v(t) + \pi/2] + \pi/2 =$$

$$2\pi f_c t + \phi(t) - 2\pi f_c t - 2\pi \Delta f t - \phi_v(t) - \pi/2 + \pi/2 =$$

$$\phi(t) - 2\pi \Delta f t - \phi_v(t) = 2\pi \Delta f t + \phi(t) - \phi_v(t)$$



Consideriamo per esempio un resistore a temperatura  $T^{\circ}K$ , a causa del moto di agitazione termica degli elettroni, ai capi del resistore si svilupperà una tensione  $v(t)$  chiamata tensione di rumore. Questa può essere vista come la realizzazione di un processo Gaussiano a media nulla e con densità spettrale di potenza distribuita in maniera uniforme per tutte le frequenze. Questo è definito RUMORE BIANCO in analogia con la LUCE BIANCA.



Per questo, possiamo definire la funzione di autocorrelazione  $R(\tau)$

$$R(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

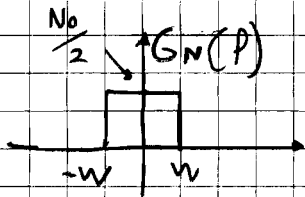
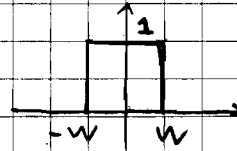
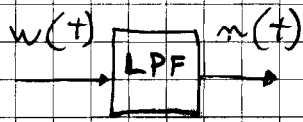
Questa deriva dalla  $\mathcal{F}^{-1}[G(f)] = R(\tau)$

# LOWPASS FILTERED WHITE NOISE

07/06/2009

92

Supponiamo ora che il rumore bianco Gaussiano  $w(t)$  avente media nulla e densità spettrale di potenza bilaterale  $N_0/2$  sia applicato ad un filtro passa-basso ideale di banda  $B$  ed ampiezza 1.



$$G_N(p) = G_w(p) \cdot |H(p)|^2 = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & -W \leq p \leq W \\ 0 & \text{altimenti} \end{cases}$$

Determiniamo ora la funzione di autocorrelazione.

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1} [G_N(p)] = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{N_0}{2} \text{rect} \left( \frac{p}{2W} \right) \right] =$$

$$\frac{N_0}{2} \cdot 2W \text{sinc}(2W\tau) = N_0 W \text{sinc}(2W\tau)$$

I ricevitori utilizzati nei sistemi di comunicazione solitamente includono filtri con forma narrowband. Questi filtri sono larghi abbastanza per consentire il passaggio della componente modulata del segnale ricevuto senza distorsioni, ma sufficientemente stretti in modo da evitare che una eccessiva quantità di rumore possa raggiungere il ricevitore. Il rumore di rumore che si ottiene dopo il transito in detto filtro si chiama NARROWBAND NOISE. Questo tipo di rumore è di fondamentale importanza. Esistono principalmente due possibilità per rappresentare il rumore:

- mediante rappresentazione IN-PHASE e IN-QUADRATURA
- mediante rappresentazione envelope e phase

Le componenti  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  hanno alcune importanti proprietà:

- media zero
- se  $n(t)$  è Gaussiano  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  sono congiuntamente gaussiane
- Se  $n(t)$  è stazionario  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  sono congiuntamente stazionarie
- $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  hanno lo stesso densità spettrale di potenza del rumore narrowband  $n(t)$  e cioè

$$S_{n_I}(f) = S_{n_Q}(f) = \begin{cases} S_N(f - f_c) + S_N(f + f_c) & -B \leq f \leq B \\ 0 & \text{altimenti} \end{cases}$$

Dove si è assunto che  $S_N(f)$  occupi l'intervallo di frequenza

$$f_c - B \leq |f| \leq f_c + B, \quad f_c > B$$

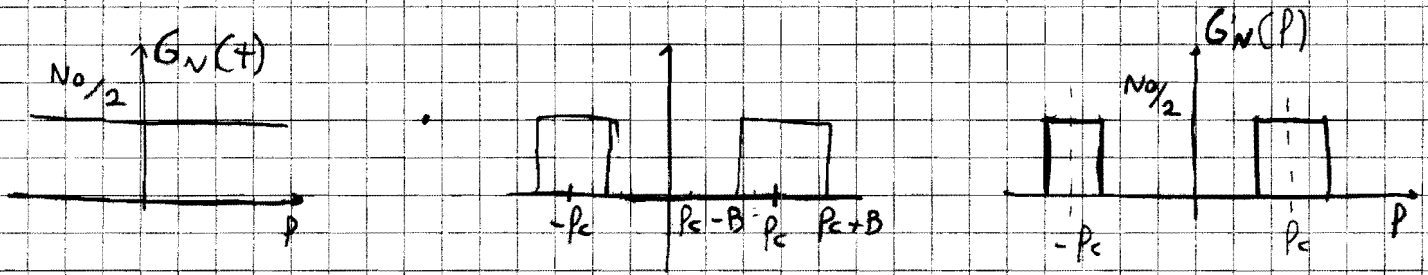
- le componenti  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  hanno la stessa varianza del rumore passabanda  $n(t)$



07/06/2009

94

Consideriamo un rumore narrowband



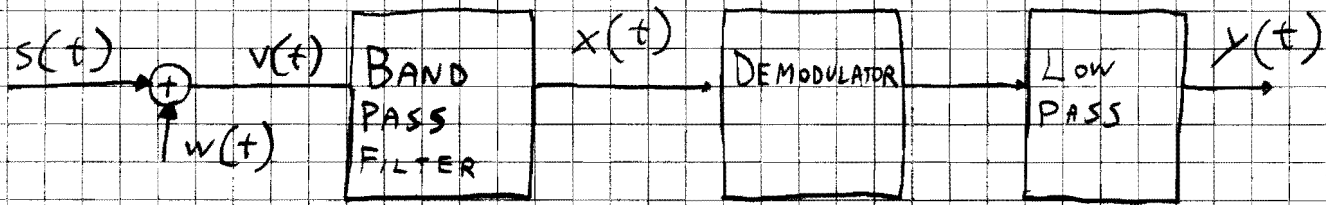
Il filtro ha banda  $2B$  in uscita avendo un processo di rumore gaussiano NARROWBAND, per rappresentarlo mediante componenti in fase e in quadratura, applichiamo quanto già visto per la rappresentazione dei segnali così otteniamo:

$$w(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Dove  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  sono chiamate componenti in quadratura.

Entrambi  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  sono segnali a larghezza di banda  $B$ .

Questo si può vedere come la sovrapposizione lineare di due termini: un processo di rumore che modulo  $\cos(2\pi f_c t)$  e un processo di rumore che modulo  $\sin(2\pi f_c t)$ .



- Consideriamo ora il rapporto segnale rumore. Lo scopo è quello di mettere in relazione la potenza del segnale utile con quella del rumore. Consideriamo pertanto la trasmissione senza distorsioni ma soggetta ad un rumore AWGN (additivo bianco gaussiano).
- Il segnale  $s(t)$  è il generico segnale modulato secondo una generica modulazione.
- Il rumore  $w(t)$  è AWGN

Questi due operano additivamente al filtro passabanda. Dunque:

$$v(t) = s(t) + w(t)$$

- Nel seguito per calcolare i rapporti di potenza si utilizzerà la potenza media  $P_x$  (indicando con  $x$  il generico segnale) è importante indicare che questa è ricavata a partire dalla densità spettrale di potenza  $G_x(f)$  secondo la relazione.

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) df$$

Importante notare che anche il segnale  $m(t)$  andrà trattato in senso statistico. Con  $m(t)$  intendiamo il generico messaggio che contiene l'informazione per intendere il segnale modulante. Questo va considerato parsimamente da un processo stocastico ergodico di banda  $W$ .

Dunque scriviamo che:

$$P_m = \int_{-W}^{+W} G_m(f) df$$

07/06/2009

96

• Altro accorgimento è quello della misura delle bande dei filtri.

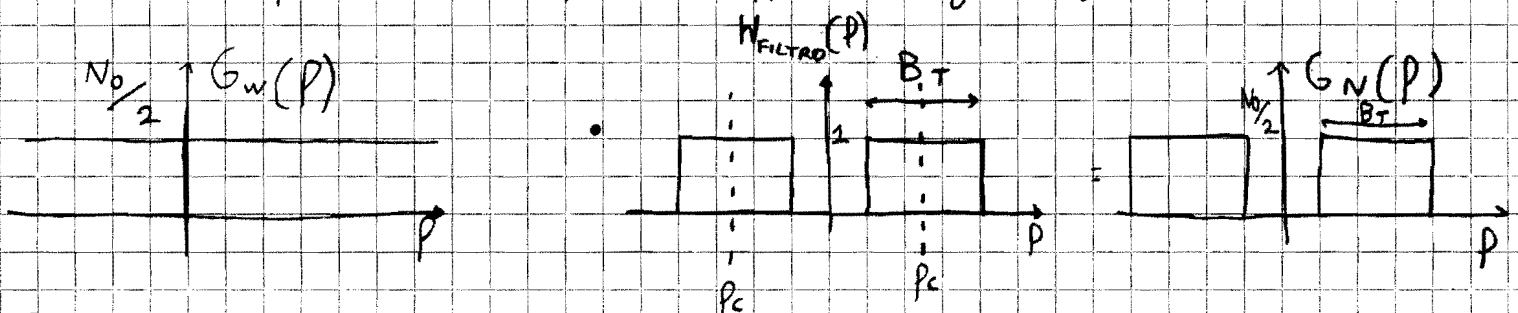
Questo è molto importante in quanto sono i filtri in particolare il filtro BAND PASS a modellare il rumore. Da questo modellamento ne deriva poi l'espressione della  $G_N(P)$  e della  $P_N$ .

In particolare il filtro front-end passa banda - Ha banda  $B_T$ .

Questo  $B_T$  dovrebbe avere un valore riferito alla particolare modulazione che richiede una particolare banda, in modo tale da lasciare passare inalterato il segnale modulato. Quindi per esempio per la modulazione DSB-SC che richiede banda  $2W$  (suppongo  $W$  la banda di  $m(t)$ )

$B_T$  dovrebbe essere almeno largo  $2W$ . Questo valore però è da tenerne in considerazione in quanto se  $B_T < 2W$  questa comporta una perdita del segnale se  $B_T > 2W$  accade che il rumore che transitava sarà maggiore rispetto a quello che transiterebbe avendo appunto scelto  $2W$ .

Dunque nelle formule e nei conti sarà sempre indicato  $B_T$  come banda del filtro band pass e supposto a guadagno unitario cioè



$G_N(P)$  è la densità spettrale di potenza del rumore filtrato.

$$P_N = \int_{-\infty}^{+\infty} G_N(P) = 2 \cdot B_T \cdot \frac{N_0}{2} = N_0 B_T$$

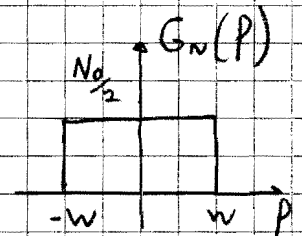
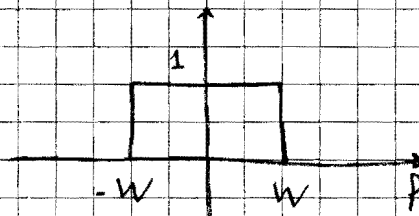
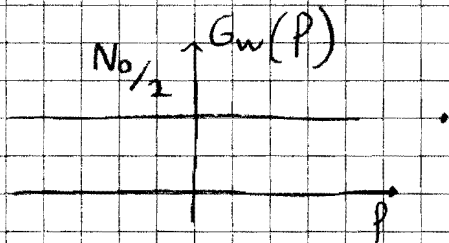


Definiamo rapporto segnale rumore ricevuto la quantità

$$\left( \frac{S}{N} \right)_R = \frac{S_R}{N_R} = \frac{S_R}{N_0 B_T}$$

Ciò è il rapporto tra la potenza media del segnale e la potenza media del rumore dopo il filtro passa banda.

Definiamo anche  $\gamma$  (gamma) come il rapporto segnale rumore in banda base cioè: supposto il segnale di banda  $W$  il rumore è calcolato ora in banda base sulla banda del segnale. Il segnale avrà sempre potenza media  $S_R$  il rumore



$$P_N = \int_{-W}^W G_v(P) = N_0 W$$

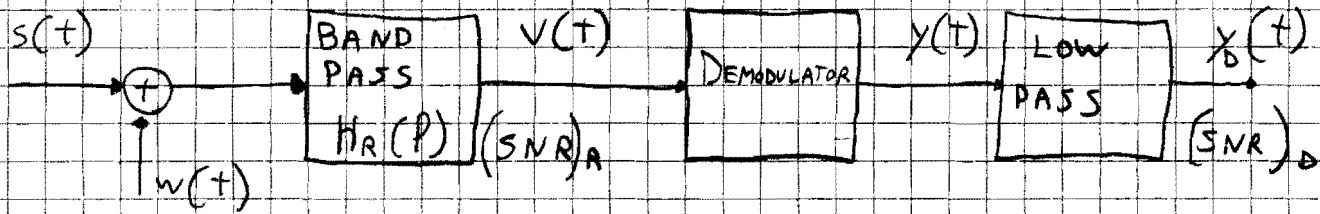
Dunque 
$$\gamma = \frac{S_R}{N_0 W}$$

Utilizzando le informazioni sopra e i risultati ricati per il rumore e le varie rappresentazioni, vediamo ora di valutare il rapporto segnale rumore per i vari tipi di modulazione.

# LINEAR COMMUNICATIONS WITH NOISE

07/06/2009

98



Abbiamo visto precedentemente che

$$P_S = S_R \quad \text{e} \quad G_W(P) = \frac{N_0}{2}$$

I due segnali vengono addizionati all'ingresso del filtro passabanda di banda  $B_T$ . Sfruttando le proprietà di linearità di tale sistema, possiamo definire l'uscita come:

$$v(t) = s(t) * h_R(t) + w(t) * n(t)$$

Per quanto visto precedentemente in merito alla larghezza di banda, si suppone che  $B_T$  sia sufficientemente larga da consentire il transito del segnale  $s(t)$  senza perdite dunque  $s(t)$  transita invariato. Il rumore invece sarà filtrato passabanda e lo indichiamo con  $n(t)$  secondo le notazioni precedenti dunque

$$P_S = S_R \quad P_N = N_0 B_T \quad \left(\frac{S}{N}\right)_R = (SNR)_R = \frac{S_R}{N_0 B_T} = \frac{W}{B_T} \mathcal{G}$$

Questo vale per i vari tipi di modulazione analogica, dimensionando opportunamente i valori dei parametri. Vogliamo ora analizzare l'uscita  $y_D$  ed il rapporto  $(SNR)_D$  a seconda dei vari tipi di modulazione.

Iniziamo valutando la tipologia DSB-SC. Con tipologia di modulazione il segnale  $s(t)$  assume la forma:

$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

Il segnale  $n(t)$  è rappresentabile mediante le componenti  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  dunque:

$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Come visto precedentemente.

$$v(t) = s(t) + n(t)$$

Cioè:

$$\begin{aligned} v(t) &= A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) + n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \\ &= [A_c m(t) + n_I(t)] \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

Questo è quindi il segnale che entra nel blocco di demodulazione.

Nel caso DSB-SC, questa moltiplica il segnale  $v(t)$  per  $\cos(2\pi f_c t)$

Dunque:  $(d) = 2\pi f_c t$

$$\left\{ [A_c m(t) + n_I(t)] \cos(d) \right\} \cos(d) - n_Q \sin(d) \cos(d)$$

Applicando le formule di Weierstrass.

$$\left\{ [A_c m(t) + n_I(t)] \cdot \frac{1}{2} [\cos(d-d) + \cos(d+d)] \right\} - n_Q \left[ \frac{1}{2} [\sin(2d) + \sin(d-d)] \right]$$

$$\left\{ [A_c m(t) + n_I(t)] \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi \underline{2} f_c t) \right] \right\} - n_Q \cdot \left[ \frac{1}{2} \sin(2\pi \underline{2} f_c t) \right]$$



07/06/2009

100

Il filtro LOW PASS presente nel demodulatore DSB-SC si occupa di eliminare le componenti ad alta frequenza  $2f_c$ ; le segnali in uscita dal demodulatore sono dunque

$$y(t) = A_c m(t) + n_I(t)$$

Questo risultato afferma che:

- 1) la componente del messaggio  $m(t)$  e quella del rumore filtrato  $n_I(t)$  appaiono addittive all'output del demodulatore
- 2) la componente in quadratura è completamente rifiutata dal demodulatore DSB-SC

Se ora consideriamo il caso di compiere la scelta dei filtri ideali cioè:

filtro bandpass di banda  $B_T = 2W$  centrato in  $f_c$  e filtro

lowpass di banda  $W$  possiamo supporre che non abbiamo bisogno di alcun filtro dopo il demodulatore in quanto questo include già

un filtro di banda  $W$  passabasso. Il fatto di aggiungere un ulteriore filtro dopo il demodulatore, potrebbe servire per ridurre il rumore se il filtro nel demodulatore avesse avuto banda maggiore di  $W$ .

07/06/2009

101

Calcoliamo ora il rapporto segnale rumore in uscita del blocco di modulazione e vediamo che:

$$y_D = A_c m(t) + n_z(t)$$

Componente del segnale  $A_c m(t)$

Componente del rumore  $n_z(t)$

Avendo supposto  $s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$  e detto che la potenza media era  $S_R$  vediamo che  $S_D$  cioè la potenza media nel segnale  $y_D$  relativo alla componente utile del segnale è  $2S_R$ .

Per quanto detto circa il rumore sappiamo che  $N_z(t)$  ha  $P_N = N_0 B_T$ .  
Possiamo dunque scrivere

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = (SNR)_D = \frac{2S_R}{N_0 B_T} = 2 \left(\frac{S}{N}\right)_R$$

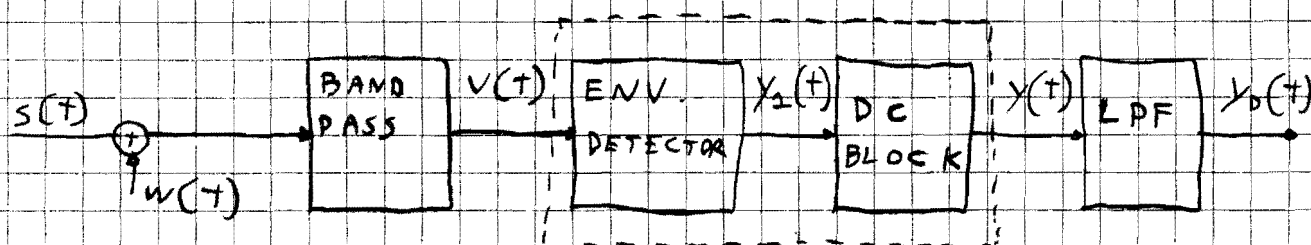
Dato che  $2W = B_T$

$$(SNR)_D = \frac{2W}{B_T} \gamma = \gamma$$

Nel caso di modulazione DSB-SC osserviamo che questa è la stessa caratteristica e performance della trasmissione in banda base.



Applicheremo ora il solito procedimento nel caso di segnale AM modulato mediante ENVELOPE DETECTOR



Il blocco tra tratteggi rappresenta il ricevitore.

$$s(t) = A_c [1 + \mu m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

Assumiamo  $\mu = 1$

$w(t)$  è il solito  $\bar{n}$  rumore AWGN (vedo caso DSB-SC per spiegazioni e calcoli)

$$v(t) = s(t) + n(t)$$

Supponendo, come nel caso DSB-SC la banda del filtro passabanda adeguata  $B_T$ , possiamo scrivere  $v(t)$  come:

$$v(t) = A_c [1 + \mu m(t)] \cos(2\pi f_c t) + n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$v(t) = \{A_c [1 + \mu m(t)] + n_I(t)\} \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Supponendo ora  $[A_c + A_c m(t)] \gg n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  ( $\mu = 1$ )

$$\text{Scriviamo } v(t) = \{A_c [1 + \mu m(t)] + n_I(t)\} \cos(2\pi f_c t)$$

$$y_1(t) = A_c + A_c m(t) + n_I(t)$$

Il DC-BLOCK blocca le componenti continue, lo non usate sarà dunque:

$$y(t) = A_c m(t) + n_I(t)$$

La componente del segnale è  $A_c m(t)$

La componente del rumore è  $n_I(t)$

Definita  $P_M$  la potenza medio di  $m(t)$

la potenza media della componente utile del messaggio contenuta in  $y_D(t)$  sarà:  $A_c^2 P_M$ . La potenza media della componente del rumore contenuta in  $y_D(t)$  sarà  $P_N$ .

La potenza media del segnale ricevuto  $s(t)$  è:

$$P_S = A_c^2 \left[ 1 + P_M \right] \frac{1}{2} = \frac{A_c^2 + A_c^2 P_M}{2}$$

La potenza media della componente del rumore all'ingresso è

$$P_N = N_0 B_T$$

$$\text{Dunque: } \left( \frac{S}{N} \right)_R = \frac{A_c^2 + A_c^2 P_M}{2 N_0 B_T}$$

Per quanto detto precedentemente:

$$\left( \frac{S}{N} \right)_D = \frac{A_c^2 P_M}{N_0 B_T} = \frac{2 P_M}{(1 + P_M)} \left( \frac{S}{N} \right)_R = \frac{P_M}{(1 + P_M)} \quad \gamma$$

La generata segnale SSB ha forma:

$$s(t) = \frac{A_c}{2} \left[ m(t) \cos(2\pi f_c t) \pm \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t) \right]$$

Per quanto visto precedentemente, l'occupazione di banda utilizzata da questo tipo di modulazione è  $W$ .

Supponendo di fare la scelta ottima nella scelta del filtro passabanda e passabasso, scegliamo  $B_T = W$

$$P_S = \frac{A_c^2}{4} \left[ P_M \cdot \frac{1}{2} + P_M \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{A_c^2 P_M}{4}$$

Come nel caso precedente, si ottiene il filtro passabanda che consente al segnale  $s(t)$  di passare intatto. Il filtro modella il segnale di rumore  $w(t)$  generando il rumore passabanda  $n(t)$  di valore:

$$P_N = \frac{N_0}{2} \cdot 2 B_T = N_0 B_T$$

Come nel caso DSB-SC avendo seguito il passaggio, si ottiene che

$$y(t) = y_D(t) = \frac{1}{2} A_c x(t) + n_z(t).$$

Il fatto di avere  $y(t) = y_D(t)$  dipende dal fatto che come nel caso DSB-SC possono non considerare il filtro passabasso in more al demodulatore in quanto  $B_T$  è scelta ottima cioè  $W$ .

$$(SNR)_R = \frac{A_c^2 P_M}{4 N_0 B_T} = (SNR)_D = \gamma$$

Possiamo affermare che la SSB ha prestazioni  $(SNR)$  analoghe a quelle della modulazione DSB.



Il rumore  $w(t)$  è senza modellata mediante rumore bianco Gaussiano a media nulla e con densità spettrale di potenza  $N_0/2$ .

Il segnale FM  $s(t)$  ha frequenza portante  $f_c$  e larghezza di banda  $B_T$ , in questo modo solo una piccola q.tà di potenza cade al di fuori della banda di taglio  $f_c \pm B_T/2$ .

Si considera che il filtro passabanda della frequenza centrale  $f_c$  e banda  $B_T$  è perfetto consentendo al segnale FM <sup>il transito</sup> senza interferenze e distorsioni. Siccome si considera  $B_T \ll f_c$  utilizziamo l'aggettivo NARROW BAND per rappresentare il rumore.

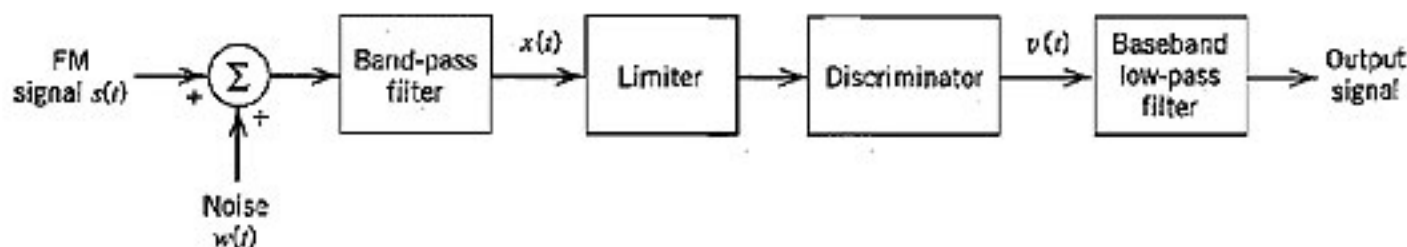
Siccome nella modulazione FM varia la frequenza istantanea della portante, qualunque variazione dell'ampiezza della portante è dovuta a disturbi o interferenze.

Nel seguito il limitatore, si occupa di eliminare le variazioni dell'ampiezza del segnale ricevuto mantenendo l'output sempre a livello zero. L'onda quadrata ottenuta viene passata poi in un filtro passa banda

che restituisce nuovamente un segnale sinusoidale (per dettagli vedere il capitolo relativo ai limitatori)

~~limitato, questo fa eliminare le armoniche della portante.~~

Nel seguito viene utilizzata un discriminatore che è costituito da uno slope detector che produce un segnale che varia in ampiezza che in frequenza in accordo con  $m(t)$ . Questo viene ora processato con un envelope detector.



Il numero  $n(t)$  definita in uscita dal filtro passabanda è

$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_a(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Andiamo ora ad esprimere  $n(t)$  mediante envelope and phase

$$n(t) = r(t) \cos \left[ (2\pi f_c t) + \psi(t) \right]$$

$$r(t) = \left[ n_I^2(t) + n_a^2(t) \right]^{1/2}$$

e la fase come

$$\psi(t) = \tan^{-1} \left[ \frac{n_a(t)}{n_I(t)} \right]$$

Il segnale FM in ingresso è

$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$

$A_c$  è l'ampiezza della portante

$f_c$  è la frequenza della portante

$k_f$  è la sensibilità

$m(t)$  il messaggio

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \quad (A)$$

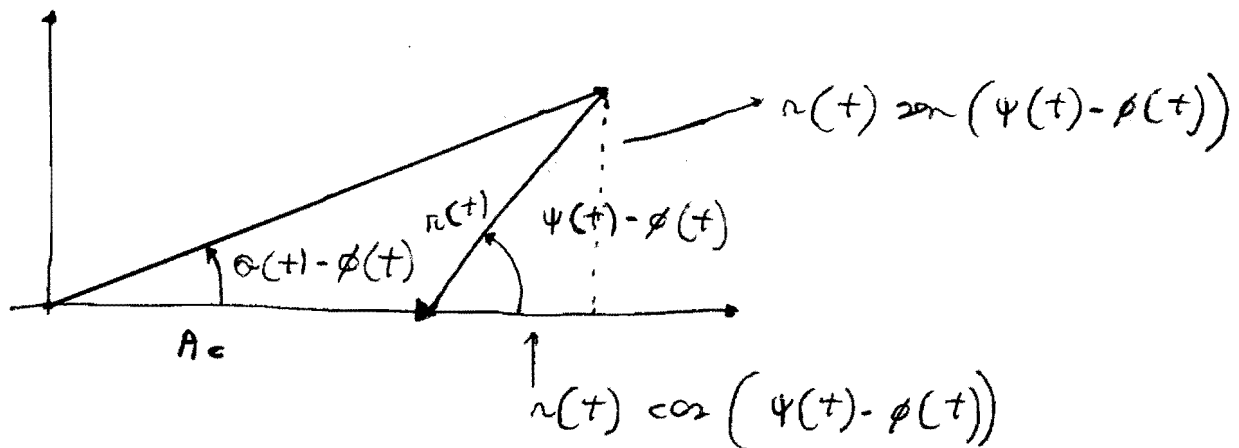
$$s(t) = A_c \cos (2\pi f_c t + \phi(t))$$

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (1)$$

$$= A_c \cos (2\pi f_c t + \phi(t)) + r(t) \cos [(2\pi f_c t) + \psi(t)]$$



Il risultato precedente è ottenuto considerando il seguente grafico dove vengono rappresentati  $s(t)$ ,  $r(t)$ ,  $x(t)$ .



$$\theta(t) = \phi(t) + \arctan \left[ \frac{r(t) \sin(\psi(t) - \phi(t))}{A_c + r(t) \cos(\psi(t) - \phi(t))} \right]$$

Il primo termine è fornito dalla fase del messaggio, il secondo termine il numero contornante include sia segnali che rumore come termini in cui è rappresentato.

L'involucro di  $x(t)$  non è di nostra interesse, in quanto ogni variazione dovuta al rumore, verrà successivamente rimossa dal demodulatore.

L'obiettivo è quello di determinare gli errori nella frequenza istantanea, dovuti alla presenza del rumore. Per determinare la frequenza istantanea occorre calcolare

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta(t)$$

L'espressione ottenuta per  $\theta(t)$  è notevolmente complessa, occorre semplificarla per poter proseguire nella valutazione.

07/06/2009

108

- Assumiamo dunque che il rapporto segnale rumore all'ingresso del demodulatore  $(SNR)_i \gg 1$ .
- Supponiamo anche che la funzione  $n(t)$  dovuta al rumore  $n(t)$  sia piccola confrontata con  $A_c$  - Fare attenzione che  $n(t)$  è una variabile estratta dal processo stocastico.
- Utilizziamo l'approssimazione delle "tangente per l'argomento piccolo".

Assumiamo dunque  $n$  piccola

$$\Theta(t) = \phi(t) + \frac{n(t)}{A_c} \sin[\psi(t) - \phi(t)]$$

L'uscita  $v(t)$  del blocco LIMITATORE + DISCRIMINATORE sarà

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Theta(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ \frac{d}{dt} \phi(t) \right] + \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{n(t)}{A_c} \sin[\psi(t) - \phi(t)] \right) \right] \right\}$$

Se andiamo a riprendere la sostituzione seguita precedentemente (A)

Facciamo notare che:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ 2\pi K \boxed{\phantom{m}} m(t) \right] + \left[ \frac{1}{A_c} \frac{d}{dt} n(t) \sin[\psi(t) - \phi(t)] \right] \right\}$$

$$v(t) = \left\{ K \boxed{\phantom{m}} m(t) + \frac{1}{2\pi A_c} \frac{d}{dt} \left( n(t) \sin[\psi(t) - \phi(t)] \right) \right\}$$

Osservando <sup>07/08/2009</sup> è possibile procedere con ulteriori semplificazioni <sup>109</sup> del portante, alla scrittura

$$\boxed{v(t)} = \left\{ K_p \boxed{m(t)} + \frac{1}{2\pi A_c} \frac{d}{dt} \left[ n(t) \sin[\psi(t)] \right] \right\} \quad (2)$$

In base alla sostituzione precedentemente seguita per  $n(t)$  e  $\psi(t)$ , possiamo scrivere che

$$n_q(t) = n(t) \sin[\psi(t)]$$

$$v(t) = \left\{ K_p m(t) + \frac{1}{2\pi A_c} \frac{d}{dt} [n_q(t)] \right\} \quad (3)$$

Questo significa che la componente additiva del rumore che è presente all'uscita del discriminatore, è determinata dal fattore  $A_c$  della portante e dalla componente  $n_q(t)$  del rumore NARROWBAND.

Dalla (2) vediamo che  $v(t)$  è composta da una componente che contiene il messaggio  $K \boxed{m(t)}$ , la cui potenza è  $K^2 P_m$  (si consideri come in precedenza  $P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f) df$ ).

Occupiamoci di valutare la potenza media del rumore in uscita, osserviamo che  $\boxed{\quad}$  è proporzionale alla derivata rispetto al tempo della componente in quadratura del rumore  $n_q(t)$ .

In frequenza, questo significa che, la parte tratteggiata della (3), può essere rappresentata come:

$$\frac{1}{2\pi A_c} \cdot j 2\pi f N_a(f)$$

$$= \frac{j f}{A_c} N_a(f)$$

(Pag. 73 Vannucci teoremi della derivazione)

Il risultato ottenuto è di nostro aiuto in quanto ci consente di determinare agevolmente una sezione per la densità di spettro di potenza per il processo stocastico che chiamiamo

$$N_D(t) = \frac{1}{2\pi A_c} \frac{d}{dt} [n_q(t)]$$

$$\boxed{N_q(P)} \rightarrow \boxed{2\pi P} \rightarrow N_D(P) = \boxed{N_q(P)} \rightarrow \boxed{P/A_c} \rightarrow N_D(P)$$

Come si calcola P<sub>ND</sub>(P)?

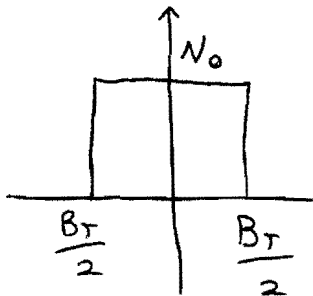
(Ricordiamo che con  $P_{ND}(P)$  intendiamo la densità spettrale di potenza)

PAG 155 VANNUCCI

$$P_{ND}(P) = P_{Na}(P) |H(P)|^2 = P_{Na}(P) \cdot \frac{P^2}{A_c^2}$$

Da quanto precedentemente visto la  $P_{Na}(P)$  corrisponde a:

Ricordiamo che il segnale FM ricevuto ha banda  $B_T$ , dunque il filtro passabanda presente in testa al blocco di modulazione ha banda  $B_T$ .



$$P_{Na}(P) = N_0$$

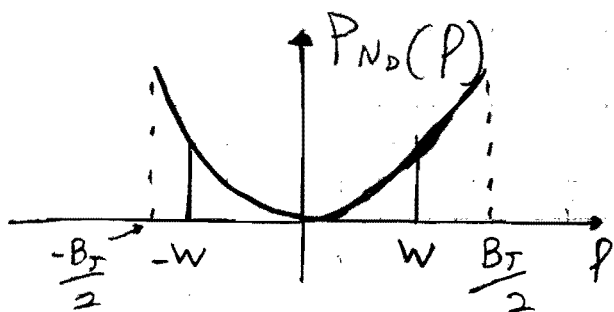
Posiamo allora scrivere

$$P_{ND}(P) = \begin{cases} \frac{N_0 P^2}{A_c^2} & |P| \leq \frac{B_T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quanto è quello che occorre all'uscita del discriminatore.

Occorre ora valutare che il demodulatore è seguito da un filtro passabanda. Solitamente questo ha banda  $W$ , uguale a quella del messaggio originale  $m(t)$ , che risulta minore di  $B_T$ .

07/06/2009  
 Questo significa che il rumore viene ulteriormente filtrato<sup>111</sup>  
 e le componenti di  $n_D(t)$  con frequenza  $> W$  sono scartate  
 il risultato sarà dunque:



$$\boxed{P} N_D(P) = \begin{cases} \frac{P^2 N_0}{A_c^2} & |P| \leq W \\ \emptyset & \text{altimenti} \end{cases}$$

Andiamo ora a calcolare la potenza media del rumore in uscita  $P_{ND} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ND}(P) dP$

$$P_{ND} = \int_{-W}^W \frac{P^2 N_0}{A_c^2} dP = \frac{N_0}{A_c^2} \left[ \frac{P^3}{3} \right]_{-W}^W =$$

$$\frac{N_0}{A_c^2} \left[ \frac{W^3 + W^3}{3} \right] = \frac{2W^3 N_0}{3A_c^2}$$

Notiamo che  $P_{ND}$  è inversamente proporzionale alla potenza della portante  $\frac{A_c^2}{2}$ . In accordo con la tecnica FM si vede come incrementando la potenza della portante si ha l'effetto della riduzione del rumore.



Il filtro passabanda ideale presente all'ingresso del demodulatore, ha banda  $B_T$ .  
 questa banda sarà maggiore della banda  $2W$ . Dato  $W$  è la banda del segnale modulante. Per questo in uscita al demodulatore poniamo un filtro passabanda di banda  $W$ , adatto a conservare il formato del rumore il più possibile; maggiormente rispetto al fatto di utilizzare un filtro con lunghezza di banda  $\frac{B_T}{2}$ .

Analizzando il segnale  $x(t) = s(t) + n(t)$  vediamo che

$$P_S = \frac{A_c^2}{2} \quad P_N = N_0 B_T$$

$$(SNR)_R = \frac{A_c^2}{2 N_0 B_T} = \frac{S_R}{N_0 B_T}$$

Possiamo già calcolare l'indice  $\gamma = \frac{A_c^2}{2 N_0 B_T} \cdot \frac{B_T}{W} = \frac{S_R}{N_0 W}$

Analizzando l'uscita:

La potenza della componente del segnale è:  $P_0^2 P_M$

La potenza della componente del rumore:  $\frac{W^3 N_0}{3 P_S}$

$$SNR_D = \frac{3 P_0^2 P_M P_S}{W^3 N_0} = \frac{3 P_0^2}{W^2} \cdot P_M \cdot \frac{P_S}{N_0 W} = \frac{3 P_0^2}{W^2} \cdot P_M \cdot \gamma$$

I risultati che si ottengono per la modulazione PM sono simili a quelli ottenuti dalla modulazione FM.

La potenza del segnale in ingresso  $s(t)$  che nel caso PM, si può scrivere come:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi_a m(t)]$$

$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

I due segnali vengono addizionati al demodulatore; ed un ingegnere rielabora il segnale.

$$v(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_v(t))$$

$$\text{Dove } \phi_v(t) = \phi(t) + \frac{1}{A_c} n(t) \sin(\psi(t))$$

I risultati sono quelli descritti per la modulazione FM con rumore.

Sappiamo che il demodulatore PM restituisce appunto  $\phi_v(t)$

cioè:

$$y(t) = \phi_a m(t) + \frac{1}{A_c} n_Q(t)$$

Dunque come per il caso precedente abbiamo che:

$$P_S = \frac{A_c^2}{2}$$

$$P_N = N_0 B_T$$

$$(SNR)_R = \frac{A_c^2}{2 N_0 B_T}$$

$$\gamma = \frac{A_c^2}{2 N_0 B_T} \cdot \frac{B_T}{W} = \frac{A_c^2}{2 N_0 W} = \frac{P_S}{N_0 W}$$

Valutiamo ora i parametri richiesti all'utente.

$$y(t) = \phi a m(t) + \frac{1}{A_c} n_a(t)$$

Potenza medio compoante utile del messaggio :  $\phi a^2 P_m$

Potenza medio compoante rumore:  $\frac{2 N_0 W}{A_c^2} = \frac{N_0 W}{S_R}$

$$(SNR)_D = \left( \frac{S}{N} \right)_D = \frac{\phi a^2 P_m P_s}{N_0 W} = \phi a^2 P_m \gamma$$

Il decibel (simbolo dB) è un decimo di Bel (simbolo B)

$$10 \text{ dB} = 1 \text{ B}$$

Queste unità di misura sono di tipo Logaritmico, e le corrispondenti misure, sono meno precise, vengono ottenute come rapporto tra due grandezze omogenee (cioè esprimibili nella stessa unità di misura e tali che il loro rapporto sia adimensionale)

$$\text{RAPPORTO IN DECIBEL} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{N_1}{N_2} \right)$$

Ricordiamo che

$$x = a^y \Rightarrow y = \log_a x$$

Esempio:

Supponiamo che il rapporto segnale/rumore sia 20 dB, Vogliamo trovare il rapporto segnale/rumore, espresso in scala lineare. Dunque:

$$20 = 10 \cdot \log_{10} (SNR)$$

$$\frac{20}{10} = \log_{10} (SNR)$$

$$2 = \log_{10} (SNR)$$

$$(SNR) = 10^2$$

$$(SNR) = 100$$



Un messaggio non è altro che una sequenza ordinata di simboli prodotta da una sorgente di informazione discreta.

La sorgente lavora sempre con un alfabeto composto da  $M$  simboli.  $M$  è un numero  $\geq 2$ . Altro fattore da tenere in considerazione è la velocità con cui i simboli vengono inviati / ricevuti. Tale numero è spesso con  $n$  e rappresenta il numero di simboli inviati o ricevuti al secondo.

### Segnale PAM (Amplitude Modulated Pulse Train)

La rappresentazione dei messaggi digitali in banda base, comunemente ha la forma di PAM (Amplitude Pulse Train) - il segnale viene solitamente espresso come

$$x_c(t) = \sum_K a_K p(t - KD)$$

Dove l'ampiezza della modulazione  $a_K$  rappresenta il  $K$ -esimo simbolo all'interno della sequenza del messaggio. In questo modo, si conclude che l'ampiezza appartiene ad un insieme di  $M$  valori discreti.

L'indice  $K$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

L'impulso non modulato  $p(t)$  generalmente rettangolare, ma può assumere anche altre forme, viene descritto come segue:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t = \pm D, \pm 2D, \pm 3D, \dots \end{cases}$$

Questa condizione ci assicura che siamo in grado di ricostruire il segnale seguendo componenti periodici a vari istanti di tempo.

$$t = KD \quad K = 1, 2, 3, \dots$$



$$x(KD) = \sum_K a_K p(KD - KD) = a_K$$

L'impulso rettangolare  $p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$  (vedere il teorema del campionamento di 2.4.2) soddisfa l'eq. e  $T \leq D$  come ogni impulso limitato in tempo per cui risulta  $p(t) = 0$  per  $|t| \geq D/2$ .

Nota che  $D$  non è la durata dell'impulso ma piuttosto l'intervallo tra due impulsi o il tempo assegnato ad un simbolo.

$$r \triangleq \frac{1}{D} \left[ \frac{\text{simboli}}{\text{secondo}} \right] = [\text{BAUD}]$$

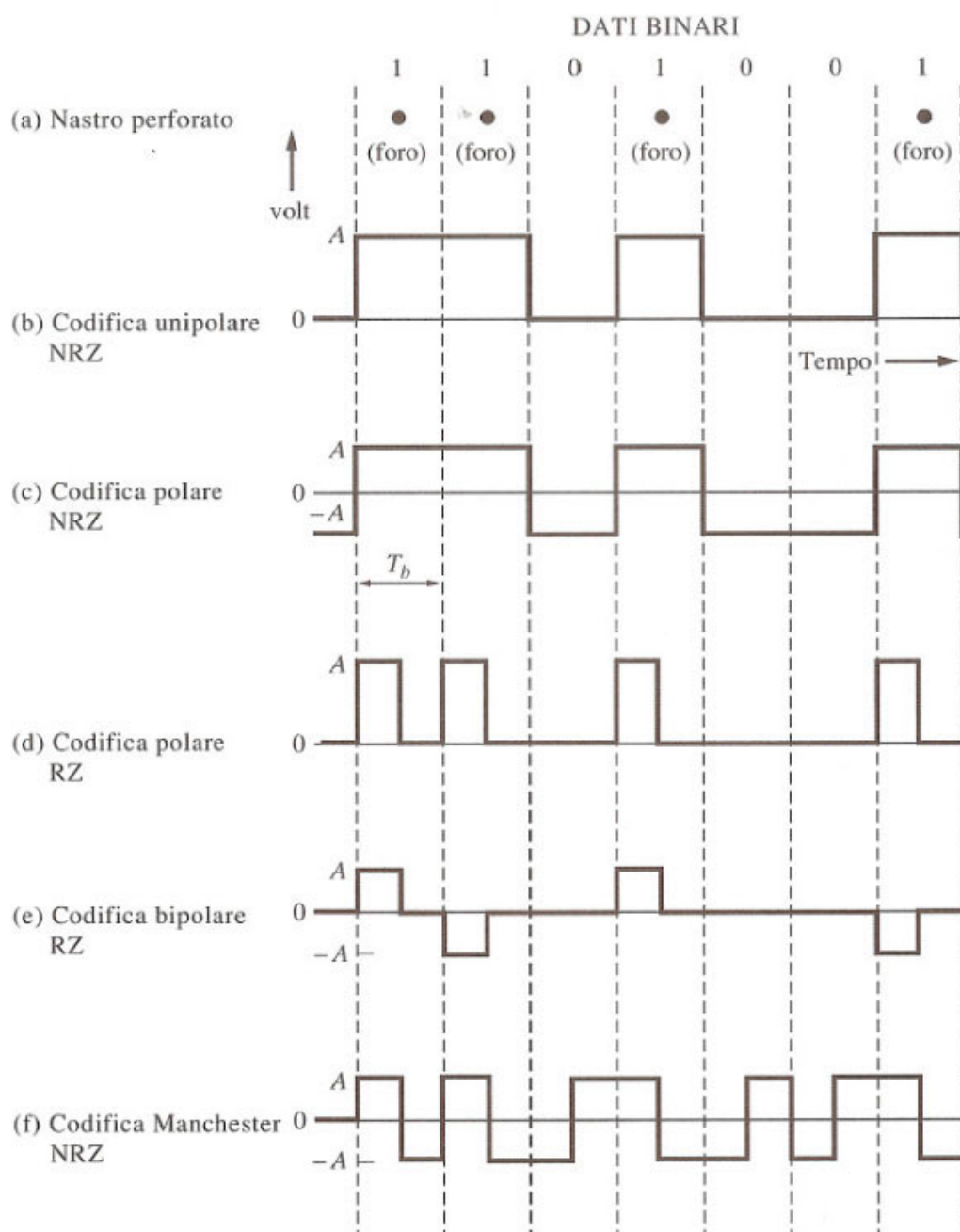
Nel caso particolare di un segnale binario ( $M=2$ ) e  $D=T_b$  e il bit rate sarà  $r_b = \frac{1}{T_b}$  quato è il  $\left[ \frac{\text{bit}}{\text{secondo}} \right]$ .

Si utilizzano  $T_b$  e  $r_b$  per distinguere il caso di segnale binario.



binario

I livelli logici 0 e 1 del segnale PAM (Pulse Amplitude Modulation) possono essere rappresentati in diverse forme di segnalazione analogica (pulselli viaggiatori in serie uno in seguito all'altro).  
Questi formati di segnalazione, sono anche detti, codici di linea.  
compreso il modo di rappresentare lo 0 e 1 logico su nostro formato)  
sono rappresentate in Figura:



## SEGNALAZIONE UNIPOLARE

Il simbolo "1 logico" è rappresentato dal livello alto  $+A$  mentre, lo "0 logico" è rappresentato dal livello  $\varnothing$ . Questo formato è anche detto ON-OFF KEYING o segnalazione o tutto o niente -

## SEGNALAZIONE POLARE

I simboli 1 e 0 sono rappresentati da due livelli simmetrici positivo e negativo  $+A$  e  $-A$  segnalazione antipodale.

## SEGNALAZIONE BIPOLARE O PSEUDO-TERNARIA

-A

Il simbolo 0 è rappresentato da un livello  $\varnothing$ , mentre il simbolo 1 è rappresentato da un livello che alterna di volta in volta tra  $+A$  e  $-A$ .  
Per questo motivo, viene chiamato pseudo-ternario o anche AMI (Alternate Mark Inversion)

## SEGNALAZIONE MANCHESTER (dit-phase o b-phase)

Il simbolo 1 è rappresentato dalla successione di due impulsi positivo negativo di durata pari a metà bit, mentre il simbolo 0 è rappresentato dalla successione negativo positivo.

NRZ (non returning zero) la durata dell'impulso è  $T_B$ .

RZ (returning zero) la durata dell'impulso è  $\frac{T_B}{2}$  seguita da un ritorno a zero

Le comunicazioni nei PC, sono solitamente NRZ.

NRZ mette più energia negli impulsi, ma questa richiede sincronizzazione tra trasmettitore e ricevitore.

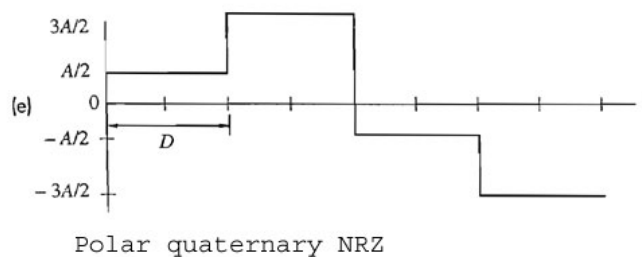
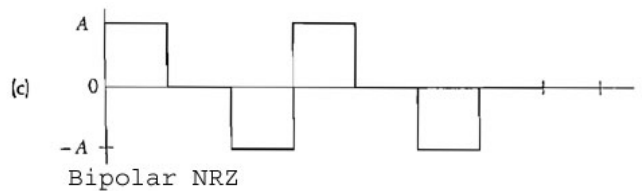
Aggiungiamo a quanto detto, i segnali  $m$ -ary, dove viene ripetuto in figura come esempio il segnale quaternario. Questo è ottenuto raggruppando in gruppi di due bit e codificando questi con 4 livelli logici.

Se consideriamo  $M=4$  ovvero

$$M = 2^n \quad n \text{ è il numero di bit}$$

quattro combinazioni possibili: 00, 01, 10, 11.

In figura, viene anche mostrata la porzione di detto segnale con un segnale PAM NRZ BOLARE, si vede come la portata di informazione trasmessa, la durata del singolo impulso è doppio e il bit rate di conseguenza dimezzato:



Esistono svariate possibilità per assegnare i codici ai livelli. Quelle di interesse degli impulsi. Per esempio

| $a_k$   | NATURAL CODE | GRAY CODE |
|---------|--------------|-----------|
| $3A/2$  | 11           | 10        |
| $A/2$   | 10           | 11        |
| $-A/2$  | 01           | 01        |
| $-3A/2$ | 00           | 00        |

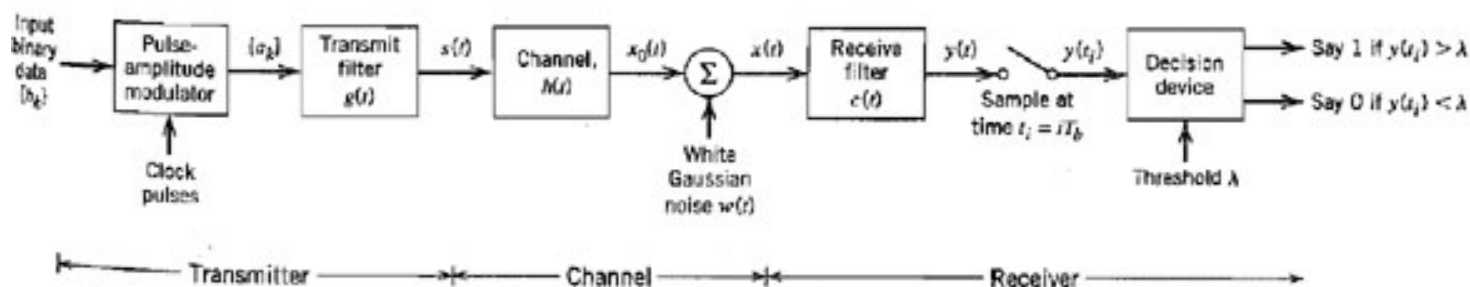
$M$  = numero di livelli ammessi dal segnale dunque  $m$  valori di  $a_k$   $M = 2^n$

$n$  = numero di bit

$$n = \log_2 M$$

$$\text{baud rate} = \frac{2b}{\log_2 M}$$

Consideriamo un sistema binario PAM in banda base, di forma generale, come quello riportato in figura:



Vediamo che la sequenza di ingresso  $b_k$  consiste nei simboli 1 e 0 ciascuno di durata  $T_b$ . Il modulatore PAM modifica questa sequenza binaria in una nuova sequenza la cui ampiezza  $a_k$  è la seguente, rappresentata nella forma polare.

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{se } b_k = 1 \\ -1 & \text{se } b_k = 0 \end{cases}$$

L'operazione di associazione tra i simboli  $b_k$  e  $a_k$  è definita MAPPING

Questa sequenza di pulsazioni è applicata al filtro di trasmissione con risposta impulsiva  $g(t)$  producendo il seguente segnale.

$$s(t) = \sum_k a_k g(t - kT_b)$$

Il segnale così generato  $s(t)$  viene trasmesso sul canale la cui risposta impulsiva è  $h(t)$ . Il canale aggiunge rumore bianco Gaussiano  $w(t)$  e produce  $x(t)$

A questo punto il segnale  $x(t)$  viene passato ad un filtro ricevente con risposta  $c(t)$ .

Il segnale  $y(t)$  è quello che si ottiene in uscita dal filtro di ricezione.



07/06/2009 122  
A questa parte il segnale  $y(t)$  viene campionato in modo sincro  
con il trasmettitore il cui istante di campionamento è determinato da un clock  
o altro dispositivo analogo.

Finalmente la sequenza ottenuta da questa comparatore, è utilizzata  
per ricostruire il segnale originale, mediante l'uso di un dispositivo  
di decisione che opera mediante una soglia  $1$ . Esempio: se il segnale  
eccede  $1$ , viene restituito  $1$ , se non al di sotto, viene  
restituito zero.

Il segnale, in uscita dal filtro si può vedere come.

$$y(t) = \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k p(t - kT_d) + m(t) \quad (A)$$

Dove  $\mu$  è un fattore di scala che può essere proporzionale alla perdita, vista come  
amplificazione con guadagno negativo, operata dal canale. L'impulso  $p(t)$  è  
da definire. Per essere precisi occorre introdurre un ritardo  $T_d$   
nell'argomento  $p(t - kT_d)$  per rappresentare il ritardo con cui, il  
segnale dal trasmettitore, giunge al ricevitore. Per semplificare la  
discussione, poniamo il ritardo a zero.

La scrittura  $\mu p(t)$  può essere rappresentata mediante convoluzione di.

$$\mu p(t) = g(t) * h(t) * c(t)$$

Questa convoluzione nel dominio del tempo, può essere interpretata come

$$\mu P(P) = G(P) H(P) C(P)$$

nel dominio della frequenza

Il segnale  $y(t)$  viene campionato al tempo  $t_i = iT$  dove  $i$  prende valori interi

$$y(t_i) = \mu \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p[(i-k)T] + n(t_i) =$$

$$\mu a_i + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq i}}^{+\infty} a_k p[(i-k)T] + n(t_i)$$

In questa equazione, il primo termine rappresenta il contributo del  $i$ -esimo bit trasmesso, il secondo rappresenta l'effetto residuo di tutti gli altri bit prima e dopo il bit  $i$ -esimo. Questo fenomeno è definito ISI

L'ultimo termine rappresenta il rumore campionato al tempo  $t_i$ .

Se non ci fosse ISI e il rumore, si può scrivere come

$$y(t_i) = \mu a_i$$

Questo afferma che in condizioni ideali, il segnale può essere decodificato in modo corretto. L'inevitabile è inevitabile, presenza di ISI e di rumore, provoca errori nel dispositivo di decisione allegato in uscita. Dunque nella progettazione dei filtri di trasmissione e ricezione, l'obiettivo sarà quello di minimizzare gli effetti del rumore e dell'ISI e di consegnare il messaggio al destinatario, con il minor numero di errori possibile. Quando il rapporto segnale rumore è alto, come nel caso di un sistema telefonico, le operazioni sono maggiormente limitate dall'ISI piuttosto che dal rumore, in altre parole, si potrebbe eliminare il rumore. Successivamente focalizziamo la nostra attenzione sull'ISI e sulle relative tecniche per eliminarlo. In particolare ci concentreremo sul determinare un impulso  $p(t)$  che elimini completamente il problema dell'ISI.

In condizioni tipiche, la risposta in frequenza del canale è specificata e nota, il problema è dunque concentrato nel determinare i filtri di trasmissione e ricezione, dotati alla zsp. Cioè eliminare ISI.

L'obiettivo è quello di ricostruire la sequenza di simboli  $\{b_k\}$  che è stata introdotta nel circuito di trasmissione.

Per raggiungere l'obiettivo, il ricevitore si basa sul segnale  $y(t)$  dunque da questo segue il campionamento al tempo  $t = iT_b$  estraendo così la sequenza di simboli  $\{a_k\}$ .

Affinché la nostra ricostruzione avvenga fedelmente, abbiamo bisogno che nell'istante di campionamento il contributo dell'impulso

$a_k p(iT_b - kT_b)$  non sia influenzato dalle code di altri impulsi con  $k \neq i$ , cioè che solo valore per  $k = i$  contribuiscono al risultato.

(Vedere figura pagina 151)

Questo richiede che possiamo controllare per intero l'impulso  $p(t)$  in modo che questo risulti:

$$p(iT_b - kT_b) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases} \quad (B)$$

Se le seguenti condizioni sono soddisfatte, allora l'equazione (1) del paragrafo precedente risulta

$$y(t_i) = \mu a_i \quad (\text{il secondo termine è nullo})$$

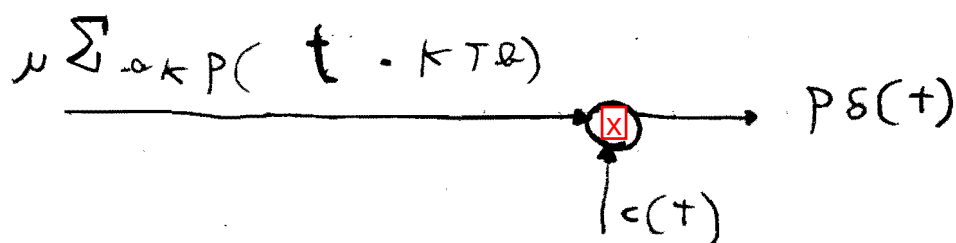
Se supponiamo poi l'assenza di rumore, possiamo dire che stiamo ricostruendo una RICEZIONE PERFETTA.

Nello studio seguente vogliamo misurare o definire un impulso o meglio le caratteristiche che deve avere l'impulso  $g(t)$  affinché si verifichi la completa assenza di ISI. Ci concentreremo dunque sull'ISI, ipotizzando che il rumore NON SIA PRESENTE.

Siamo dunque giunti a definire che il segnale che è passato in ingresso al comparatore è il seguente

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p(t - kT_b)$  il comparatore lo supponiamo ideale.

Possiamo rappresentarlo come segue.



$$p\delta(t) = c(t) p(t) = \sum p(t) \delta(t - mT_b)$$

Dalle supponiamo essere  $T_b$  gli intervalli di campionamento.

Per le proprietà della funzione  $\delta$  possiamo scrivere che

$$p\delta(t) = \sum p(mT_b) \delta(t - mT_b)$$

Siamo nel dominio del tempo e  $p\delta(t)$  è costituita da una infinita sommatoria di  $\delta$  ciascuna portata al valore  $p(iT_b)$ .

Valutiamo nel dominio della frequenza.

$$P\delta(f) = P(f) * \sum \frac{1}{T_b} \cdot \delta\left(f - n \frac{1}{T_b}\right)$$

Definiamo la frequenza di campionamento  $R_b = \frac{1}{T_b}$

$$P_S(P) = P(P) \sum R_B \delta(P - n R_B)$$

$$P_S(P) = \sum P(P) R_B \delta(P - n R_B) = R_B \sum P(P - n R_B) \quad (A)$$

Se valutiamo che  $P_S(P)$  più area sotto curva

$$P_S(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum p(m T_B) \delta(t - m T_B) \right] e^{-j 2 \pi P t} dt$$

Posiamo considerare  $m = i - K$  e dunque, riportando alle condizioni precedentemente riguardo a  $p(m T_B)$ , è possibile scrivere che

$$P_S(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \delta(t) e^{-j 2 \pi P t} dt = p(0) = 1$$

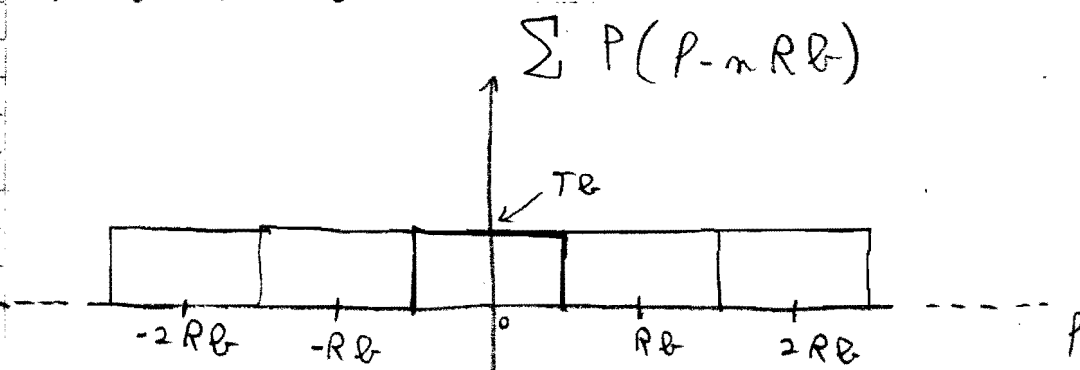
Posiamo ora ricavare dalla (A) la formula

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(P - n R_B) = T_B$$



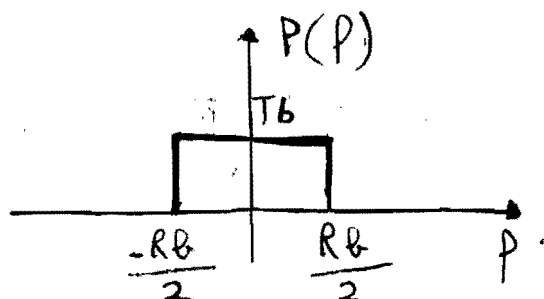
La condizione sopra, detta criterio di Nyquist per canali passabanda senza distorsione ci garantisce l'assenza di ISI.

Abbiamo dunque determinato una funzione  $P(P)$  che ci fornisce il risultato desiderato





Dai risultati precedenti vediamo che il modo più semplice di ottenere una funzione con tali caratteristiche è quello di definire una funzione rettangolare di altezza  $T_b$  e BANDA MONOLATERA  $\frac{RB}{2}$ .  
Tale che



Tale che sommando le altre infinite repliche della funzione distanziate di  $RB$ , si ottiene il risultato desiderato.  
Vediamo di calcolare analiticamente la funzione:

$$P(p) = \begin{cases} T_b & \text{se } |p| \leq \frac{RB}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P(p) = T_b \operatorname{rect}\left(\frac{p}{RB}\right) = \frac{1}{RB} \operatorname{rect}\left(\frac{p}{RB}\right)$$

Come detto precedentemente  $P(p) = G(p) \cdot H(p) \cdot C(p)$

Dunque la banda di  $P(p)$  che è  $\frac{RB}{2}$  è la banda di tutto il sistema.

Definiamo tale banda come  $W$  e riscriviamo l'eq.

$$P(p) = \frac{1}{2W} \operatorname{rect}\left(\frac{p}{2W}\right)$$

Ricordiamo che  $RB$  è la frequenza di campionamento, questa ora definita insieme con il trasmettitore che trasmetterà segnali di durata  $T_b$ .

Vediamo  $R_b = 2W$  questo risultato è di fondamentale importanza; infatti ci dice che

Data un canale passabanda di banda  $W$  è possibile trasmettere simboli indipendenti a baud rate  $R_b \leq 2W$  senza ISI.

NON È POSSIBILE TRASMETTERE SIMBOLI CON  $R_b > 2W$  senza incontrare ISI.

$$p(t) = \mathcal{F}^{-1} [ P(f) ] = \frac{1}{2W} \cdot \cancel{2W} \cdot \text{sinc}(2Wt)$$

Il canale di Nyquist, come abbiamo visto consente in modo economico, di poter risolvere il problema delle ISI con la minima occupazione di banda possibile - Purtroppo in fase di disegno e progettazione, si incontrano grandi difficoltà.

Il canale di Nyquist è ideale ed è il miglior canale che esista perchè andando a riprendere il teorema del campionamento pag 112 Vannucci, questo utilizza la minima banda.

- Viene richiesta che la caratteristica di ampiezza di  $P(f)$  sia lineare in  $-W < f < W$ . Questo è fisicamente impossibile, la risposta reale non tende a diventare infinita, inoltre  $H_e(f)$  è di difficile realizzabilità pratica a causa dei forti ripidi della risposta  $P \pm B$ .
- La sincronizzazione temporale effettuata dal circuito di campionamento del ricevitore, deve essere molto accurata, perchè l'impulso  $\text{sinc}(x)$  decresce lentamente e negli istanti adiacenti, è nulla soltanto quando l'istante di campionamento è esattamente quello dato. Il diagramma ad occhio è molto stretto. Una sincronizzazione non accurata, porta all'insorgere di forte ISI.

A causa di queste difficoltà, si è in pratica obbligati a considerare altri tipi di impulsi a banda più larga. L'idea è quella di trovare forme d'onda aventi la proprietà di essere nulli agli istanti di campionamento adiacenti, ma che contemporaneamente abbiano code che decrescano più velocemente di  $1/x$ , in modo che un'eventuale fluttuazione dell'istante di campionamento, non causi troppa ISI. Una possibile soluzione per la risposta in frequenza compenata, è quella di realizzare il filtro di Nyquist a coseno rialzato.

478 Testo 2 Esmpo

$$Q(x) \triangleq \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

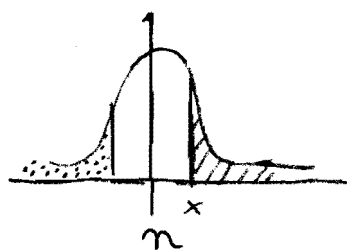
Ricordiamo che la CDF di  $x$

$$F_x(x) \triangleq P\{X \leq x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x p_x(u) du = 1 - \int_x^{\infty} p_x(u) du$$

$$= 1 - Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \int_x^{\infty} p_x(u) du$$



$$Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

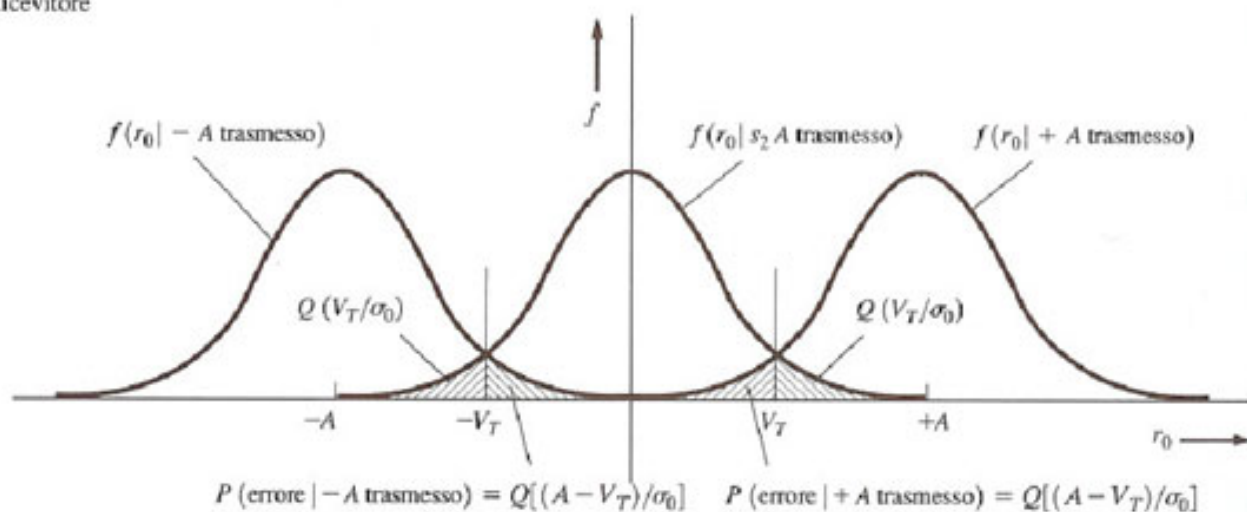
Mettendo  $x, \mu, \sigma$  a norma  
è area tratteggiata.

$$Q(-|x|) = 1 - Q(|x|)$$

Ricordiamo anche che la Gaussiana è per

$$\square = \square$$

(a) Ricevitore

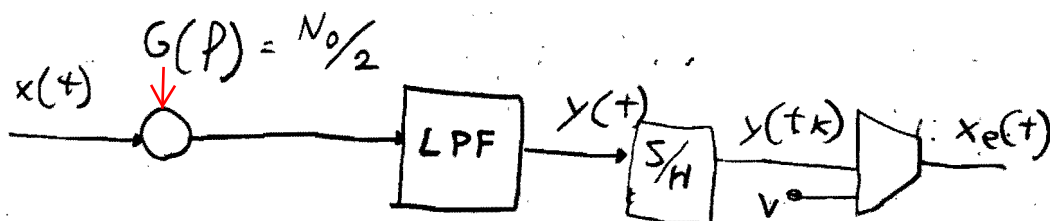


Ci occupiamo ora di valutare il rumore e la probabilità di errore nei sistemi digitali in banda base iniziando dal caso lineare e generalizzando con il segnale M-onio.

Occupiamoci ora che il canale sia puro di ISI.

Assumiamo, il segnale più rumore bianco, con media nulla, il rumore è indipendente dal segnale.

Valutiamo la seguente situazione:



Il dispositivo di sample-and-hold (S/H) è attivo al tempo ottimale e estrae dal segnale  $y(t)$  fornita in ingresso, un valore campione  $y(t_k) = a_k + n(t_k)$

Successivamente, il campione  $y(t_k)$ , viene confrontato con il valore di soglia  $V$  e viene completato il procedimento di rigenerazione.

Se  $y(t_k) > V$  allora il comparatore restituisce HIGH cioè 1.

Se  $y(t_k) < V$ , il comparatore ritorna LOW (0). Il comparatore lavora dunque come un convertitore analogico a digitale convertendo il segnale  $y(t)$  in un segnale digitale  $x_e(t)$  senza rumore ma con qualche errore.

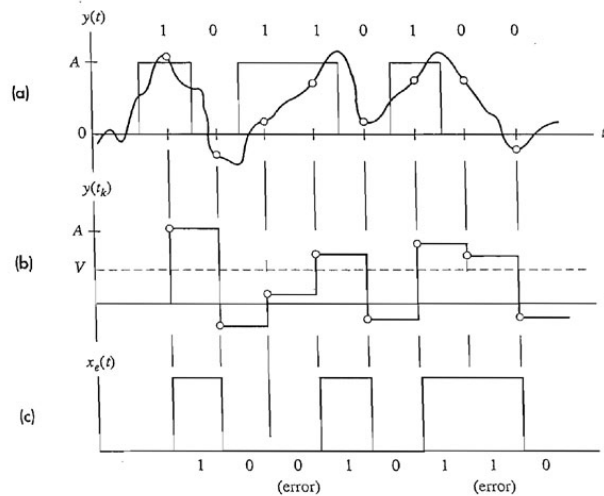
Iniziamo ad analizzare  $x(t)$  supponendolo unipolare e

fissando per  $a_k = A = 1$  e  $a_k = 0 = 0$ . Intuitivamente, si

può pensare che il valore di soglia  $V$ , sia qualcosa di intermedio tra

$0 < V < A$  - Il processo di rigenerazione illustrato dalla forma d'onda ripetuta in figura,





mostro come gli errori compaiono, nel caso in cui  $a_k = 0$  ma un rumore positivo risulta  $y(t_k) > V$ , oppure quando  $a_k = A$  ma un rumore negativo porta il risultato  $y(t_k) < V$ .

Per formulare la probabilità di errore, utilizziamo la variabile aleatoria  $Y$  che mi rappresenta  $y(t_k)$  ad un arbitrario tempo di campionamento e utilizziamo  $n$  per rappresentare  $n(t_k)$ . La funzione densità di probabilità  $Y$  chiaramente include la PDF del rumore, ma questa dipende dalla presenza o assenza del segnale. Abbiamo bisogno di ricorrere alle probabilità condizionate. In particolare

$H_0$  denota l'ipotesi o assunzione che  $a_k = 0$  e  $Y = n$   
 possiamo dunque scrivere che

$$P_Y(Y | H_0) = P_N(Y) \quad (C)$$

Dove  $P_N(n)$  è la PDF del solo rumore.

In modo analogo, andiamo a definire

$H_1$  come l'ipotesi che  $a_k = A$  e  $Y = A + n$  dunque

$$P_Y(Y | H_1) = P_N(Y - A) \quad (D)$$

La figura, mostrata, è un tipico di  $p_Y(y|H_0)$  e  $p_Y(y|H_1)$  133

in base alla soglia  $V$ . Il comparatore esegue dunque la seguente decisione:

Scelta dell'ipotesi  $H_0$  ( $a_k = 0$ ) se  $Y < V$

Scelta ipotesi  $H_1$  ( $a_k = A$ ) se  $Y > V$

Non consideriamo l'ipotesi di border line  $Y = V$ .

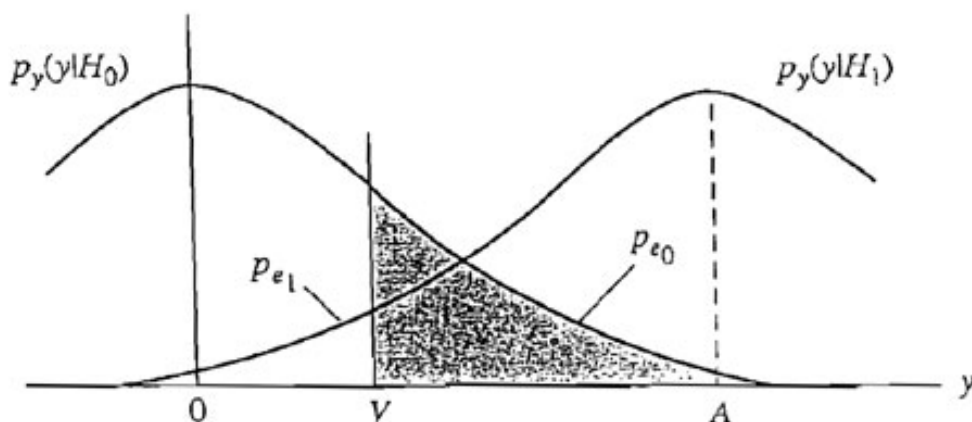
Vediamo ora come la probabilità di errore può essere facilmente calcolata dato:

$Y > V$ , ma siamo nel caso di  $H_0$

$$Pe_0 = P(Y > V | H_0) = \int_V^{\infty} P(Y | H_0) dy \quad (A)$$

$$Pe_1 = P(Y < V | H_1) = \int_{-\infty}^V P(Y | H_1) dy \quad (B)$$

$Y < V$ , ma siamo nel caso di  $H_1$



Per rendersi conto è conveniente analizzare la figura. Chiaramente potendo il valore di soglia  $V$  o valori più bassi, si riduce  $Pe_1$  così come potendo il valore di soglia  $V$  o valori più alti, si riduce  $Pe_0$ .

La soluzione è quella di selezionare un valore  $V$  in modo tale da ridurre al minimo la probabilità di errore

$$Pe = P(H_0) \cdot Pe_0 + P(H_1) \cdot Pe_1 \quad (1)$$

Dare  $P(H_0)$  e  $P(H_1)$  è la probabilità che la sorgente trasmetta 0 o A.

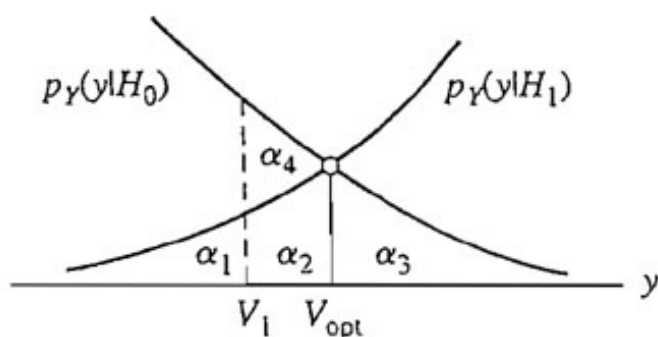
Definiamo  $P_0 = P(H_0)$  e  $P_1 = P(H_1)$

07/06/2009

Normalmente aspettiamo che  $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$  dunque dalla formula (1)

$$P_e = \frac{1}{2} (P_{e0} + P_{e1}) \quad (3)$$

Da una attenta analisi dell'equazione (2) notiamo che  $V_{opt}$  corrisponde al punto dove le due probabilità condizionate si incontrano. Una diretta verifica di quanto detto è possibile analizzando le aree  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  nella figura sotto:



Come si vede, la scelta ottimale conduce a  $P_{e1} = \alpha_1 + \alpha_2$  e  $P_{e0} = \alpha_3$

Dunque possiamo dire che  $P_{e min} = \frac{1}{2} (\alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2)$  per la (3)

Vediamo come una scelta NON ottimale seguita per sempre scegliendo  $V < V_{opt}$

condurre a considerare  $P_{e1} = \alpha_1$  e  $P_{e2} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$

portando a  $P_e = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = P_{e min} + \frac{1}{2} \alpha_4 > P_{e min}$

Or possiamo proseguire introducendo le solite nozioni circa il rumore  
cioè gaussiano con media nulla e varianza  $\sigma^2$  così che

$$P_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$$

Sostituendo ora:

$$P_{e0} = (A) = \int_V^{\infty} P_N(y) dy = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$

$$P_{e1} = (B) = \int_{-\infty}^V P_N(y-A) dy = Q\left(\frac{A-V}{\sigma}\right)$$

Dove  $Q$  è l'area sotto la coda della figura gaussiana.

Dal momento  $P_N(n)$  ha simmetria PARI le due PDF condizionali,

$P_Y(y|H_0)$  e  $P_Y(y|H_1)$ , trovano intersezione nel punto centrale

$V_{opt} = \frac{A}{2}$  quando  $P_0$  e  $P_1 = \frac{1}{2}$ .

Mediante tale scelta  $V = V_{opt}$  si ha che  $P_{e0} = P_{e1} = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$

in questo modo la scelta del valore di soglia ottimale, conduce alla  
probabilità di errore uguale per le due ipotesi.

Nell' ~~esempio~~ considerazione, abbiamo analizzato il caso del segnale unipolare  
 07706/2009 136  
 è possibile determinare risultati analoghi anche nel caso di segnale POLARE.  
 Se  $a_k = \pm A/2$  possiamo dire che la distanza tra i due livelli rimane  
 uguale a quello del caso unipolare.

$$\text{UNIPOLARE} \begin{cases} a_k = A & \text{e } b_k = 1 \\ a_k = 0 & \text{e } b_k = 0 \end{cases} \quad \text{BIPOLARE} \begin{cases} a_k = A/2 & \text{e } b_k = 1 \\ a_k = -A/2 & \text{e } b_k = 0 \end{cases}$$

Notiamo come la distanza tra i primi valori di  $a_k$  ( $0, A$ ) nel caso unipolare e  
 $(-A/2, A/2)$  nel caso bipolare rimanga invariata. Notiamo però che occorre  
 potenza nel segnale per produrre la distanza nel caso di modulazione unipolare.  
 La differenza è che nel caso di segnale viene a trovarsi  $V_{OPT} = 0$  cioè il  
 punto equidistante tra i due possibili valori assunti da  $a_k$ .

Analizziamo i dettagli relativi a questa modulazione, considerando la potenza del  
 segnale ricevuto  $S_R$ .

Assumiamo per entrambi lo stesso probabilità per i simboli  $b_k$  e dunque  $a_k$   
 e che l'impulso di trasmissione sia rettangolare e di durata  $T_b$ :

$$S_R = \frac{1}{2} \left[ \text{Potenza } a_k \text{ quando } b_k = 1 \right] + \frac{1}{2} \left[ \text{Potenza } a_k \text{ quando } b_k = 0 \right]$$

Applichiamo le formule prima per il caso unipolare e poi per quello polare.

$$S_R = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{A^2}{2}$$

$$S_R = \frac{1}{2} \left[ \frac{A}{2} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ -\frac{A}{2} \right]^2 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{8} + \frac{A^2}{8} = \frac{A^2}{4}$$

$$S_R = \frac{A^2}{2} \text{ nel caso unipolare}$$

$$S_R = \frac{A^2}{4} \text{ nel caso bipolare}$$



Dal momento che il rumore ha medio nullo, la varianza  $\sigma^2$  equivale a  $N_R$  la potenza del rumore all'uscita del filtro.

Posiamo ora valutare il rapporto segnale rumore come.

Potenza del segnale

Potenza rumore

Caso unipolare

$$(S/N)_R = \frac{A^2/2}{\sigma^2} = \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{A}{\sigma} \right)^2$$

Caso bipolare

$$(S/N)_R = \frac{A^2/4}{\sigma^2} = \frac{A^2}{4\sigma^2} = \left( \frac{A}{2\sigma} \right)^2$$

Vediamo che nel caso unipolare il (SNR) è la metà rispetto a quello nel caso polare.

I segnali binari offrono grande immunità al rumore per un dato  $S/N$  in quanto hanno solamente due livelli di ampiezza (non è possibile spedire informazioni con meno di due livelli). I segnali M-ary richiedono + POTENZA per la trasmissione. Questi però confrontati con i BINARI richiedono un segnale rate inferiore (in quanto occorre minore numero segnali, se riusciamo a codificare più stati in una unica segnalazione se vogliamo trasmettere 10 con la modalità binaria, bisogna inviare due stati 1 e 0, con la M-ary rispetto 4 livelli (00, 01, 10, 11) 1 solo impulso) avendo segnale rate inferiore, possiamo concludere che questi hanno una minore bandwidth.

Occasionale di calcolo la probabilità di errore nel caso M-ario con zero medio rumore gaussiano. Un caso comune di segnalazione può essere segnalazione con un numero equidistante di livelli discreti.

$$a_k = \pm A/2 \quad \pm 3A/2 \quad \dots \quad \pm (M-1)A/2$$

Consideriamo la probabilità di errore come nel caso binario cioè

$$P_e = \frac{1}{M} (P_{e0} + P_{e1} + \dots + P_{eM-1})$$

Valutiamo ora  $M=4$ . La quantà detta precedentemente

$$a_k = \pm \frac{A}{2}, \pm 3 \frac{A}{2}$$

Il decisore, richiede ora 3 livelli di soglia indicati in figura.

con  $y = -A$ ,  $y = 0$ ,  $y = +A$ .

Questi sono i valori ottimali per minimizzare la probabilità di errore, ma questa non risulta uguale per tutti i simboli.

Vediamo che:

$$P_{e0} = Q\left(\frac{+\frac{3}{2}A + A}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{+\frac{A}{2}}{\sigma}\right) = Q\left(+\frac{A}{2\sigma}\right)$$

$$P_{e1} = Q\left(+\frac{A}{2\sigma}\right) + Q\left(-\frac{A}{\sigma}\right) = 2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

$$P_{e2} = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = 2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

$$P_3 = Q\left(\frac{\frac{3}{2}A - A}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

Valutiamo la probabilità di errore totale come

$$P_e = \frac{1}{4} \cdot Q(\cdot) + \frac{1}{4} 2Q(\cdot) + \frac{1}{4} 2Q(\cdot) + \frac{1}{4} Q(\cdot) =$$

$$Q(\cdot) \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = Q(\cdot) \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

Possiamo ricavare una formula generalizzata per determinare la probabilità di errore di un sistema  $M$ -ario grazie.

Dunque consideriamo  $M$  possibili valori con  $(M-1)$

livelli di soglia posizionati a:

For  $i=2$  to  $(M)$  step 2

Adding decision  $\pm \left( \frac{i-2}{2} \right) A$

Next

Case  $M=2$  decision is  $\emptyset$

Case  $M=4$  decision is  $\left[ \emptyset; \pm \left( \frac{4-2}{2} \right) A \right] = \left[ \emptyset; \pm A \right]$

Case  $M=n$  decision is  $\left[ \emptyset; \pm A; \pm 2A; \pm \frac{n-2}{2} A \right]$

Probability of error of  $P_{\emptyset}$  &  $P(M-1) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$

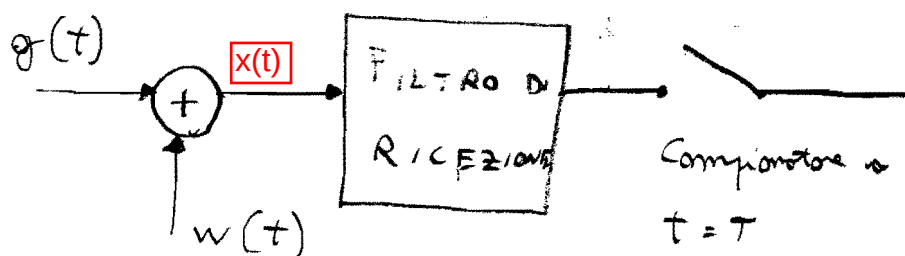
Probability total of error:  $2 \left( 1 - \frac{1}{M} \right) Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$

07/06/2009

141

Uno dei problemi principali che emerge nei sistemi di comunicazione è come determinare un impulso trasmesso se un canale è corrotto dal rumore (un esempio è il rumore additivo a fonte del ricevitore).

Nella trattazione seguente, consideriamo il rumore come maggiore fonte di disturbi. Consideriamo dunque il seguente:



il segnale  $g(t)$  rappresenta il segnale in ingresso al sistema, solitamente il segnale digitale,  $w(t)$  rappresenta il rumore bianco additivo gaussiano che si somma al segnale  $g(t)$  generando il segnale  $x(t)$ .

Il filtro di ricezione ha il compito di fare in modo che venga determinato il segnale  $g(t)$  in maniera ottimale. L'obiettivo è quello di riuscire in qualche modo a ridurre gli effetti del rumore, cercando di facilitare il riconoscimento del segnale  $g(t)$ .

Dal momento che supponiamo il filtro LINEARE, sappiamo che possiamo esprimere  $y(t) = g_0(t) + n(t)$  dove  $g_0(t)$  è quello che si ottiene, introducendo  $g(t)$  nel filtro e  $n(t)$  è ottenuto introducendo  $w(t)$ .

Un modo semplice per osservare il requisito che il segnale  $g_0(t)$  sia considerevolmente grande, rispetto al rumore  $n(t)$  è quello di riuscire mediante il filtro a fare in modo che la potenza istantanea della componente del segnale, all'istante  $T$ , sia più grande possibile rispetto alla potenza del rumore  $n(t)$ . Questo corrisponde a massimizzare il picco del rapporto segnale rumore definito come.

$$\eta = \frac{|g_o(T)|^2}{E[n^2(t)]} \quad (1)$$

142

$|g_o(T)|^2$  è la potenza istantanea della componente in uscita relativa al segnale,  $E$  è il valore atteso della potenza del rumore in uscita.

Possiamo dire che l'obiettivo è quello di specificare l'impulso  $h(t)$  in modo che il rapporto segnale rumore sia precedentemente il massimo. Vediamo come fare:

- Consideriamo  $G(p) = F[g(t)]$  e  $H(p) = F[h(t)]$   
possiamo affermare che  $G_o(p) = G(p)H(p)$ .

$$g_o(t) = F^{-1}[G(p)H(p)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(p)H(p)e^{j2\pi pt} dp$$

Dunque  $g_o(T)$  cioè  $g_o(t)$  considerato all'istante di campionamento  $T$  è dato da:  $g_o(T)$  valutiamo la potenza istantanea:  $|g_o(t)|^2 =$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(p)H(p)e^{j2\pi pT} dp \right|^2$$

- Consideriamo ora gli effetti del rumore come se origine da solo; valutiamo la densità spettrale di potenza  $S_N(p)$  calcolata all'uscita del filtro. Richiamando le Teoremi di Wiener - Khintchine sappiamo che:

$$S_N(p) = S_w(p) |H(p)|^2 = \frac{N_0}{2} |H(p)|^2$$



Come anticipato precedentemente, siamo interessati alla media  $E[n^2(t)]$  che esprimiamo come:

$$E[n^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_N(p) dp = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(p)|^2 dp$$

Possiamo ora riscrivere l'equazione (1) come:

$$\eta = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(p) G(p) e^{j2\pi p t} dp \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(p)|^2 dp} \quad (2)$$

L'obiettivo è quello di riuscire una volta che abbiamo  $G(p)$  la forma di  $H(p)$  tale che  $\eta$  sia massimo. Chiameremo mentre  $H(p)$  possiamo generarlo e adattarlo secondo i nostri scopi,  $G(p)$  ci è dato e dobbiamo "adattarci".

Il risultato che ci consente di determinare  $H(p)$  ci viene suggerito dalla disuguaglianza di Cauchy Schwarz che dice che date due funzioni complesse  $\phi_1(x)$  e  $\phi_2(x)$  della variabile reale  $(x)$  tale che risulti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_1(x)|^2 dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_2(x)|^2 dx < \infty$$

Possiamo scrivere che

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x) \phi_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_1(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_2(x)|^2 dx$$

Il teorema dice che il segno d'uguaglianza vale  $\leq$  e solo  $\leq$  144

$$\phi_1(x) = K \phi_2^*(x) \quad (3)$$

Das  $K$  è una costante arbitraria e  $\phi_2^*(x)$  è il complesso coniugato di  $\phi_2(x)$ .

L'idea chiave ora sta nel utilizzare tale teorema nella (2) prendendo:

$$\phi_1(x) = H(p) \quad \text{e} \quad \phi_2(x) = G(p) e^{j2\pi pT}$$

Il numeratore della (2) è possibile riscrivere mediante

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(p) G(p) e^{j2\pi pT} dp \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |H(p)|^2 dp \int_{-\infty}^{+\infty} |G(p)|^2 dp$$

7 Sostituendo nella (2) ed eseguendo le opportune semplificazioni, possiamo  
1 determinare che:

$$\eta \leq \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(p)|^2 dp$$

Questo mostra che il valore  $\eta$  qui sopra non dipende da  $H(p)$  ma solamente dall'angolo del segnale e dalla densità spettrale di potenza del rumore. Di conseguenza  $\eta$  è massimo se riusciamo a sostituire il segnale  $\leq$  con  $=$  cioè:

$$\eta_{MAX} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(p)|^2 dp$$

Per quanto detto al punto (3) occorre che

$$H(p) = K [G(p) e^{j2\pi pT}]^*$$

Il risultato precedente mostra che a parte il fattore di scala  $K$  ed  $e^{-j2\pi fT}$  lo input in frequenza del filtro al fine di massimizzare SNR, deve essere uguale al complesso coniugato del segnale considerato in ingresso:  $g(t)$  dunque:

$$H_{\text{OPTIMAL}}(f) = K G^*(f) e^{-j2\pi fT}$$

Per calcolare l'espressione del filtro ottimo nel dominio del tempo, occorre che valutiamo.

$$h_{\text{OPTIMAL}}(t) = \mathcal{F}^{-1} [H_{\text{OPTIMAL}}(f)]$$

Inoltre, dobbiamo ricordare che  $G(f)$  è reale e dunque  $G^*(f) = G(-f)$

$$h_{\text{OPTIMAL}}(t) = K g(T-t)$$

L'equazione sopra, mostra che il filtro ottimo è attenuato a parte il fattore  $K$  del segnale  $g(t)$  dopo averlo ribaltato e ritardato nel tempo. Quindi questo "matched" corrisponde al segnale di input.

Notiamo che la risposta impulsiva del filtro che uguaglia l'impulso  $T$  è caratterizzata da una risposta impulsiva che è time-reversed e ritardata rispetto a quella del segnale di ingresso  $g(t)$  come mostrato dalla relazione:

$$h_{\text{OPTIMAL}}(t) = K g(T-t)$$

Dunque, possiamo affermare che la risposta impulsiva  $h_{\text{OPTIMAL}}(t)$  risulta unicamente definito a meno di un fattore di scala  $K$  e uno di ritardo  $T$ . Nel dominio della frequenza, questa assume la seguente forma.

$$H_{\text{OPTIMAL}}(f) = K G^*(f) e^{-j2\pi fT}$$

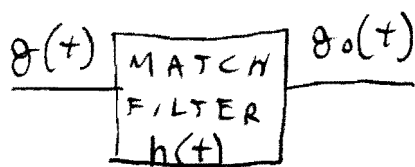
dove a parte il fattore di scala  $K$  e un fattore di ritardo, questa corrisponde al complesso coniugato del segnale  $G(f) = \mathcal{F}[g(t)]$ .

Il match filter è un filtro ottimo e vale la seguente proprietà:

Il picco del valore SNR del match filter, dipende solamente dal rapporto tra l'energia del segnale all'ingresso del filtro e la densità spettrale di potenza, valutata all'ingresso relativo al rumore bianco.

Per dimostrare tale proprietà, valutiamo quanto segue.

Supponiamo di avere un segnale  $g(t)$  noto applicato in ingresso al match filter. In uscita otteniamo  $g_o(t)$ . Questa può essere espressa come:



$$g_o(t) = g(t) * h(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f) H_{\text{OPTIMAL}}(f)]$$

$$G_o(f) = G(f) [K G^*(f) e^{-j2\pi fT}] = K |G(f)|^2 e^{-j2\pi fT}$$

Valutiamo ora  $g_0(t)$ , all'istante di campionamento  $T$ .

Dunque

$$g_0(t) = \mathcal{F}^{-1} [G_0(p)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(p) e^{j2\pi p t} dp$$

Imponiamo ora la condizione  $t=T$

$$g_0(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(p) e^{j2\pi p T} dp =$$

$$= K \int_{-\infty}^{+\infty} |G(p)|^2 dp$$

Questo per il teorema di Parseval corrisponde all'area del rettangolo moltiplicato per la costante  $K$

$$g_0(t) = K E$$

Valutiamo ora  $E[n^2(t)]$  introducendo  $w(t)$  nel filtro match



$$\begin{aligned}
 E[n^2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(p) dp = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H(p)|^2 dp \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |K G^*(p)|^2 dp = |\cdot| \text{ è l'operatore modulo} \\
 &= \frac{N_0 K^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(p)|^2 dp = \frac{N_0 K}{2} \cdot E
 \end{aligned}$$

07/06/2009

$$\eta_{MAX} = \frac{[KE]^2}{\left[ \frac{N_0 K^2}{2} E \right]} = \frac{K^2 E^2}{N_0 K^2 E} = \frac{2E}{N_0}$$

148

Nella formula sopra  $g_o(T) = KE$  Potenza di  $g_o(T) = [g_o(T)]^2 = K^2 E^2$

Dunque la dipendenza da  $g(t)$  è stata completamente rimossa dal filtro

La risposta del "filtro adattato" o "match filter" è quella di combaciare il rumore AWGN che è come se  $g(t)$  contenesse l'informazione.