

Quando si parla di comunicazioni elettriche gli esempi più significativi di segnali in uso, sono quelli "telefonici" e quelli "video". Tipicamente un segnale telefonico ha una banda di frequenze che va da 300 Hz a 3400 Hz SANDA SEGNALE TELEFONICO; attenuata mediante il filtraggio dell'intera banda vocale; il motivo di questo filtraggio è la riduzione del dell'ingombro frequenziale senza alterare l'intelligibilità del messaggio. Il segnale video invece occupa una banda di frequenze che arriva fino a 5 MHz.

Entrambi i segnali sono di tipo analogico. Un segnale numerico può essere, ad esempio, la sequenza di bit trasmessa da un calcolatore elettronico.

Un concetto importante nel campo delle com. elettriche è il "rumore"; intuitivamente se misurassimo la

temperatura di capi di un conduttore isolato a temperatura ambiente, verrebbe rilevata una temperatura fluttuante a valore medio nullo; questa è di fatto dovuta allo stato di agitazione termica delle particelle subatomiche che non si trovano allo zero assoluto: esso si chiama appunto RUMORE TERMICO. DANDO QUINDI AL MOVIMENTO DELLE PARTICELLE SUBATOMICHE Il rumore termico può (AGITAZIONE TERMICA) essere rappresentato (modello matematico) con un processo

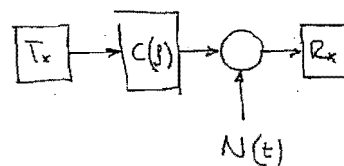
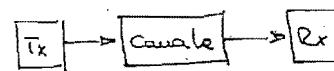
stocastico, $N(t)$. Durante la trasmissione di un segnale, quindi, si sovrappone ad esso un certo rumore; questo rumore può essere dovuto al trasmettitore, al canale trasmissivo o introdotto dal ricevitore.

Ne realtà, essendo il trasmettitore un dispositivo di potenza, il rumore ad esso associato risulta percentualmente insignificante rispetto al segnale stesso.

Il canale di fatto ha il comportamento di un filtro $c(f)$.

Il sistema di comunicazioni composto da trasmettitore (T_x) canale (c) e ricevitore (R_x)

allora può essere schematicizzato come in figura; il



NUOVI VOCABOLI : SCHEMATIZZATICO !!



Il canale c , caratterizzato da un certo rumore, ²
 può essere schematizzato come un filtro privo
 di rumore $C(f)$ (in generale il camp. e P.B.) ; al segnale
 che percorre il canale non rumoroso si somma il
 processo $N(t)$ che rappresenta il rumore (indipendente
 dalla sorgente che lo ha generato, ad esempio l'agitazione
 termica).

In generale la densità spettrale di potenza del
 processo rumore può essere schematizzata, per semplicità,
 come costante:

$$W_N(f) = S_N(f) = \frac{N_0}{2} = \text{costante}$$

Se integriamo $W_N(f)$ su tutto l'asse delle frequenze
 avremmo come risultato infinito, tuttavia, in tutte le
 applicazioni si considera una banda di frequenza
 limitata e quindi l'integrale suddetto, nell'intervallo
 finito, è appunto finito.

Un rumore con densità spettrale di potenza, si
 dice RUMORE BIANCO.

Come già detto il rumore ha valore medio nullo,
 quindi:

$$\mu_N = 0$$

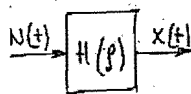
e autocorrelazione

$$R_N(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

Il rumore così considerato è quindi STAZIONARIO in
 SENSO LATO. Il rumore che consideriamo è inoltre
 un processo GAUSSIANO; dalla t.d.s. sappiamo che un
 processo "stazionario in senso lato" se è Gaussiano
 è anche "stazionario in senso stretto".

Il rumore così descritto si dice AWGN (Additive,
 White, Gaussian, Noise).

Si ricordi che un processo Gaussiano come l'AWGN
 ha alcune proprietà nei confronti di un blocco $H(f)$;
 sia $N(t)$ il rumore bianco
 e sia $X(t)$ l'uscita di $H(f)$ avremo:



$$\begin{aligned} \mu_X &= \mu_N \quad H(0) = 0 \\ R_X(\tau) &= R_N(\tau) \otimes h(\tau) \\ W_X(f) &= W_N(f) |H(f)|^2 \end{aligned}$$

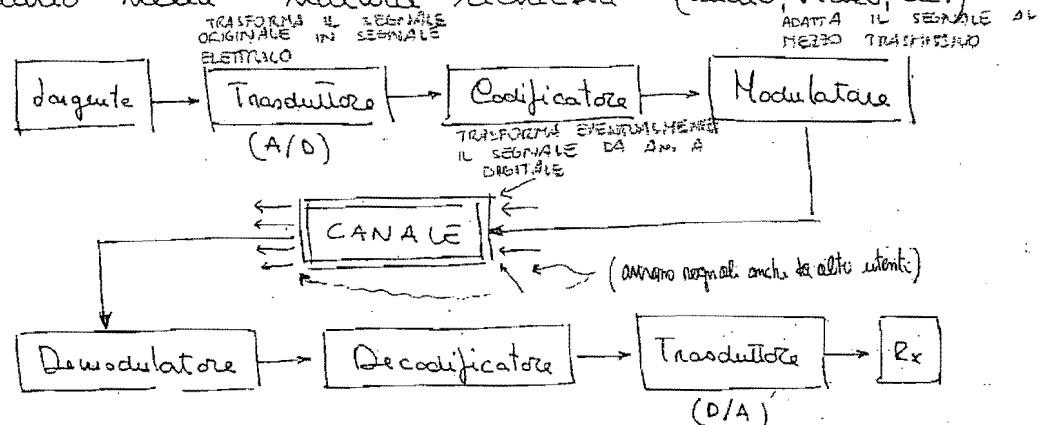
In generale un canale ha un comportamento "passa ³
banda", ovvero predilige una gamma di frequenza
entro la quale l'attenuazione del segnale si
mantiene ragionevole. La linea bifilare ad esempio
ha una banda che va da 1 KHz a 1 MHz.

Approfondendo l'analisi di un sistema di telecomuni-
cazioni, si possono individuare alcuni blocchi
fondamentali. L'informazione è prodotta da una
SORGENTE (ad esempio l'apparato vocale umano), questo segnale
non essendo elettrico deve essere trasformato mediante
un TRASDUTTORE, per poter utilizzare il canale.

Se la trasmissione è di tipo numerico, occorre
un apparato di conversione Analogico-Digitale, che nella
maggior parte dei casi ha sede nel trasduttore stesso.

Sempre nel caso di segnali numerici, è necessario
"codificare", attraverso un CODIFICATORE, il segnale,
con lo scopo di rendere identificabili e correggibili
eventuali errori (Vedi Codici di trasmissione). Per adattare
il segnale al mezzo di comunicazione occorre
alterare il segnale stesso con un MODULATORE;
grazie all'operazione di modulazione, sullo stesso
canale possono coesistere più segnali.

La fase di ricezione è ovviamente il processo inverso
che passa attraverso una DEMODULAZIONE, una DECODIFICA
una TRASDUTTORE, fino a portare il segnale al
destinatario nella natura richiesta (audio, video, ecc.)



Esami Sui CODICI DI TRASMISSIONE: Nelle trasmissioni numeriche, esistono alcune operazioni per ottimizzare l'utilizzo del canale.

4

- A. CODICI DI SORGENTE: Per limitare l'occupazione del canale, si può pensare di eliminare tutti gli elementi del "messaggio" che non siano fondamentali per l'intelligibilità dell'informazione; si applicano allora dei "codici di sorgente" che hanno il compito di togliere secondo una certa logica tutta la "ridondanza" presente nel messaggio.
- B. CODICI DI CANALE: Il messaggio privato della ridondanza è ovviamente più suscettibile agli errori; a seconda del canale di trasmissione e quindi delle interferenze parassite; si sceglie di reintrodurre una parte della ridondanza per migliorare l'immunità ai disturbi.
- C. CODICI DI LINEA: Per adattare il segnale alla linea di trasmissione, si introduce una correlazione fra i simboli del segnale numerico in questo modo si modifica la composizione spettrale del segnale stesso. Questa operazione è regolata dai cosiddetti Codici di Linea.

La funzione $\delta(t)$ è tale per cui data una funzione $f(t)$ è verificata la seguente:

PROPRIETÀ CONVOLUZIONE
DELTA DI DIRAC

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

per definizione, allora, ponendo $f(t) = 1$

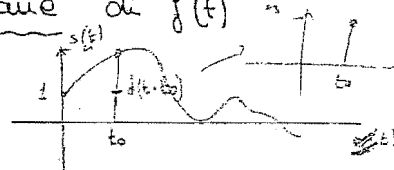
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Questa funzione gode di alcune proprietà:

1. Proprietà CAMPIONATRICE della $\delta(t)$

Il prodotto di un segnale $s(t)$ e la funzione $\delta(t)$ centrata in t_0 , fornisce un "campiono" di $f(t)$ in t_0 :

$$s(t) \delta(t-t_0) = s(t_0) \delta(t-t_0)$$



2. Proprietà della CONVOLUZIONE

La convoluzione di un segnale $s(t)$ e la funzione $\delta(t)$ centrata in t_0 , corrisponde ad una traslazione di $f(t)$ in t_0 :

$$s(t) \otimes \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) s(t-\tau) d\tau = s(t-t_0)$$

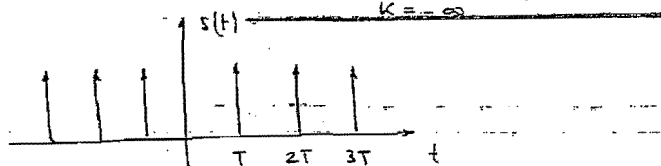
La funzione $\delta(t)$ non è che un'astrazione matematica, che può essere ottenuta come limite di funzioni ordinarie.

Esempio

6

Si consideri un segnale "pettine di $\delta(t)$ " definito da

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



il segnale può essere sviluppato con la serie di Fourier, ovvero

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

nella quale C_n è il coefficiente dello sviluppo dato dalla seguente:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} c(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Questo risultato è ottenuto mediante la proprietà campionatrice del delta di Dirac, infatti:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n \frac{0}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Risulterà che

$$\delta(t - t_0) s(t) = s(t_0) \delta(t - t_0)$$

ponendo $t_0 = 0$

$$\delta(t) s(t) = s(0) \delta(t)$$

lo sviluppo in serie di Fourier diviene

7

$$\begin{aligned} c(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{j2\pi k \frac{t}{T}} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \end{aligned}$$

A questo punto possiamo applicare la Trasformata di Fourier del segnale periodico; in particolare sappiamo che

PROPRIETÀ TRASFORMATA DI FOURIER
RITARDO DI t_0

$$\mathcal{F}\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] = \delta(f - f_0)$$

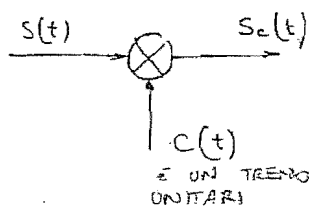
allora $\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F e^{j2\pi f_0 t}$

$$C(f) = \frac{1}{T} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{M}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \delta(f - M f_0)$$

Un segnale che nel dominio del tempo è una sequenza di $\delta(t)$ distanziati di T , nel dominio della frequenza è sempre una sequenza di impulsi $\delta(f)$ distanziati di $1/T$ e ampiezza $1/T$

CAMPIONAMENTO IDEALE

Sia $s(t)$ un segnale; campionare tale segnale significa trasformarlo in $s_c(t)$, ovvero una sequenza di impulsi di ampiezza uguale all'ampiezza di $s(t)$ nell'istante considerato.



Il segnale $c(t)$ che è il segnale campionario, è definito come segue

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Se con T si indica il periodo di campionamento.

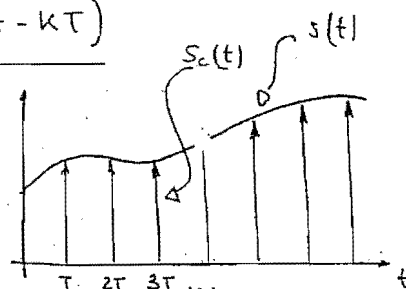
$$s_c(t) = s(t) \cdot c(t)$$

$$\begin{aligned} S_c(t) &= s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t - kT) = \end{aligned}$$

× ripetute del campionamento

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta(t - kT)$$

Ad esempio se $s(t)$ ha un generico andamento (vedi figura) il segnale campionato $S_c(t)$ è una sequenza di impulsi che assumono l'ampiezza di $s(t)$ negli istanti $t = kT$.



Calcoliamo lo spettro in frequenza del segnale campionato $S_c(t)$.

$$S_c(f) = S(f) \otimes C(f)$$

questo perché

T.d.F. del prodotto è la CONVOLUZIONE

$$\mathcal{F}[s(t) \cdot c(t)] = S(f) \otimes C(f)$$

allora è VICEVERSA

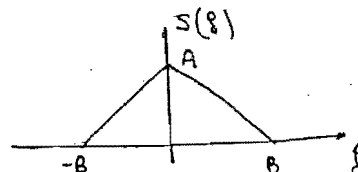
$$\begin{aligned} S_c(f) &= S(f) \otimes \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[S(f) \otimes \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right] \frac{1}{T} = \end{aligned}$$

↳ siccome la convoluzione è un operatore lineare.

Siccome la convoluzione non è che una traslazione, come testimonierà la proprietà 2, precedentemente richiamata, avremo:

$$\begin{aligned} S_c(f) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f) \otimes \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

Supponiamo che il segnale $s(t)$ sia caratterizzato da uno spettro $S(f)$, come in figura



Per determinare l'andamento dello spettro $S_c(f)$ del segnale campionato, distinguiamo due casi:

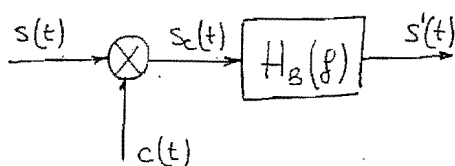
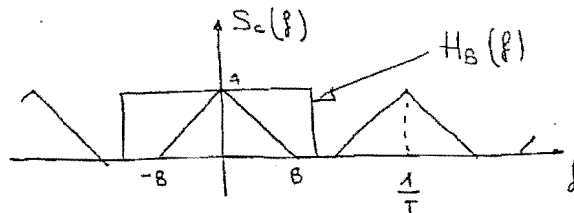
1. Se $\frac{1}{T} = F \geq 2B$ avremo:

$$\frac{1}{2T} \geq B$$

allora lo spettro di $S_c(t)$ non è che la ripetizione dello spettro $S(f)$ a distanza di $1/T$, non sovrapposti.

In questo caso è facile intuire che per ricostruire il segnale di partenza è sufficiente filtrare

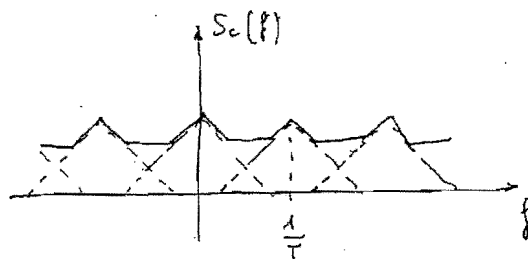
il segnale campionato con un dispositivo che selezioni la gamma di frequenze che va da $-B$ a B .



con $H_B(f) = \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$

2. Se $\frac{1}{T} = F < 2B$ le copie degli spettri $S(f)$ di $s(t)$ ripetute nello spettro del segnale campionato, si sovrappongono:

questo fenomeno è detto ALIASING ed impedisce la ricostruzione del segnale $s(t)$ a partire da quello campionato.



La condizione appena vista, per garantire la possibilità di ricostruire un segnale a partire dal segnale campionato

$$\frac{1}{T} = F \geq 2B$$

è detta CONDIZIONE DI NYQUIST.

Analizziamo il filtro $H_B(f)$ per la ricostruzione del segnale originale:

$$H_B(f) = \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

ricordiamo che

$$\mathcal{F}^{-1}[H_B(f)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\right] = \frac{1}{T} 2B \text{sinc}(2Bt)$$

$$h_B(t) = \text{sinc}(2Bt)$$

nella condizione limite in cui $\frac{1}{T} = F = 2B$

$$h_B(t) = \text{sinc}(Ft) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Siccome

$$S'(f) = S_c(f) \cdot H_B(f)$$

$$s'(t) = s_c(t) \otimes h_B(t) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta(t - kT) \otimes h_B(t)$$

Sulla base della FORMULA DI INTERPOLAZIONE ($F = 2B$)

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \text{sinc}\left(\frac{t - kT}{T}\right) \quad F = 2B$$

possiamo dire che

$$\begin{aligned} s'(t) = s_c(t) \otimes h_B(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta(t - kT) \otimes \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \text{sinc}\left(\frac{t - kT}{T}\right) = s(t) \end{aligned}$$

e cioè il segnale $s(t)$ può essere ottenuto come somma di infinite sinc centrate negli istanti dei campioni con ampiezza del campione stesso.

Alla luce di quanto detto esiste il teorema del campionamento o teorema di Shannon che riassume le condizioni per la ricostruzione di un segnale.

TEOREMA DI SHANNON: Se un segnale $s(t)$ è a banda limitata B esso è completamente descritto ai suoi campioni istantanei uniformemente sparsi nel tempo con periodo $T \leq \frac{1}{2B} \Rightarrow \frac{1}{T} \leq \frac{1}{2B} \Rightarrow f_s \geq 2B$.
 In altri termini dal segnale campionato si può risalire al segnale originale.

La formula di interpolazione appena scritta è valida nel caso limite $F = 2B$; nel caso più generale vale la seguente:

FORMULA DI INTERPOLAZIONE

per $F \geq 2B$

$$s(t) = \frac{2B}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \operatorname{sinc}[2B(t - kT)]$$

Osserviamo che la condizione di Shannon $F \geq 2B$ dice anche che all'aumentare di F le ripetizioni dello spettro si allungano; nel dominio del tempo significa aumentare il numero di campioni e si parla di SOVRACAMPIONAMENTO.

Questa condizione è necessaria perché un filtro reale di fatto non ha una banda rigorosamente rettangolare, quindi, se aumenta la distanza fra le ripetizioni di spettro, possiamo scegliere un filtro sempre più dolce.

Nota: Un segnale reale non ha mai una banda rigorosamente finita, quindi è necessario filtrare $s(t)$ prima del campionamento per definire l'intervallo $[-B, B]$.

La formula di interpolazione, facendo uso della funzione sinc, è un'astrazione matematica; per questo motivo è necessario stabilire come costruire un filtro reale. Su base del risultato che si vuole ottenere, ovvero sulla base

della qualità richiesta nel segnale ricostruito, è necessario decidere come approssimare la risposta del filtro H_2 , in modo da ottenere una risposta H_1 , finitamente realizzabile.

Consideriamo allora un filtro reale $h_1(t)$:

$$H_1(f) \iff h_1(t)$$

e osserviamo come si modifica la ricostruzione del segnale $s(t)$, ovvero analizziamo qual'è il risultato dell'operazione:

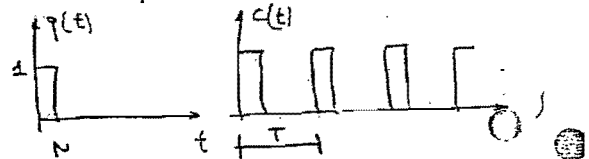
$$s'(t) = s_c(t) \otimes h_1(t)$$

CAMPIONAMENTO NATURALE

Se come l'impulso di Dirac è anch'esso una astrazione matematica, non è finitamente possibile campionare un segnale con tale impulso.

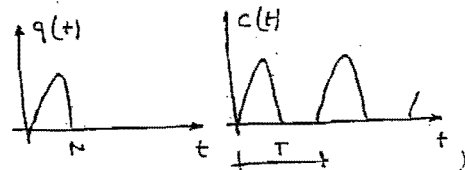
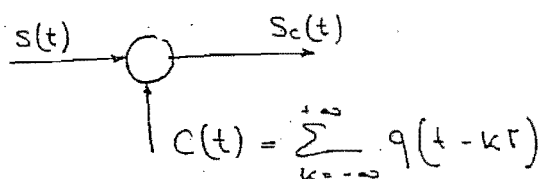
Consideriamo allora un segnale di campionamento $c(t)$ costituito da una sequenza di impulsi, comunque di breve durata: sia $q(t)$ un impulso unitario di durata N , costruiamo il segnale $c(t)$ nel modo seguente

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q(t - kT)$$



$$q(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{N}\right)$$

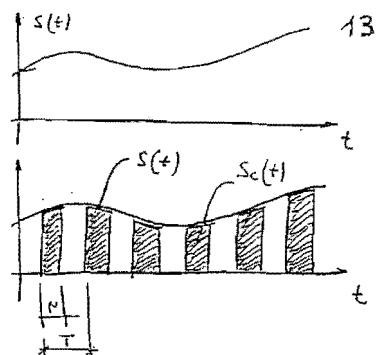
Anche l'impulso rettangolare di fatto è finitamente irrealizzabile, perciò si ricorre ad un impulso "arrotolato"



Questo è quello che si chiama CAMPIONAMENTO NATURALE.
Se ad esempio consideriamo $q(t)$ rettangolare e supponiamo di voler campionare un segnale generico

$S(t)$, il risultato del campionamento sarà costituito da porzioni di durata N del segnale:

$$S_c(t) = S(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q(t - kT)$$



Analizziamo cosa accade in frequenza.

Siccome

$$C_1(t) = \sum_k q(t - kT) = q(t) \otimes \sum_k \delta(t - kT)$$

in frequenza:

$$C_1(f) = Q(f) \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \frac{1}{T} =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k Q(f) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) =$$

inoltre essendo

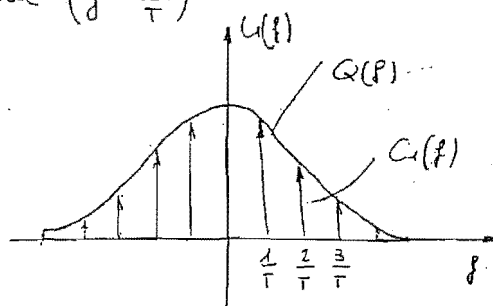
$$q(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{N}\right) \quad \text{e} \quad Q(f) = N \text{sinc}(fN) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

avremo:

$$C_1(f) = \frac{1}{T} \sum_k N \text{sinc}(fN) e^{-j\pi f T} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Lo spettro del segnale campionato sarà costituito da una sequenza di impulsi di Dirac che avranno l'area della sinc, centrati in $\left(f - \frac{k}{T}\right)$

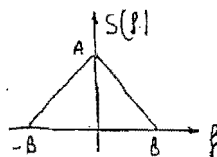
Noto l'andamento di $Q(f)$ lo spettro del segnale di campionamento è quello di figura a lato



Per studiare lo spettro del segnale campionato $S_c(t)$, assumiamo che $S(t)$ abbia uno spettro generico $S(f)$ con banda B e ampiezza A .

Allora ricordando che

$$S_c(t) = S(t) \cdot C_1(t)$$



$$S_c(f) = S(f) \otimes C(f)$$

ovvero:

$$S_c(f) = \frac{1}{T} \sum_k Q\left(\frac{k}{T}\right) S\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

che consiste in una ripetizione attenuata o amplificata dello spettro $S(f)$. Per $k=0$ lo spettro è amplificato del fattore $Q(0)$.

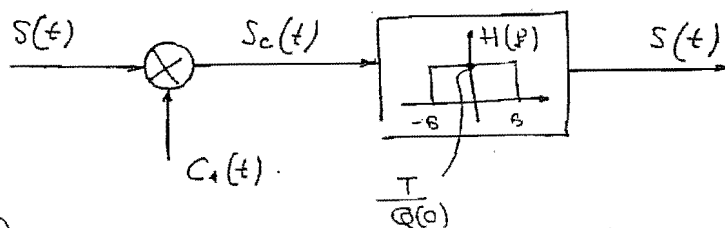
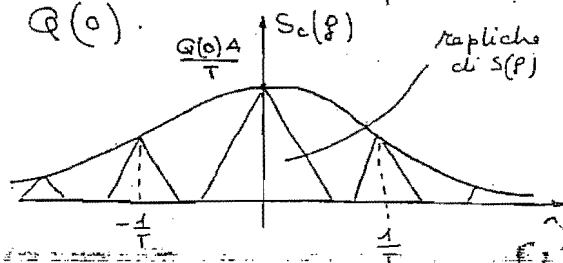
Anche in questo caso vale il teorema di Shannon,

per cui se $F \geq 2B$, è

possibile ricostruire il

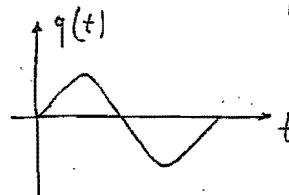
segnale di partenza da

quello campionato. Tuttavia il filtro deve attenuare dello stesso fattore $Q(0)$, per riportarci a $S(f)$



Consideriamo ora un impulso di campionamento $q(t)$ a media nulla, cioè tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(t) dt = 0$$



Allora

$$Q(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

e dalla teoria dei segnali sappiamo che

$$Q(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) dt$$

quindi si ha uno spettro $Q(f)$ nullo nell'origine.

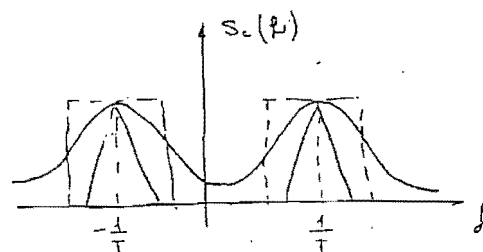
Questo fatto si ripercuote sul segnale campionato annullando la replica dello spettro $S_c(f)$ nell'origine.

infatti come già visto

15

$$S_c(f) = \frac{1}{T} \sum_n Q\left(\frac{n}{T}\right) S\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

dato lo spettro $S(f)$, quello del segnale campionato $S_c(f)$ risulta, qualitativamente come in figura.

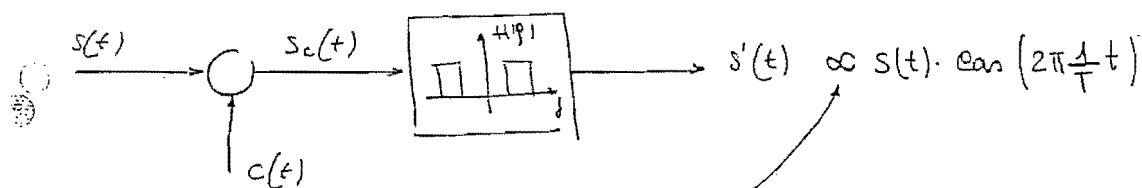


La componente informativa è contenuta in ognuna delle repliche, quindi per ricostruire il segnale $s(t)$, basta filtrare una delle suddette repliche, ad esempio quella centrata in $1/T$.

Il risultato del filtraggio, però, non è esattamente il segnale di partenza, ma una sua versione traslata in frequenza; ricordando che una traslazione in f coincide con la moltiplicazione per un seno nel tempo:

$$s'(t) = s(t) \cdot \cos\left(2\pi \frac{1}{T} t\right)$$

per giungere ad $s(t)$ è necessario, dopo il filtraggio un'operazione di DEMODULAZIONE.



In questo caso si dice che $s'(t)$ è la versione modulata in ampiezza di $s(t)$ (ovvero che sarà chiarito in seguito).

RAPPRESENTAZIONE IN BANDA BASE DI SEGNALE (Rappresentazione Complessa di segnali reali).

16

Si consideri un generico segnale reale $x(t)$.

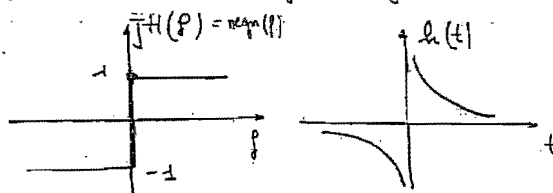
TRASFORMATA DI HILBERT $\check{x}(t)$

Si definisce trasformata di Hilbert $\check{x}(t)$, del segnale $x(t)$ il segnale ottenuto dall'operazione di filtraggio con

risposta in
frequenza

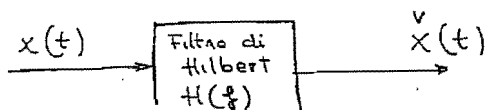
$$H(f) = -j \operatorname{segu}(f)$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$



Il filtro $H(f)$ si dice in questo caso FILTRO DI HILBERT; l'operazione può essere schematizzata nel modo seguente:

$$\operatorname{segu}(f) = \begin{cases} 1 & f \geq 0 \\ -1 & f < 0 \end{cases}$$



Schema della
Trasformata di
Hilbert $\check{x}(t)$ di $x(t)$

Osserviamo che:

$$|H(f)| = 1 \quad \text{e} \quad \arg H(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & f \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & f < 0 \end{cases}$$

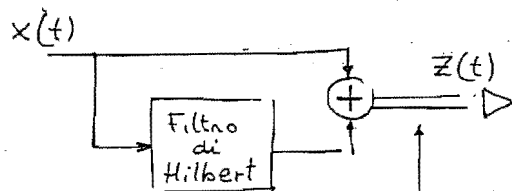
Filtro di Hilbert = filtro REALE che altera solamente la fase

SEGNALE ANALITICO $Z(t)$

Si definisce segnale analitico $Z(t)$, del segnale $x(t)$, il segnale complesso ottenuto sommando lo stesso $x(t)$ alla sua trasformata di Hilbert $\check{x}(t)$ moltiplicata per l'unità immaginaria:

$$Z(t) = x(t) + j \check{x}(t)$$

Il segnale analitico $Z(t)$, può essere schematizzato come segue:



Schema del Segnale
Analitico $Z(t)$ di $x(t)$

Osserviamo cosa accade in frequenza.

Un segnale complesso si indica con una doppia linea

Nota: Un segnale $s(t)$ è a simmetria Hermitiana se:

$$S(f) = S^*(-f) \quad (\text{ovvero ha la parte reale pari e quella immaginaria dispari})$$

mentre $s(t)$ è a simmetria Anti Hermitiana se:

$$S(f) = -S^*(-f)$$

Se siamo il Segnale Analitico $z(t)$ di $x(t)$ è un segnale complesso, risulta di fatto la combinazione lineare della sua parte reale e della sua parte immaginaria. Per la linearità della trasformata di Fourier è:

$$Z(f) = X(f) + j \tilde{X}(f) \quad \text{in quanto segnale reale}$$

Supponiamo allora $x(t)$ a simmetria Hermitiana. Con un generico spettro $X(f)$, qualitativamente come in figura, lo spettro del segnale analitico $Z(f)$ non è che quello del segnale $x(t)$, privato delle frequenze negative e moltiplicato per due.

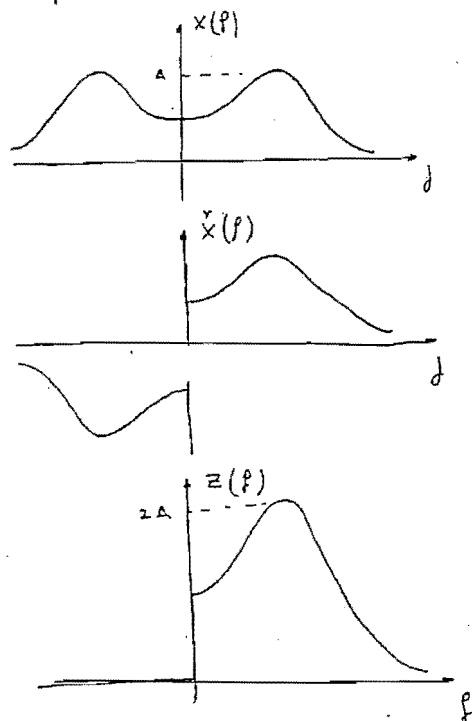
$$\tilde{X}(f) = X(f) H(f) =$$

$$= -j \operatorname{segu}(f) X(f)$$

$$Z(f) = X(f) + \operatorname{segu}(f) X(f)$$

osserviamo che

$$\operatorname{segu}(f) X(f) = \begin{cases} X(f) & f \geq 0 \\ -X(f) & f < 0 \end{cases}$$



INVILUPPO COMPLESSO $\tilde{x}(t)$ DEL SEGNALE $x(t)$ RISPETTO A f_0

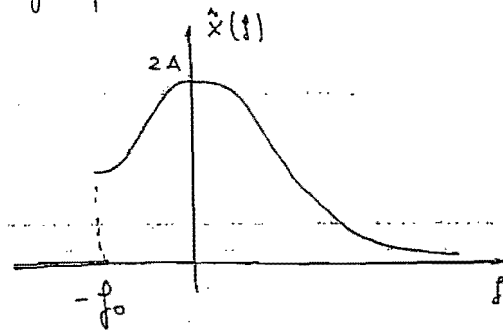
Sceita una frequenza f_0 arbitraria, si definisce inviluppo complesso $\tilde{x}(t)$ del segnale $x(t)$ rispetto alla frequenza f_0 , il segnale attenuato moltiplicando il segnale analitico $z(t)$ per l'esponenziale complesso $\exp(-j2\pi f_0 t)$. Di fatto questa operazione

consiste nella traslazione in frequenza
segnale analitico in $-f_0$;

18
mistra

$$\tilde{X}(t) = Z(t) e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\tilde{X}(f) = Z(f + f_0)$$



In riferimento alle figure
precedenti si può tracciare
lo spettro di $Z(t)$.

Vediamo come ricostruire il segnale originale $x(t)$
dai segnali appena definiti. Osserviamo innanzi tutto
che:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{Z(t)\} = \operatorname{Re}\{\tilde{X}(t) e^{j2\pi f_0 t}\}$$

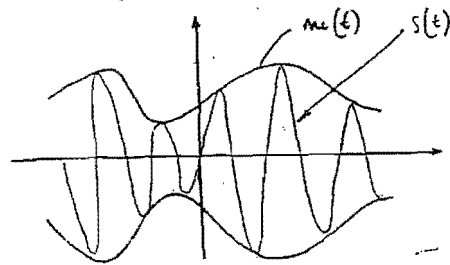
Esempio

Supponiamo di avere un segnale $s(t)$ con definito:

$$s(t) = m(t) \cos 2\pi f_0 t$$

nel quale $m(t)$ è un segnale qualsiasi, con
l'andamento di figura.

$m(t)$ si dice INViluppo
del COSENO.



Come già detto:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{X}(t) e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (1.1)$$

poiché anche $\tilde{X}(t)$ è un segnale complesso, può
essere scritto esplicitando parte reale e parte
immaginaria:

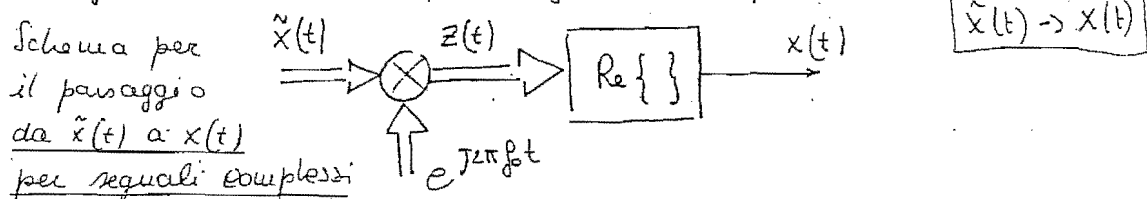
$$\tilde{X}(t) = X_c(t) + j X_s(t) \quad (*)$$

nella quale $X_c(t)$, la parte reale, è detta

COMPONENTE IN FASE (spesso indicata anche con $X_c(t)$),
mentre $X_s(t)$, la parte immaginaria, è detta
COMPONENTE IN QUADRATURA (spesso indicata con $X_q(t)$).
Tornando al discorso di prima:

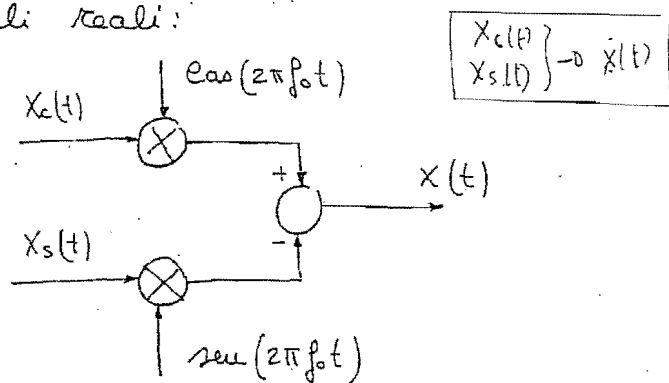
$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}\{z(t)\} = \operatorname{Re}\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = \\ &= \operatorname{Re}\left\{[X_c(t) + jX_s(t)][\cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)]\right\} = \\ &= X_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - X_s(t)\sin(2\pi f_0 t) \quad (1.2) \end{aligned}$$

Abbiamo stabilito la relazione che lega il segnale $x(t)$ alla componente in quadratura e alla componente in fase dell'involuppo complesso in f_0 . Sulla base della relazione (1.1), si può tracciare il seguente schema per segnali complessi:



Sulla base della (1.2), si può tracciare lo schema equivalente per segnali reali:

Schema 1. per il passaggio dalle componenti in fase e quadratura dell'involuppo al segnale di partenza.



Per completezza osserviamo che

$$\tilde{x}(t) = \operatorname{Im}\{z(t)\} = \operatorname{Im}\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\}$$

sulla base della quale, attraverso considerazioni analoghe alle precedenti, si giunge allo schema duale (che omettiamo).

Per determinare la relazione di passaggio da $x(t)$ alle due componenti dell'involuppo complesso, osserviamo che, per definizione

$$\check{x}(t) = z(t) e^{-j2\pi f_0 t}$$

allora:

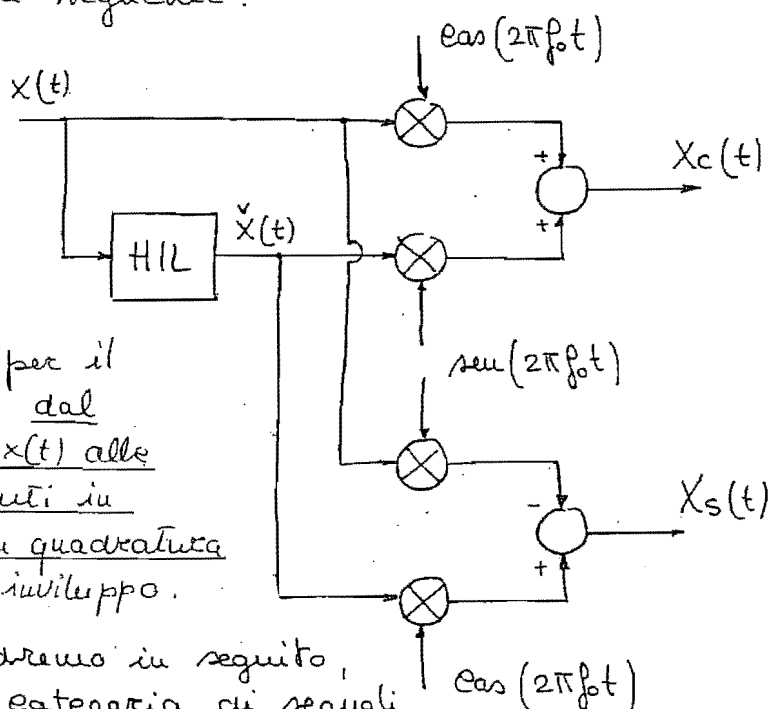
$$X_c(t) + j X_s(t) = [x(t) + j \check{x}(t)] [e^{j2\pi f_0 t} - j \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)] =$$

uguagliando parte reale e parte immaginaria si ottiene

$$X_c(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) + \check{x}(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) \quad (1.3)$$

$$X_s(t) = \check{x}(t) \cos(2\pi f_0 t) - x(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) \quad (1.4)$$

Sulla base di queste due relazioni si può tracciare lo schema seguente:



Schema per il
passaggio dal
segnale $x(t)$ alle
componenti in
fase e in quadratura
del suo involuppo.

Come vedremo in seguito, per la categoria di segnali di maggiore interesse, questo schema può essere notevolmente semplificato.

Come noto dall'algebra, un numero complesso può essere scritto in forma polare. Anche l'involuppo complesso allora diviene:

$$\tilde{X}(t) = X_c(t) + jX_s(t) = \rho(t) e^{j\Phi(t)} \quad (1.5)$$

nella quale

$$\rho(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)} \quad (1.6)$$

$$\Phi(t) = \arctg \frac{X_s(t)}{X_c(t)} \quad (1.7)$$

detti rispettivamente MODULO e FASE dell'involuppo complesso.

Proprietà dell'involuppo complesso $\tilde{X}(t)$

Si considerino due frequenze f_0 e f_1 e siano $\tilde{X}(t)$ e $\tilde{X}'(t)$ gli involuppi complessi di $x(t)$ ad esse relative:

$$\tilde{X}(t) = z(t) e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\tilde{X}'(t) = z(t) e^{-j2\pi f_1 t}$$

In entrambi i casi il modulo vale

$$\rho(t) = \rho'(t) = |z(t)|$$

quindi il modulo non dipende dalla frequenza.

ANALISI IN FREQUENZA DELL'INVOLUPPO COMPLESSO

Per definizione

$$\tilde{X}(t) = X_c(t) + jX_s(t)$$

nella quale $X_c(t)$ e $X_s(t)$ sono segnali reali; in quanto tali, gli spettri $X_c(f)$ e $X_s(f)$ sono a simmetria Hermitiana e lo spettro $jX_s(f)$ è a simmetria Anti Hermitiana. Come già detto:

$$\tilde{X}(f) = X_c(f) + jX_s(f)$$

Nota: Un segnale complesso $S(t)$, con spettro $S(f)$, può sempre essere scritto come somma di un segnale a simmetria Hermitiana e uno a simmetria Anti Hermitiana

Per quanto detto:

22

$$S(f) = S_H(f) + S_A(f)$$

$$S_H(f) = S_H^*(-f)$$

$$S_A(f) = -S^*(-f)$$

inoltre

$$S_H(f) = \frac{S(f) + S^*(-f)}{2}$$

$$S_A(f) = \frac{S(f) - S^*(-f)}{2}$$

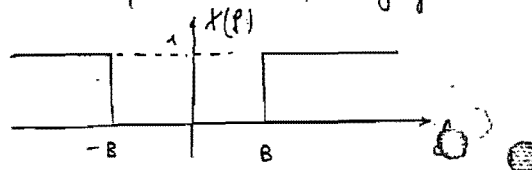
Per la nota appena vista

$$X_c(f) = \frac{\hat{X}(f) + \hat{X}^*(-f)}{2} \quad (1.8)$$

$$X_s(f) = \frac{\hat{X}(f) - \hat{X}^*(-f)}{2j} \quad (1.9)$$

Esempio

Si consideri un segnale $x(t)$ con spettro $X(f)$ di figura. Determinare $x(t)$ in funzione delle due componenti in fase e in quadratura.



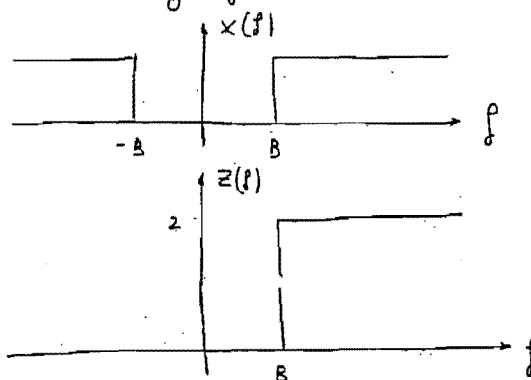
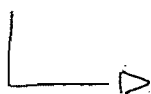
Sappiamo che:

$$X(t) = X_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - X_s(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

ponendo $f_0 = B$, per via grafica:

$$z(t) = x(t) + j\check{x}(t)$$

$$Z(f) = X(f) + j\check{X}(f)$$



dato $x(f)$

23

$$\begin{aligned} \dot{x}(f) &= -j \operatorname{reg}(f) x(f) = \\ &= \begin{cases} -j x(f) & f \geq 0 \\ j x(f) & f < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} z(f) &= x(f) + j \dot{x}(f) = \\ &= \begin{cases} 2x(f) & f \geq B \\ 0 & f < B \end{cases} \end{aligned}$$

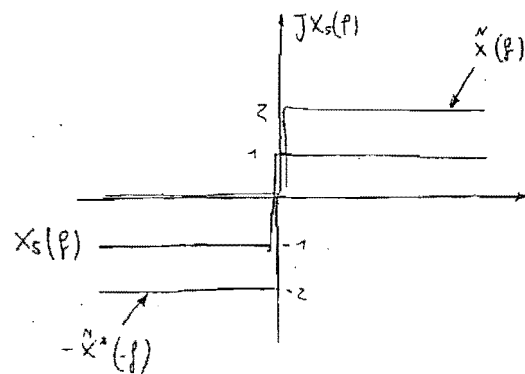
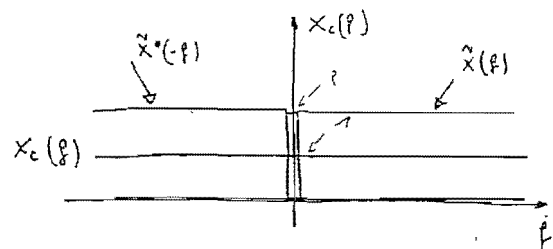
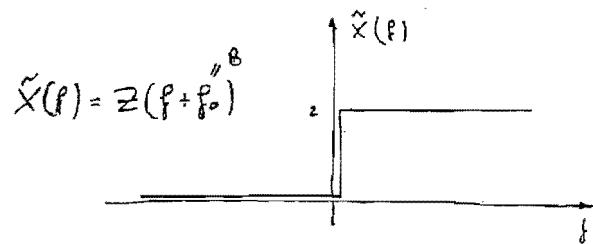
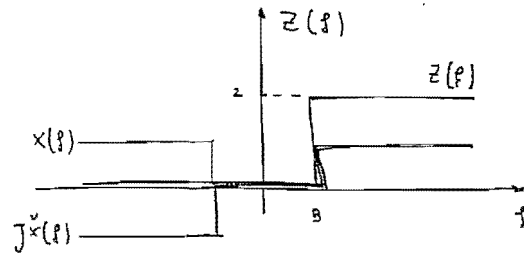
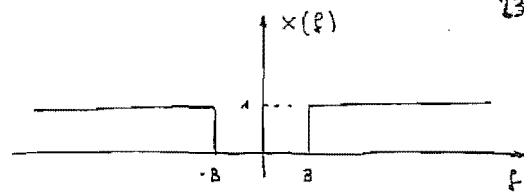
per le due relazioni (1.8) e (1.9)

$$x_c(f) = \frac{\tilde{x}(f) + \tilde{x}^*(-f)}{2}$$

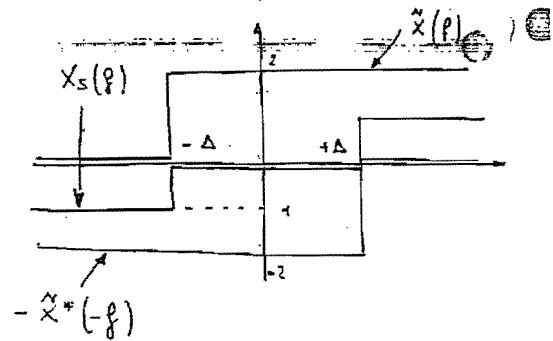
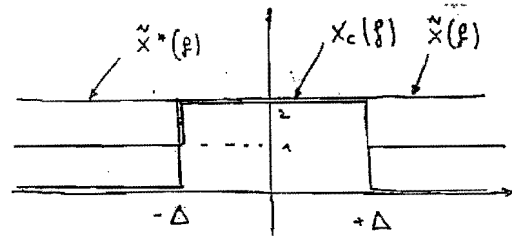
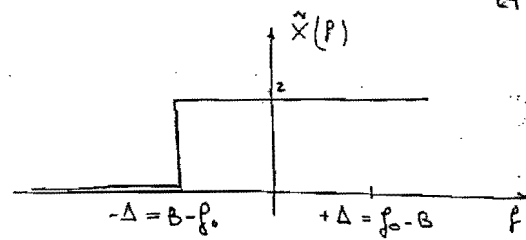
$$x_s(f) = \frac{\tilde{x}(f) - \tilde{x}^*(-f)}{2j}$$

eau

$$\tilde{x}(f) = z(f + f_0)$$



Supponiamo di prendere $p_0 > B$ e di aumentare la traslazione, con la quale si ottiene $\tilde{X}(f)$. Ma l'ampiezza $X(f)$ e $Z(f)$ rimangono invariati, ciò che cambia è l'involuppo complesso $\tilde{X}(f)$.



$$X_c(f) = 1 + \text{rect}\left(\frac{f}{2\Delta}\right)$$

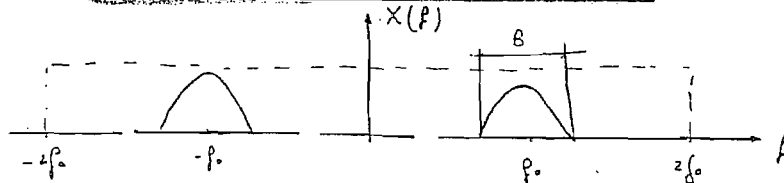
$$\Rightarrow x_c(t) = \delta(t) + \text{sinc}(2\Delta t)$$

SEGNALI IN BANDA PASSANTE (o Segnali Passa Banda) 25

Nelle comunicazioni elettroniche, analogiche o numeriche che siano, i segnali hanno una BANDA limitata B , centrata in f_0 ; nella maggior parte dei casi f_0 è piuttosto elevata ($f_0 \gg B/2$).

Segnale PASSA BANDA: Si definisce Segnale Passa Banda $x(t)$ centrato alla frequenza f_0 , se il suo spettro $X(f)$ si estende al più tra $-2f_0$ e $2f_0$, ovvero:

$$|X(f) \neq 0 \iff -2f_0 < f < 2f_0$$



- Proprietà dei Segnali Passa banda:

1. Se $x(t)$ è un Segnale Passa Banda, il suo inviluppo complesso, la componente in fase e quella in quadratura sono segnali PASSA BASSO di Banda f_0 .

Dimostrazione

Per essere definito $z(t)$ è passa basso di banda $2f_0$, infatti: $Z(f) \neq 0$ per $0 \leq f \leq 2f_0$.

Il canale complesso $\tilde{X}(f) = Z(f + f_0)$

avremo

$$\tilde{X}(f) = Z(f + f_0) \neq 0 \text{ per } -f_0 \leq f \leq f_0$$

questo significa che

$$X_c(f) = \frac{\tilde{X}(f) + \tilde{X}^*(-f)}{2} \neq 0 \text{ per } -f_0 \leq f \leq f_0$$

$$X_s(f) = \frac{\tilde{X}(f) - \tilde{X}^*(-f)}{2j} \neq 0$$

ovvero sono passa basso di banda f_0 .

Introducendo l'involuppo complesso $\tilde{x}(t)$ del segnale reale $x(t)$, si ha la possibilità di lavorare con segnali passa banda anziché passa banda in f_0 . In sostanza si dice che $\tilde{x}(t)$, o analogamente $X_c(t)$ e $X_s(t)$, sono l'EQUIVALENTE IN BANDA BASE DEL SEGNALE PASSA BANDA $x(t)$. Il vantaggio è evidente se pensiamo che f_0 in genere è la frequenza della portante del segnale $x(t)$ ottenuto modulando un qualsiasi segnale da trasmettere. In quanto tale, f_0 può essere molto elevata (nelle comunicazioni satellitari f_0 arriva anche a 90 GHz), perciò può essere davvero problematico progettare dispositivi che lavorino a tale frequenza.

Consideriamo allora un segnale Passa Banda centrato in f_0 ; sappiamo che se $X(f)$ è lo spettro di $x(t)$,

$$\underline{Z(f) = 2X(f)u(f)}$$

inoltre

$$\begin{aligned}\tilde{X}(f) &= Z(f + f_0) = \\ &= \underline{2X(f + f_0)u(f + f_0)}\end{aligned}$$

È evidente che per ottenere $\tilde{X}(f)$, basterebbe filtrare con $H_p(f)$ rettangolare di banda $2f_0$

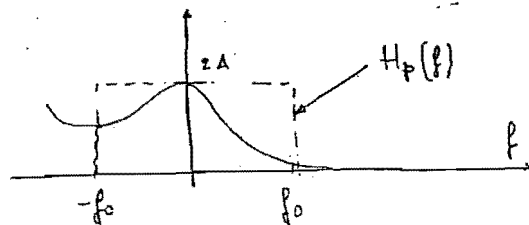
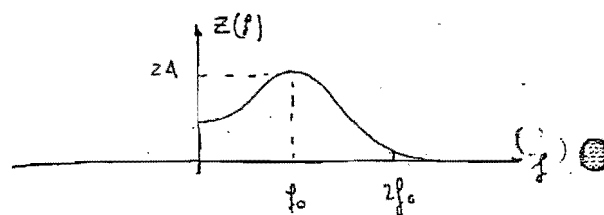
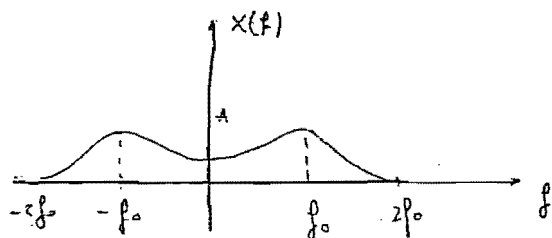
$$\underline{\tilde{X}(f) = 2X(f + f_0)H_p(f)}$$

con

$$H_p(f) = \begin{cases} 1 & -f_0 \leq f \leq f_0 \\ 0 & |f| > f_0 \end{cases}$$

Nel dominio del tempo

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= 2 \left[x(t) e^{-j2\pi f_0 t} \right] \otimes h_p(t) = \\ &= 2 \left[x(t) \cos(2\pi f_0 t) - jx(t) \sin(2\pi f_0 t) \right] \otimes h_p(t) =\end{aligned}$$



$$\tilde{X}(t) = X_c(t) + jX_s(t)$$

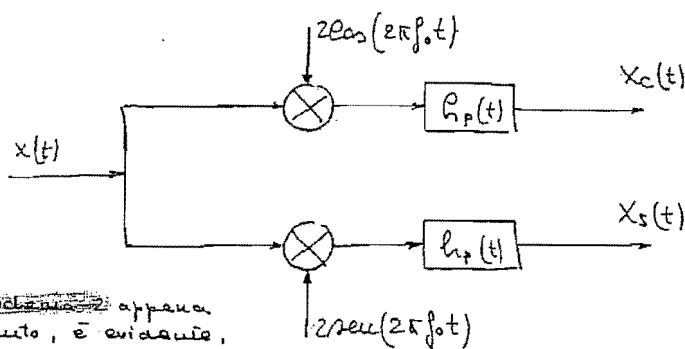
uguagliando parte reale e parte immaginaria

$$X_c(t) + jX_s(t) = 2 \left[x(t) \cos(2\pi f_0 t) \right] \otimes h_p(t) - j \left[x(t) \sin(2\pi f_0 t) \right] \otimes h_p(t)$$

$$X_c(t) = 2x(t) \cos(2\pi f_0 t) \otimes h_p(t) \quad (1.10)$$

$$X_s(t) = -2x(t) \sin(2\pi f_0 t) \otimes h_p(t) \quad (1.11)$$

sulla base delle relazioni (1.10) e (1.11) appena scritte, perveniamo al seguente schema di passaggio:

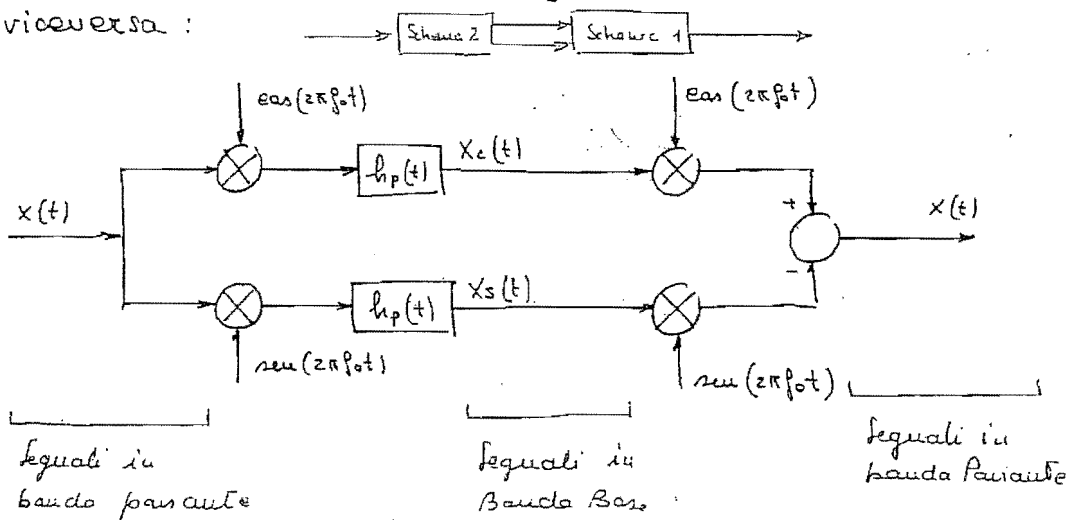


Schema 2 per il passaggio dal segnale $x(t)$ alle due componenti in fase e in quadratura dell'involucro complesso.

Lo schema appena ottenuto, è evidente, risulta notevolmente

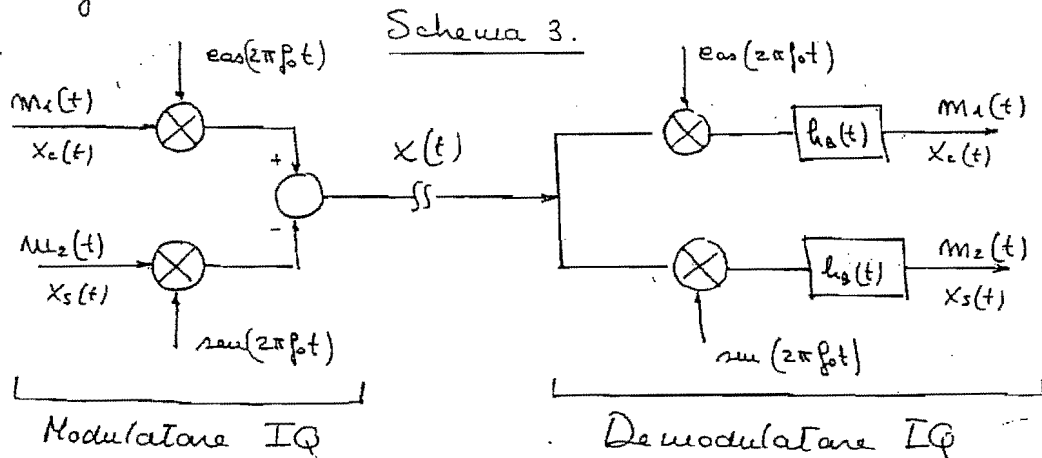
semplificato grazie alle proprietà dei segnali passa banda.

In generale allora si può tracciare uno schema per il passaggio da segnali in BANDA PASSANTE $x(t)$ a segnali in BANDA BASE $X_c(t)$ e $X_s(t)$ e ancora da segnali in BANDA BASE a segnali in BANDA PASSANTE, e viceversa:



Una possibile applicazione dei due schemi (schema 1 e 2 schema 2), può essere la seguente. Siano $m_1(t)$ e $m_2(t)$ due segnali, ad esempio due segnali video, in banda base. Per poter essere trasmessi, devono essere modulati (traslati ad una frequenza più elevata); allora si può pensare di ~~modulare $m_1(t)$ con una portante e $m_2(t)$ con la stessa in quadratura~~; in questo modo si ottiene tramite lo schema 1, un unico segnale in banda passante $x(t)$, che può essere trasmesso.

Il ricevitore può allora essere realizzato con lo schema 2 che estrae da $x(t)$ le due componenti dell'involuppo complesso, che in sostanza sono $m_1(t)$ e $m_2(t)$. Questa operazione è detta MODULAZIONE IQ e permette di trasmettere due segnali m_1 e m_2 sovrapposti nel tempo e in frequenza. Lo schema realizzativo è il seguente:



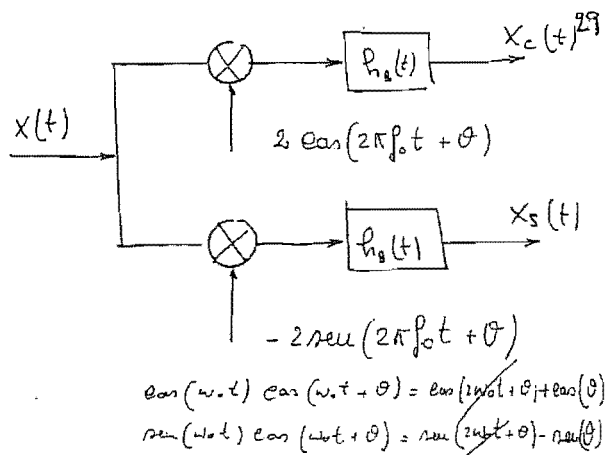
Il problema della MODULAZIONE IQ, risiede nel fatto che, un eventuale ritardo o anticipo di fase nel demodulatore IQ, compromette la possibilità di ricostituire i segnali in banda base di origine.

Dallo schema 3, sappiamo che il segnale trasmesso include i segnali $m_1(t)$ e $m_2(t)$ e nella forma

$$X(t) = m_1(t) \cos(2\pi f_0 t) - m_2(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

Supponiamo che il demodulatore sia del tipo di figura.

^{dimostriamo} Dimostriamo con le formule trigonometriche che affinché $X_c(t) = m_1(t)$ e $X_s(t) = m_2(t)$, deve essere $\theta = 0$.



$$\begin{aligned}
 X_c(t) &= 2x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) = \\
 &= 2m_1(t) \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) - 2m_2(t) \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) = \\
 &= 2m_1(t) \cos(\omega_c t) \cos(\omega_c t + \theta) - 2m_2(t) \sin(\omega_c t) \cos(\omega_c t + \theta)
 \end{aligned}$$

i termini in $2\omega_c$ vengono eliminati dal filtraggio h_s

- perché escano dalla banda, quindi rimane: con le formule di addizione di seno e coseno:

$$2x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) = m_1(t) \cos \theta - m_2(t) \sin \theta$$

Valendo

$$X_c(t) = m_1(t)$$

$$m_1(t) \cos \theta - m_2(t) \sin \theta = m_1(t)$$

si deduce

$$\theta = 0$$

Analogo discorso si può fare per ottenere $X_s(t) = m_2(t)$.

Per poter demodulare correttamente il segnale ricevuto gli oscillatori di portante non devono

essere sfasati tra loro. Al più se lo sfasamento fosse $\theta = \pi/2$, otterremmo $X_c(t) = m_2(t)$ e $X_s(t) = m_1(t)$

Per molti casi per non incorrere in eventuali sfasamenti, la portante viene ^{derivata} dedotta direttamente dal segnale ricevuto, tramite un dispositivo detto ESTRATTORE DI SINCRONISMO. La presenza di rumore

molto spesso ci si deve accontentare di ottenere la stessa frequenza, ma un leggero sfarfallio.
 È evidente che se θ è molto piccolo

$$\cos \theta \approx 1 \quad \text{e} \quad \sin \theta \approx 0$$

quindi

$$m_1(t) \cos \theta - m_2(t) \sin \theta \approx m_1(t)$$

Supponiamo di avere $X(t)$ e $h(t)$ passa banda; allora il segnale attenuato come uscita del blocco $h(t)$ in

$$\begin{array}{c} x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) \end{array} \quad Y(f) = X(f)H(f) \quad \text{risposta ad } x(t)$$

È a sua volta un segnale passa banda; in realtà, affinché anche $y(t)$ sia passa banda, basterebbe che almeno uno dei due fra $x(t)$ e $h(t)$ fosse passa banda, infatti, per $|f| > 2f_0$, uno dei due ^{oppure} sarebbe nullo e con $y(t)$.

Ricaviamo l'involuppo complesso $\tilde{y}(t)$ da quelli di $x(t)$ e $h(t)$.
 Sappiamo che:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(f) &= 2Y(f+f_0)H_p(f) = \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \cdot 2 X(f+f_0)H(f+f_0)H_p(f)H_p(f) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[2 X(f+f_0)H_p(f) \cdot 2 H(f+f_0)H_p(f) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{H}(f) \tilde{X}(f) \quad (1.12) \end{aligned}$$

allora:

$$(1.13) \quad \tilde{y}(t) = \frac{1}{2} \tilde{h}(t) \otimes \tilde{x}(t) \quad \begin{array}{c} \tilde{x}(t) \rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \tilde{h}(t)} \rightarrow \tilde{y}(t) \end{array}$$

Scriviamo $\tilde{y}(t)$ esplicitando le due componenti

$$\tilde{y}(t) = y_c(t) + j y_s(t)$$

inoltre:

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2} \tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t) =$$

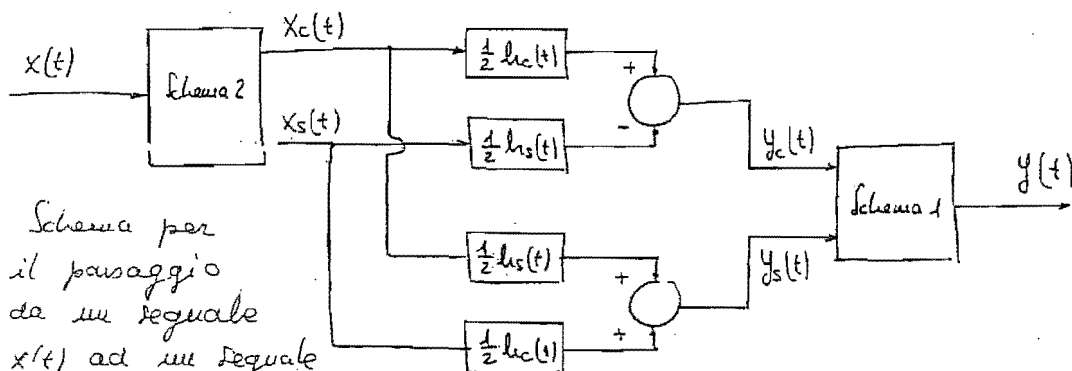
$$\begin{aligned}
 &= [x_c(t) + j x_s(t)] \otimes \frac{1}{2} [h_c(t) + j h_s(t)] = \\
 &= \left[x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t) - x_s(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t) \right] + \\
 &\quad + j \left[x_s(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t) + x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t) \right]
 \end{aligned}$$

uguagliando parte reale e parte immaginaria

$$y_c(t) = x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t) - x_s(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t) \quad (1.1)$$

$$y_s(t) = x_s(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t) + x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t) \quad (1.1)$$

Sulla base delle relazioni appena scritte si
rieviene al seguente schema:



Schema per
il passaggio
da un segnale
 $x(t)$ ad un segnale
 $y(t) = x(t) \otimes h(t)$

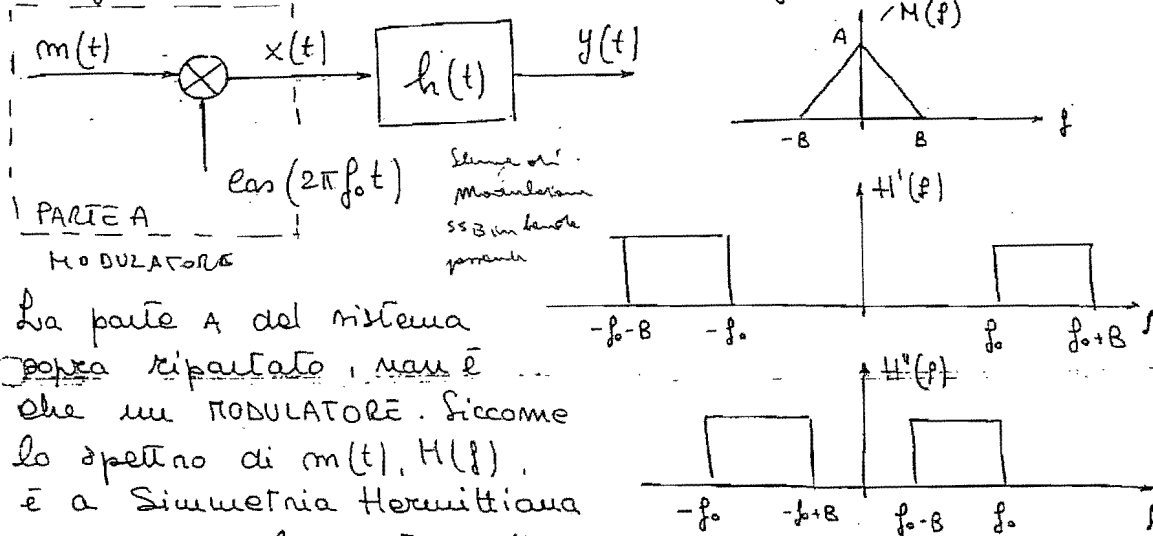
Finire!

MODULAZIONE SSB

32

Si consideri un segnale $m(t)$ ^{quello è un segnale limitato} passa banda, con banda B e un filtro $h(t)$ passa banda.

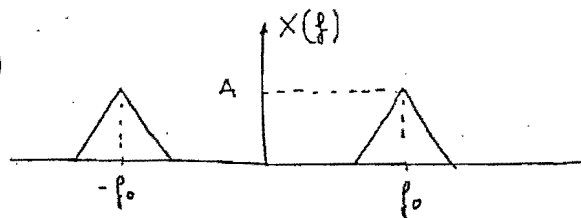
Inseriamo un modulatore e analizziamo il funzionamento dello schema seguente:



1) PARTE A MODULATORE

La parte A del sistema sopra riportato, non è che un MODULATORE. Siccome lo spettro di $m(t)$, $H(f)$, è a Simmetria Hermitiana conoscendo la parte delle frequenze positive o quella delle frequenze negative, è nato l'intero spettro $H(f)$. La parte di spettro di un segnale passa banda delle frequenze positive è detta BANDA LATERALE SUPERIORE (Upper Band UB), mentre quella per frequenze negative è detta BANDA LATERALE INFERIORE (Lower Band LB).

La parte A del dispositivo, non fa che traslare lo spettro di $m(t)$, centrandolo in f_0 e $-f_0$; esso si dice MODULATORE A DOPPIA BANDA LATERALE (DSB)

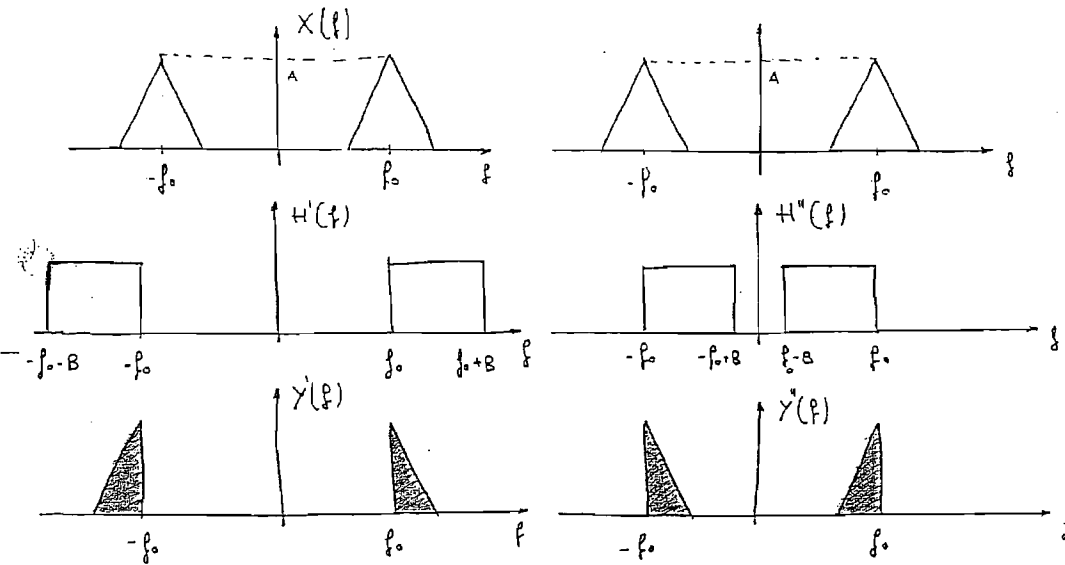


Nata la simmetria dello spettro di $X(f)$, si può pensare di limitare l'occupazione frequenziale, eliminando una delle due bande laterali. In questo modo si ottiene un segnale a SINGOLA BANDA LATERALE. Questa operazione può essere

eseguita con il filtro $h(t)$, detto FILTRO SSB.

33

L'eliminazione della banda laterale, può essere di due tipi: Se si impiega il filtro $h'(t)$, si elimina la banda laterale inferiore ottenendo un segnale SSB-UB (Single Side Band - Upper Band); se si usa il filtro $h''(t)$, si elimina la banda superiore, ottenendo un segnale SSB-LB (Single Side Band - Lower Band).



MODULAZIONE SSB-UB

MODULAZIONE SSB-LB

Con il dispositivo impiegato, detto MODULATORE SSB si passa da un segnale in banda base ad uno in banda passante e poi si esegue il filtraggio.

pag. 32

Vediamo gli equivalenti in banda base di $x(t)$ e $y(t)$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

allora, per la (1.13)

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \otimes \frac{1}{2} \tilde{h}(t)$$

assumiamo che $\tilde{x}(t) = m(t)$, ovvero

$$x_c(t) = m(t)$$

$$x_s(t) = 0$$

Analogamente

dato $H(f)$, attraverso le relazioni seguenti, si determinano le due componenti:

$$H_c(f) = \frac{\tilde{H}(f) + \tilde{H}^*(-f)}{2}$$

$$H_s(f) = \frac{\tilde{H}(f) - \tilde{H}^*(-f)}{2j}$$

Se si assume $H_c(f)$ deve filtrare $X_c(f)$ che è già di banda B , si può assumere:

$$H_c(f) = 1$$

Analogamente

$$H_s(f) = \begin{cases} 1 & f \geq 0 \\ -1 & f < 0 \end{cases} = -j \operatorname{segno}(f)$$

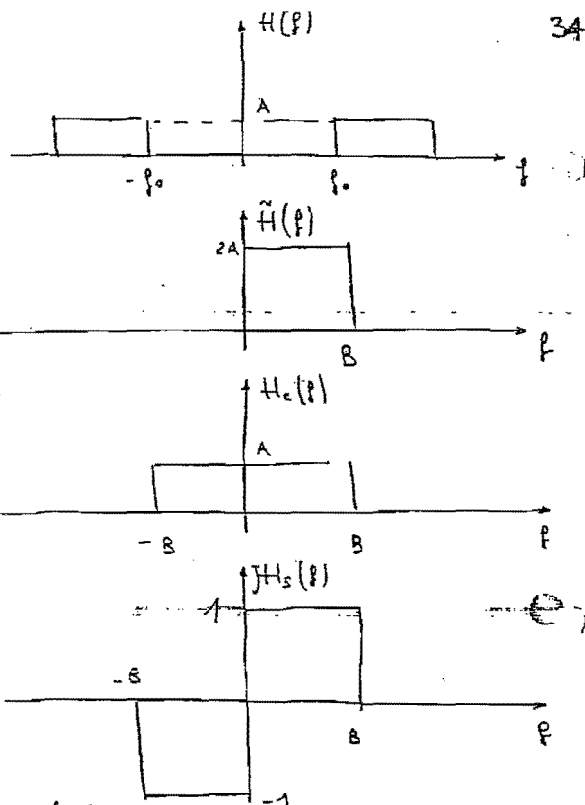
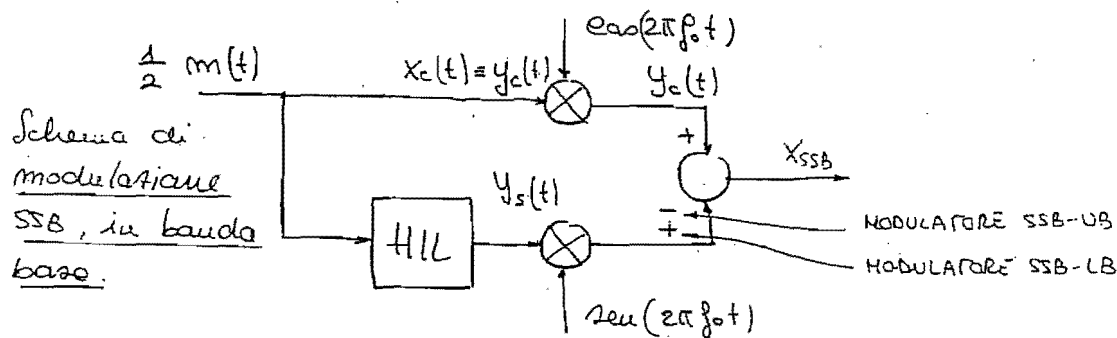
Si deduce che $\tilde{H}(f) = \text{FILTRO DI HILBERT}$

ponendo $X_s(t) = 0$ nelle (1.14) e (1.15) si ottiene:

$$y_c(t) = x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t)$$

$$y_s(t) = x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t)$$

che si introduce nel seguente schema



La differenza tra quest'ultimo dispositivo e quello iniziale esiste nel fatto che l'ultimo esegue l'operazione di filtraggio direttamente sui segnali in banda base e poi esegue la traslazione.

Di fatto i due sono equivalenti.

Dallo schema appena tracciato, si può scrivere l'espressione di $y(t)$ in forma chiusa:

$$y(t) = \frac{m(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t) - \frac{\dot{m}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t) \quad \text{SSB-UB}$$

$$y(t) = \frac{m(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t) + \frac{\dot{m}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t) \quad \text{SSB-LB}$$

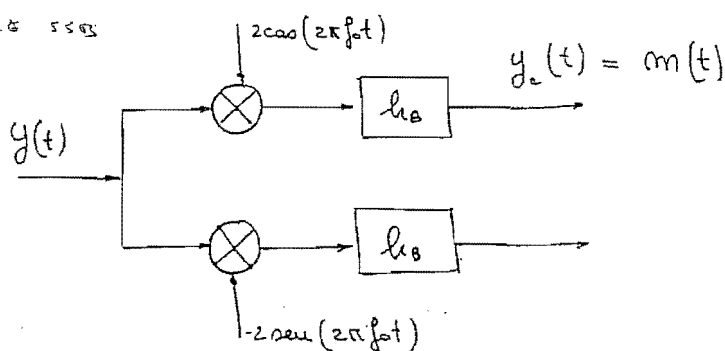
Dalle due espressioni si deduce che

$$\frac{m(t)}{2} = \text{componente in fase}$$

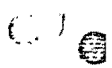
$$\frac{\dot{m}(t)}{2} = \text{componente in quadratura}$$

allora $m(t)$ può essere ottenuto dal ramo superiore del dispositivo rappresentato nello schema 2.

DEMODULATORE SSB
x UB, LB



Questo è lo schema realizzativo del DEMODULATORE SSB e vale sia per UB che LB.



Qualsiasi segnale $x(t)$, abbiamo visto, può essere scritto come somma di due componenti in fase e in quadratura. Se $x(t)$ è passa banda, $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono in banda base.

$$x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t$$

Se $x(t)$ è ad ENERGIA FINITA

$$\boxed{E_x = \frac{1}{2} E_c + \frac{1}{2} E_s} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} E < \infty &\Rightarrow P = 0 \\ P < \infty &\Rightarrow E = \infty \end{aligned}$$

Se $x(t)$ è a POTENZA FINITA

$$\boxed{P_x = \frac{1}{2} P_c + \frac{1}{2} P_s} \quad (2.2)$$

Ricordiamo che se un segnale è a Energia finita allora è a Potenza media nulla; viceversa se è a potenza media finita allora è ad Energia infinita.

- Ricordiamo anche due importanti risultati

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(f) s_2^*(f) df \quad \text{TEOREMA DI PARSEVAL}$$

$$(2.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(f)|^2 df \quad \text{UGUAGLIANZA DI PARSEVAL}$$

Dimostrazione (della (2.1), per la (2.2) si ha la dim. analoga)
Sappiamo che

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\} =$$

proprietà dei numeri complessi

$$= \frac{1}{2} \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} \tilde{x}^*(t) e^{-j2\pi f_0 t}$$

allora dall'uguaglianza di Parseval:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} \tilde{x}^*(t) e^{-j2\pi f_0 t} \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t) e^{j4\pi f_0 t} dt + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^{*2}(t) e^{-j4\pi f_0 t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \end{aligned}$$

Analizziamo i singoli integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t) e^{j4\pi f_0 t} dt = \quad (A)$$

ponendo

$$\tilde{x}^2(t) = s_1(t) \text{ e } e^{j4\pi f_0 t} = s_2(t)$$

e applicando il teorema di Parseval

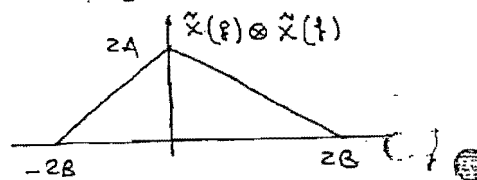
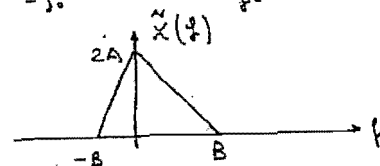
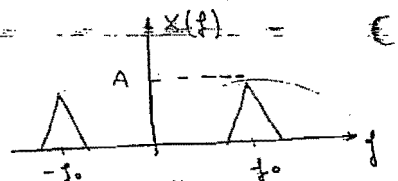
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t) e^{j4\pi f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{X}(f) \otimes \tilde{X}(f)] \cdot \delta(f + 2f_0) df =$$

ricordando che essendo $\tilde{x}(t)$ in banda base

proprietà che deriva dalla teoria dei segnali $\left(\tilde{X}(f) \neq 0 \iff |f| < f_0 \right) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{X}(f) \otimes \tilde{X}(f) \neq 0 \\ \text{per } |f| < 2f_0 \end{cases}$

e ricordando che la moltiplicazione per un δ equivale alla traslazione:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{X}(f) \otimes \tilde{X}(f)] \delta(f + 2f_0) df \\ = [\tilde{X}(f) \otimes \tilde{X}(f)] \Big|_{f = -2f_0} = 0 \end{aligned}$$



allora l'integrale (A) è nullo.

L'integrale (B)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^{*2}(t) e^{-j4\pi f_0 t} dt =$$

è anch'esso nullo perché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^{*2}(t) e^{-j4\pi f_0 t} dt = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t) e^{j4\pi f_0 t} dt \right]^* = 0$$

otteniamo allora che

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_c^2(t) + x_s^2(t)] dt = \\ &= \frac{1}{2} E_c + \frac{1}{2} E_s \end{aligned}$$

(Rappresentazione complessa di processi reali)

Si consideri un generico processo stocastico $N(t)$; ricordiamo che ad esso sono associate infinite "realizzazioni" che di fatto non sono altre che segnali determinati:

$$N(t) \longrightarrow m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)$$

TRASFORMATA DI HILBERT $\check{N}(t)$

La trasformata di Hilbert è definita esattamente come per i segnali reali:

$$\check{N}(t) = N(t) \otimes h(t) \quad \text{con} \quad h(t) = \frac{1}{\pi t}$$

o)

$$\check{N}(f) = N(f)H(f) \quad \text{con} \quad H(f) = -j \operatorname{sign}(f)$$

PROCESSO ANALITICO $Z(t)$

Si definisce processo analitico $Z(t)$ di $N(t)$, il processo complesso che ha per parte reale il processo $N(t)$ stesso e per parte immaginaria la trasformata di Hilbert $\check{N}(t)$ del processo di partenza.

$$Z(t) = N(t) + j \check{N}(t)$$

Analogamente il processo analitico è il processo che ha come realizzazioni i segnali analitici delle realizzazioni del processo di partenza:

$$\begin{cases} z_1(t) = m_1(t) + j \check{m}_1(t) \\ z_2(t) = m_2(t) + j \check{m}_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) = m_n(t) + j \check{m}_n(t) \end{cases}$$

INVOLUPPO COMPLESSO $\tilde{N}(t)$ DEL PROCESSO $N(t)$ RISPETTO A f_0

Sceglia una frequenza arbitraria f_0 si definisce involucro complesso $\tilde{N}(t)$ del processo $N(t)$ rispetto alla frequenza f_0 , il processo ottenuto moltiplicando il processo analitico $Z(t)$ per l'esponenziale $\exp(-j2\pi f_0 t)$.

ovvero:

$$\begin{cases} \tilde{N}(t) = Z(t) e^{-j2\pi f_0 t} \\ \tilde{N}(f) = Z(f + f_0) \end{cases}$$

Anche in questo caso l'involuppo complesso, può essere espresso come somma di una COMPONENTE IN FASE $N_c(t)$ e una COMPONENTE IN QUADRATURA $N_s(t)$:

$$\tilde{N}(t) = N_c(t) + j N_s(t)$$

Analogamente, l'involuppo complesso di un processo, non è che il processo che ha per realizzazioni gli involuppi complessi delle realizzazioni del processo $N(t)$ di partenza

$$\tilde{m}_1(t) = m_{c1}(t) + j m_{s1}(t)$$

$$\tilde{m}_2(t) = m_{c2}(t) + j m_{s2}(t)$$

⋮

$$\tilde{m}_n(t) = m_c(t) + j m_{sn}(t)$$

Ma generale ogni operazione definita per i segnali determinati, applicata ad un processo, equivale alla stessa applicata a ciascuna realizzazione.

Ogni schema visto per i segnali è da ritenersi valido per i processi, con le dovute considerazioni.

RICHIAMO SULLA STAZIONARIETÀ DI UN PROCESSO

Un processo si dice STAZIONARIO IN SENSO STRETTO (SSS) se le sue statistiche non dipendono dall'origine dell'asse dei tempi; in sostanza se i processi

$$X(t) \text{ e } X(t+\varepsilon)$$

con ε arbitrario hanno le stesse statistiche.

In sostanza tutte le statistiche di primo ordine η_x , σ_x^2 , $E\{x^2\}$ non dipendono da t .

Fissato $t = \bar{t}$, tutte le variabili aleatorie estratte sono equidistribuite (uguale valore medio), uguale potenza media e uguale varianza.

Un processo si dice STAZIONARIO IN SENSO LATO (SSL)⁴¹ se la funzione valore medio è costante e la funzione di autocorrelazione non dipende da t_1 e t_2 ma solo dalla differenza N :

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= R_x(N) \\ \eta_x(t) &= \eta_x = \text{costante} \end{aligned} \quad N = t_1 - t_2$$

IPOTESI SEMPLIFICATIVA

Nella pratica, i processi che descrivono fenomeni come ad esempio il "rumore", sono soggetti ad alcune ipotesi semplificative. In particolare supponiamo che il processo $N(t)$ sia stazionario in senso lato (SSL) e media nulla:

$$\boxed{E\{N(t)\} = \eta_N = 0}$$

con Autocorrelazione

$$\boxed{R_{NN}(N) = E\{N(t+N)N(t)\}}$$

Sotto queste ipotesi, si potrebbe dimostrare che l'inviluppo complesso del processo $\tilde{N}(t)$ è a sua volta stazionario in senso lato a valore medio nullo:

$$\boxed{E\{\tilde{N}(t)\} = 0}$$

con Autocorrelazione

$R_{\tilde{N}\tilde{N}}(N)$ è un segnale determinato;

$$\boxed{R_{\tilde{N}\tilde{N}}(N) = E\{\tilde{N}(t+N)\tilde{N}(t)\} = \tilde{R}_{NN}(N)}$$

PROCESSI IN BANDA PASSANTE (o Processi Pansa Banda)

Processo PASSA BANDA: Si definisce Processo Pansa Banda $N(t)$, intorno ad una frequenza f_0 , se la sua funzione di Autocorrelazione è un segnale determinato di tipo Pansa Banda. Questo significa che la Densità spettrale di potenza $S_{NN}(f)$, che è l'equivalenza

in frequenza dell'autocorrelazione è non⁴²
nullo solo nell'intervallo che va da $-2f_0$ a $2f_0$.

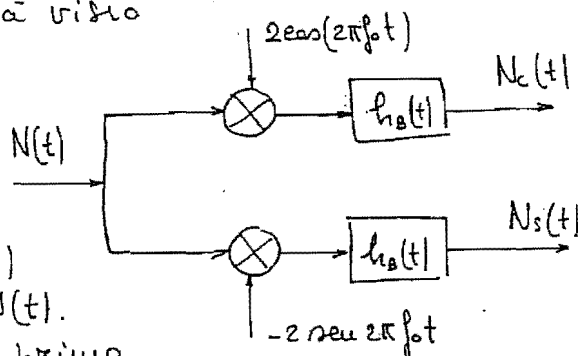
$$S_{NN}(f) \neq 0 \iff |f| \leq 2f_0$$

Proprietà dei processi Pausa Banda:

Sia $N(t)$ un processo Pausa Banda, ovvero tale che:

$$S_{NN}(f) \neq 0 \iff |f| < 2f_0$$

Mettere un processo in ingresso ad un sistema, significa trasformare, attraverso il sistema stesso, tutte le realizzazioni del processo. Per passare dal processo $N(t)$ alle componenti in fase e in quadratura $N_c(t)$ e $N_s(t)$ di $N(t)$, si utilizza lo stesso schema 2 impiegato per i segnali determinati; analogamente per l'operazione inversa si utilizza lo schema 1. già visto



Determiniamo ora le statistiche di $N_c(t)$ e $N_s(t)$ da quelle di $N(t)$.

Supposto $N(t)$, come prima, SSL, a valore medio nullo e pausa banda, possiamo dire, come accadeva per i segnali determinati, che i processi $N_c(t)$ e $N_s(t)$ sono stazionari SSL e a valore medio nullo.

$$\underline{E\{N_c(t)\} = E\{N_s(t)\} = 0}$$

Qual'è la funzione di autocorrelazione è la stessa per le due componenti:

$$\underline{R_{cc}(\tau) = E\{N_c(t+\tau)N_c(t)\} = E\{N_s(t+\tau)N_s(t)\} = R_{ss}(\tau)}$$

Qui particolare $R_{cc}(\tau)$ e $R_{ss}(\tau)$ sono la COMPONENTE IN FASE di $R_{NN}(\tau)$.

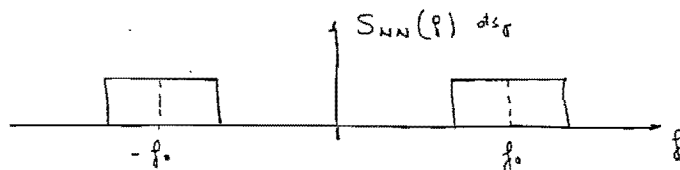
Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione⁴³ di $N_c(t)$ e $N_s(t)$, avremo:

$$R_{sc}(N) = E \{ N_s(t+N) N_c(t) \}$$

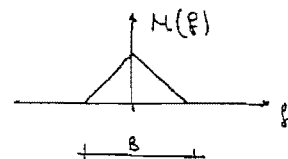
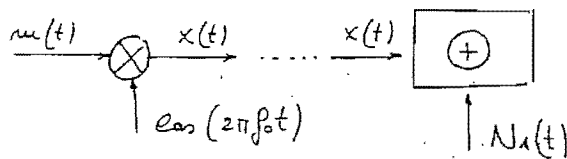
che, in particolare è la COMPONENTE IN QUADRATURA di $R_{NN}(N)$.

Esempio

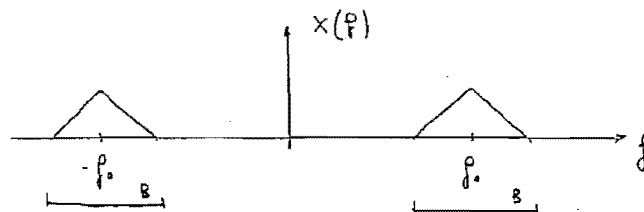
Si consideri il processo $N_1(t)$ ottenuto dal filtraggio passa banda dell'AWGN; ricordiamo che l'AWGN ha densità spettrale di potenza costante e pari a $N_0/2$, quindi filtrando con banda centrata in f_0 , otteniamo che la densità spet. di pot. di $N_1(t)$ risulta:



Questo di fatto è il rumore che si sovrappone al segnale utile. Supponiamo di avere un segnale $m(t)$ di banda $B/2$ come segue. Supponiamo di modulare $m(t)$ in f_0 come segue



In frequenza:



La ricezione $X(f)$ deve essere filtrato in modo da eliminare quanto più rumore possibile, lasciando inalterato il segnale x .

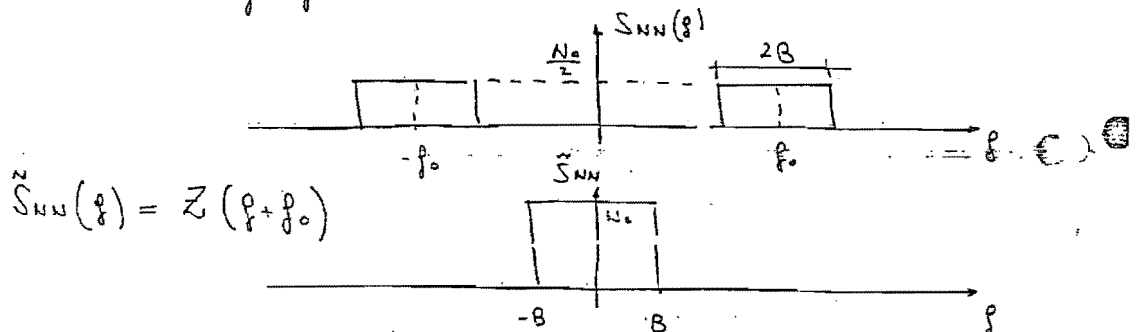
Calcoliamo le statistiche del rumore, in particolare⁴⁴, Autocorrelazione e Crosscorrelazione delle componenti in fase e in quadratura:

$$R_{ss}(N) = R_{cc}(N) \quad \text{e} \quad R_{sc}(N)$$

che in frequenza corrispondano a

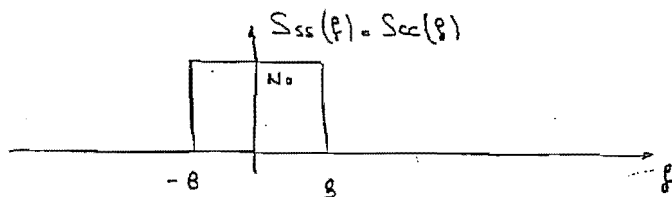
$$S_{cc}(f) = S_{ss}(f) \quad \text{e} \quad S_{sc}(f)$$

Sceglia f_0 la frequenza rispetto alla quale calcoleremo $\tilde{S}$, avremo graficamente:



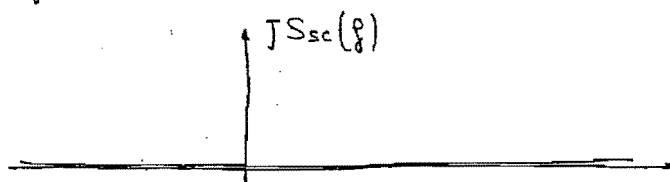
Come per i segnali determinati

$$S_{cc}(f) = S_{ss}(f) = \frac{S_{NN}(f) + S_{NN}^*(-f) = S_{NN}(-f)}{2}$$



Analogamente:

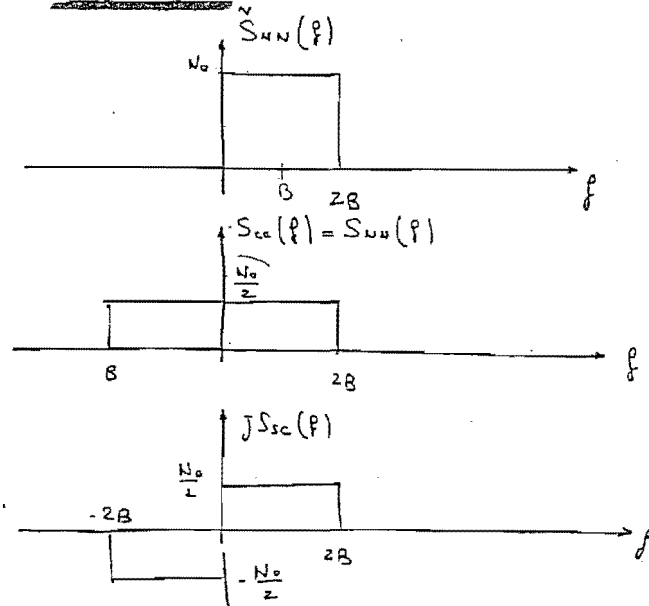
$$S_{sc}(f) = \frac{S_{NN}(f) - S_{NN}^*(-f) = S_{NN}(-f)}{2j}$$



Come noto i segnali N_c e N_s sono PASSA BASSO di banda $2B$. Siccome $S_{sc}(f) = 0$, i due processi

N_c e N_s sono INCORRELATI; insieme sono anche a media nullo, perché AWGN è tale, sono lo sono indipendenti

Calcoliamo l'involuppo complesso del processo $\tilde{S}_{NN}(f)$ rispetto alla frequenza $f_1 = B$: come prima



Come si vede dai grafici N_c e N_s non sono più incorelati.

Modulare un segnale, significa imporre la variazione di una grandezza in base all'andamento del segnale da trasmettere stesso.

Si consideri un segnale $x(t)$ di Banda B ^{passa basso} (tipicamente da zero a qualche MHz); si supponga $x(t)$ a media nulla; questa ipotesi è ragionevole, perché le informazioni sono contenute nella variazione del segnale rispetto al valore medio, indipendentemente dal valore che esso assume. Un'altra ipotesi è sul modulo del segnale, poniamo:

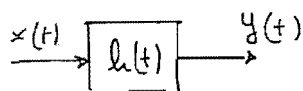
$$|x(t)| \leq 1$$

se con una fase costante si amplificasse o attenuasse il segnale senza compromettere il contenuto informativo; si suppone allora di normalizzare l'ampiezza del segnale. Questa ipotesi ha conseguenze sulla potenza del segnale, infatti

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \leq 1 \text{ perché } |x(t)| \leq 1$$

Esempio

Si consideri un segnale $x(t)$ e un filtro $h(t)$



nota E_x , l'energia di y risulta:

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt =$$

per l'uguaglianza di Parseval

$$\begin{aligned} E_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df = \end{aligned}$$

prendendo come filtro un filtro di Hilbert

47

$$|H(f)| = 1$$

allora

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

Riassumendo le ipotesi, consideriamo segnali $x(t)$ caratterizzati da:

- | | |
|--|---------|
| A. Banda B passa basso | (4.1.1) |
| B. $x(t)$ a media nulla | (4.1.2) |
| C. Ampiezza normalizzata $ x(t) \leq 1$ | (4.1.3) |

4 motivi per cui si applica una modulazione,

— prima di trasmettere un segnale, sono i seguenti:

1. ADATTAMENTO DEL SEGNALE AL CANALE

Un qualsiasi canale trasmissivo, predilige un segnale all'interno di una banda specificata.

2. MULTIPLICAZIONE

Per far coesistere più segnali su di uno stesso canale, vengono assegnati intervalli di frequenza a ciascun utente; con la modulazione ci si parta in questi intervalli prefissati.

3. IMMUNITA' AI DISTURBI

Come vedremo modulando un segnale, si rende lo stesso più immune ai disturbi; spesso questo accade a spese di un maggiore ingombro frequenziale.

4. REAZZABILITA' DELL'HARDWARE

Può accadere che un determinato dispositivo lavori in maniera ottimale in un certo intervallo di frequenza, allora modulando, ci si propone di lavorare esattamente in quella zona.

4 In generale una Modulazione è caratterizzata da:

A. SEGNALE MODULANTE $x(t)$ che è di fatto il segnale da trasmettere.

B. SEGNALE PORTANTE $p(t)$ sinusoidale nella forma

$$p(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

A seconda del tipo di modulazione, si varia l'ampiezza della portante (AM), la frequenza della portante (FM) o la fase della portante (PM).

MODULAZIONI LINEARI

MODULAZIONE DI AMPIEZZA (AM)

In generale un segnale modulato in ampiezza (AM) ha un'espressione del tipo:

$$x_{AM}(t) = A_0 [1 + \mu x(t)] \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (4.2)$$

nella quale l'ampiezza è funzione del tempo, che dipende da $x(t)$:

$$A(t) = A_0 [1 + \mu x(t)] = A_0 + \mu A_0 x(t) \quad (4.3)$$

l'ampiezza del segnale modulato in ampiezza $A(t)$ è proporzionale tramite μ a $x(t)$. La costante μ è detta INDICE DI MODULAZIONE DI AMPIEZZA.

Il segnale $x_{AM}(t)$ è un segnale passa banda, scomponibile in componenti in fase e componenti in quadratura:

$$(4.4) \quad x_{AM}(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - x_s(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Osservazione: la scrittura (4.4) discende da una definizione più generale di inviluppo complesso:

$$\tilde{x}_{AM}(t) = z_{AM}(t) e^{-j(2\pi f_0 t + \theta_0)}$$

Dalla (4.2) e dalla (4.4) si evince che in un segnale ⁴⁹ modulato in ampiezza $x_{AM}(t)$ la componente in fase è $A(t)$, come nella (4.3), mentre quella in quadratura è nulla.

ANDAMENTO TEMPORALE

Consideriamo un generico segnale $x(t)$, sotto le ipotesi (4.1.1), (4.1.2) e (4.1.3) come in figura.

Moltiplichiamo $x(t)$ per l'indice μ e distinguiamo due casi:

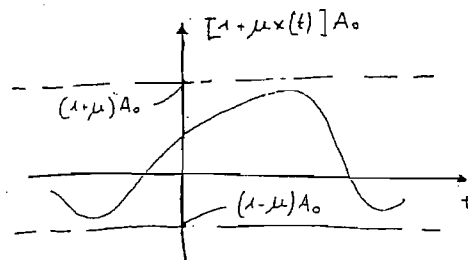
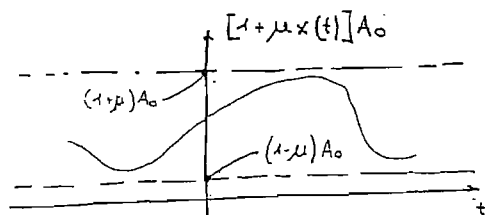
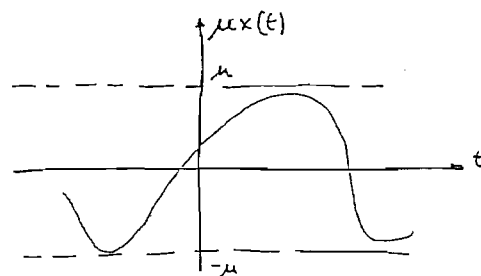
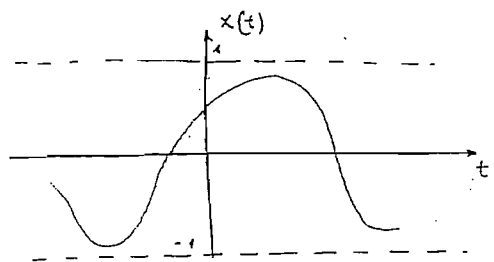
1. $\mu \leq 1$
2. $\mu > 1$

allora il risultato di

$$[1 + \mu x(t)] A_0 \quad \begin{matrix} x(t) \text{ normalizzato} \\ |x(t)| < 1 \end{matrix}$$

sarà, nei due casi differenti,

- Se $\mu \leq 1$ il segnale $[1 + \mu x(t)] A_0$ è compreso fra $(1 - \mu) A_0$ e $(1 + \mu) A_0$
- Se $\mu > 1$ il segnale $[1 + \mu x(t)] A_0$ è compreso fra $(1 - \mu) A_0$ e $(1 + \mu) A_0$ con $(1 - \mu) < 0$

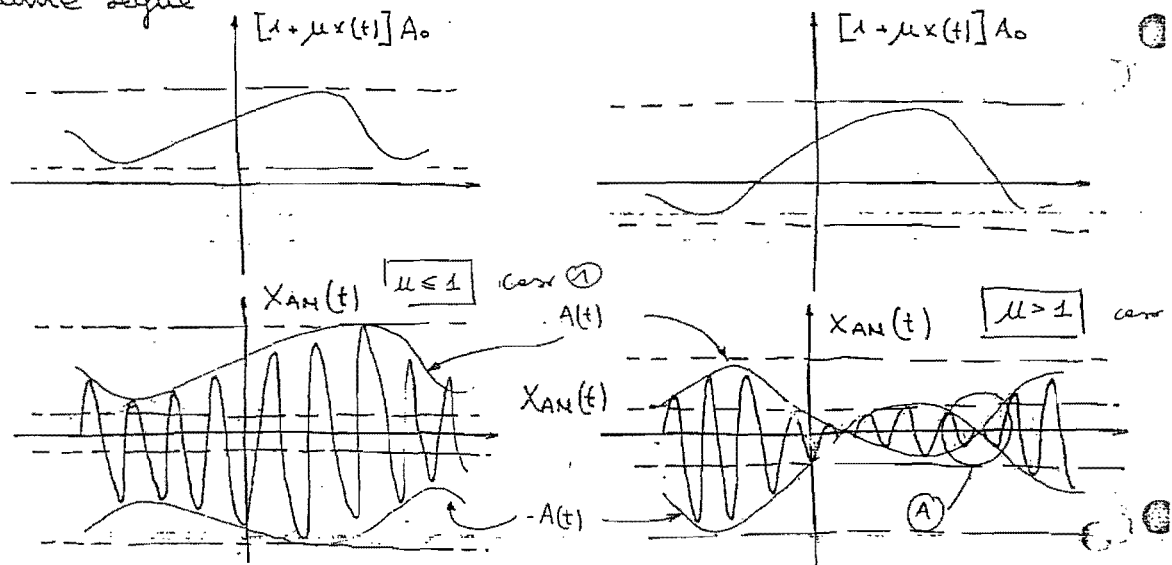


Osserviamo che nel caso della modulazione di ampiezza occorre imporre la condizione:

$$f_0 \gg B \quad (4.5)$$

Avere f_0 elevata significa imporre una oscillazione molto fitta; avere B piccola, significa avere una lenta variazione dell'ampiezza.

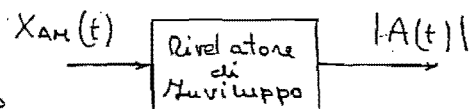
Nei due casi il segnale modulato $x_{AM}(t)$ risulterà⁵⁰ come segue



Nel caso 2. nell'istante in cui l'ampiezza cambia di segno^(A) è come imparare uno sfasamento di π nel senso della portante; questi istanti sono detti ISTANTI DI INVERSIONE DI FASE.

Però l'attenzione su questo aspetto è essenziale, perché nei dispositivi per le modulazioni ha molta importanza il RIVELATORE DI INVILUPPO, ovvero, un circuito elettronico che segue la variazione dell'ampiezza nel tempo; in sostanza fornisce il modulo di $A(t)$. Nel caso 1., cioè quando $\mu \leq 1$,

$$|A(t)| = A(t) = [1 + \mu x(t)] A_0$$



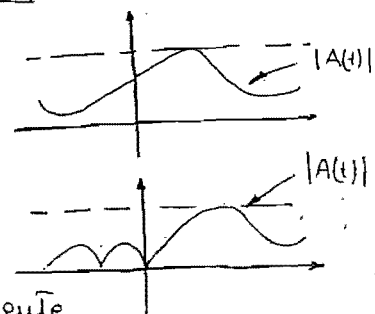
è evidente che per risalire a $x(t)$, basta eliminare il valor medio (traslare il segnale).

Nel caso 2., cioè quando $\mu > 1$,

$$|A(t)| \neq A(t)$$

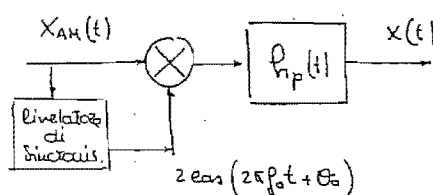
quindi per risalire a $x(t)$ occorre un dispositivo più complesso;

ossia $A(t)$ non è che la componente in fase di $x(t)$, basta applicare un dispositivo basato



sullo schema 1 di pag 19, detto DEMODULATORE SINCRONO.

Per avere in fase di ricezione la stessa frequenza f_0 e la stessa fase θ_0 , viene inserito un blocco che ha il compito di sincronizzarsi, detto RIVELATORE DI SINCRONISMO.



Un dispositivo basato sul demodulatore sincrono risulta più costoso e difficile da realizzare, pertanto, a seconda delle applicazioni si deve scegliere se impastare $\mu \leq 1$ o $\mu > 1$.

ANALISI IN POTENZA DEL SEGNALE AM

Esame noto

$$P_{AM} = \frac{1}{2} P_c + \frac{1}{2} P_s$$

siccome $x_s(t)$ è nulla anche la potenza P_s è tale.

$$P_{AM} = \frac{1}{2} P_c \quad (4.6)$$

applicando la definizione di potenza

$$P_c = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T A_0^2 [1 + \mu x(t)]^2 dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[A_0^2 T + A_0^2 \mu^2 \int_T x^2(t) dt + 2A_0^2 \mu \int_T x(t) dt \right] =$$

perché $x(t)$ è a media nulla

siccome $x(t)$ è a media nulla (annulliamo l'ultimo integ.):

$$P_c = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[A_0^2 T + A_0^2 \mu^2 \int_T x^2(t) dt \right] = A_0^2 + A_0^2 \mu^2 P_x \quad (4.7)$$

quindi:

$$P_{AM} = \frac{1}{2} P_c = \underbrace{\left(\frac{A_0^2}{2} \right)}_{(1)} + \underbrace{\left(\frac{A_0^2}{2} \mu^2 P_x \right)}_{(2)} \quad (4.8)$$

Osserviamo dalla (4.8) che nella modulazione AM, la parte (1) è potenza spesa per trasmettere la portante, mentre la parte (2) è potenza associata al segnale vero e proprio (portante modulata).

Come già ricavato:

$$x_{AM}(t) = A_0 [1 + \mu x(t)] \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) =$$

$$= A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) + \mu A_0 x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

La frequenza

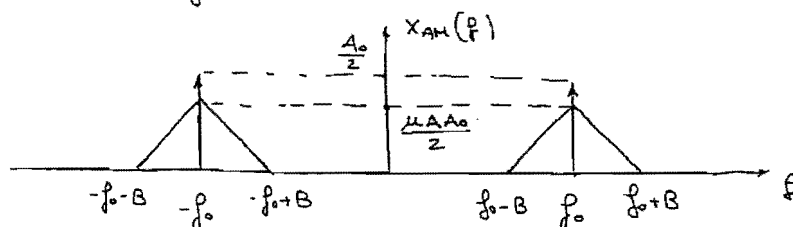
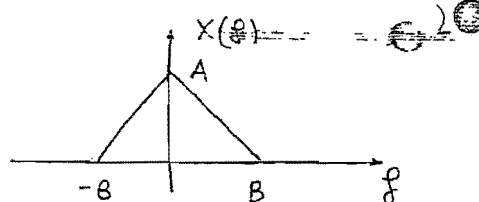
$$X_{AM}(f) = \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} \delta(f - f_0) + \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} \delta(f + f_0) +$$

$$+ \frac{\mu A_0}{2} e^{j\theta_0} X(f + f_0) + \frac{\mu A_0}{2} e^{j\theta_0} X(f - f_0) \quad (4.9)$$

Nota il generico spettro di $x(t)$

di banda B (ricordiamo che la banda si misura sulle sole frequenze positive).

Lo spettro del segnale modulato x_{AM} risulta il seguente:



esso è campato dallo spettro del segnale originale, cambiato in ampiezza di $\mu A_0/2$, traslato alla frequenza della portante f_0 ; in più ad esso si sovrappone in f_0 lo spettro della portante stessa (che è un δ perché la portante è sinusoidale). Siccome $f_0 \gg B$, la banda del segnale AM risulta

$$B_{AM} = 2B \quad (4.10)$$

CONSIDERAZIONI SULLA MODULAZIONE AM

Come già accennato la tecnica di demodulazione, dipende fortemente dalla scelta del coefficiente di modulazione μ . Se $\mu \leq 1$ per il recupero del segnale basta un semplice rivelatore di inviluppo (realizzabile anche con soli componenti passivi). Se $\mu > 1$, è necessario un demodulatore sincrono che di fatto comporta diversi accorgimenti.

Ci sono, tuttavia, altri aspetti che suggeriscano alcune modifiche. Dalla espressione (4.8), si evince che una parte sostanziale della potenza è spesa per trasmettere la portante; essa però non è associata a nessuna informazione il che significa un certo spreco di energia.

MODULAZIONE AM DSB-SC (Double Side Band - Suppressed Carrier).

Per quanto appena detto, si può pensare di non trasmettere la portante; in sostanza l'espressione del segnale modulato diviene

$$x_{DSB-SC}(t) = \mu A_0 x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (4.11)$$

L'analisi condotta in precedenza, ci dice che in questo caso la potenza risulta

$$P_{DSB-SC} = A_0^2 \mu^2 \frac{P_x}{2} \quad (4.12)$$

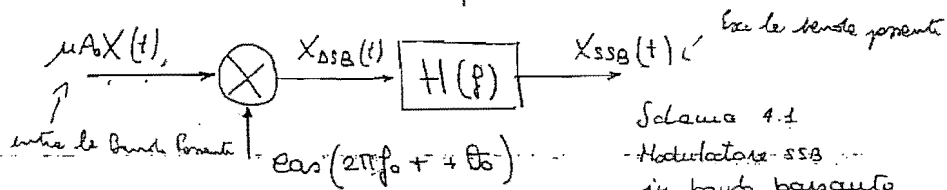
ed è tutta associata all'informazione.

Lo spettro di un segnale DSB-SC è identico a quello di un segnale AM, senza però i δ associati alla portante in $+f_0$ e in $-f_0$.

MODULAZIONE SSB-SC (Single Side Band - Suppressed Carrier)

I segnali reali di nostro interesse hanno simmetria Hermitiana ($X(f) = X^*(-f)$); per questo motivo, si può pensare di limitare l'ingombro frequenziale, eliminando la parte nota una volta nota la simmetria. Se consideriamo come prima un generico spettro, possiamo modulare in ampiezza sopprimendo la portante, ciò che otteniamo sono due repliche dello spettro

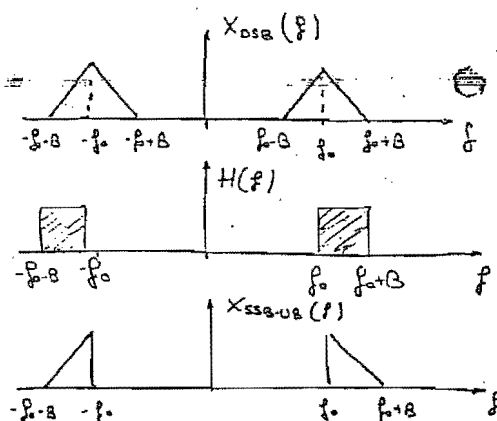
originale, in $+f_0$ e in $-f_0$. A questo punto si filtra eliminando una delle parti ricostituite per simmetria. Se $H(f)$ è il generico filtro passa banda si ha:



Esistono però due possibilità, in base alla scelta del filtro $H(f)$.

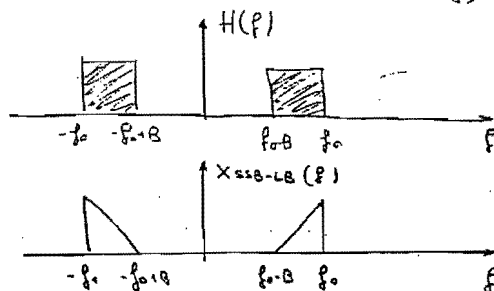
1. Modulazione AM SSB-UB (Upper Band)

Se il filtro ha una banda passante che va da f_0 a $f_0 + B$, allora viene eliminata la banda laterale inferiore.



2. Modulazione AM SSB-LB (Lower Band)

Se il filtro ha una banda passante che va da $f_0 - B$ a f_0 , allora viene eliminata la banda laterale superiore.



Come nato dalla trattazione di pag 34 e 35, l'espressione di un segnale SSB risulta

$$X_{SSB-UB}(t) = \frac{X(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \frac{\dot{X}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (4.13)$$

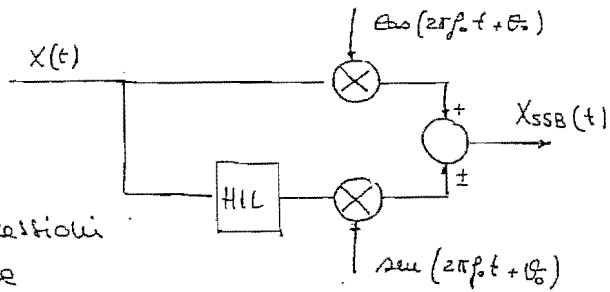
$$X_{SSB-LB}(t) = \frac{X(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) + \frac{\dot{X}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (4.14)$$

55
Un segnale SSB, può essere ottenuto mediante filtraggio in banda passante come nello schema 4.1, oppure mediante filtraggio in banda base secondo lo schema 4.2 (vedi pag 34, 35).

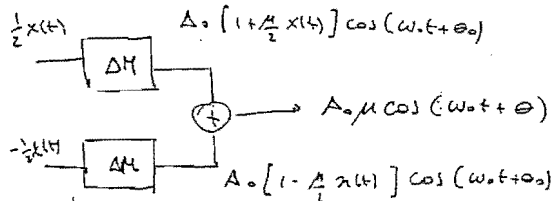
Schema 4.2
modulatore SSB
in banda base

Eseguendo l'analisi in potenza sulle espressioni (4.13) e (4.14) si deduce

$$P_{SSB} = \frac{\mu^2 A_0^2}{2} \left(\frac{P_x}{4} + \frac{P_x}{4} \right) = \frac{\mu^2 A_0^2}{4} P_x \quad (4.15)$$



MODULATORE BILANCIATO DSB



i cos devono avere stessa fase e stessa ampiezza.

La relazione che esprime formalmente un segnale modulato in ampiezza è la seguente:

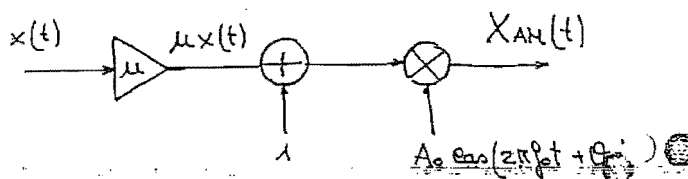
$$X_{AM}(t) = A_0 [1 + \mu x(t)] \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

essa suggerisce la possibilità di ottenere questa modulazione mediante amplificatori, sommatore e moltiplicatori, secondo lo schema seguente:

Il problema dal

Schema 4.3. Modulatore AM

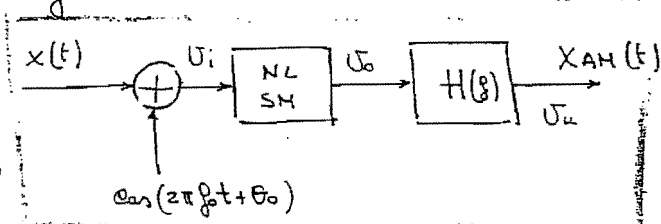
punto di vista realizzativo sta nel blocco moltiplicatore (MIXER).



Lo schema più frequentemente impiegato per la modulazione AM è il seguente:

Schema 4.4. Modulatore AM

Il blocco NLPM è un elemento non lineare senza memoria che realizza la funzione



$$U_o = a_1 U_i + a_2 U_i^2$$

Dimostriamo la possibilità di ottenere $X_{AM}(t)$:

$$\begin{aligned} U_o(t) &= a_1 [x(t) + \cos(\omega_0 t + \theta_0)] + a_2 [x(t) + \cos(\omega_0 t + \theta_0)]^2 = \\ &= a_1 x(t) + a_1 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + a_2 x^2(t) + a_2 \cos^2(\omega_0 t + \theta_0) + 2a_2 x(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0) = \\ &= a_1 x(t) + a_1 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + a_2 x^2(t) + \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\theta_0) + \\ &\quad + 2a_2 x(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0) = \end{aligned}$$

Dimensionando opportunamente il filtro passa banda $H(f)$ si eliminano la continua e le armoniche a frequenza doppia quindi rimane:

$$\begin{aligned} U_o(t) &= \cancel{a_1 x(t)} + \cancel{a_1 \cos(\omega_0 t + \theta_0)} + \cancel{a_2 x^2(t)} + 2a_2 x(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0) = \\ &= \frac{a_1 \left(1 + \frac{2a_2}{a_1} x(t)\right) \cos(\omega_0 t + \theta_0)}{\quad} \quad (4.16.1) \end{aligned}$$

ponendo $\alpha_1 = A_0$ e $\alpha_2 = \mu A_0 / 2$ (4.16.2).

si ottiene:

$$U_m = X_{AM}$$

come sopra definito.

DEMODULATORE AM

Come già detto, a seconda del coefficiente di modulazione, esiste la possibilità di ricostruire il segnale originale. Se $\mu > 1$ è necessario il demodulatore sincrono che, per altro, è adatto anche se $\mu \leq 1$. In questo caso specifico però basta il rivelatore di inviluppo.

RIVELATORE DI INVILUPPO

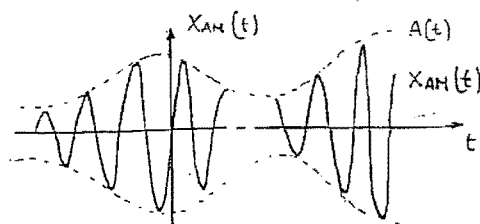
Se il coefficiente μ è minore o uguale a 1, supponendo un generico andamento del segnale da trasmettere e il conseguente andamento del segnale modulato, possiamo ottenere l'andamento di $A(t)$ attraverso un dispositivo passivo composto da diodo, resistenza e capacità detto rivelatore di inviluppo. Ricordiamo che $A(t)$ è un segnale proporzionale a $x(t)$ traslato, quindi sufficiente per risalire al segnale t_x .

Requisito fondamentale è la condizione secondo la quale il segnale da trasmettere vari molto più lentamente del segnale portante, ovvero:

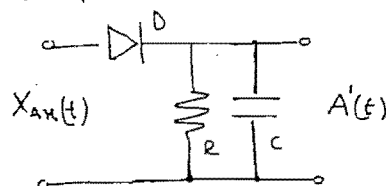
$$\underline{f_0 \gg B}$$

Di fatto il funzionamento del rivelatore si basa sulla carica e sulla scarica del condensatore.

Nella fase di carica C è alimentato tramite il diodo



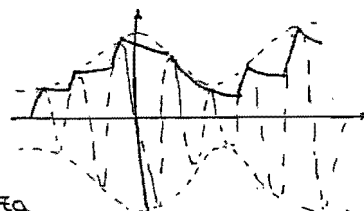
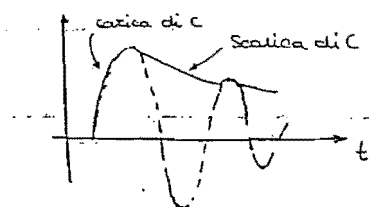
Schema 5.1 Rivelatore di inviluppo (supponiamo D ideale)



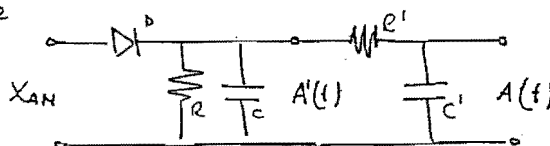
poiché R_d è pressoché nulla, la costante di tempo di carica è zero: questo significa che la tensione su C segue esattamente quella in ingresso.

Quando $x_{AN}(t)$ scende sotto la tensione appena memorizzata su C , il diodo si interdice e il condensatore inizia il transitorio di scarica su R . In questo caso la costante di tempo è RC (vedremo in seguito come deve essere dimensionata).

In sostanza si verifica una oscillazione su $A'(t)$ che ha frequenza molto più elevata rispetto a $A(t)$, detta RIPLE; per eliminare questo fenomeno basta inserire un filtro passa basso (ad esempio uno squadrato RC) per ottenere esattamente $A(t)$:



Schema 5.2



CONSIDERAZIONI SULLA COSTANTE DI TEMPO DI SCARICA RC

Se il transitorio di scarica è troppo lento rispetto alle variazioni di $A(t)$, la tensione di uscita del rivelatore potrebbe non essere in grado di seguire variazioni troppo brusche di $A(t)$ ^(A), in sostanza la durata del transitorio deve sicuramente essere inferiore rispetto al "periodo" di $A(t)$: se B è la banda di $x(t)$,

$$\frac{1}{RC} \gg B \quad (5.1)$$

D'altra parte, se il transitorio di scarica è troppo, cioè se RC è troppo piccolo, il condensatore

tare non segue più l'andamento di $A(t)$ ^(B); in altri termini il transitorio deve durare necessariamente di più e il "periodo" della portante, ovvero se f_0 è la frequenza della portante:

$$\frac{1}{RC} \ll f_0 \quad (5.2)$$

Qui condensatore R e C devono essere dimensionati in modo che:

$$B \ll \frac{1}{RC} \ll f_0 \quad (5.3)$$

Osservazione: Consideriamo un generico segnale $x_H(t)$ passa banda e osserviamo cosa succede se applicato ad un rivelatore di inviluppo.

$$x_H(t) = x_c(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0) - x_s(t) \sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

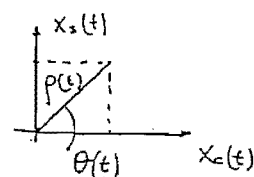
l'inviluppo complesso

$$\begin{cases} x_c(t) = p(t) \cos \theta(t) \\ x_s(t) = p(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

$$\tilde{x}_H(t) = x_c(t) + j x_s(t) = p(t) e^{j\theta(t)}$$

$$p(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}$$

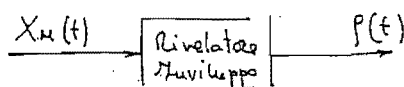
$$\theta(t) = \arctg \frac{x_s(t)}{x_c(t)}$$



possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} x_H(t) &= p(t) \cos \theta(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0) - \\ &\quad - p(t) \sin \theta(t) \sin(\omega_0 t + \theta_0) = \\ &= p(t) \cos[\omega_0 t + \theta_0 + \theta(t)] \end{aligned}$$

Un segnale di questo tipo ha frequenza variabile per la presenza di $\theta(t)$. Il rivelatore d'inviluppo determina $p(t)$ indipendentemente dalle variazioni di frequenza. Ricordiamo che $p(t)$ è il modulo dell'inviluppo complesso, e questo è anche il motivo del nome.



PROBLEMI DI DEMODULAZIONE

60

Vediamo come può essere realizzata la demodulazione nei vari tipi di modulazione di ampiezza.

A. Segnale AM: l'espressione risulta

$$x_{AM}(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_0)$$

in particolare

$$x_c(t) = A(t) = \text{comp. in fase}$$

$$x_s(t) = 0 = \text{comp. in quadratura}$$

$$p(t) = |A(t)|$$

$$A(t) = A_0 + \mu A_0 x(t)$$

$A(t)$ è proporzionale a $x(t)$. Come noto per recuperare $A(t)$ e quindi $x(t)$ si può impiegare il DEMOD. SINCRONO, inoltre se $\mu \leq 1$ si può impiegare il RIVEL DI INVILUPPO, se $\mu > 1$ invece no.

B. Segnale DSB: l'espressione risulta

$$x_{DSB}(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_0)$$

in particolare

$$x_c(t) = x(t) = \text{comp. in fase}$$

$$x_s(t) = 0 = \text{comp. in quadratura}$$

$$p(t) = |x(t)|$$

In ogni caso se vediamo il segnale originale come componente in fase si può applicare il DEMOD. SINCRONO; il rivelatore di inviluppo non funziona, perché non è detto che $|x(t)| = x(t)$.

C. Segnale SSB: l'espressione risulta

$$x_{SSB}(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(2\pi f_c t + \theta_0) - \frac{\dot{x}(t)}{2} \sin(2\pi f_c t + \theta_0)$$

in particolare

$$x_c(t) = \frac{x(t)}{2} = \text{comp. in fase}$$

$$X_s(t) = \frac{\ddot{X}(t)}{2} = \text{comp. in quadratura}$$

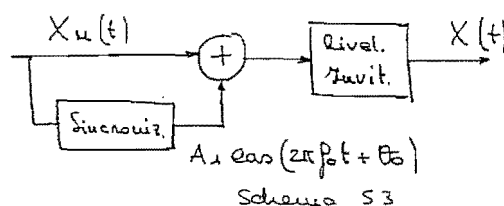
61

$$p(t) = \sqrt{\frac{x^2(t)}{4} + \frac{\ddot{X}^2(t)}{4}}$$

Anche in questo caso il DEMOD. SINCRONO funziona sempre, mentre il RIVEL. DI INVILUPPO non consente di risalire ad $x(t)$.

DEMODULATORE CON SINCRONIZZATORE E RIVELATORE D'INVILUPPO

Consideriamo lo schema a lato e verifichiamo come esso consenta la demodulazione di qualsiasi segnale modulato in cwp.



A. Segnale AM: l'espressione risulta

$$X_H(t) = X_{AM}(t) = A_0 [1 + \mu x(t)] \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

$$X_H(t) + A_1 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) = [A_0 + A_1 + \mu x(t)] \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Dimensionando A_1 sufficientemente grande da garantire che $A_0 + A_1 + \mu x(t)$ sia sempre positivo dal rivelatore di inviluppo esce $p(t) = |A_0 + A_1 + \mu x(t)|$ e quindi

$$p(t) = |A_0 + A_1 + \mu x(t)| = A_0 + A_1 + \mu x(t)$$

che essendo proporzionale a $x(t)$ ne permette la ricostituzione.

B. Segnale SSB: l'espressione risulta:

$$X_H(t) = X_{SSB}(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \frac{\ddot{X}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

$$X_H(t) + A_1 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) = \left(A_1 + \frac{x(t)}{2}\right) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \frac{\ddot{X}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

in uscita dal rivelatore di inviluppo avremo $p(t)$ ovvero:

$$p(t) = \sqrt{\left(A_1 + \frac{x(t)}{2}\right)^2 + \frac{\ddot{X}^2(t)}{4}} =$$

$$= \left| A_1 + \frac{x(t)}{2} \right| \sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2(t)}{4(A_1 + \frac{x(t)}{2})^2}}$$

ponendo $A_1 \gg 1$

$$p(t) \approx \left| A_1 + \frac{x(t)}{2} \right|$$

per ipotesi $|x(t)| < 1$, quindi

$$A_1 + \frac{x(t)}{2} > 0.$$

avremo

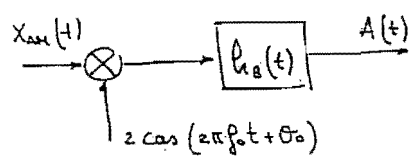
$$\left| A_1 + \frac{x(t)}{2} \right| = A_1 + \frac{x(t)}{2}$$

che è appunto proporzionale ad $x(t)$. Per i segnali DSB non essendo $\dot{x}(t)$, non è neppure necessario porre $A_1 \gg 1$.

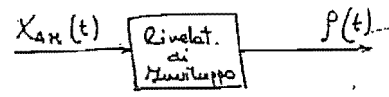
Riassumendo:

	Demod. Lineare	Rivelat. di sviluppo	Sincroniz. + Riv. Hvil.
AM $\mu \leq 1$	SI	SI	SI
AM $\mu > 1$	SI	NO	SI
DSB	SI	NO	SI
SSB	SI	NO	SI

Demodulatore Lineare

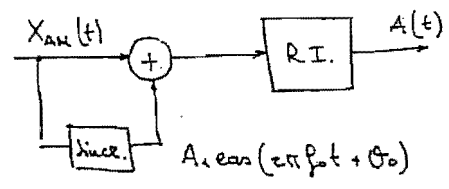


Rivelatore di sviluppo



Sincronizzatore più

Rivelatore di sviluppo



MODULAZIONE VSB (Vestigial Side Band)

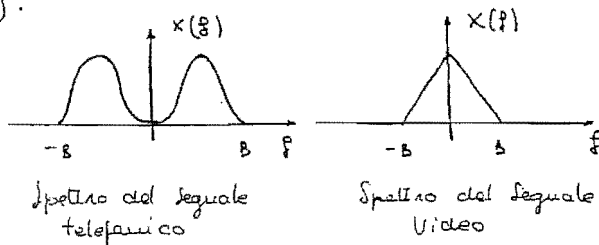
La modulazione VSB, associa al segnale da trasmettere $x(t)$, un segnale $X_{VSB}(t)$ che ha per componente in fase un termine proporzionale a $x(t)$ e per componente in quadratura una generica trasformazione T di $x(t)$; in sostanza:

$$X_{VSB}(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - T[x(t)] \sin(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (5.4)$$

Lo spettro di un generico segnale $x(t)$, può avere i più svariati andamenti; ciò nonostante, i segnali possono essere suddivisi fra quelli che hanno (segn. telefonici)

- 1) Componente armonica nulla nell'intorno dell'origine e
- 2) quelli che invece hanno componente armonica in zero. (ad esempio segnali video).

È evidente che nel primo caso, per applicare una modulazione SSB, valendo eliminare una banda laterale è

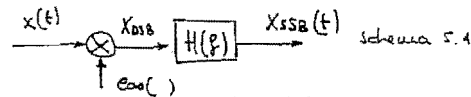
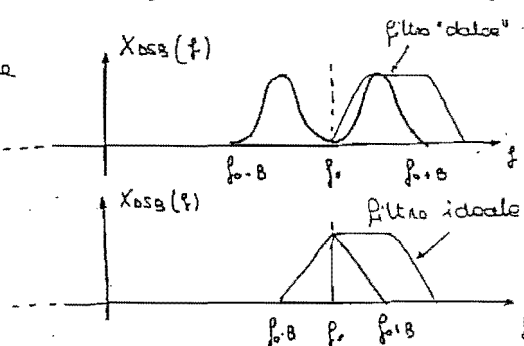


sufficiente un filtro "dolce". Nel secondo caso invece è necessario un filtro ideale che tagli esattamente in f_0 . (trascurando le freq. negative)

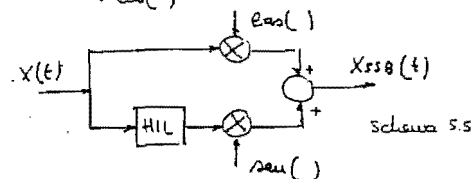
Per quanto detto la modulazione SSB è semplice ed efficiente per i segnali telefonici, mentre

- 1) risulta assai problematica per i segnali video.

Ricordiamo inoltre che un segnale SSB può essere attenuato con filtraggio in banda passante (schema 5.4) o con il filtraggio in banda base (schema 5.5).

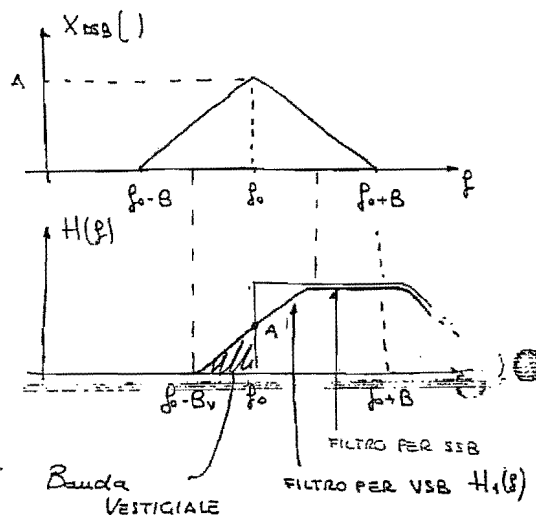


schema 5.4



schema 5.5

La modulazione VSB si propone di avviare proprio a questo inconveniente. Anziché eliminare una banda laterale lasciando una inalterata, elimina una solo parzialmente e ne lascia una parzialmente inalterata. L'operazione può essere analizzata per via grafica. il requisito fondamentale è la simmetria tra la parte di banda "trasmessa" che viene eliminata e la parte di quella "eliminata" che viene trasmessa. Il filtro che può avere pendenza dolce deve avere simmetria dispari rispetto ad un punto stabilito.

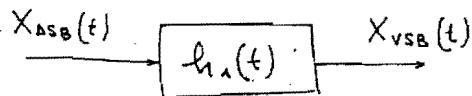
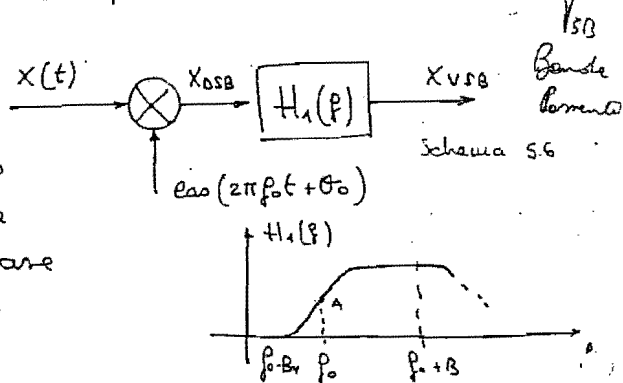


La banda di un segnale VSB è maggiore di quella di un segnale SSB, per la presenza di B_V , detta banda VESTIGIALE; in sostanza

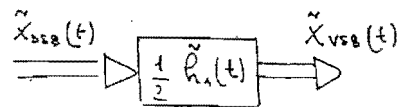
$$B_{VSB} = B + B_V$$

nella quale B è la banda del segnale originale. Per ottenere un segnale VSB, si può adattare lo schema 5.4, sostituendo al filtro passa banda $H(f)$ un filtro reale $H_1(f)$ che rispetti le suddette esatt.

Come nel caso della SSB lo schema 5.6 filtra in banda passante. Ora dimostriamo come sia possibile eseguire il filtraggio in banda base ottenendo un analogo dello schema 5.5.



Ricordiamo che



65

$$x_{vSB}(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) - 0$$

Scriviamo $\tilde{H}_1(f)$ in funzione delle componenti in fase e in quadratura.

$$H_{1c}(f) = \frac{\tilde{H}_1(f) + \tilde{H}_1^*(-f)}{2}$$

$$H_{1s}(f) = \frac{\tilde{H}_1(f) - \tilde{H}_1^*(-f)}{2j}$$

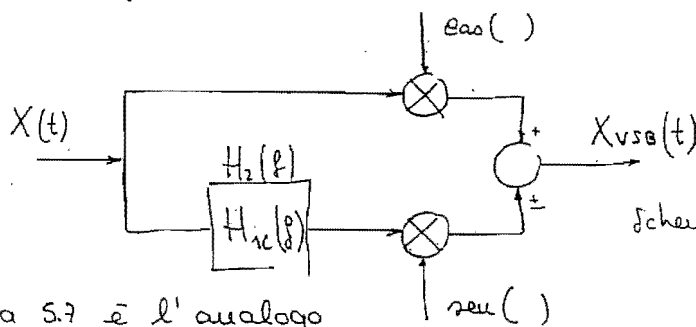
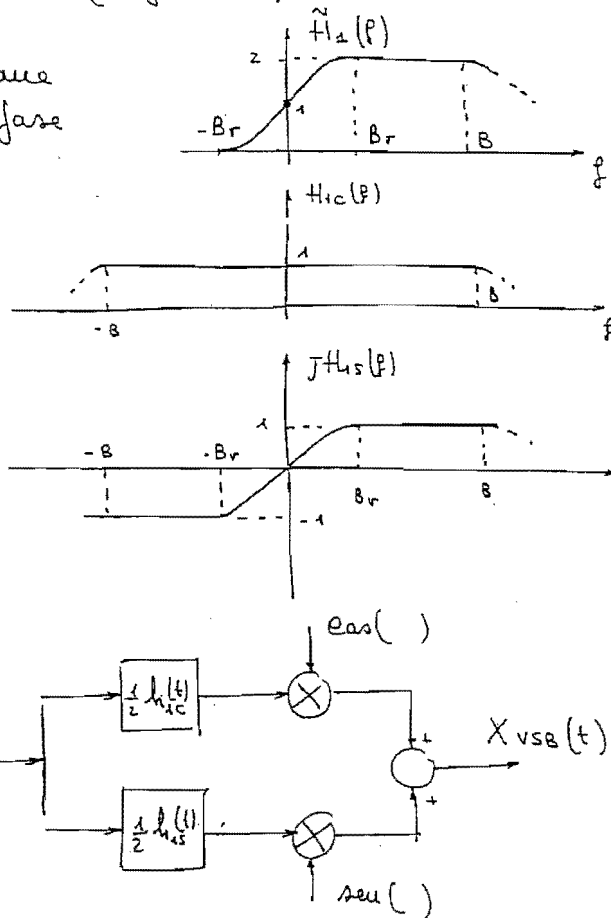
Possiamo associare alle due componenti in fase e in quadratura le rispettive di $H_1(f)$

possiamo portare

fuori il fattore $\frac{1}{2}$.

Quattro h_{1c} e h_{1s} è unitario nella banda

di $X(t)$, quindi può essere fatto. Allora si perviene al seguente schema



V_{SB} è Banda Base!

Schema 5.7

Lo schema 5.7 è l'analogo del 5.5 per la modulazione VSB. L'unica differenza sta nel filtraggio in banda base: al posto di un filtro di Hilbert che è ideale, inseriamo $H_{1c}(f)$ che è reale.

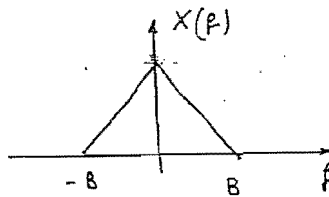
Anche la modulazione USB può essere LB o UB a seconda del segno + o - nell'espressione (5.4) 66

CONVERSIONE DI FREQUENZA

Consideriamo un segnale DSB nella forma

$$X_{DSB}^{f_0}(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

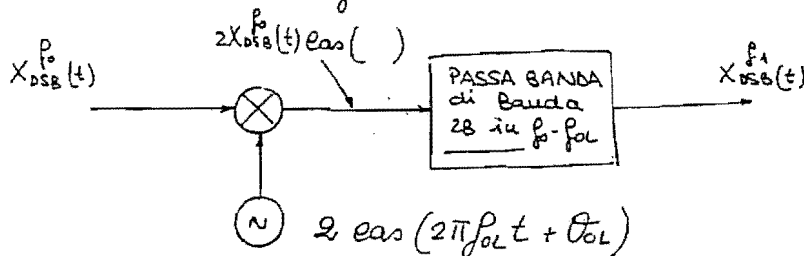
alla frequenza f_0 ; in sostanza lo spettro di $x(t)$ è traslato in f_0 . Supponiamo di voler passare dalla frequenza f_0 alla frequenza f_1 .



Supponiamo $x(t)$ di banda B allora X_{DSB} è di banda $2B$ centrata in f_0 .

Nota: Questa operazione viene normalmente impiegata per distinguere l'UPUNK dal DOWNUNK della trasmissione satellitare (in genere UPUNK a 6 GHz, e DOWNLINK a 4 GHz).

L'operazione di "conversione di frequenza" può essere realizzata con lo schema seguente.



$$\begin{aligned} X_{DSB}^{f_0}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_{OL} t + \theta_{OL}) &= 2x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \cos(2\pi f_{OL} t + \theta_{OL}) \\ &= x(t) \cos \left[2\pi (f_0 + f_{OL}) + (\theta_0 + \theta_{OL}) \right] + \\ (6.1) \quad &+ x(t) \cos \left[2\pi (f_0 - f_{OL}) + (\theta_0 - \theta_{OL}) \right] \end{aligned}$$

passando in cascata un filtro passa banda centrato ad esempio sulla frequenza differenza $f_0 - f_{OL}$, rimane

$$X_{DSB}^{f_1}(t) = x(t) \cos \left[2\pi (f_0 - f_{OL}) + (\theta_0 - \theta_{OL}) \right]$$

se il nostro obiettivo è trasformare X_{DSB} ad f_0 ⁶⁷
 in X_{DSB} ad f_1 , scegliendo f_{ol} in modo che

$$\underline{f_1 = f_0 - f_{ol}} \quad (6.2)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} X_{DSB}^{f_1}(t) &= X_{DSB}^{f_0} 2 \cos(2\pi f_{ol} t + \theta_{ol}) = \\ &= X(t) \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Analogamente si può scegliere il filtro in modo
 da conservare la somma $f_0 + f_{ol}$; in tal caso

pariamo:

$$f_1 = f_0 + f_{ol} \quad (6.4)$$

MULTIPLAZIONE A DIVISIONE DI FREQUENZA (FDM)

68

Supponiamo di avere tre generici segnali di banda B , $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ aventi uno spettro $X_1(f)$, $X_2(f)$ e $X_3(f)$.

Se trasmettiamo ^{simultaneamente} i tre segnali sullo stesso canale, il risultato sarebbe una sovrapposizione dei tre; in frequenza lo spettro risultante sarebbe esattamente

la somma di $X_1(f)$, $X_2(f)$ e $X_3(f)$.

Supponiamo di modulare i tre segnali anche in modo diverso.

In generale si può pensare di modulare $x_1(t)$ con DSB

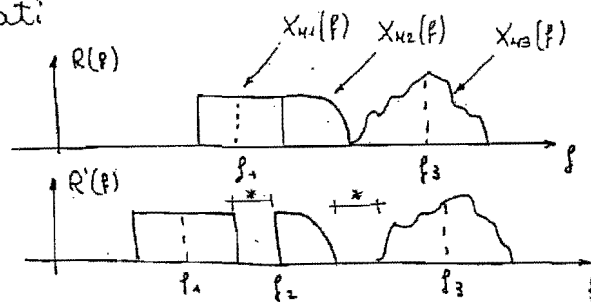
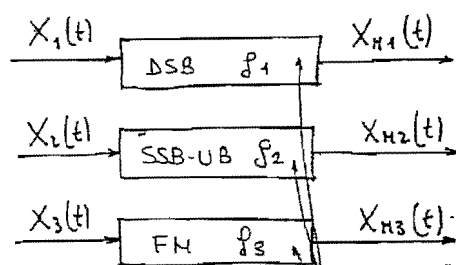
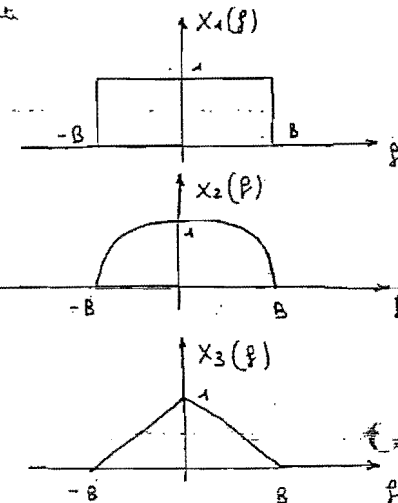
alla frequenza f_1 ; $x_2(t)$ con SSB alla frequenza f_2 e $x_3(t)$ con modulazione FM alla frequenza f_3 (vedremo in seguito cosa significa).

Scegliendo opportunamente le frequenze f_1 , f_2 e f_3 , in relazione alla banda del segnale modulato, in modo che i singoli spettri non si

sovrappongano, avremo la seguente situazione. In frequenza gli spettri non si sovrappongano, allora si possono sommare nel tempo i segnali modulati.

In realtà per facilitare il filtraggio in ricezione, è bene separare i singoli spettri, garantendo la cosiddetta BANDA DI GUARDIA*.

Con una operazione di questo tipo si dice che i tre segnali sono stati MULTIPLATI IN FREQUENZA.

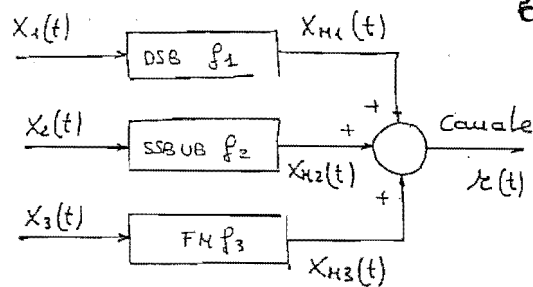


(Qui indiciamo solo la freq. portante)

Moltiplicare in frequenza
i tre segnali significa
sommare $x_{1M}(t)$, $x_{2M}(t)$
e $x_{3M}(t)$ nel tempo.

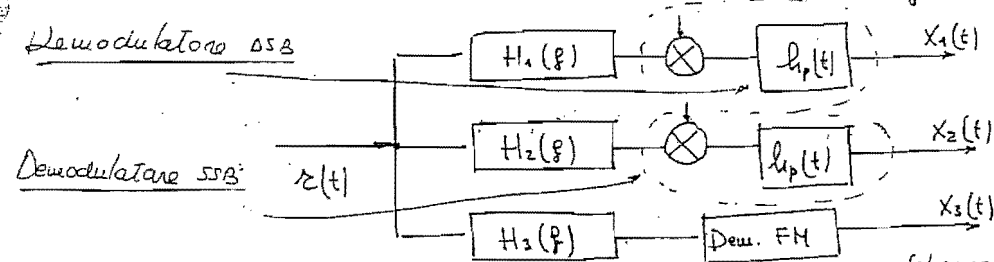
Per ricezione per
riottenere i singoli segnali
 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, basta
filtrare con la banda

opportuna alle varie frequenze f_1, f_2, f_3 ; per ciascuna
di esse si ottiene un segnale modulato, per cui
ocorrerà un demodulatore opportuno. In generale,
la situazione può essere riassunta nel seguente.



Demodulatore DSB

Demodulatore SSB



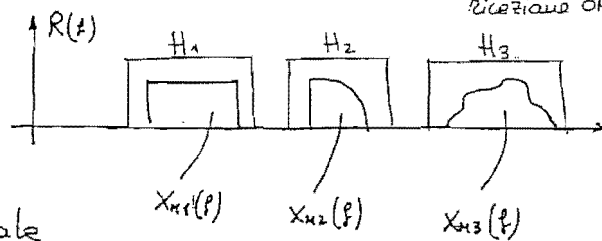
Schema di
ricezione OMODINA

Il segnale ottenuto
dalla moltiplicazione
 $x(t)$, ha uno spettro
 $R(f)$. Il sistema

sopra descritto per

la ricezione del segnale

$x(t)$ è detto OMODINA; in esso si impiega un filtro e
un demodulatore dedicati per ogni frequenza associata
ad un segnale. Nel caso esaminato si hanno tre
diversi portanti e quindi si impiegano tre filtri
passa banda H_1, H_2 e H_3 .



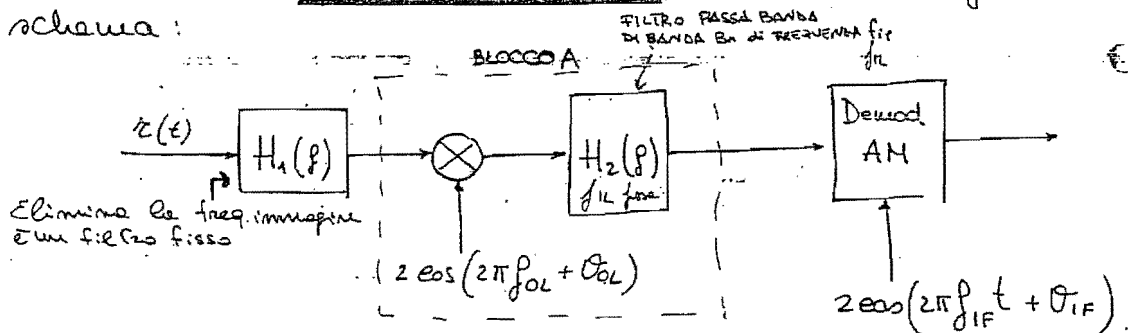
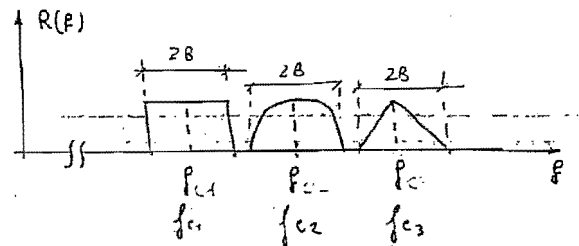
RICEVITORE SUPERETERODINA

70

Supponiamo di avere tre segnali AM multiplati in frequenza alle frequenze f_1, f_2, f_3 ;

per recuperare i singoli segnali, si può impiegare un ricevitore OMODINA, visto in precedenza. Una soluzione più economica, che esente

l'impiego di componenti che non dipendano dalla particolare trasmissione (filtri sintonici), si ha con un ricevitore SUPERETERODINA, basata sul seguente schema:



Il segnale multiplato è $x(t)$ e ha uno spettro $R(f)$ come in figura.

$$x(t) = x_{1H}(t) + x_{2H}(t) + x_{3H}(t)$$

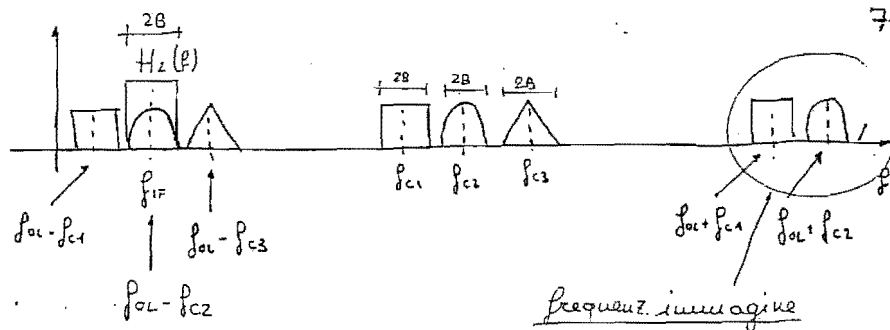
Il dispositivo

rappresentato è composto

da un CONVERTITORE DI FREQUENZA (blocco A), che trasla l'insieme dei segnali ricevuti $x(t)$, alla frequenza f_{0L} ; il filtro $H_2(f)$ è centrato alla frequenza fissa f_{0L} . Agendo sulla frequenza f_{0L} dell'oscillatore del ricevitore si fa in modo di centrare il segnale voluto nella banda di H_2 . Per demodulare il segnale i-esimo $x_{iH}(t)$, basta sintonizzare l'oscillatore di f_{0L} in modo che

$$f_{0L} - f_{ci} = f_{IF} \quad (7.1)$$

Schéma di un ricevitore SUPERETERODINA. $H_1(f)$ è il FILTRO FRONTALE (di Front End); Il blocco A è un convertitore di frequenza. Il blocco Demod AM è un demodulatore AM.



Nell'esempio di figura si seleziona f_{c1} in modo che $f_{c1} - f_{c2} = f_{IF}$, in questo modo si fa cadere nella banda solo il canale di $X_{N2}(t)$, quindi vengono eliminati tutti gli altri canali e viene demodulato $X_{N2}(t)$.

Il filtro $H_2(f)$ ha il compito di eliminare i canali adiacenti a quello selezionato; inoltre elimina anche la frequenza immagine ($f_{c1} + f_{c2}$) che viene a comparire nella conversione di frequenza del blocco A. In seguito il demodulatore AM, estrae il segnale in banda base, che era stato trasmesso in origine $X_i(t)$.

Il filtro $H_2(f)$ è di banda $2B$ circa e centrato sulla frequenza fissa f_{IF} , detta FREQUENZA INTERMEDIA; questa frequenza può essere diversa da ricevitore a ricevitore: non può essere troppo elevata perché degraderebbe la qualità di taglio del filtro stesso; allo stesso tempo ridurre eccessivamente f_{IF} significa in base alla (7.1), avvicinare le repliche in

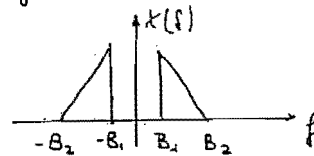
$$f = f_{c1} - f_{IF} \quad e \quad f' = f_{c1} + f_{IF}$$

rischiando la sovrapposizione.

Il filtro $H_2(f)$ ha il compito di eliminare eventuali frequenze immagine introdotte nel canale.

SEGNALI IN PRESENZA DI ERRORI DI FASE E DI FREQUENZA 72

Si consideri un generico segnale con componente armonica nulla in prossimità dell'origine (segnale telefonico), con lo spettro $X(f)$ di figura.

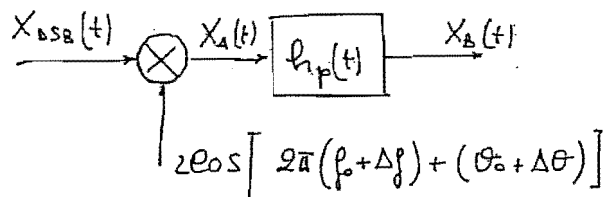


(A) Modulazione DSB in presenza di errori

Il segnale modulato ha espressione

$$X_{DSB}(t) = X(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Demoduliamo il segnale con un demodulatore sincrono e supponiamo che l'oscillatore locale commetta un errore Δf rispetto a f_0 e un errore $\Delta\theta$ rispetto a θ_0 .



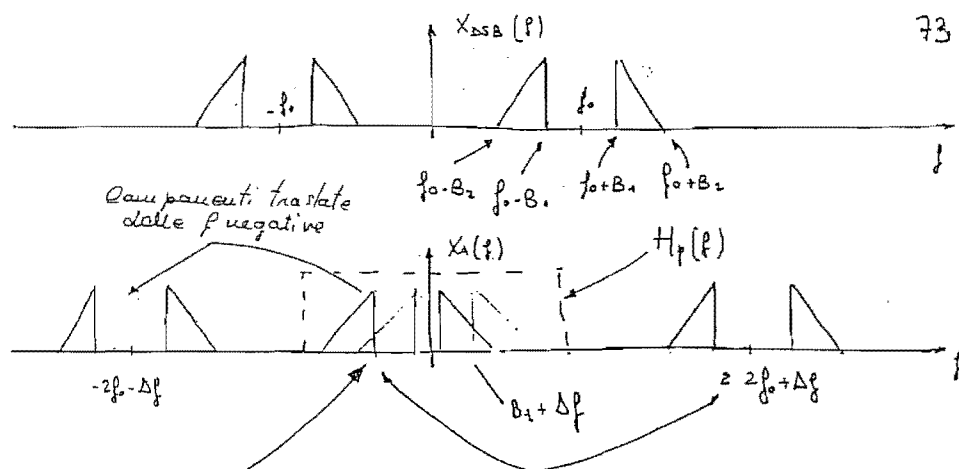
Nel dominio del tempo

$$\begin{aligned} X_A(t) &= X_{DSB}(t) \cdot 2 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + (\theta_0 + \Delta\theta)] = \\ &= 2X(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + (\theta_0 + \Delta\theta)] = \\ &= X(t) \cos[2\pi(2f_0 + \Delta f)t + (2\theta_0 + \Delta\theta)] + \\ &\quad + X(t) \cos[2\pi\Delta f t + \Delta\theta] \quad (7.3) \end{aligned}$$

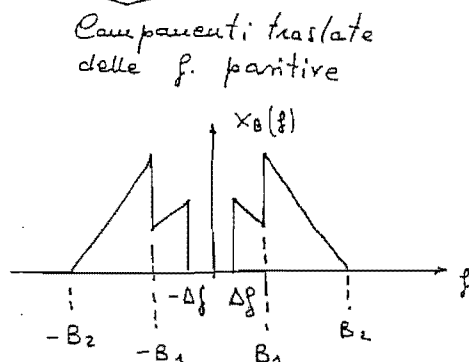
Il filtro $h_p(t)$ elimina la componente a frequenza doppia, quindi:

$$X_B(t) = X_A(t) \otimes h_p(t) = X(t) \cos(2\pi\Delta f t + \Delta\theta) \quad (7.4)$$

La frequenza si nota una notevole distorsione; supponendo $\Delta\theta = 0$, considerando cioè l'errore di fase nullo $\Delta f < B_1$, otteniamo:



La sovrapposizione delle componenti che vengono a trovarsi nella banda di $H_p(f)$ da origine ad una forte distorsione, quindi $X_B(t)$ è molto diverso da $X(t)$.

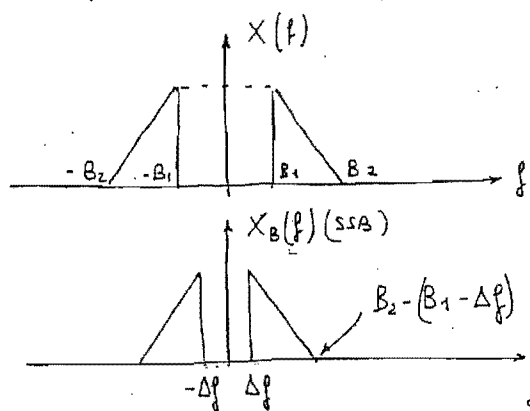


B. Modulazione SSB (US) in presenza di errori
Senza ripetere i calcoli, possiamo dire che manca la banda laterale (in questo caso quella inferiore), non ci hanno componenti in sovrapposizione.

Le due bande laterali vengono portate con il mixer in Δf e $-\Delta f$ come in figura (quelle in $2f_0 + \Delta f$ come prima vengono eliminate da H_p).

Come si vede lo spettro è qualitativamente identico, tuttavia si ha un abbassamento frequenziale

di tutte le componenti armoniche di $B_1 - \Delta f$ (assumendo come prima $\Delta f = 0$ e $\Delta f < B_1$). Il segnale è distorto ma l'informazione non è compromessa.

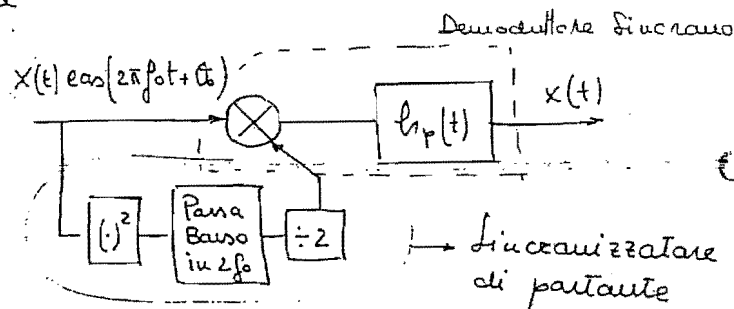


Per questo motivo si dice che la SSB è più "robusta" ⁷⁴ della DSB.

SINCRONIZZATORE DI PORTANTE

Per avviare agli inconvenienti appena analizzati, molto spesso si estrae frequenza e fase della portante direttamente dal segnale ricevuto.

Anziché impiegare un oscillatore locale, si ricorre al seguente schema



Vediamo cosa fornisce questo sincronizzatore:

$$\begin{aligned} (x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0))^2 &= x^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0) = \\ &= \frac{x^2(t)}{2} + \frac{x^2(t)}{2} \cos[2\pi(2f_0)t + 2\theta_0] = \end{aligned}$$

eliminato dal filtro

L'esame $x^2(t) = K + y(t)$

$$(x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0))^2 = \frac{K}{2} \cos(2\pi(2f_0)t + 2\theta_0) + \frac{y(t)}{2} \cos(\quad)$$

$$\frac{1}{2} [K + y(t)] \cdot \cos[2\pi(2f_0)t + 2\theta_0] = \frac{K}{2} \cos(2\pi(2f_0)t + 2\theta_0) + \frac{y(t)}{2} \cos(2\pi(2f_0)t + 2\theta_0)$$

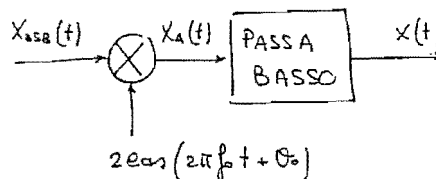
DEMODULAZIONE IN PRESENZA DI RUMORE

75

Si consideri un demodulatore sincrono e un segnale DSB $X_{DSB}(t)$ di banda $2B$, nella frequenza f_0 :

$$X_{DSB}(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Come noto



$$X_A(t) = x(t) + x(t) \cos[2\pi(2f_0)t + 2\theta_0]$$

per ricostruire $x(t)$ è sufficiente

un filtro passa basso che elimini da $X_A(t)$ la componente a $2f_0$. Questo significa che basta un passa basso di banda B ; se la banda fosse maggiore avremmo dei problemi nel caso in cui B risulti più grande della portante f_0 .

- Consideriamo ora un "rumore" AWGN; esso è rappresentabile mediante un processo gaussiano a media nulla, con densità spettrale di potenza $N_0/2$, che chiameremo $n(t)$. **

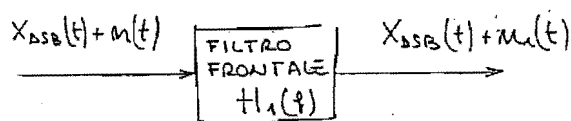
A. Demodulazione sincrona di un segnale DSB con rumore $n(t)$

Il ricevitore riceva in ingresso segnale DSB e rumore $n(t)$ sovrapposti:

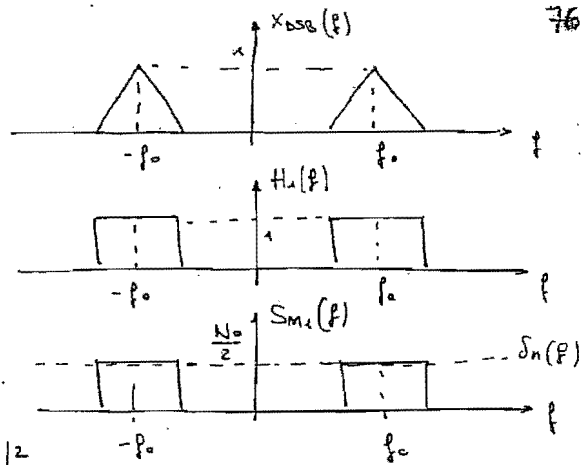
$$X_{DSB}(t) + n(t)$$

In frequenza lo spettro di $X_{DSB}(t)$ è noto; la densità spettrale di potenza $S_n(f)$ del rumore è costante e pari a $N_0/2$. Per eliminare quanto più rumore possibile si esegue un prefiltraggio con un passa banda centrato alla frequenza della portante, il più possibile selettivo: in sostanza questo filtro, detto FILTRO FRONTALE (Front end) deve avere una banda il più possibile vicina a quella del segnale DSB, ovvero circa $2B$. (B è la banda di $x(t)$).

- ** Una misura quantitativa del rumore presente è rappresentata dal rapporto fra la potenza del segnale utile e la potenza del rumore S/N .



La uscita da H_1 avremo ancora $X_{DSB}(t)$ sommato però al processo $m_1(t)$ come in figura a lato. La sostanza



$$S_{m_1}(f) = S_m(f) \cdot |H_1(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_1(f)|^2$$

Questa operazione non compromette la possibilità di stimare $m_1(t)$, perché $n(t)$ è AWGN, perciò m e m_1 sono incrociati e indipendenti.

Il filtro di "front end" è necessario per ridurre il rapporto segnale utile rumore in ingresso; senza H_1 il rapporto fra potenza di X_{DSB} e potenza di m sarebbe nullo, perché N è infinita. A valle del filtro frontale avremo la potenza del DSB pari a $P_x/2$ (noto dallo studio della mod. DSB).

La potenza di $m_1(t)$ risulta

$$N_1 = N_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_{m_1}(f)|^2 df = 2N_0B \quad \frac{N_0 \cdot f_{DB} = 2N_0B}$$

Allora il rapporto segnale utile in ingresso e rumore in ingresso risulta:

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{P_x}{4N_0B} \quad (7.6)$$

Portiamo ora il risultato del prefiltraggio in ingresso al demodulatore sincrono; osserviamo però che

$$X_{DSB}(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

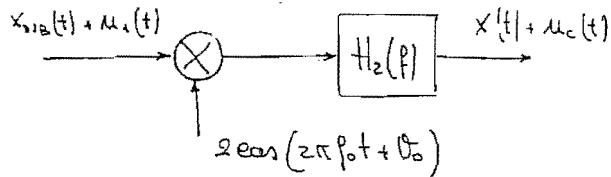
scrivendo $m_1(t)$ come componente in fase e componente in quadratura:

$$m_1(t) = m_c(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - m_s(t) \sin(\quad)$$

Come noto il demodulatore estrae solo le componenti ⁷⁷
in fase, quindi in uscita si ha:

$$x(t) + m_c(t)$$

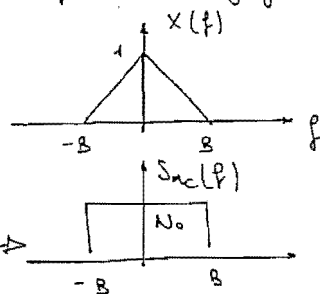
Il filtro $H_2(f)$ è di banda B ; esso quindi elimina le componenti di rumore che non aveva eliminato il filtro frontale. Per questo motivo nella demodulazione DSB il filtro di front end non è "critico".



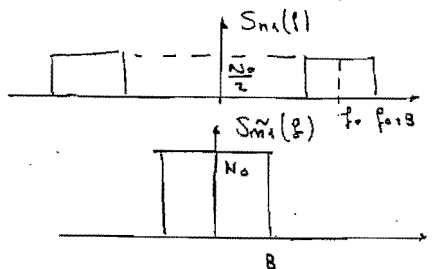
Il rapporto segnale utile rumore in uscita, può essere calcolato sulla base degli spettri di figura, che ci risulta:

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{P_x}{2N_0B} = 2 \frac{S_i}{N_i} \quad (7.7)$$

Osserviamo che tale rapporto è raddoppiato rispetto all'ingresso, quindi la demodulazione ha introdotto un miglioramento.



Vediamo come è stata ricavata $S_{nc}(f)$; ricordiamo che nota $S_{n_i}(f)$ si calcola l'involuppo complesso $\tilde{S}_{n_i}(f)$



Dall'involuppo complesso

$$S_{n_i}(f) = S_{nc}(f) = \frac{\tilde{S}_{n_i}(f) + \tilde{S}_{n_i}^*(-f)}{2}$$

B. Demodulazione Sincrona di un segnale SSB con rumore $M(t)$

Il ricevitore rileva in ingresso

78 C

$$X_{SSB}(t) + m(t)$$

in questo caso il segnale SSB è di banda B ,
 con il filtro frontale dovrà essere passa banda in f_0
 ma di banda B ; fra f_0 e $f_0 + B$. In questo caso allora
 in ingresso al demodulatore avremo $X_{SSB}(t)$ e un
 processo $m_1(t)$ con potenza

$$N_1 = N_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_{m_1}(f)|^2 df = N_0 B \quad (7.8)$$

Come noto la potenza di un segnale SSB è $P_x/4$,
 quindi il rapporto segnale utile rumore ~~all'ingresso~~
 sarà:

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{P_x}{4N_0 B} \quad (7.9)$$

riusciamo estrarre la sola componente in fase;

sapendo che:

$$X_{SSB}(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(\omega_c t) + \frac{\hat{x}(t)}{2} \sin(\omega_c t)$$

viene estratto $\frac{x(t)}{2}$; per il rumore viene estratto $m_c(t)$

In questo caso però $S_{m_1}(f)$

è quella di figura.

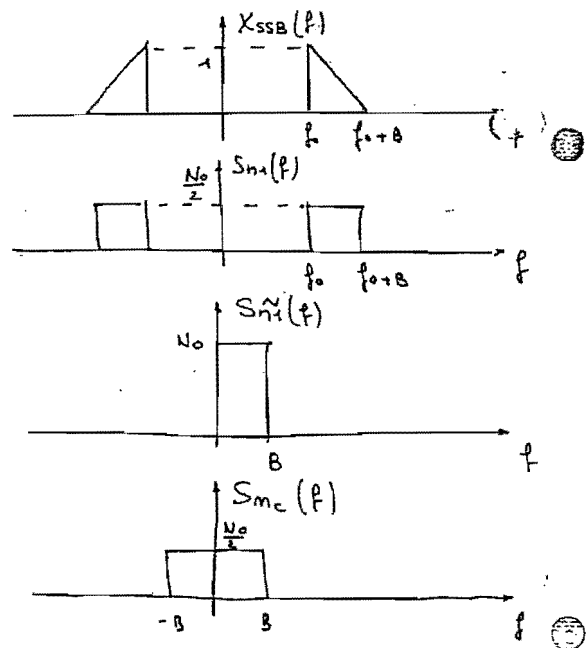
Calcoliamo $S_{m_1}(f)$ e
 dalla relazione

$$S_{m_c}(f) = \frac{S_{m_1}(f) + S_{m_1}(-f)}{2}$$

determiniamo la densità
 spettrale di potenza della
 componente in fase $m_c(t)$.

Siccome la comp. in fase
 di $X_{SSB}(t)$ e $\frac{x(t)}{2}$ la pot. del
 segnale utile è $P_x/4$, quindi
 il rapporto S/N in uscita
 risulta

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{P_x}{4N_0 B} \quad (7.10)$$



Criticità del filtro frontale per la demodulazione SSB. 79

Supponiamo che il filtro frontale H_1 , anziché essere di banda B , ecceda di ΔB_1 a sx e di ΔB_2 a dx.

In questo caso il processo $m_1(t)$ che ci presenta in ingresso al demodulatore ha densità spettrale $S_{m_1}(f)$ costante e pari a $\frac{N_0}{2}$ nell'intervallo che va da $f_0 - \Delta B_1$ a $f_0 + B + \Delta B_2$.

Anzitutto tutto diminuisce il rapporto S/N in ingresso, perché

$$S_i = P_x / 4$$

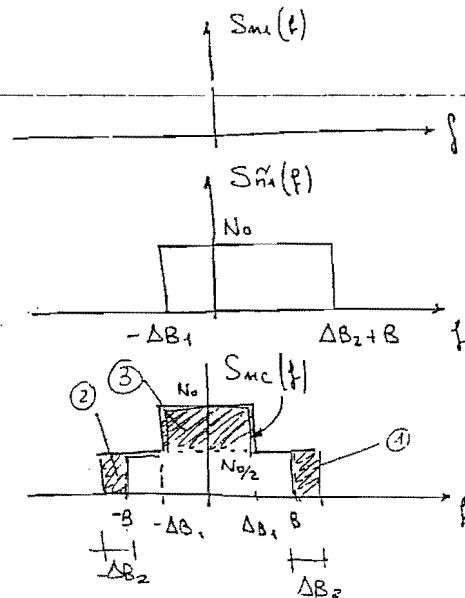
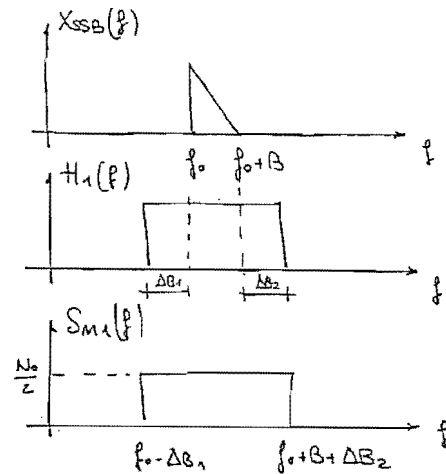
$$N_i = N_0 (B + \Delta B_1 + \Delta B_2)$$

(anziché $N_0 B$)

Qualtre calcoliamo la componente in fase di $m_1(t)$; partiamo da $S_{m_1}(f)$ e quindi da $\tilde{S}_{m_1}(f)$; sapendo che

$$S_{m_c}(f) = \frac{\tilde{S}_{m_1}(f) + \tilde{S}_{m_1}(-f)}{2}$$

Si viene a creare la zona ③ che essendo proprio nella banda di $x(t)$, non può più essere eliminata. Per questo motivo ΔB_1 deve essere il più piccolo possibile. L'eccesso ΔB_2 non influisce perché comunque viene eliminata tramite $H_2(f)$.



Facciamo ora un rapido confronto del comportamento in demodulazione di DSB e SSB nei confronti del rumore AWGN $m(t)$.

$$P_{DSB} = \text{pot. trasmessa in DSB} = \frac{P_x}{2}$$

$$\left(\frac{S_u}{N_u} \right)_{DSB} = \frac{P_x}{2 N_0 B} = 2 \left(\frac{S_i}{N_i} \right)_{DSB}$$

$$P_{SSB} = \text{pot. trasmessa in SSB} = \frac{P_x}{4}$$

$$\left(\frac{S_u}{N_u} \right)_{SSB} = \frac{P_x}{4 N_0 B} = \left(\frac{S_i}{N_i} \right)_{SSB}$$

Osserviamo che anche se

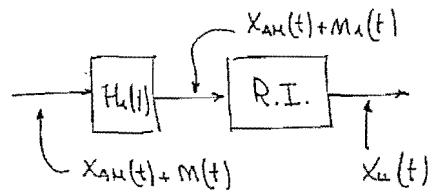
$$\left(\frac{S_u}{N_u} \right)_{SSB} = \frac{1}{2} \left(\frac{S_u}{N_u} \right)_{DSB}$$

l'efficienza della SSB è la stessa della DSB, perché il rapporto S/N è calcolato su metà della potenza in trasmissione.

C. Rivelatore di inviluppo per AM ($\mu \leq 1$)

81

Anche in questo caso si riceve un segnale AM sovrapposto allo stesso rumore $m(t)$ AWGN; occorre anche in questo caso un filtro di passabanda di banda $2B$ centrato in f_0 , all'uscita del quale si ha ancora $x_{AM}(t)$ e un rumore m_1 di banda due $2B$. All'ingresso del rivelatore di inviluppo avremo:



$$\begin{aligned} x_{AM}(t) + m_1(t) &= A_0 [1 + \mu x(t)] \cos(\omega_0 t + \theta_0) + m_1(t) = \\ &= A_0 [1 + \mu x(t)] \cos(\omega_0 t + \theta_0) + m_c(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0) - m_s(t) \sin(\omega_0 t + \theta_0) = \\ &= [A_0 + \mu A_0 x(t) + m_c(t)] \cos(\omega_0 t + \theta_0) - m_s(t) \sin(\omega_0 t + \theta_0) \end{aligned}$$

In questo caso la componente in fase è

$$A_0 + \mu A_0 x(t) + m_c(t)$$

mentre quella in quadratura è $m_s(t)$.
Ricordiamo che l'uscita del rivelatore di inviluppo è il modulo dell'inviluppo complesso, quindi:

$$x_u(t) = \sqrt{[A_0 + \mu A_0 x(t) + m_c(t)]^2 + m_s^2(t)}$$

Se vale la condizione sul rapporto segnale utile rumore in ingresso molto grande:

$$\frac{S_i}{N_i} \gg 1 \quad (7.11)$$

si ottiene:

$$x_u(t) = \sqrt{[A_0 + \mu A_0 x(t) + m_c(t)]^2}$$

$$\text{e per } A_0 + \mu x(t) A_0 + m_c(t) \geq 0$$

quindi:

$$x_u(t) = A_0 + \mu A_0 x(t) + m_c(t) \quad (7.12)$$

ed è lo stesso risultato che si otterrebbe con un demodulatore sincrono. Se la (7.11) non è soddisfatta si ha la "DISTORTIONE DEL SEGNALE": ciò che si ottiene in uscita è una funzione non lineare del segnale originale e quindi non è possibile estrarlo. Per garantire il soddisfacimento della condizione (7.11) è necessario scegliere il più preciso possibile il filtro frontale, per ridurre il più possibile la densità spettrale di potenza del rumore n_1 , alzando il rapporto fra segnale utile e rumore in ingresso.

MODULAZIONI ESPONENZIALI

83

MODULAZIONE DI FREQUENZA (FM) E DI FASE (PM)

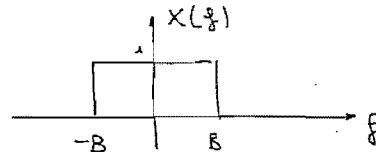
Se entrambe i casi la portante è $p(t)$

$$p(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Nella FM viene modulata la frequenza nella PM viene modulata la fase, in ogni caso in maniera proporzionale al segnale modulante $x(t)$. Noto lo spettro di $x(t)$:

In generale il segnale modulato, può essere scritto come:

$$x_M(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0] \quad (8.1)$$



nella quale $\Phi(t)$ è la funzione che mantiene le informazioni su $x(t)$. Possiamo anche scrivere

$$\begin{aligned} x_M(t) &= A_0 \cos[2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0] = \\ &= \operatorname{Re} \{ A_0 e^{j[2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0]} \} \end{aligned}$$

ed è per questo che vengono dette modulazioni esponenziali.

L'argomento del coseno è detta FASE ISTANTANEA $\theta(t)$:

$$\theta(t) = 2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0 \quad (8.2)$$

derivando si ottiene la velocità angolare della FREQUENZA ISTANTANEA:

$$(8.3) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \dot{\Phi}(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Nella modulazione PM la funzione $\Phi(t)$, che contiene le informazioni sul segnale modulante, è la seguente

$$\Phi(t)_{PM} = \Phi_\Delta \cdot x(t) \quad (8.4) \quad (*) \text{ NOTA}$$

l'espressione del segnale $x_{PM}(t)$ pertanto risulta

$$(8.5) \quad x_{PM}(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + \Phi_\Delta x(t) + \theta_0]$$

nel caso della FM, invece si vuole che

34

$$\frac{1}{2\pi} \dot{\Phi}(t) = f_{\Delta} x(t) = (f(t) = f_0 + f_{\Delta} x(t))$$

quindi risulta

$$\Phi(t) = 2\pi f_{\Delta} \int_{-\infty}^t x(n) dn \quad (8.6) \text{ *NOTA}$$

l'espressione del segnale modulato in frequenza $X_{FH}(t)$ risulta

$$(8.7) \quad X_{FH}(t) = A_0 \cos \left[2\pi f_0 t + 2\pi f_{\Delta} \int_{-\infty}^t x(n) dn + \theta_0 \right]$$

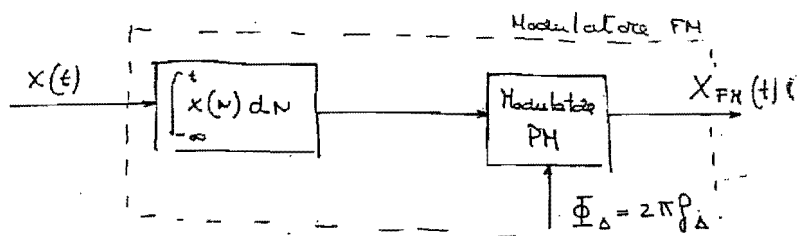
la quantità Φ_{Δ} è detto INDICE DI MOD. DI FASE mentre la quantità f_{Δ} è detta INDICE DI MOD. DI FREQUENZA. Scegliendo per convenzione segnali con $|x(t)| \leq 1$, i due indici rappresentano il massimo scostamento di fase e di frequenza, rispettivamente.

Modulazione di fase e Modulazione di frequenza sono strettamente legate, infatti una può essere ottenuta dall'altra mediante operazioni di derivazione o integrazione sul segnale in ingresso al modulatore.

Sulla base dell'espressione (8.7).

Schema 8.1

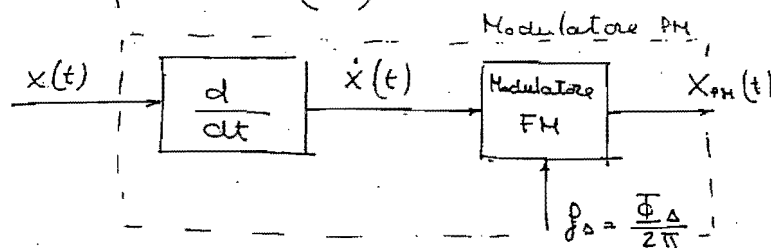
Modulatore FM
realizzato con
modulatore PM



Sulla base dell'espressione (8.5)

Schema 8.2

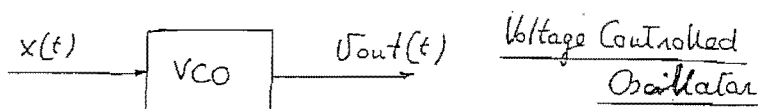
Modulatore PM
realizzato con
modulatore FM



In generale come modulatore FM si utilizza un dispositivo elettronico detto VCO (Voltage Controlled Oscillator), che realizza la funzione:

$$V_{out} = A_0 \cos \left[2\pi f_0 t + K \int_{-\infty}^t x(t) dt + \theta_0 \right]$$

85



In generale modulatori PM non esistono e vengono realizzati tramite modulatori FM come nello schema precedente (schema 8.2).

Per ciò che riguarda la demodulazione, per definizione un demodulatore FM è un dispositivo che fornisce in uscita un segnale proporzionale ad $x(t)$ avendo in ingresso $x_{FM}(t)$.

Un demodulatore FM che riceve

in ingresso un segnale PM

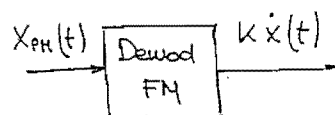
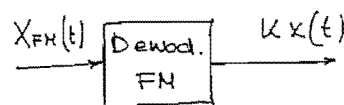
$x_{PM}(t)$, restituisce in uscita

$\dot{x}(t)$, un segnale pro-

porzionale alla derivata di $x(t)$;

allora basta integrare per

completare la demodulazione PM.



(Osservazione: la frequenza istantanea $f(t)$ è una funzione del tempo; nell'operazione di trasformazione di Fourier la frequenza f è una variabile indipendente. Nei due casi, il significato di frequenza, è profondamente diverso e non va assolutamente confuso.

Facciamo riassumere alcuni aspetti della mod. esponenziale.

1. L'ampiezza di un segn. modulato esponenzialmente è costante.
2. L'informazione risiede solo nell'attraversamento dello zero del segnale modulato.
3. Non sempre si riesce a visualizzare tramite l'onda del segnale modulato, l'andamento del segnale modulante.

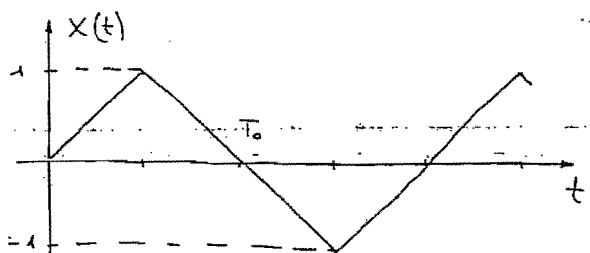
ANDAMENTO TEMPORALE DEL SEGNALE

86

Supponiamo il segnale modulante di tipo triangolare di ampiezza unitaria con T_0 (T_0 non è il periodo).

Il segnale modulato, in *quadratura* o in fase è un'oscillazione comunque compresa fra $+A_0$ e $-A_0$.

Nella modulazione PM,



$$x_{PM}(t) = A_0 \cos [2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0]$$

$$= A_0 \cos [2\pi f_0 t + \Phi_\Delta x(t) + \theta_0]$$

nella quale la fase istantanea varia con continuità perché $x(t)$ è continuo. La frequenza istantanea risulta

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} = f_0 + \frac{\Phi_\Delta}{2\pi} \dot{x}(t)$$

il segnale $\dot{x}(t)$ non è che la derivata del segnale $x(t)$ modulante; la frequenza istantanea, allora, è proporzionale alla "pendenza", in quell'istante, del segnale. Di quanto aumenta o diminuisce $f(t)$, dipende dal segnale (in particolare sua derivata), ma anche dall'indice di modulazione.

Per $t < 0$ $x(t) = 0$ allora

$$f(t) = f_0$$

cioè si ha la portante non modulata. Nell'intervallo

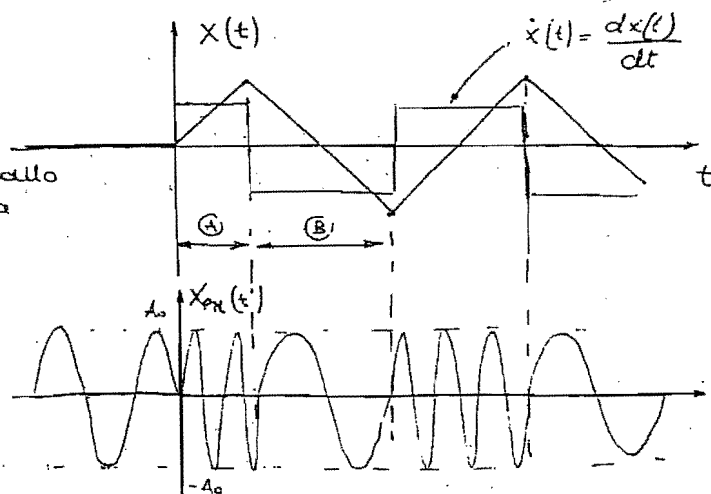
(A) la $\dot{x}(t)$ è positiva, allora

$$f(t) = f_0 + f_\Delta \dot{x}(t) > f_0$$

Nell'intervallo (B) al contrario la $\dot{x}(t)$ è neg, allora

$$f(t) = f_0 + f_\Delta \dot{x}(t) < f_0$$

In ogni caso $f(t)$ è proporzionale a $\dot{x}(t)$.



Nel caso della modulazione FM

87

$$x_{FM}(t) = A_0 \cos [2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0] =$$
$$= A_0 \cos \left[2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + \theta_0 \right]$$

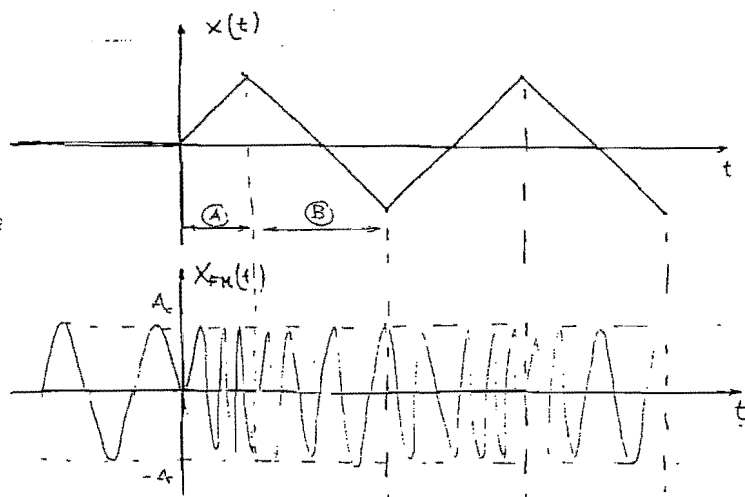
la frequenza istantanea risulta

$$f(t) = f_0 + f_\Delta x(t)$$

ovvero è proporzionale direttamente al segnale $x(t)$, tramite l'indice di modulazione f_Δ

I diagrammi temporali del segnale $x(t)$ triangolare sono i seguenti.

Per $t < 0$ si ha la portante non modulata, perché $x(t) = 0$. Nel tratto (A) $f(t)$ aumenta linearmente in funzione di $x(t)$ e tocca il valore max in $T_0/2$. Al passaggio in (B) la frequenza diminuisce linearmente con $x(t)$.



VINCOLI DI MODULAZIONE

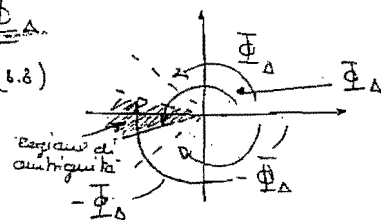
Un sistema di modulazione deve assicurare la possibilità di determinare in maniera univoca il segnale originale. Per questo motivo occorre osservare alcuni vincoli.

A. Indice di Modulazione di fase Φ_Δ

È necessario che $|\Phi_\Delta| < \pi$ (6.8)

in questo modo siamo certi che, essendo $|x(t)| \leq 1$ $\Phi(t)$

varia fra $-\Phi_\Delta$ e Φ_Δ . Se Φ_Δ fosse maggiore di π



B. Indice di Modulazione di frequenza f_m

88

È necessario $\boxed{f_m \ll f_c}$ ^(8.9) per assicurare la natura passa banda di $x_{FM}(t)$, ovvero del segnale modulato (elucideremo in seguito questo aspetto)

C. Vincolo sulla frequenza di portante

$$\boxed{f_0 \gg B} \quad (8.10)$$

In altri termini la portante deve variare molto più velocemente del segnale modulante.

ANALISI IN POTENZA DEI SEGNALE FM e PM

In entrambi i casi la potenza associata al segnale trasmesso, FM o PM, che sia, vale:

$$\boxed{P_{FM} = P_{PM} = \frac{A_0^2}{2}} \quad (8.11)$$

ovvero è la potenza associata alla portante sinusoidale.

Intuitivamente si può giustificare la (8.11), pensando al vincolo (8.10); ricordiamo che per segnali periodici

$$\rightarrow P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

mentre per segnali aperiodici

$$\rightarrow P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

allora considerato un intervallo piccolo $x(t)$ varia poco, perciò $x_{FM}(t) \approx x_{PM}(t)$ si scarta di poco dall'andamento della portante. In altri termini $\Phi(t)$ è ottenuto da $x(t)$ tramite relazioni lineari o integrarie; allora la banda di $\Phi(t)$ è la stessa del segnale modulante $x(t)$. Per questo motivo $\Phi(t)$ varia con la stessa velocità di $x(t)$.

$$P_{FM} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_0^2 \cos^2(\omega_c t + \phi_c) dt = \frac{1}{T} \frac{A_0^2}{2} \left[t \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A_0^2}{2}$$

Vediamo una dimostrazione più rigorosa

$$x_H(t) = A_0 \cos \left[2\pi f_0 t + \underbrace{\Phi(t)}_{\phi(t)} + \theta_0 \right] =$$

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_A x(t) & \text{FM} \\ 2\pi f_0 \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha & \text{PM} \end{cases}$$

$$= A_0 \cos \Phi(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - A_0 \sin \Phi(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

allora

$A_0 \cos \Phi(t)$ = Componente in fase

$A_0 \sin \Phi(t)$ = Componente in quadratura

come noto

$$P_H = \frac{1}{2} (P_c + P_s)$$

nella quale

$$P_c = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_c^2(t) dt \right]$$

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_s^2(t) dt \right]$$

allora

$$\begin{aligned} P_c + P_s &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\overbrace{x_c^2(t) + x_s^2(t)}^{A_0^2 \cos^2 \Phi(t) + A_0^2 \sin^2 \Phi(t) = A_0^2} \right] dt \right] = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_0^2 dt \right] = A_0^2 \end{aligned}$$

quindi

$$P_H = \frac{1}{2} (P_c + P_s) = \frac{A_0^2}{2}$$

ANALISI DELLA OCCUPAZIONE DI FREQUENZA

90

Come in precedenza scrivendo il segnale modulato con le componenti in fase e in quadratura, avremo

$$x_H(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0] =$$

con

$$x_c(t) = A_0 \cos \Phi(t) \quad (8.12.1)$$

$$x_s(t) = A_0 \sin \Phi(t) \quad (8.12.2)$$

sviluppando con la serie di Taylor le due espressioni (8.12.1) e (8.12.2), otteniamo

$$x_c(t) = A_0 \cos \Phi(t) = \left[1 - \frac{\Phi^2(t)}{2!} + \frac{\Phi^4(t)}{4!} - \dots \right] A_0 \quad (8.12.3)$$

$$x_s(t) = A_0 \sin \Phi(t) = \left[\Phi(t) - \frac{\Phi^3(t)}{6} + \dots \right] A_0 \quad (8.12.4)$$

Se $x(t)$ ha banda B , la funzione $\Phi(t)$ essendo proporzionale ad $x(t)$ (nella M) o all'integrale (nella FM) di $x(t)$ ha esattamente la stessa banda. La

componente in fase e quella in quadratura invece hanno banda molto maggiore di B ; infatti $\Phi^2(t)$, $\Phi^3(t)$, ..., $\Phi^n(t)$ sono delle convoluzioni in frequenza che allargano la banda:

$\Phi^2(t)$ ha banda $2B$

$\Phi^3(t)$ ha banda $3B$

$\Phi^n(t)$ ha banda nB

la modulazione FM o FM che sia, può essere vista come la differenza tra una modulazione DSB per un coseno, meno una DSB per un seno

$$\Rightarrow x_H(t) = A_0 \cos \Phi(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - A_0 \sin \Phi(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

nella quale i segnali modulanti

$$A_0 \cos \Phi(t) \text{ e } A_0 \sin \Phi(t).$$

hanno banda molto maggiore di B . In conclusione

$$B_{FM} \text{ e } B_{FM} \gg B \quad (8.13)$$

MODULAZIONI ESPONENZIALI A BANDA STRETTA ^{Stretto} (Narrow Band) ⁹⁴

Consideriamo il caso in cui

$$|\Phi(t)| \ll 1$$

dalle (8.1.3) e (8.1.4), possiamo approssimare come segue

$$\begin{aligned} A_0 \cos \Phi(t) &\approx A_0 \cdot 1 \\ A_0 \sin \Phi(t) &\approx A_0 \Phi(t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \phi_0 \pi(t) \text{ PH} \\ 2\pi f_0 \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \text{ FM} \end{cases}$$

allora il segnale modulato $x_H(t)$ risulta:

$$(8.14) \quad x_H(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - A_0 \Phi(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

In frequenza, per le sole frequenze portive

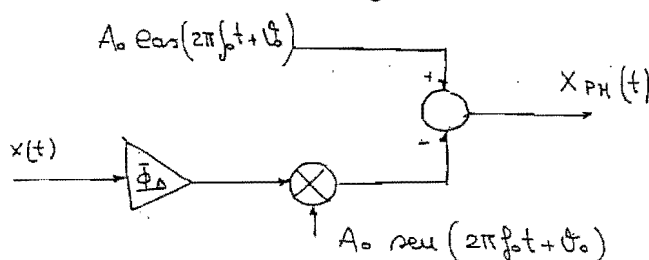
$$(8.15) \quad X_H(f) = \frac{A_0}{2} \delta(f - f_0) e^{j\theta_0} + j \frac{A_0}{2} \Phi(f - f_0) e^{j\theta_0}$$

- Di fatto dalla (8.14) si può vedere $x_H(t)$ come un segnale AM con portante sinusoidale. Ricordando gli schemi di modulazione AM e ricordando che nei due casi:

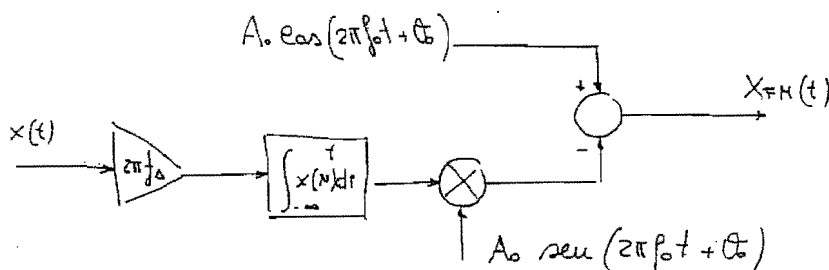
$$\text{FM} \longrightarrow \Phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$\text{PH} \longrightarrow \Phi(t) = \Phi_\Delta x(t)$$

si possono tracciare i seguenti schemi.



Schema 8.3
Modulatore
NBFM



Schema 8.4
Modulatore
NBFM

Il segnale della (8.14) si dice A BANDA STRETTA;
 a seconda della funzione $\Phi(t)$ si ha NBPM o NBFM.

BANDA DEI SEGNALE FM E PM

Sia $x_{FM}(t)$ un segnale modulato in frequenza nella forma

$$x_{FM}(t) = A \cos \left[2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + \phi \right]$$

Se $x(t)$, cioè il segnale modulante è del tipo

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t)$$

nello spettro compaiono una serie di componenti armoniche eccedenti lo spettro del segnale modulante. Anche se il segnale ha banda limitata, modulando in FM la banda è teoricamente infinita.

Esistono delle relazioni (per la dim. vedi Carlsen) approssimate che permettono di quantificare la banda.

$$\boxed{B_{FM} \approx 2(f_\Delta + B)} \quad (8.16)$$

detta FORMULA DI CARLSON. Una formula più precisa è la seguente

$$\boxed{B_{FM} \approx 2(f_\Delta + 2B)} \quad (8.17)$$

A seconda della qualità richiesta si sceglie una oppure l'altra relazione.

Esempio

Un segnale Audio di qualità ha una banda B di 15 kHz. A seconda della modulazione si ha

$$B_{AM} = 30 \text{ kHz}$$

$$\left. \begin{aligned} B_{FM1} &\approx 180 \text{ kHz} \\ B_{FM2} &\approx 210 \text{ kHz} \end{aligned} \right\} \text{tipicamente con } f_\Delta = 75 \text{ kHz}$$

per la modulazione PM vale la seguente:

93

$$\underline{B_{PM} \approx 2 (\Phi_{\Delta} + 1) B} \quad (8.18)$$

DISPOSITIVI DI MODULAZIONE E DEMODULAZIONE FM

BLOCCO LIMITATORE

Sia $x_M(t)$ un segnale modulato; esprimendolo tramite campamente in fase e in quadratura avremo

$$\begin{aligned} x_M(t) &= x_c(t) \cos(2\pi f_0 t) + x_s(t) \sin(2\pi f_0 t) = \\ &= p(t) \cos[2\pi f_0 t + \Phi(t)] = p(t) \cos(\theta(t)) \end{aligned}$$

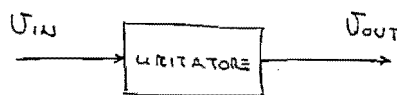
ponendo $\theta(t) = 2\pi f_0 t + \Phi(t)$. Osserviamo che

$$p(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \quad \begin{aligned} x_c(t) &= A_0 \cos \Phi(t) \\ x_s(t) &= A_0 \sin \Phi(t) \end{aligned}$$

$$\Phi(t) = \arctg \frac{x_s(t)}{x_c(t)}$$

Un LIMITATORE è un blocco non lineare senza memoria che ricevendo in ingresso un segnale $v_{IN} = x_M(t)$, fornisce in uscita v_{OUT} con ampiezza definita

$$v_{OUT}(t) = A_L \cos[2\pi f_0 t + \Phi(t)]$$

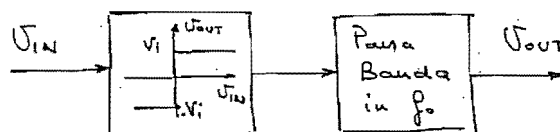


Un particolare troviamo un blocco non lineare

con la caratteristica $v_{OUT}(v_{IN})$ di figura, seguita da un filtro passa banda centrato in f_0 .

Se $v_{IN} = p(t) \cos[\theta(t)]$ in uscita

$$v_{OUT} = A_L \cos[\theta(t)]$$



Il primo blocco è uno "squadratore".
fissiamo $t = \bar{t}$, in ingresso:

$$p(\bar{t}) \cos[\theta(\bar{t})] \quad (9.1)$$

l'ingresso è periodico rispetto a $\theta(t)$, allora anche v_{OUT} è periodico rispetto a $\theta(t)$ con periodo 2π (perché è un coseno).

94
 Poiché il blocco è senza memoria, quindi, per valori uguali di ingresso si hanno valori uguali di uscita. Allora esprimiamo $v_{out}(t)$ come serie di Fourier di un segnale periodico:

$$v_{out}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j2\pi \frac{m\theta}{2\pi}}$$

il periodo di v_{in} rispetto a θ è 2π e la variabile rispetto alla quale si parla di periodicità è $\theta(t)$

$$v_{out}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\theta} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cos\{n\theta + \arg[a_n]\}$$

$$= a_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \cos\{n\theta + \arg(a_n)\} \quad (*)$$

Calcoliamo i coefficienti a_n :

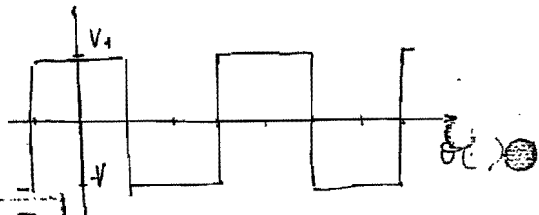
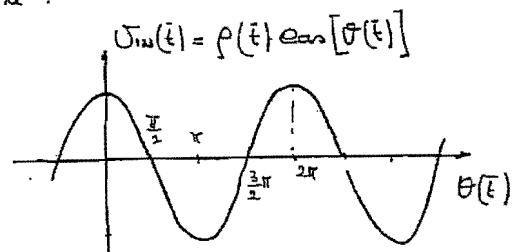
$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi]} v_{out} e^{-jn\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v_1 e^{-jn\theta} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} v_1 e^{-jn\theta} d\theta \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[v_1 \frac{e^{-jn\theta}}{-jn} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - v_1 \frac{e^{-jn\theta}}{-jn} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{v_1}{n} \frac{e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2j} + \frac{v_1}{n\pi} \frac{e^{-jn\frac{3\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2j}$$

$$= \frac{v_1}{n\pi} \left[\sin n\frac{\pi}{2} + e^{-j\frac{\pi}{2}n} \left(\frac{(-1)^n - 1}{2j} \right) \right]$$



Calcoliamo alcuni dei coefficienti:

$$a_1 = \frac{2V_1}{\pi} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{V_1}{3\pi} [-1.1] = -\frac{2}{3} \frac{V_1}{\pi} \dots$$

Riscrivendo $v_{out}(t)$:

$$v_{out}(t) = \frac{4V_1}{\pi} \cos[\theta(t)] + \frac{4}{3} \frac{V_1}{\pi} \cos[3\theta + \pi] + \dots \quad (9.2)$$

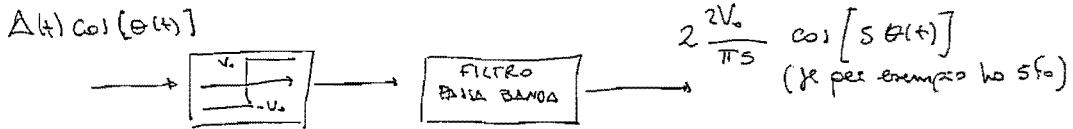
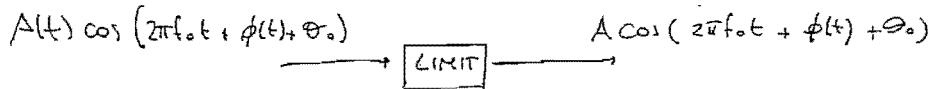
$$\textcircled{*} = \frac{4V_0}{\pi} \cos \theta + 2 \sum a_n \cos(n\theta + \phi_n)$$

$$\frac{4V_0}{\pi} \cos[\theta(t)] + 2 \sum |a_n| \cos[n\theta(t) + \phi_n]$$

$$Q_n = \begin{cases} \frac{2V_0}{\pi n} & n \text{ pares di sposi} \\ 0 & n \text{ m dispari} \end{cases}$$

LIMITATORE

È un oggetto che riceve in ingresso un oggetto

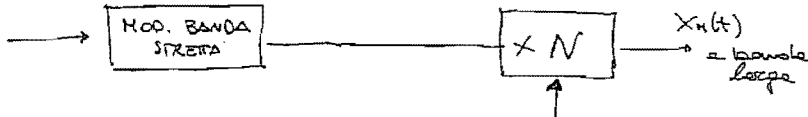


MODULATORE BANDA LARGA

$$x_n(t) = A_0 \cos[2\pi f_c t + \phi(t) + \theta_0] = A_0 \cos\left[N\left(2\pi \frac{f_c}{N} t + \frac{\phi(t)}{N} + \frac{\theta_0}{N}\right)\right]$$

$$\frac{\phi(t)}{N} \ll 1$$

↳ moltiplica le fase istantanea



MOD. banda stretta + moltiplicatore di fase istantanea

Vali per FM e PM.

Un altro modulatore, MA SOLO PER LF FM è il VCO

DEMULATORE FM → AM

$$A \cdot \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi f_c \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha + \theta_0\right]$$

però $f_c \ll f$

$$B_{FM} \approx 2(f_c + 2B)$$

DC BLOCK

$$A \cdot [2\pi f_c + 2\pi f_c x(t)] \sin[2\pi f_c t + 2\pi f_c \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha + \theta_0 + \pi]$$

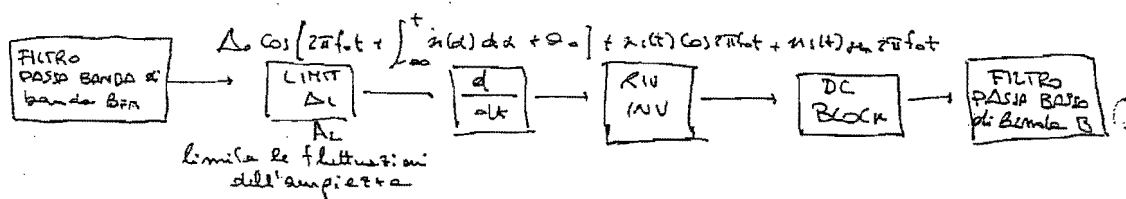
$\frac{d}{dt}$

$$2\pi f_c A_0 x(t)$$

RIV. INV.

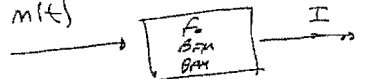
blocca la componente continua

I due componenti principali sono il derivatore e il rivelatore di envelope



Il filtro riesce a eliminare componenti frequenziali del rumore.
 Questi sono i 6 blocchi fondamentali di un DEMODULATORE FM

$$A_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t) + \theta_0] + m(t)$$

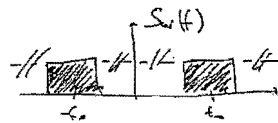


elimina le componenti
del rumore al di fuori del
segnale

$$S_i = \frac{A_0^2}{2}$$

I è considerato il vero e proprio ingresso.

Vediamo N_i ...



$$N_i = \left(\frac{N_0 B_{FM}}{2} \right) \cdot 2 = N_0 B_{FM}$$

↳ considera anche le frequenze negative

Porto il segnale dopo il blocco di fromf - end

$$A_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t) + \theta_0] + m(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - m(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (*)$$

L'involuppo complesso lo porto con modulo e fase

$$A_m(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi_m(t) + \theta_0]$$

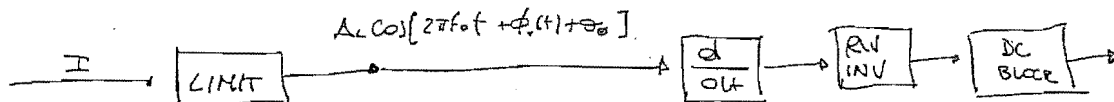
$$\begin{cases} \tilde{m}(t) = m_c(t) + j m_s(t) & = A_m(t) e^{j\phi_m(t)} \\ m(t) = \text{Re}[\tilde{m}(t) e^{j(2\pi f_0 t + \theta_0)}] \end{cases}$$

$$(*) = A_r(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi_r(t) + \theta_0]$$

(il segnale è passabanda, il rumore è passab → la risultante è passabanda)

lo scrivo come $A_0 e^{j\phi(t)} + A_m(t) e^{j\phi_m(t)} = A_r(t) e^{j\phi_r(t)}$

SOMMARE 2 SEGNALE SIGNIFICA SOMMARE I RISPETTIVI INVILUPPI COMPLESSI



dopo il derivatore...

$$A_r [2\pi f_0 + \dot{\phi}_r(t)] \sin[2\pi f_0 t + \phi_r(t) + \theta_0 + \pi]$$

dopo RV inv...

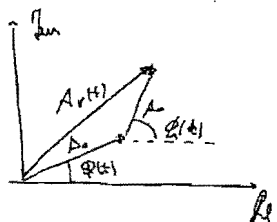
$$A_r [2\pi f_0 + \dot{\phi}_r(t)]$$

dopo DC BLOC...

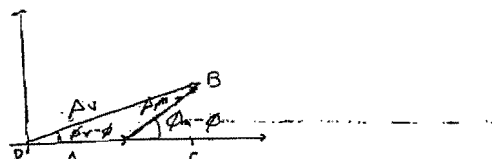
$$A_r \dot{\phi}_r(t)$$

Diagramma fasoriale.

1) lo schema funziona se $\omega_c \gg m(t)$? $\phi_v(t)$ è proporzionale al segnale?



de ruolo il diagramma di $\phi(t)$
mi ricordo



$$\phi_v(t) - \phi(t) = \arctan \frac{A_v(t) \sin[\phi_v(t) - \phi(t)]}{A_0 + A_v(t) \cos[\phi_v(t) - \phi(t)]} \approx \arctan \frac{BC}{DC}$$

$$\phi_v(t) = \phi(t) + \arctan \frac{BC}{DC}$$

Hp $\frac{\sigma_i}{N_i} \gg 1$

dove X, Y gaussiane indipendenti

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$A_m(t)$ Rayleigh

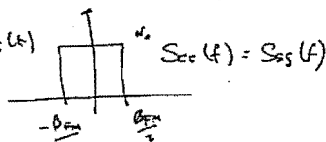
$\phi_v(t)$ uniforme



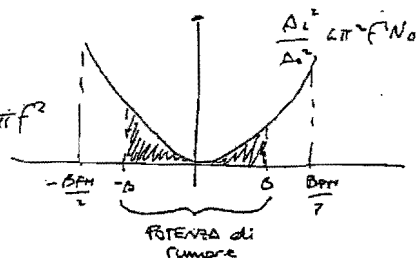
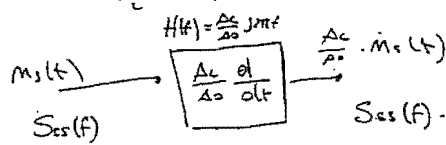
caso FM

$$A_c \phi_v(t) = A_c \left[\phi(t) + \frac{m(t)}{\Delta_o} \right] = A_c \left[2\pi f_c t + \frac{m(t)}{\Delta_o} \right]$$

derivata di $m(t)$



Vediamo



$$A_c \phi_v(t) \rightarrow \text{Passa Basso } B \rightarrow A_c 2\pi f_c t + \text{rumore}$$

$$S_v = 4\pi^2 f_c^2 \Delta_o^2 P_n$$

$$N_i = \frac{\Delta_o^2}{A_i^2} 4\pi^2 N \int_{-B}^B f^2 df = \frac{A_i^2}{A_o^2} \frac{3}{3} \pi^2 B^3 N_i$$

Piu piccola è la banda, minore è il rumore:

Efficienza spettrale significa inefficienza nel rumore

$$\frac{S_v}{N_i} = \frac{3f_c^2 B \pi^2}{B^3} \gg 1 \quad \text{quello giusto di demodulazione}$$

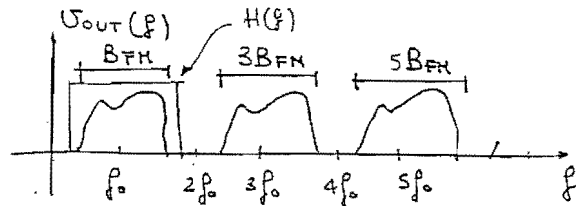
quindi:

$$V_{out}(t) = \frac{4V_1}{\pi} \cos[2\pi f_0 t + \Phi(t)] + \frac{4V_1}{3\pi} \cos[2\pi(3f_0)t + 3\Phi(t) + \pi] + \dots$$

95

qui addendo è un segnale FM = PM a seconda di $\Phi(t)$, centrato in k_f , ovvero in frequenza (consideriamo la mod FM):

Supponendo come sempre $f_0 \gg B_{FM}$ le prime repliche sono sicuramente non sovrapposte. Per estrarre lo spettro del segnale



transmesso occorre un filtro passa banda in f_0 di banda B_{FM} .

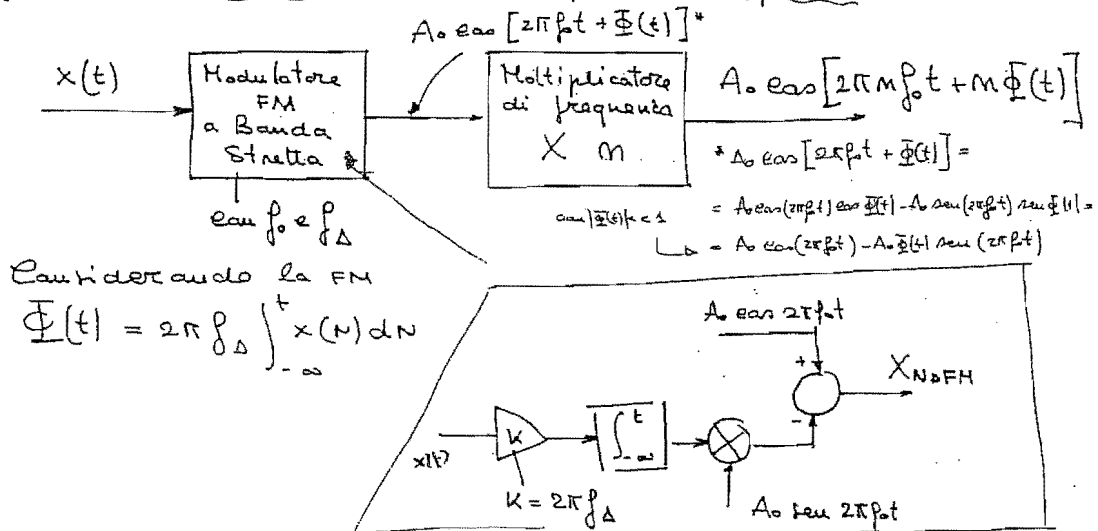
Osserviamo che se avessimo centrato il filtro in $m f_0$, con banda $m B_{FM}$, avremmo ottenuto un "moltiplicatore di frequenza".

Un segnale FM ha, nel tempo, ampiezza variabile. Questa

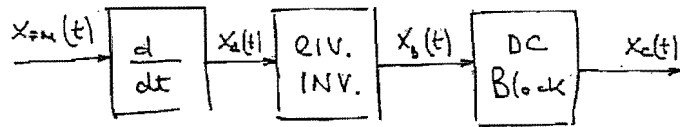
- caratteristica, è corrisposta da alcune proprietà dello spettro. Il canale di fatto è un filtro che modifica lo spettro del segnale FM, quindi esso potrebbe (in realtà) essere ricevuto con ampiezza variabile. Questo è il motivo, per cui il limitatore considera $p(t)$ funzione del tempo.

MODULATORE FM CON MOD A BANDA STRETTA

Un modulatore a banda stretta, non è altro che un modulatore AM. Per ottenere una modulazione FM, è sufficiente inserire un moltiplicatore per m .



Il segnale FM ricevuto sarà nella forma:



$$x_{FM}(t) = A_0 \cos \left[2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^t x(n) dn \right]$$

derivando rispetto al tempo:

$$\rightarrow x_d(t) = A_0 (2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta x(t)) \sin \left[2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^t x(n) dn \right] =$$

Il rilevatore di inviluppo preleva il modulo dell'inviluppo complesso, ovvero

$$\rightarrow x_b(t) = |A_0 (2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta x(t))|$$

affinché x_{FM} sia passa banda $f_0 \gg f_\Delta$; allora sicuramente

$$A_0 (2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta x(t)) > 0 \Rightarrow x_b(t) = A_0 (2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta x(t))$$

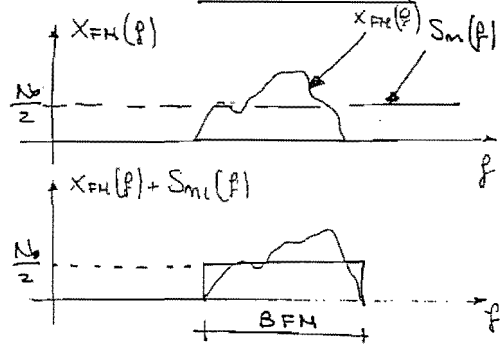
semplicemente rimane:

$$\rightarrow x_c(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$$

che è appunto proporzionale al segnale originale.

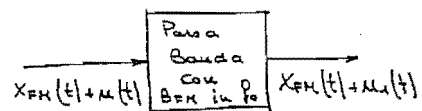
MODULAZIONI EXP IN PRESENZA DI RUMORE (AWGN) 97

Supponiamo di avere sovrapposto al segnale FM $x_{FM}(t)$, un rumore $m(t)$ (AWGN); esso ha densità spettrale di potenza costante pari a $N_0/2$. Allora il ricevitore FM deve essere dotato di un filtro prautale, che elimini quanto più rumore sia possibile; tale filtro deve essere di banda B_{FM} in f_0 , e anche in attiene il segnale $x_{FM}(t)$ sommato ad un rumore bianco filtrato $m_1(t)$. In ingresso



$$x_{FM}(t) + m(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \int_{-\infty}^t x(\nu) d\nu] + m(t)$$

Il rumore filtrato è passa banda, quindi:



$$x_{FM}(t) + m_1(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + \Phi(t)] + A_m(t) \cos[2\pi f_0 t + \Phi_m(t)] =$$

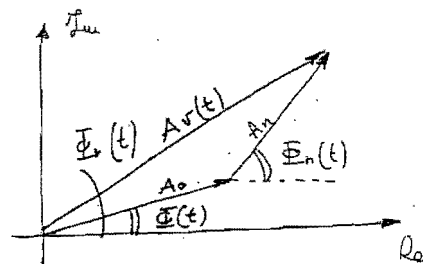
$$\left(\begin{array}{l} m_1(t) = m_c^{(1)} \cos(2\pi f_0 t) - m_s^{(1)} \sin(2\pi f_0 t) \\ A_m(t) = \sqrt{m_c^2(t) + m_s^2(t)} \end{array} \right) \frac{\frac{S_F}{N_F} = \frac{A_0^2/2}{N_0 B_{FM}}}{\begin{array}{l} P_{FM} = A_0^2/2 \text{ non di banda da } x \\ S_m(f) = 2 \left[\frac{N_0}{2} B_{FM} \right] \end{array}} \quad (9.3)$$

$$= A_v(t) \cos[2\pi f_0 t + \Phi_v(t)]$$

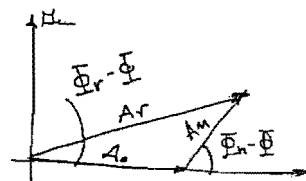
Facendo in serie al filtro prautale un limitatore otteniamo in uscita $x_A(t)$ come segue:

$$x_A(t) = A_L \cos[2\pi f_0 t + \Phi_v(t)] \quad (9.4)$$

Dalla (9.3), il termine $A_v(t)$ non ci interessa, quindi calcoliamo $\Phi_v(t)$ che è legato a $x(t)$. Osserviamo che il segnale espresso attraverso l'inviluppo complesso può essere rappresentato con un vettore di modulo A_0 e fase $\Phi(t)$; analogamente il rumore sarà un vettore di modulo $A_m(t)$ e fase $\Phi_m(t)$.



Sommando vettorialmente si ottiene un vettore di modulo $A_v(t)$ e fase $\Phi_v(t)$; ruotando il tutto in senso orario $\Phi(t)$ si ottiene il diagramma vettoriale di figura nel quale



$$\Phi_v(t) - \Phi(t) = \arctg \frac{A_n(t) \sin[\Phi_n(t) - \Phi(t)]}{A_0 + A_n(t) \cos[\Phi_n(t) - \Phi(t)]}$$

perché hanno le stesse statistiche

allora

$$\Phi_v(t) = \Phi(t) + \arctg \frac{A_n(t) \sin[\Phi_n(t) - \Phi(t)]}{A_0 + A_n(t) \cos[\Phi_n(t) - \Phi(t)]}$$

Supponiamo di avere in ingresso un rapporto segnale - rumore sufficientemente grande da garantire

$$\frac{S_i}{N_i} \gg 1$$

(9.5) $\left(\begin{array}{l} \text{vettore segnale lungo} \\ \text{vettore rumore corto} \end{array} \right)$

in questo modo... $A_0 \gg A_n$.

(1.10 $0 \leq 2\pi$)

La fase $\Phi_n(t)$ ha distribuzione uniforme; allora anche $\Phi_n(t) - \Phi(t)$ (per t fissato $\Phi(t)$ è costante) è anch'essa uniformemente distribuita.

Allora

$$\Phi_n(t) - \Phi(t) \quad (9.6)$$

La varianza da $m_c(t)$ e $m_s(t)$, che sono due var. casuali gaussiane, si estraggono due variabili casuali $A_n(t)$ e $\Phi_n(t)$

è statisticamente equivalente a $\Phi_n(t)$; inoltre

$$A_n(t) \sin(\Phi_n(t)) = m_s(t)$$

allora per l'espressione (9.5) e per l'osservazione (9.6), si può dire

$$\begin{aligned} \Phi_v(t) &= \Phi(t) + \arctg \frac{m_s(t)}{A_0} \approx \\ &\approx \Phi(t) + \frac{m_s(t)}{A_0} \end{aligned}$$

sempre per la (9.5)

Riscrivendo la (9.4), si ottiene

$$\begin{aligned} x_A(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + \Phi_v(t)) = \\ &= A_c \cos\left(2\pi f_c t + \Phi(t) + \frac{m_s(t)}{A_0}\right) \end{aligned}$$

inserendo ora un derivatore, un rivelatore di inviluppo⁹⁹ e un blocco per eliminare la "continua" attenuiamo:

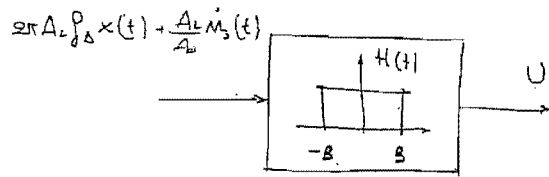
$$x_B(t) = \frac{d}{dt} x_A(t) = A_L \left[2\pi f_0 + \dot{\Phi}(t) + \frac{\dot{m}_s(t)}{A_0} \right] \sin(\quad) =$$

$$= -A_L \left[2\pi f_0 + 2\pi f_0 x(t) + \frac{\dot{m}_s(t)}{A_0} \right] \sin(\quad)$$

quindi $x_c(t)$ risulta

$$x_c(t) = -2\pi A_L f_0 x(t) + \frac{A_L}{A_0} \dot{m}_s(t)$$

A questo punto inseriamo un filtro passa basso di banda B , attenuiamo come rapporto segnale rumore in uscita:



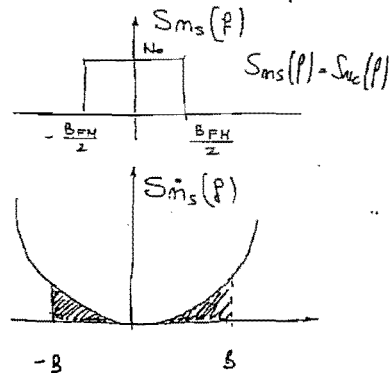
$$N_u = \int_{-B}^B N_0 4\pi^2 f^2 df =$$

$$= 8N_0 \pi^2 \int_0^B f^2 df =$$

$$= 8\pi^2 N_0 B^3/3$$

Ricordiamo che noto $S_{m_s}(f)$, derivando

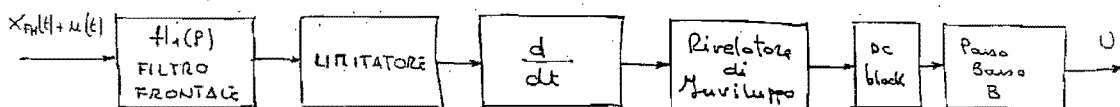
$$S_{\dot{m}_s}(f) = 4\pi^2 f^2 S_{m_s}(f)$$



Quindi

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{4\pi^2 f_0^2 P_x A_L^2}{8\pi^2 N_0 B^3/3 \cdot \frac{A_L^2}{A_0^2}} = \frac{3f_0^2 P_x A_0^2}{2N_0 B^3}$$

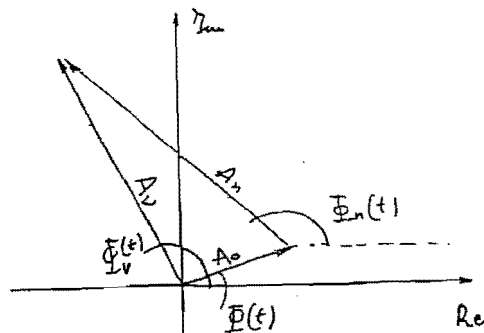
In sostanza lo schema del DEMODULATORE FM A LARGA BANDA risulta il seguente



Vediamo cosa succede nell'ipotesi di rumore preponderante rispetto al segnale in ingresso: 100

Analizziamo il diagramma fasoriale.

In questo caso se Φ_n varia, non esiste legame fra $\Phi(t)$ e $\Phi_r(t)$, quindi il segnale è praticamente "scompare" rispetto al rumore.



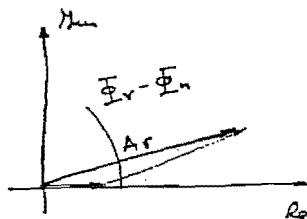
Nei ricevitori FM come quello appena visto esiste

il cosiddetto EFFETTO SOGLIA.

In sostanza, esiste un valore minimo di rapporto S/N in ingresso al di sotto del quale "scompare" la relazione fra Φ_r e Φ . La soglia si indica con

$$\left(\frac{S_i}{N_i}\right)_{th} = \text{Soglia } S/N$$

Osservazione: Se tracciamo il diagramma fasoriale sommando il fasore del rumore al fasore del segnale, avremo ottenuto



$$\Phi_r(t) = \Phi_n(t) + \arctg \frac{A_0 \sin[\Phi(t) - \Phi_n(t)]}{A_n + A_0 \cos[\Phi(t) - \Phi_n(t)]}$$

In questo caso è evidente che lavorando sotto soglia $S_i < N_i$, si possono trascurare tutti i termini che riguardano il segnale e si ottiene.

$$\Phi_r(t) \approx \Phi_n(t) + \arctg \frac{A_0^{(t)} \sin \Phi_n(t)}{A_n(t)}$$

Nota. Il rapporto Segnale-Rumore si misura in dB. Siccome S/N è il rapporto fra due potenze

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log_{10} \frac{S}{N}$$

Se anziché esprimere il rapporto S/N in potenza⁴⁰¹, venisse espresso in ampiezza, avremmo

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 20 \log_{10} \frac{S}{N} \rightarrow \text{Ampiezza.}$$

Se ad esempio segnale S e rumore N fossero sinusoidali,

$$S = \frac{A_o^2}{2} \quad N = \frac{A_n^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{allora} \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{dB} &= 10 \log \frac{S}{N} = 10 \log_{10} \left(\frac{A_o}{A_n}\right)^2 = \\ &= 20 \log_{10} \left(\frac{A_o}{A_n}\right) \end{aligned}$$

Quando si parla di banda a -3dB si parla in termini di ampiezza

$$20 \log_{10} \frac{S_1}{S_2} = -3 \text{ dB} \Rightarrow 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} = -3 \text{ dB}$$

$$\text{Allora} \quad \frac{S}{S_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}$$

La banda a -3dB si dice anche BANDA A RETA' POTENZA.

FH a Banda Stretta FH a Banda Stretta

Il segnale $x_{FH}(t)$ a BANDA STRETTA è nella forma:

$$x_{FH}(t) = A_o \cos(2\pi f_o t) - \Phi(t) A_o \sin(2\pi f_o t)$$

$$\Phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^t x(\nu) d\nu$$

anche in questo caso supponiamo la sovrapposizione di un rumore $m(t)$:

$$m(t) = m_c(t) \cos(2\pi f_o t) - m_s(t) \sin(2\pi f_o t)$$

con il filtro passante si ottiene un rumore $m_1(t)$

$$x_{FH}(t) + m_1(t) = A_o \cos(2\pi f_o t) - \Phi(t) A_o \sin(2\pi f_o t) +$$

$$m_c(t) \cos(2\pi f_o t) - m_s(t) \sin(2\pi f_o t)$$

con un "demodulatore sincrono" si estrae la componente

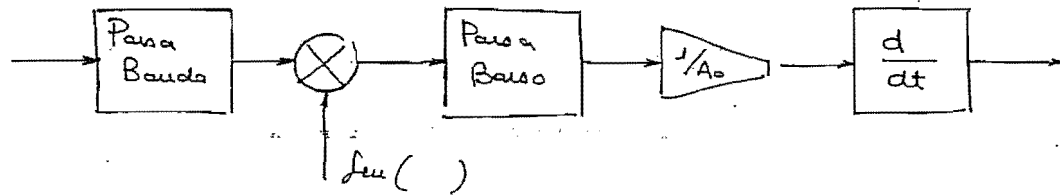
te in quadratura

$$\Phi(t) + m_s(t)$$

eventualmente si può attenuare, quindi derivando si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\Phi(t) + \frac{m_s(t)}{A_0} \right] &= \\ &= 2\pi f_\Delta x(t) + \frac{m_s(t)}{A_0} \end{aligned}$$

Lo schema di riferimento è il seguente.



INTRODUZIONE

Nelle trasmissioni numeriche viene stabilito un alfabeto di simboli finito; ciascuno di questi "caratteri" è associato ad una informazione. In generale ciascun simbolo potrebbe essere costituito da un particolare segnale $s_i(t)$ con una propria forma d'onda.

Ad esempio in una codifica binaria avremmo un segnale $s_1(t)$ associato all'uno logico e un segnale $s_0(t)$ associato allo zero logico (vedi figura a lato).

Ovviamente trasmettitore e ricevitore conoscano l'alfabeto stabilito e si

decide, in base al segnale ricevuto, quale dei simboli è stato trasmesso.

Il compito del ricevitore è proprio

quello del DECISORE; tanto più le forme d'onda sono diverse fra loro tanto più facile sarà riconoscere la forma d'onda trasmessa anche se deformata dalla presenza di rumore.

Ogni segnale associato ad un carattere viene trasmesso ad una distanza T_s detta

INTERVALLO DI SEGNALE

(indicato con I.O.D.). In generale il segnale $s_i(t)$ analogico

ha durata superiore all'intervallo di segnalazione;

come noto infatti per avere durata limitata occorre banda illimitata.

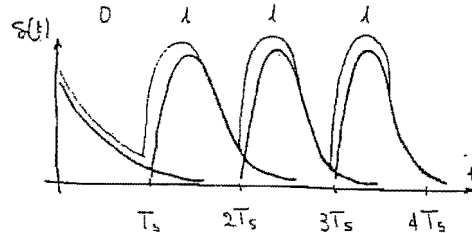
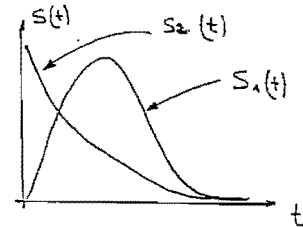
L'impiego di un alfabeto risulta utile anche in termini di immunità

al rumore. Consideriamo

ad esempio un sistema binario al quale associamo

allo zero $s_0(t)$ e all'uno

$s_1(t)$, notiamo che anche in presenza di rumore AWGN



404
l' intelleggibilità dell' informazione non è compromessa.
Metodi ancora più efficienti prevedono codifiche multiple
che associano a ciascuna carattere più segnali. In
altri casi si inseriscono codifiche per l'individuazione
e la correzione degli errori.

Si consideri un segnale analogico $x(t)$. Per prima cosa viene eseguito il CAMPIONAMENTO; come noto, se $x(t)$ ha banda B (ottenibile comunque con operazioni di prefiltraggio), rispettando il teorema di Shannon (condizione di Nyquist $F \geq 2B$), è possibile ricostruire $x(t)$ a partire dal segnale campionato. Dopo il campionamento $x_c(t)$ è un segnale tempo discreto.

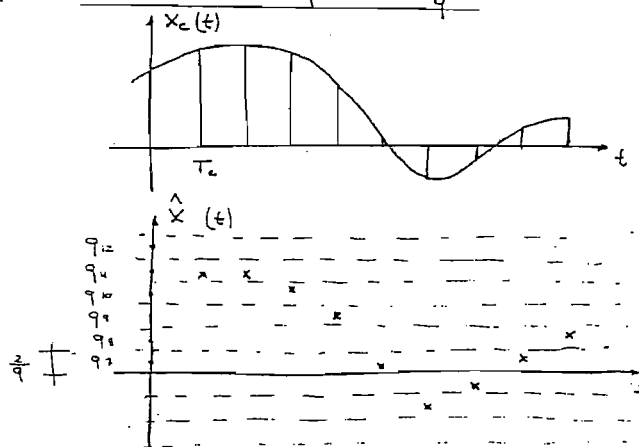
La fase successiva consiste in una discretizzazione delle ampiezze ed è detta QUANTIZZAZIONE. L'intervallo dell'ampiezza viene suddiviso in q fasce $q_1, q_2, \dots, q_q$ di ampiezza $2/q$ che

si estende da $q_i + \frac{1}{q}$ a $q_i - \frac{1}{q}$. Nella fase di quantizzazione ogni campione viene ricondotto al valore q_i più vicino. Per come sono costruite le fasce si può avere un errore detto ERRORE DI QUANTIZZAZIONE, che può valere al più $\pm \frac{1}{q}$.

Per ricostruzione, la ricostituzione viene fatta sul segnale quantizzato $\hat{x}(kT_c)$.

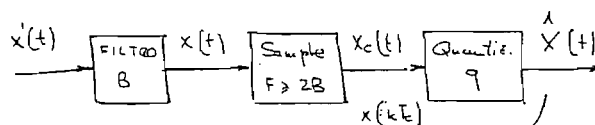
L'errore commesso

in ricostruzione essendo quello di quantizzazione, è facilmente quantificabile e riducibile, perché come già accennato vale $\pm \frac{1}{q}$.



La fase di quantizzazione è seguita dalla codifica: si associa a

ciascun campione quantizzato $\hat{x}(kT_c)$ un numero o segnale; se abbiamo scelto di quantizzare con q livelli, occorrono q segnali per rappresentare tutto $x(t)$.



$$\hat{x}(kT_s) = x(kT_s) \pm E(kT_s)$$

Nella maggior parte dei casi si impiega il sistema binario. Ciascun simbolo o segnale è costituito da una parola a 1 bit. Su scartiera per ottenere la rappresentazione di q livelli attraverso q segnali o q parole, occorrono 1 bit tale che

$$q = 2^1$$

ovvero

$$1 = \log_2 q$$

Rumore di Quantizzazione

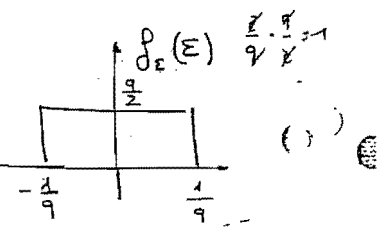
Come già accennato ciascun livello di quantizzazione è centrato intorno al valore q_i con ampiezza $2/q$. Il segnale PCM ricevuto dopo la trasmissione sarà: $x_c(t)$

$$\hat{x}(kT_c) = x(kT_c) \pm \varepsilon(kT_c)$$

nella quale $\varepsilon(kT_c)$ è detto appunto ERRORE DI QUANTIZZAZIONE. Esso è descrivibile mediante una variabile casuale uniformemente distribuita fra $-\frac{1}{q}$ e $\frac{1}{q}$, con potenza

$$E\{\varepsilon^2\} = N_0 = \int_{-\frac{1}{q}}^{\frac{1}{q}} \varepsilon^2 p_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon =$$

$$= \frac{q}{2} \int_{-\frac{1}{q}}^{\frac{1}{q}} \varepsilon^2 d\varepsilon = \boxed{\frac{1}{3q^2}}$$



Nota: Trasmissioni Telefoniche

La modulazione PCM è impiegata nelle trasmissioni telefoniche e si pone:

$$q = 256$$

$$T_c = 125 \mu\text{sec}$$

$$B = 8 \text{ kHz}$$

$$R = \frac{1}{T} = \frac{8}{125 \mu\text{sec}} = 64 \text{ kbit/sec}$$

Sebbene $q=256$ occorrono 8 bit per ciascun campione. Per trasmettere 8 bit prima che venga rilevato il campione successivo occorre un intervallo di segnalazione T

Osserviamo che essendo $T = 1/64 \text{ Kbit/sec}$ la banda del segnale PCM risulta

107

$$B = \frac{1}{2T} = 32 \text{ KHz}$$

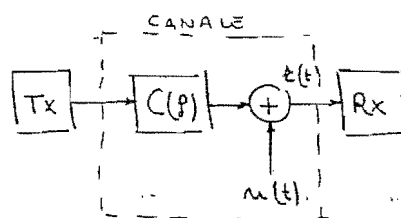
intervallo associato alla tx di un singolo bit.

Con una mod AM avremmo avuto $B_{AM} = 16 \text{ KHz}$

TRASMISSIONI NUMERICHE IN BANDA BASE

In generale un sistema di trasmissione, può essere schematizzato come segue.

Il canale di trasmissione è di fatto un filtro passa banda $C(f)$ che introduce un rumore $n(t)$ AWGN.



In una trasmissione numerica viene stabilito un alfabeto A che in generale sarà del tipo:

$$A = \{ S_i(t) \}_{i=1}^H = \{ S_1(t), S_2(t), \dots, S_H(t) \} \quad \text{con probabilità } p_i$$

costituito appunto da H simboli o segnali. A ciascuno degli H segnali è associata una probabilità di essere trasmesso p_i .

Consideriamo il caso di una trasmissione "one shot", nella quale si invia sul canale un simbolo alla volta. Il ricevitore conosce il set di caratteri e le relative probabilità e, acquisito il segnale $r(t)$, deve decidere a quale informazione associarlo; in altri termini deve stabilire a quale segnale $S_i(t)$ corrisponde $r(t)$. Ammesso che la decisione $S_i(t)$ sia corretta, il rumore sovrapposto nel canale non ha più alcuna valenza e può ritenersi eliminato. In questo senso le trasmissioni numeriche risultano più "robuste" di quelle analogiche.

Osservazione: Se per le tx analogiche su lunghe distanze, la rigenerazione del segnale comporta una amplificazione del rumore fino a quel punto introdotto, nelle tx numeriche la rigenera

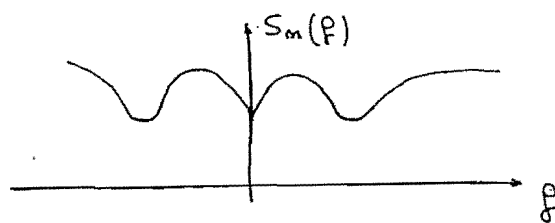
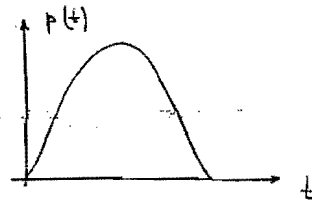
zione dei livelli logici permette la discriminazione¹⁰⁸ del rumore.

Consideriamo un generico impulso $p(t)$ avente un proprio andamento e una durata D . Supponiamo di sommare ad esso il processo $m(t)$ che rappresenta il rumore introdotto dal canale. Supponiamo inoltre che tale rumore sia gaussiano ma "colorato" (non bianco) con densità spettrale di potenza $S_m(f)$ che, per quanto detto, non è più costante, ma a simmetria pari per la gaussianità.

$$r(t) = p(t) + m(t)$$

Trasmettiamo sul canale l'impulso che, sommato al rumore, costituisce $r(t)$.

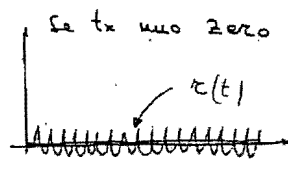
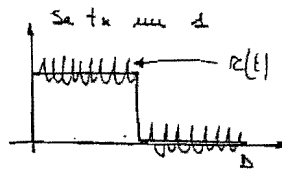
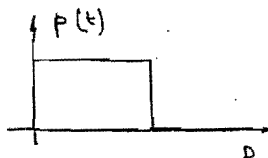
(Questo è il caso delle strutture radar nelle quali, per verificare la presenza o meno di un oggetto, si trasmette $p(t)$ e si attende una risposta; se il bersaglio è presente si riceve $p(t)$, mentre in caso contrario solo il rumore.)



Il problema consiste quindi nel decidere se nel segnale $r(t)$ è presente o meno l'impulso $p(t)$.

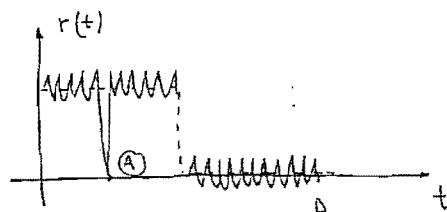
Questa situazione è quella che si presenta nel caso delle trasmissioni binarie. Si associa all'uno l'impulso rettangolare $p(t)$ mentre allo zero si associa il valore nullo di tensione. Il ricevitore dovrà stabilire se in $r(t)$ è presente o meno $p(t)$.

Ricordiamo che il rumore è a media nulla.

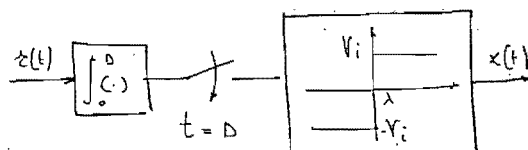


Vediamo alcune strategie di decisione.

Si potrebbe pensare di leggere il valore di tensione in un generico istante dell'intervallo D ma, se per coincidenza sceglieremo A si verificherebbe un errore. Una soluzione certamente più efficiente consiste nel calcolare l'area sottesa da $r(t)$ in un certo istante.



Ad esempio integriamo $r(t)$ dall'istante di ricezione all'istante pari alla durata D ; nell'istante

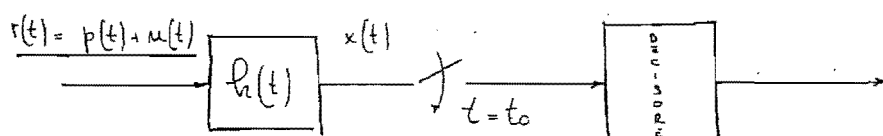


$t = D$ leggiamo il valore di tale integrale. Se

l'integrale risulterebbe pressoché nullo, in caso contrario assumerebbe un certo valore.

A questo punto quindi basterebbe decidere a soglia per produrre un'uscita ^{casuale} causata alla decisione. Il caso della tx binaria è un caso particolare nel quale i due eventi (0 e 1) sono equiprobabili.

La questione può essere generalizzata, cercando un filtro frontale $h(t)$ che massimizza il rapporto S/N in ingresso al ricevitore.



Supponiamo il filtro $h(t)$ lineare. Allora si può affermare che:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \otimes h(t) = \overbrace{p(t) \otimes h(t)}^{x_p(t)} + \overbrace{n(t) \otimes h(t)}^{x_n(t)} = \\ &= x_p(t) + x_n(t) \quad (10.1) \end{aligned}$$

nella quale $x_p(t)$ è un segnale determinato, mentre

$x_m(t)$ è un processo stocastico. Il rapporto segnale rumore (indicato in questo caso con SNR) risulta:

$$\text{SNR} \triangleq \frac{x_p^2(t_0)}{\mathbb{E}\{x_n^2(t_0)\}} = \frac{x_p^2(t_0)}{\mathbb{E}\{x_m^2(t)\}} \quad (10.2)$$

Il filtro $h(t)$ deve essere progettato in modo da massimizzare (perché $n(t)$ è gaussiano) il rapporto SNR nell'istante t_0 , quindi è essenziale che il campionamento in t_0 sia perfettamente sincronizzato. Dalla relazione (10.2) passando in frequenza abbiamo:

$$\begin{aligned} \underline{x_p(f)} &= P(f)H(f) \quad \text{con} \quad x_p(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_p(f) e^{j2\pi f t_0} df \\ (10.3) \quad &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)H(f) e^{j2\pi f t_0} df \end{aligned}$$

mentre per il processo

$$\underline{x_m(f)} = S_m(f)|H(f)|^2$$

quindi:

$$\mathbb{E}\{x_m^2(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f)|H(f)|^2 df$$

La (10.2) diviene:

$$\text{SNR} \triangleq \frac{x_p^2(t_0)}{\mathbb{E}\{x_m^2(t)\}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)H(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f)|H(f)|^2 df} \quad (10.4)$$

Nota: Si ricordi la disuguaglianza di S

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\varphi^*(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(x)|^2 dx$$

Nella quale $\psi(x)$ e $\varphi(x)$ sono due generiche funzioni complesse. Osserviamo che l'uguaglianza vale se $\varphi(x) = k \psi^*(x)$

Applicando la disuguaglianza di Swartz al numeratore¹⁷⁴ della (10.4)

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X_p(f) e^{j2\pi f t_0} df \right]^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) H(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2 =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(f)}{\sqrt{S_n(f)}} H(f) \sqrt{S_n(f)} e^{j2\pi f t_0} df \right|^2 \quad (10.5)$$

poniamo

$$\varphi^*(x) = H(f) \sqrt{S_n(f)} \quad (10.6.1)$$

$$\psi(x) = P(f) / \sqrt{S_n(f)} e^{j2\pi f t_0} \quad (10.6.2)$$

quindi:

$$(1) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(f)}{\sqrt{S_n(f)}} e^{j2\pi f t_0} H(f) \sqrt{S_n(f)} df \right|^2 \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{P(f)}{\sqrt{S_n(f)}} e^{j2\pi f t_0} \right|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f) \sqrt{S_n(f)}|^2 df$$

Sostituendo nella (10.2)

$$SNR \triangleq \frac{X_p^2(t_0)}{E\{X_n^2(t)\}} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P(f)|^2 |e^{j2\pi f t_0}|^2}{S_n(f)} df$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P(f)|^2}{S_n(f)} df = 1$
 (10.7)

valendo massimizzare SNR si dimensiona $h(t)$ in modo che valga l'uguaglianza, quindi

$$\varphi(x) = K \psi(x) \quad (10.8.1)$$

$$H^*(f) \sqrt{S_n(f)} = K \frac{P(f) e^{j2\pi f t_0}}{\sqrt{S_n(f)}} \quad (10.8.2)$$

ovvero

$$H(f) = K \frac{P^*(f) e^{-j2\pi f t_0}}{S_n(f)} \quad (10.9)$$

questo filtro, ben definito, si dice FILTRO ADATTATO ed è quello che massimizza SNR nell'istante voluto.

Nel caso delle trasmissioni $m(t)$ e AWGN, quindi la sua densità spettrale di potenza è

$$S_m(f) = \frac{N_0}{2}$$

quindi si ha

$$SNR_{max} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P(f)|^2}{S_m(f)} df = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df$$

che, per il teorema di Parseval vale

$$SNR_{max} = \frac{2E_p}{N_0}$$

nella quale E_p è l'energia posseduta dall'impulso.

CORRELATORE (IN ALTERNATIVA AL FILTRO ADATTATO)

Si consideri l'impulso $p(t)$ rettangolare di figura

Supponendo $S_m(f) = 1$, dalla (6.9)

$$H(f) = k P^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

posto $k = 1$

$$h(t) = p(t_0 - t) \text{ con } t_0 = D$$

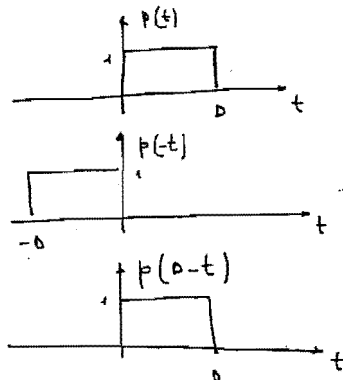
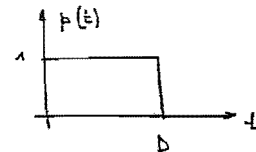
$$h(t) = p(D - t)$$

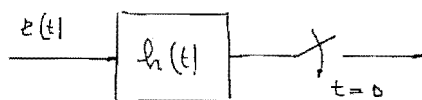
Se $r(t)$ è il segnale ricevuto in uscita dal filtro si ha una convoluzione!!!

$$\begin{aligned} r(t) \otimes h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(\nu) h(t_0 - \nu) d\nu = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_0 - \nu) \cdot p(t_0 - \nu + \nu) d\nu = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(\nu) p(\nu) d\nu = \\ &= \int_0^D r(\nu) p(\nu) d\nu = \end{aligned}$$

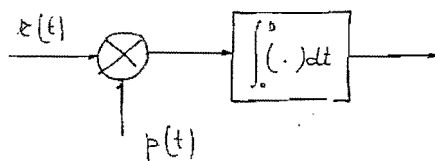
$$= \int_0^D [p(\nu) + m(\nu)] p(\nu) d\nu = \underbrace{\int_0^D p^2(\nu) d\nu}_{E_p} + \int_0^D m(\nu) p(\nu) d\nu$$

Interpretando la relazione appena ottenuta, possiamo tracciare i seguenti schemi





FILTRO ADATTATO



CORRELATORE

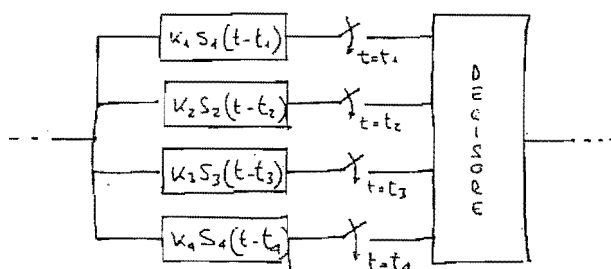
SISTEMA DI RICEZIONE NUMERICA

Consideriamo la modalità di trasmissione "one shot".

I segnali trasmessi sono scelti in un alfabeto A

$$A = \{s_i(t)\}_{i=1}^M \text{ ciascuno con probabilità } \{p_i\}_{i=1}^M$$

Se consideriamo il caso con 4 simboli ($M=4$) il ricevitore può essere realizzato con 4 filtri ciascuno, adattato ad uno dei simboli, come segue:



Sia T l'intervallo di segnalazione e D la durata massima di ogni segnale

Per le trasmissioni numeriche in banda base vengono impiegate, principalmente, due tipi di modulazione: PAM (Pulse Amplitude Modulation) e PPM (Pulse Position Modulation).

1. Modulazione PPM

Siano π i segnali necessari; scelto un impulso di durata D , ciò che viene modulato, dal segnale da trasmettere, è la posizione di tale impulso all'interno dell'intervallo di segnalazione.

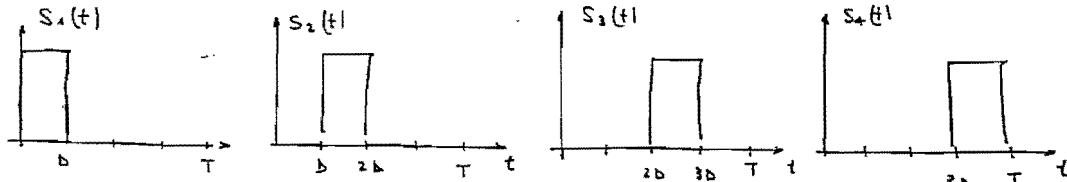
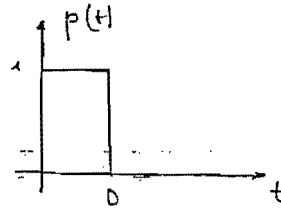
Per questo motivo l'intervallo T deve necessariamente

de essere multiplo di D :

$$T = MD$$

114

nella quale M è il numero di caratteri presenti nell'alfabeto. Se $p(t)$ è un impulso rettangolare (vedi figura) e si vuole realizzare una PPM quaternaria ($M=4$) i possibili segnali da trasmettere sono:



Analizziamo come può essere ridotto lo schema del ricevitore. Nello schema generale $t_1 = D$, $t_2 = 2D$, $t_3 = 3D$ e $t_4 = 4D = T$ ma

$$\frac{D}{2} = t$$

$$s_1(D-t) = p(t)$$

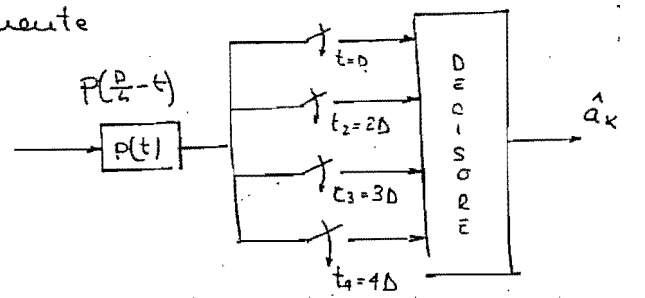
$$s_2(2D-t) = p(t)$$

$$s_3(3D-t) = p(t)$$

$$s_4(4D-t) = p(t)$$

allora i quattro filtri vengono sostituiti da uno unico* e lo schema diviene il seguente

siccome $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 1$
allora ho 4 filtri uguali:



SCHEMA
PPM

2. Modulazione PAM

In questo caso scelta l'impulso $p(t)$, il segnale da trasmettere ne modula l'ampiezza.

Anche in questo caso analizziamo come si riduce lo schema generale nel caso della modulazione PAM.

La condizione di adattamento dei filtri impone

una proporzionalità con l'impulso; allora scegliamo i coefficienti k_1, k_2, k_3 e k_4 arbitrari pari a 115

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = \frac{1}{3}$$

$$k_3 = -1$$

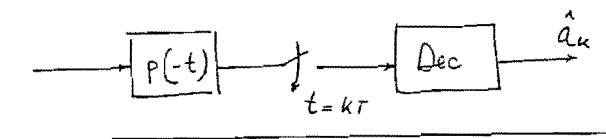
$$k_4 = -\frac{1}{3}$$

$$k_i = \frac{1}{a_i}$$

inoltre fissiamo i tempi di campionamento t_1, t_2, t_3 e t_4 nulli, quindi avremo

$$\left. \begin{aligned} k_1 s_1(t_1 - t) &= s_1(-t) \\ k_2 s_2(t_2 - t) &= \frac{1}{3} s_2(-t) \\ k_3 s_3(t_3 - t) &= -s_3(-t) \\ k_4 s_4(t_4 - t) &= -\frac{1}{3} s_4(-t) \end{aligned} \right\} = p(-t)$$

Sulla base di ciò lo schema generale può essere ridotto a



SCHEMA
PAM

C²C(C)²C

C

MODULAZIONE PAM (Pulse Amplitude Modulation)

117

Il segnale $s_i(t)$ trasmesso da un tx PAM può essere scritto nella forma:

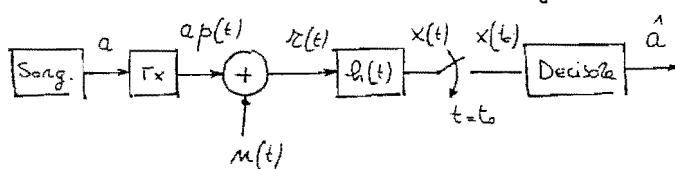
$$s_i(t) = a p(t)$$

nella quale $p(t)$ è l'impulso scelto e a , detto SIMBOLO, dipende dal carattere che si vuole trasmettere ed è scelto fra un alfabeto prefissato. Ciascun simbolo a_i ha una probabilità di essere trasmesso p_i , perciò è una variabile casuale discreta.

Supponiamo di avere un alfabeto di quattro caratteri; scelto $p(t)$, si può definire il simbolo a come segue

$$a = \begin{cases} a_1 = 1 & \text{con } p_1 \leftarrow \text{probabilità del simbolo 1} \\ a_2 = 3 & \text{con } p_2 \\ a_3 = -1 & \text{con } p_3 \\ a_4 = -3 & \text{con } p_4 \end{cases}$$

Il sistema tx, rx e canale, può essere riassunto come segue:

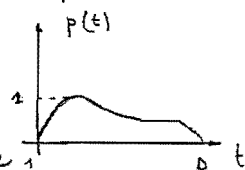
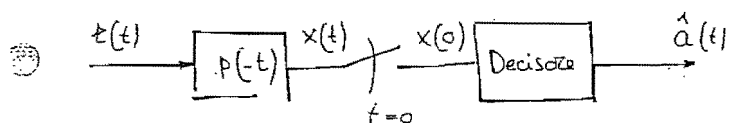


Nel quale il filtro $h(t)$ è un filtro adattato, descritto dalla relazione

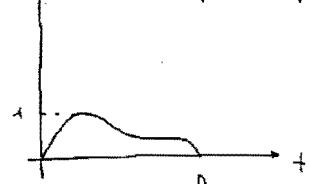
$$h(t) = K p(t_0 - t)$$

come noto dalle semplificazioni fatte in precedenza si può scrivere

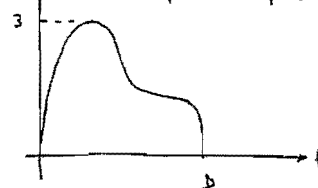
$$h(t) = p(-t) \text{ con } t_0 = 0$$



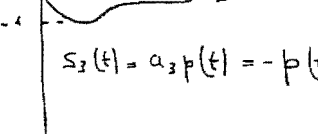
$$s_1(t) = a_1 p(t) = p(t)$$



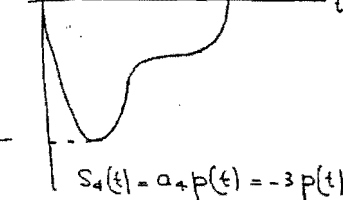
$$s_2(t) = a_2 p(t) = 3p(t)$$



$$s_3(t) = a_3 p(t) = -p(t)$$

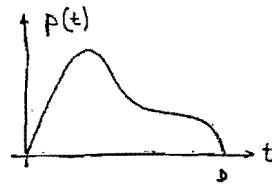


$$s_4(t) = a_4 p(t) = -3p(t)$$

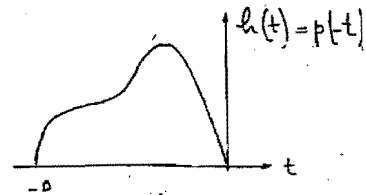


Consideriamo un sistema binario, cioè un alfabeto ^{11.3} composto da due soli caratteri; partì i due simboli $a_1 = 1$ con probabilità P e $a_2 = -1$ con probabilità $(1-P)$, la variabile casuale a è discreta e con definita

$$a = \begin{cases} a_1 = 1 \text{ con } P \\ a_2 = -1 \text{ con } (1-P) \end{cases}$$



Scelto l'impulso $p(t)$, si definisce automaticamente il filtro $h(t)$.



Osserviamo che in questo caso (vedi figura) $h(t)$ potrebbe non essere causale; in tal caso si dovrebbe traslare il tutto a dx e spostare della stessa quantità l'istante di campionamento; (in particolare si deve spostare tutto di D).

Il segnale ricevuto sarà $s(t)$ sommato al rumore $n(t)$ AWGN:

$$r(t) = a p(t) + n(t) \quad (11.1)$$

all'uscita del filtro adattato

$$x(t) = r(t) \otimes h(t) =$$

$$= r(t) \otimes p(-t) =$$

$$= a p(t) \otimes p(-t) + n(t) \otimes p(-t) \quad (11.2)$$

poniamo

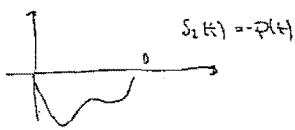
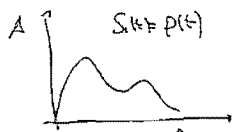
$$g(t) = p(t) \otimes p(-t) \quad (11.3.1)$$

$$m_1(t) = n(t) \otimes p(-t) \quad (11.3.2)$$

quindi

$$x(t) = a g(t) + m_1(t)$$

essendo $m(t)$ un processo anche $m_1(t)$, e quindi $x(t)$, è un processo; il campionamento in $t=0$, fissa il tempo ed estrae dal processo una variabile casuale $x(0)$ come segue



$$a \in \{1, -1\}$$

$$P(a=1) = p$$

$$P(a=-1) = 1-p$$

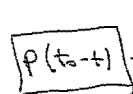
$$S_1(t) = ap(t)$$

$$S_2(t) = -ap(t)$$

$$r(t) = p(t) \otimes p(-t)$$

$$n(t) = w(t) \otimes p(-t)$$

$$r(t) = ap(t) + w(t)$$



$$x(t)$$

$$t_o$$

$$x(t_o) = ap(t_o) + m(t_o)$$

$$x(t) = r(t) \otimes p(t_o - t) =$$

$$= [ap(t) + w(t)] \otimes p(t_o - t) = \underbrace{ap(t) \otimes p(t_o - t)}_{f(t - t_o)} + \underbrace{w(t) \otimes p(t_o - t)}_{m(t - t_o)}$$

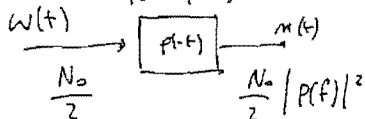
$$= af(t - t_o) + m(t - t_o)$$

a è variabile casuale

$m(t)$ è variabile casuale

gaussiana

$$p(-t) = p^*(t)$$



$$\frac{N_o}{2}$$

$$\frac{N_o}{2} |P(f)|^2$$

2) per la varianza ho bisogno di r^2 che è

$$\sigma^2 = \frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df$$

$$= \text{per Parseval} = \frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) dt = \frac{N_o}{2} E_p \quad \text{energia}$$

Se filtro un processo con valor medio nullo e denso spettrale di potenza $= \frac{N_o}{2}$ in uscita il valor medio è ancora nullo e la d.s.p è data da quella di ingresso per la t.d.F. del filtro

Vediamo $g(t)$

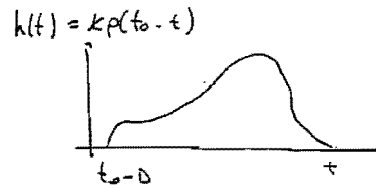
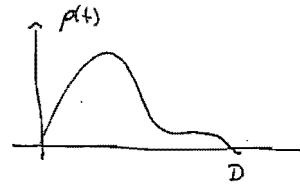
$$g(t) = p(t) \otimes p(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) p(\tau - t) d\tau$$

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(\tau) d\tau = E_p$$

$$H(f) = \frac{K p^*(t) e^{-j2\pi f t_0}}{\frac{N_0}{2} \sin(f)} = K p^*(t) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = K p(t_0 - t)$$

$t_0 > 0$ garantisce un filtro causale



Il ricevitore deve campionare all'istante di campionamento: prima e dopo quest'istante non è più possibile massimizzare il rapporto segnale rumore. Per sincronizzare questo istante introduce una funzione ausiliaria detta funzione di sincronizzazione di clock.

$$P\{X > n_1\} = P\left\{ \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} > \frac{n_1 - \mu_x}{\sigma_x} \right\} = Q\left(\frac{n_1 - \mu_x}{\sigma_x} \right)$$

$$= \int_{n_1}^{+\infty} p_x(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{n_1}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{n_1 - \mu_x}{\sigma_x}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = Q\left(\frac{n_1 - \mu_x}{\sigma_x} \right)$$

$$\boxed{x(o) = ag(o) + m_1(o)}$$

Calcoliamo ora le statistiche di $g(o)$ e $m_1(o)$.
Sappiamo che

$$\begin{aligned} G(f) &= P(f)P(-f) = P(f)P^*(f) = |P(f)|^2 \\ &\text{per la simmetria Hermitiana.} \end{aligned} \quad \begin{aligned} g(t) &= \mathcal{F}^{-1}[G(f)] = \mathcal{F}^{-1}[P(f)P(-f)] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df &= \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t) dt \\ &\text{per PARSEVAL} \end{aligned}$$

allora

$$(11.4) \quad g(o) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)P^*(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = E_P$$

dalla precedente si deduce che $g(o)$ è l'energia dell'impulso $p(t)$.

Per quanto riguarda $m_1(t)$ possiamo dire che, essendo attenuato da $m(t)^*$, AWGN, è anche gaussiano a media nulla.

$$\eta_n = 0 \Rightarrow \boxed{\eta_{n_1} = 0}$$

* attraverso un filtro LTI (Lineare e tempo invariante).

inoltre la densità spettrale di potenza risulta:

$$\left(\text{se } S_n(f) = \frac{N_0}{2} \right) \quad S_{m_1}(f) = S_m(f) |P(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |P(f)|^2$$

Per quanto detto anche la v.c. $m_1(o)$ è gaussiana

$$\underline{m_1(o) \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)}$$

a valore medio nullo e covarianza

$$\sigma^2 = E\{[m_1(o) - \eta_1]^2\} \quad \underline{\sigma_{n_1}^2 = E\{m_1^2(o)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |P(f)|^2 df = \boxed{\frac{N_0}{2} E_P}}$$

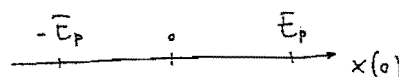
In conclusione si può dire che essendo

$$\boxed{x(o) = a E_P + m_1(o)}$$

* In realtà $x(o)$ esista al di fuori dei valori E_P e $-E_P$ ma il problema non ha quando $x(o)$ è campato fra i due valori.

con a che assume il valore 1 o -1, la componente di rumore $m_1(o)$ fa sì che $x(o)$ esista fra $-E_P$ e E_P .

Il DECISORE dovrà scegliere sulla base di $x(o)$ il valore di a emettendo il risultato $\hat{a}$.



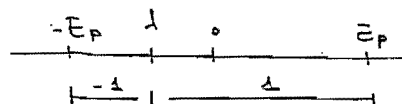
È ragionevole pensare che la soglia in base alla quale decidere debba dipendere dalla probabilità di

trasmissione di un carattere; per chiarire questo aspetto supponiamo di sapere con certezza che il carattere t_x è 1: allora $P=1$ e $P-1=0$ allora possiamo spostare la soglia a $-\infty$. In generale se

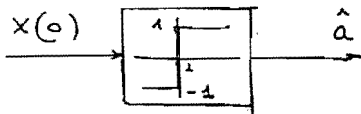
$$P > 1-P$$

è ragionevole spostare la soglia verso il risultato meno probabile. Ponendo la soglia pari a 1 il decisore sarà definito come segue

$$\hat{a} = \begin{cases} 1 & \text{se } x(0) \geq 1 \\ -1 & \text{se } x(0) < 1 \end{cases}$$



In questo caso si parla di DECISORE A SOGLIA ed è schematizzabile con il blocco non lineare senza memoria seguente:



Osserviamo che l'uguaglianza* può essere arbitrariamente messa in entrambe le situazioni; infatti $x(0)$ è una v.e. continua, per la quale $P\{x(0)=1\}=0$

A questo punto è necessario quantificare la probabilità di errore sul simbolo, ovvero:

$$P\{\hat{a} \neq a\} = P_s = \text{PROBABILITA' DI ERRORE SUL SIMBOLO}$$

Osserviamo che

tenere della probabilità totale

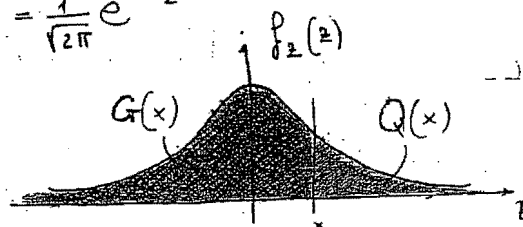
$$P\{\hat{a} \neq a\} = P(\hat{a} \neq a | a=1)P(a=1) + P(\hat{a} \neq a | a=-1)P(a=-1)$$

RICHIAMI SULLE VARIABILI CASUALI GAUSSIANE

Una v.e. GAUSSIANA STANDARD è definita come segue

$$z \in \mathcal{N}(0,1) \quad f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Ricordiamo che l'area sotto la curva gaussiana è unitaria



dato un valore x si definisce la funzione ¹²¹

CODA $Q(x)$

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} f_z(z) dz = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Non esiste una primitiva in forma chiusa, quindi i valori di $Q(x)$ sono tabulati.

Analogamente per il valore di x si definisce

$$G(x) = 1 - Q(x) = \int_{-\infty}^x f_z(z) dz$$

Derivando

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \frac{dG(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Tornando al problema

$$P(\hat{a} \neq a | a=1) = P(\hat{a} = -1 | a=1) = P(x(0) < \lambda | a=1)$$

se è stato trasmesso un uno, cioè $a=1$, si ha

$$x(0) = a E_p + m_1(0) = E_p + m_1(0)$$

allora

$$P(x(0) < \lambda | a=1) = P(a E_p + m_1(0) < \lambda | a=1) =$$

$$= P(E_p + m_1(0) < \lambda) =$$

$$\frac{a E_p + m_1(0) | a=1}{\text{se } m_1(0) \text{ e } a=1 \text{ sono due eventi indipendenti}}$$

$$= P(m_1(0) < \lambda - E_p)$$

Osserviamo che $m_1(0)$ è gaussiana non standard, tuttavia dividendo per σ si ottiene una gaussiana standard. Allora anziché considerare $m_1(0)$, poniamo

$$z = \frac{m_1(0)}{\sigma}$$

ed ora è standard.

Dim.

$$E\{z\} = \frac{E\{m_1(0)\}}{\sigma} = 0$$

inoltre

$$E\{z^2\} = E\left\{\frac{M_1^2(0)}{\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sigma^2} E\{M_1^2(0)\} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Quindi

$$\begin{aligned} P(\hat{a} \neq a | a = 1) &= P(M_1(0) < \lambda - E_P) = \\ &= P\left(\frac{M_1(0)}{\sigma} < \frac{\lambda - E_P}{\sigma}\right) = \\ &= P\left(z < \frac{\lambda - E_P}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{E_P - \lambda}{\sigma}\right) = \\ &= Q\left(\frac{E_P - \lambda}{\sqrt{\frac{N_0}{2} E_P}}\right) \quad \text{LDP}(-z > \frac{E_P - \lambda}{\sigma}) \end{aligned}$$

Quelcalunquiana la probabilità di errore sul simbolo risulta

$$\begin{aligned} P_s &= P(\hat{a} \neq a | a = 1) \overbrace{P(a = 1)}^P + P(\hat{a} \neq a | a = -1) \overbrace{P(a = -1)}^{1-P} = \\ &= Q\left(\frac{E_P - \lambda}{\sqrt{\frac{N_0}{2} E_P}}\right) P + Q\left(\frac{E_P + \lambda}{\sqrt{\frac{N_0}{2} E_P}}\right) (1-P) = P_s(\lambda) \quad (11.5) \end{aligned}$$

DETERMINAZIONE DELLA SOGLIA OTTIMA (SISTEMA BINARIO)

Nel caso di una trasmissione binaria, abbiamo stabilito che la probabilità di errore sul simbolo è data dalla relazione (11.5), ripartata di seguito, attenuata con il sistema di figura

$$P_s(\lambda) = Q\left(\frac{E_P - \lambda}{\sqrt{\frac{N_0}{2} E_P}}\right) P + Q\left(\frac{E_P + \lambda}{\sqrt{\frac{N_0}{2} E_P}}\right) (1-P)$$

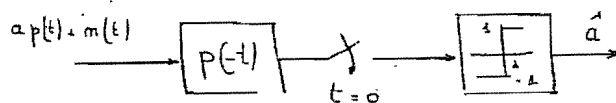
Per determinare il valore di λ che

minimizza la probabilità di errore, deriviamo rispetto a λ la (11.5)

$$(11.6) \quad \frac{dP_s(\lambda)}{d\lambda} = P\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(E_P - \lambda)^2}{2\sigma^2}}\right)\left(-\frac{1}{\sigma}\right) + (1-P)\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(E_P + \lambda)^2}{2\sigma^2}}\right)\frac{1}{\sigma} =$$

ricordando che

$$\frac{dQ(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{con } \sigma^2 = \frac{N_0}{2} E_P$$



Uguagliando a zero la (11.6)

123

$$P \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{E}_P - \lambda)^2}{2\sigma^2}} \right) \left(-\frac{1}{\sigma} \right) + (1-P) \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{E}_P + \lambda)^2}{2\sigma^2}} \right) \frac{1}{\sigma} = 0$$

$$P e^{-\frac{(\bar{E}_P - \lambda)^2}{2\sigma^2}} - (1-P) e^{-\frac{(\bar{E}_P + \lambda)^2}{2\sigma^2}} = 0$$

$$e^{-\frac{(\bar{E}_P - \lambda)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1-P}{P} e^{-\frac{(\bar{E}_P + \lambda)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{1-P}{P} = e^{-\frac{(\bar{E}_P - \lambda)^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{(\bar{E}_P + \lambda)^2}{2\sigma^2}}$$

allora

$$\frac{(\bar{E}_P + \lambda)^2 - (\bar{E}_P - \lambda)^2}{2\sigma^2} = \ln \left(\frac{1-P}{P} \right)$$

$$\cancel{\bar{E}_P^2} + \cancel{\lambda^2} + 2\lambda\bar{E}_P - \cancel{\bar{E}_P^2} - \cancel{\lambda^2} + 2\lambda\bar{E}_P = 2\sigma^2 \ln \left(\frac{1-P}{P} \right)$$

$$\Rightarrow 4\lambda\bar{E}_P = 2\sigma^2 \ln \left(\frac{1-P}{P} \right)$$

quindi

$$\lambda_{OTTIMO} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\bar{E}_P} \ln \left(\frac{1-P}{P} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{N_0}{2} E_P \frac{1}{E_P} \ln \left(\frac{1-P}{P} \right) =$$

$$= \frac{N_0}{4} \ln \left(\frac{1-P}{P} \right) \quad (11.7)$$

facendo la derivata
preceduta, si può
dimostrare che
esso è un pt. di
minimo.

Osserviamo che se i due eventi sono EQUIPROBABILI

$$P = 0,5 \quad \lambda_{OTTIMO} = 0$$

Se invece l'evento $\{a=0\}$ è improbabile

$$P = 1 \quad \lambda_{OTTIMO} = -\infty$$

Se l'evento improbabile è $\{a=1\}$ avremo

$$P = 0 \quad \lambda_{OTTIMO} = +\infty$$

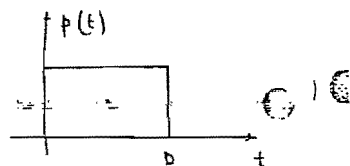
Calcoliamo la probabilità di errore P_s nel caso in cui venga scelta la soglia ottima:

$$P_s(\lambda) \Big|_{\lambda = \lambda_{ottimo}} = PQ \left(\frac{E_p - \lambda_{ottimo}}{\sigma} \right) + (1-P) Q \left(\frac{E_p + \lambda_{ottimo}}{\sigma} \right) \quad 124$$

$$P_s(0) \Big|_{\substack{\lambda = \lambda_{ottimo} \\ P=0,5 \\ \lambda_0=0}} = Q \left(\frac{E_p}{\sqrt{\frac{N_0}{2} E_p}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}} \right)$$

TRASMISSIONI MULTIPLE (SISTEMI BINARI)

Analizziamo il caso in cui venga trasmessa una sequenza di segnali PAM. Scelto l'impulso $p(t)$ con durata D e definito l'intervallo di segnalazione T , supponiamo di voler trasmettere la sequenza 1001 associando all'1 $a = 1$ e allo 0 $a = -1$.



Vediamo le due situazioni significative.

Il segnale PAM $s(t)$ può essere espresso matematicamente con il modello

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

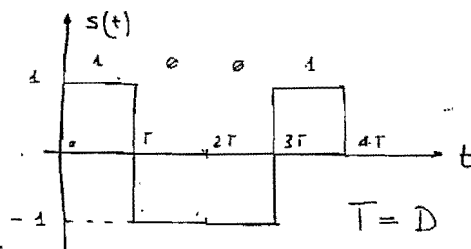
Nella quale a_k è un coeff. che dipende dall'istante.

A. $D \leq T$. La durata dell'impulso è inferiore all'intervallo di segnalazione (in particolare analizziamo il caso limite $D=T$). La sequenza trasmessa $s(t)$ sarà

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

Sul canale si sovrappone il rumore $m(t)$ AWGN.

Vediamo cosa succede all'uscita del filtro adattato



$$\begin{aligned} x(t) &= [s(t) + m(t)] \otimes p(-t) = \\ &= s(t) \otimes p(-t) + m(t) \otimes p(-t) = \\ &= \sum_k a_k p(t - kT) \otimes p(-t) + m(t) \otimes p(-t) \end{aligned}$$

ponendo

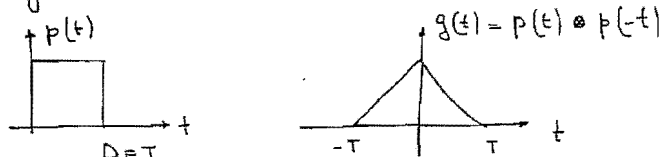
$$g(t) = p(t) \otimes p(-t)$$

$$g(t - kT) = p(t - kT) \otimes p(-t)$$

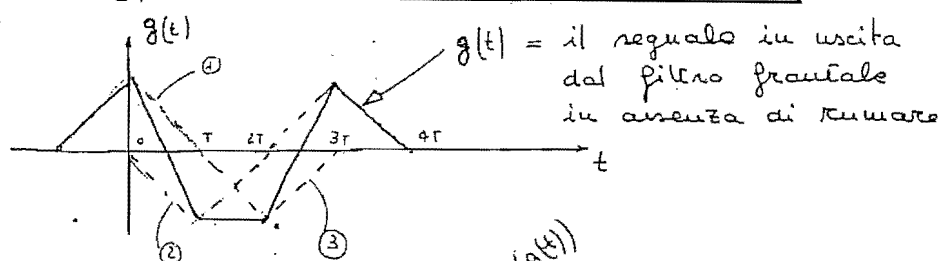
quindi

$$x(t) = \sum_k a_k g(t - kT) + m_1(t) \quad (11.8)$$

Osserviamo che per $p(t)$ rettangolare, $g(t)$ è triangolare come segue



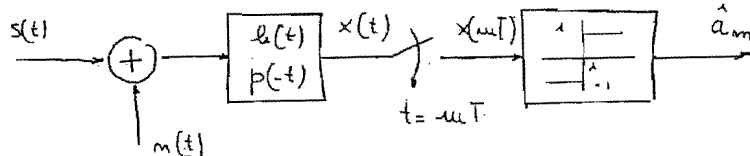
Allora in riferimento alla sequenza 1001 trasmessa il segnale $s(t)$ risulta, trascurando il rumore,



Dall'andamento temporale di $s(t)$ ($g(t)$) si deduce che, progettando correttamente il filtro frontale secondo la relazione (10.9), possiamo massimizzare il rapporto SNR in ingresso al ricevitore; inoltre campionando opportunamente negli istanti $t = mT$, con m intero, si può estrapolare solo il simbolo di interesse: la durata dell'impulso è al più pari a T , quindi campionando negli istanti suddetti il simbolo precedente¹ si è già esaurito, mentre quello successivo³ deve ancora iniziare. Nel rispetto dei vincoli appena esposti, non si verifica INTERFERENZA INTERSIMBOLICA (ISI); in altri termini non si ha sovrapposizione fra i simboli negli istanti di campionamento.

All'occorrenza, ideale impiegando un ricevitore a FILTRO ADATTATO si può estrarre il segnale correttamente inserendo i simboli trasmessi. Sarà necessario inserire un "decisione a soglia" progettato secondo

i errori della "soglia attinua". Secondo quanto detto ¹²⁶ un possibile schema di ricezione può essere il seguente



SCHEMA DI RICEZIONE
PAM REALIZZATO CON
FILTRO ADATTATO

Valutiamo la possibilità di impiegare come ricevitore un CORRELATORE al posto del filtro adattato (vedi

figura). L'andamento temporale del segnale

$x'(t)$ può facilmente essere ricavato

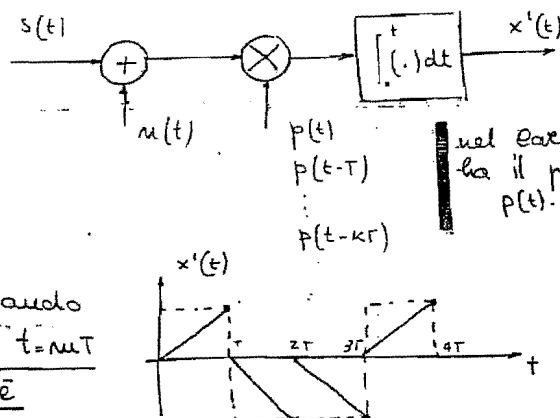
dall'operazione di integrazione (sempre

in riferimento alla sequenza 1001). Anche

in questo caso campionando negli istanti opportuni $t = mT$

il decisore a soglia è in grado di restituire

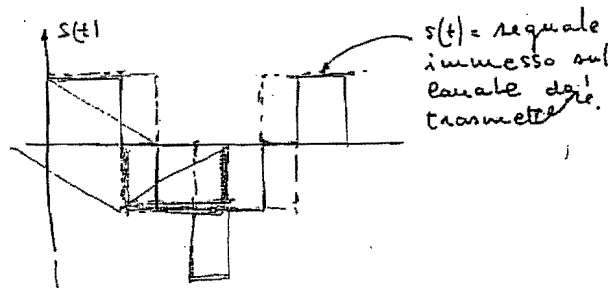
il simbolo trasmesso.



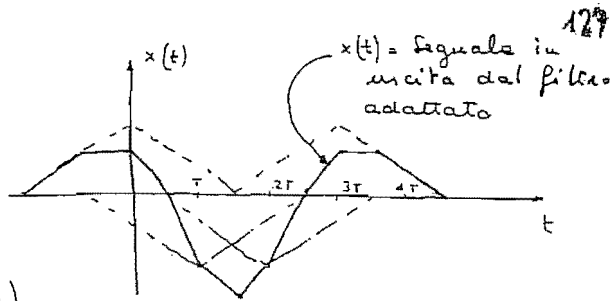
B. $D > T$. La durata dell'impulso è maggiore dell'intervallo di segnalazione (in particolare analizziamo il caso in cui $D = T + \frac{T}{2}$). In riferimento all'impulso $p(t)$ e alla sequenza 1001 visti in precedenza, possiamo osservare che in uscita dal trasmettitore si ha un

segnale $s(t)$ fortemente "distorto". La sovrapposizione dei simboli si verifica già in uscita dal Tx

Anche in questo caso il filtro adattato trasforma gli impulsi



rettangolari in impulsi
triangolari simmetrici,
quindi è possibile tracciare l'andamento temporale del segnale $x(t)$ in uscita dal filtro



(supponendo nullo il rumore)

È possibile che si verifichi ISI. Il filtro adattato è ancora utilizzabile, ma il correlatore no.

Per quanto riguarda il decidere, può essere impiegato un DECISORE A SOGLIA se non si verifica ISI. Se al contrario c'è interferenza è necessario impiegare algoritmi di decisione più complessi come ad esempio l'ALGORITMO DI VITERBI.

Il caso $D > T$ può essere modellato matematicamente nel modo seguente.

$$x(t) = \sum_k a_k g(t - kT) + n_1(t)$$

Campionando in $t = mT$, si ottiene

$$\begin{aligned} x(mT) &= \sum_k a_k g(mT - kT) + n_1(mT) = \\ &= \underbrace{a_m g(0)}_{(A)} + \underbrace{a_{m-1} g(T) + a_{m+1} g(-T) + \dots + a_{m-2} g(2T) + a_{m+2} g(-2T) + \dots}_{(B)} + \underbrace{n_1(mT)}_{(C)} \end{aligned}$$

Il termine (A) contiene il simbolo utile, cioè quello che vorremmo estrapolare nell'istante di campionamento; il termine (B) contiene tutte le componenti relative ai simboli che devono essersi esauriti o che sono già cominciati. Il termine (C) è il rumore AWGN del canale. Osserviamo che

$$(11.9) \quad x(mT) = \underbrace{a_m g(0)}_{\text{TERMINE UTILE}} + \sum_{k \neq m} \underbrace{a_k g[(m-k)T]}_{\text{INTERFERENZA INTERSIMBOLO}} + \underbrace{n_1(mT)}_{\text{RUMORE}}$$

Per sopprimere l'interferenza intersimbolica è necessario modellare l'impulso $p(t)$ in modo che 128

$$g(t) \triangleq p(t) \otimes p(-t)$$

ma tale che

$$g(l) = \begin{cases} g(0) & \text{se } l=0 \\ 0 & \text{se } l \neq 0 \end{cases}$$

Una funzione che rispetta la (11.10) è la Sinc, che purtroppo è tecnologicamente difficile da realizzare.

Riassumendo le due situazioni si presentano come segue:

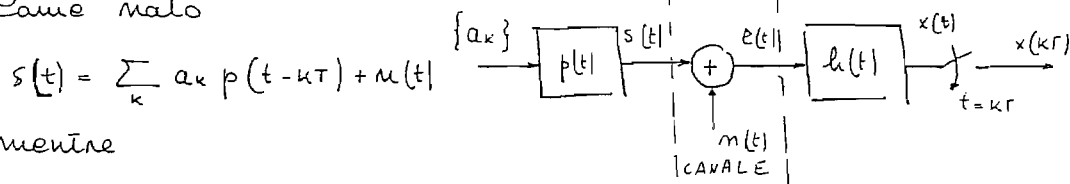
	ISI	FILTRO	DECISORE
$D \leq T$	NO	Filtro Adattato o Canelatore	A SOGLIA
$D > T$	SI / NO	Filtro Adattato	VITERBI / A SOGLIA

Osservazione: Il caso $D > T$ benché svantaggioso è di fatto l'unico realmente parabile.

Si ricordi che un segnale a durata limitata ha banda infinita.

Questo può non essere accettabile nel caso di FDM. Anche se potremmo ignorare l'occupazione frequenziale dell'impulso, il canale è di fatto un filtro passa banda con banda B_c ; di conseguenza taglia la banda dell'impulso trasformandolo in uno a durata infinita.

Come noto



mentre

$$x(t) = \sum_i a_i g(t - iT) + m_1(t)$$

sappiamo che per definizione

$$g(t) \triangleq s(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\nu) h(t - \nu) d\nu$$

$$m_1(t) \triangleq m(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(\nu) h(t - \nu) d\nu$$

campionando in $t = kT$

$$\begin{aligned} x(kT) &= \sum_i a_i g(kT - iT) + m_1(kT) = \\ &= \underbrace{a_k g(0)}_{\text{(A) } p_{k=i}} + \underbrace{\sum_{i \neq k} a_i g[(k-i)T]}_{\text{(B)}} + \underbrace{m_1(kT)}_{\text{(C)}} \end{aligned}$$

Come già accennato il termine (A) rappresenta il campione utile, (B) rappresenta il termine di ISI e (C) il rumore. Per annullare l'ISI ribadiamo la condizione (11.10)

$$g(kT) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \quad \text{Condizione di Nyquist}$$

inoltre, scrivendo la (11.10) nel modo seguente

$$\sum_k g(kT) \delta(t - kT) \stackrel{H}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{T} \sum_k G\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad ?$$

imponendo la condizione che annulla l'ISI

$$\frac{1}{T} G\left(f - \frac{k}{T}\right) = 1$$

$$g(0) \delta(t) = \delta(t) \text{ perche } g(0) = 1$$

$$\boxed{G\left(f - \frac{k}{T}\right) = T} \quad (12.1)$$

La relazione (12.1) afferma che per non avere interferenza intersimbolica è necessario considerare

una $G(f)$ rettangolare che va da $-\frac{1}{2T}$ a $\frac{1}{2T}$

130

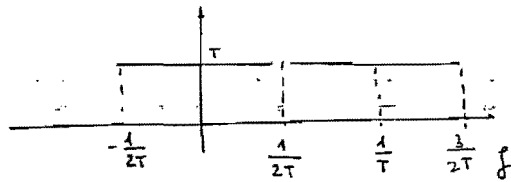
$$G(f) = T \text{rect}\left(\frac{f}{1/T}\right)$$

che periodicizzata da origine ad una costante e pari a T .

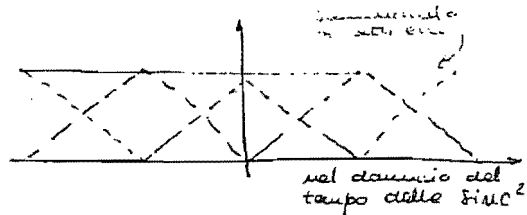
Il segnale che ha andamento in frequenza rettangolare è la funzione Sinc. In effetti la sinc è

tale perché si annulla in tutti i multipli di T non nulli e quindi rispetta la condizione (11.10).

Osserviamo che l'aggiunta di uno sfasamento modifica le cose.



La condizione di Nyquist è rispettata anche dalle funzioni il cui andamento in frequenza è quello di figura. In generale la (12.1) è verificata con tutte le funzioni che hanno una particolare simmetria detta SIMMETRIA VESTIGIALE:



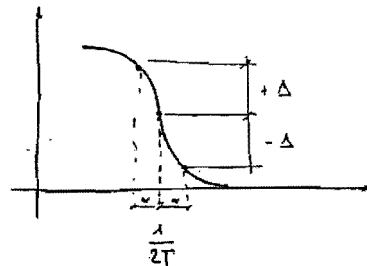
queste funzioni hanno simmetria dispari rispetto al punto $1/2T$ e $-1/2T$ in modo che sommando le repliche diamo origine ad una costante. In sostanza una

funzione ha "simmetria vestigiale" rispetto al punto $1/2T$

se uno spostamento verso dx di α produce una variazione

$-\Delta$ e uno stesso spostamento

α verso $-\alpha$ produce una variazione di $+\Delta$



Una classe di funzioni che

rispettano queste condizioni è quella del COSENO ALZATO:

la simmetria è quella di un coseno traslato verso l'alto. È caratterizzato da un parametro

α detto ROLL OFF che definisce la banda in eccesso

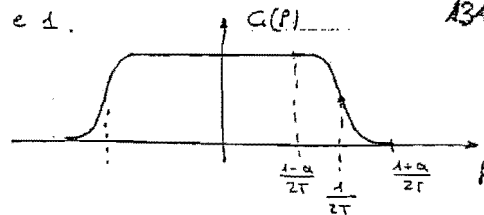
(o banda vestigiale).

$$(0 \leq \alpha < 1)$$

Il "rall off" α è compreso tra 0 e 1.

134

$$0 \leq \alpha \leq 1$$



Nel dominio del tempo una funzione a simmetria vertigiale nel dominio del tempo è simile ad una sine per la quale le oscillazioni al di fuori dell'impulso in zero sono maggiormente smorzate di una sine normale. All'aumentare di α , cioè del rall off, lo smorzamento delle code aumenta; allora per minimizzare l'ISI si pone α elevato.

Come nato dalla definizione

$$g(t) = p(t) \otimes h(t)$$

$$G(f) = P(f) H(f)$$

- 1) riduzione banda (alpha grande) che porterebbe con una maggior facilità a subire il D.D.
- 2) alpha piccolo, circuito di sincronismo di clock buona

quindi per avere la $G(f)$ valuta abbiamo due gradi di libertà $p(t)$ e $h(t)$; per minimizzare il rapporto segu. rimuove $h(t)$ va progettato "adattato" a $p(t)$, ovvero

$$h(t) = p(-t)$$

$$H(f) = P^*(f)$$

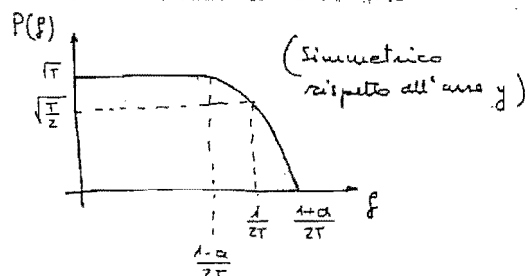
per questo motivo

$$G(f) = P(f) P^*(f) = |P(f)|^2 = G_N(f) \quad (12.2.1)$$

quindi

$$(12.2) \quad P(f) = \sqrt{G_N(f)} = \text{radice di un coseno rialzato.}$$

L'andamento in frequenza della radice del coseno rialzato è ripartito nella figura a lato.



Sappiamo che il canale di trasmissione è di fatto un filtro $C(f)$; allora se $p(t)$, con $P(f)$, è l'impulso che viene trasmesso, il ricevitore rileva in ingresso

l'impulso con $P(f)C(f)$. Allora la condizione 132 di adattamento del filtro si traduce nella seguente

$$\boxed{H(f) = P^*(f)C^*(f)} \quad (12.3)$$

per avere un impulso in grado di non provocare ISI si deve imporre la condizione

$$\begin{aligned} H(f)P(f)C(f) &= G_N(f) \\ P^*(f)P(f)C^*(f)C(f) &= G_N(f) \\ |P(f)|^2 |C(f)|^2 &= G_N(f) \end{aligned} \quad (12.4)$$

dalla quale

$$\boxed{P(f) = \frac{\sqrt{G_N(f)}}{|C(f)|}}$$

(12.5)

Tutto questo ammette che il canale sia tempo invariante e data $C(f)$.

considerando l'effetto che il filtro adattato ha sul rumore additivo

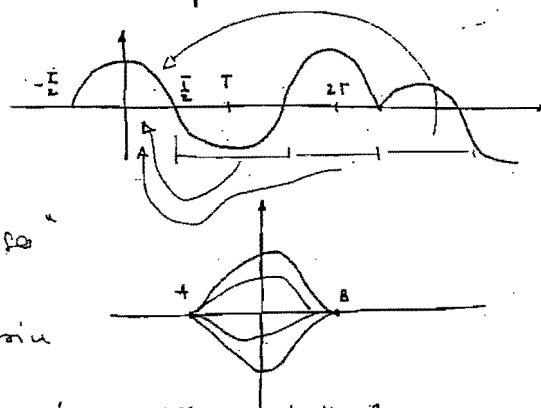
$$(12.6) \quad E\{M_1^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f) |H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} C_N(f) df = \frac{N_0}{2}$$

Area sotto la curva $C_N(f)$ è unitaria.

DIAGRAMMI AD OCCHIO

Si consideri il segnale, distorto dal canale, in assenza di rumore; si sovrappongano i tratti di curva che rappresentano l'andamento temporale nell'intervallo

$-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$. Se rispettata la condizione di Nyquist le curve si intersecano in due punti.



Maggiore ISI $\Rightarrow$ "occhio chiuso"

Maggiore $\alpha \Rightarrow$ minore banda ma sistema più instabile.

L'istante di campionamento si trova dove passano tutte le curve, in questo punto l'ISI è assente.

Pdg B?

2) Verifico la presenza o meno di ISI

3) Più è aperto l'occhio in larghezza, più siamo immuni all'errore.

$$a_k \in \{\pm 1\}$$

$$P(a_k = 1) = p$$

$$P(a_k = -1) = 1 - p$$

$$E\{a_k\} = 1 \cdot p + (-1)(1 - p) = 2p - 1$$

$$\theta(t) = \underbrace{2\pi f_0 t + \theta_0}_{\theta(t)} + \underbrace{\phi_A n(t)}_{\Phi(t)} \quad \text{fase del sign. mod.} \quad \text{Dopo 8.4}$$

$$\theta_{PM}(t) = 2\pi f_0 t + \theta_0 + \phi_A n(t) \quad \text{fase seg. modulato, \& var. in proporzione a } \phi_A n(t)$$

$$\theta_{PM}(t) - \theta(t) = \phi_A n(t)$$

Dopo 8.6

Derivando $x_{PM}(t)$ ottengo

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_0 + f_A n(t)$$

segnale positivo $\rightarrow$ aumento frequenza
o negativo $\rightarrow$ diminuzione freq.

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_A n(t) & \text{PM} \\ 2\pi f_0 \int_{-\infty}^t n(\alpha) d\alpha & \text{FH} \end{cases}$$

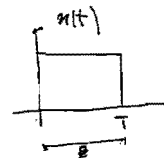
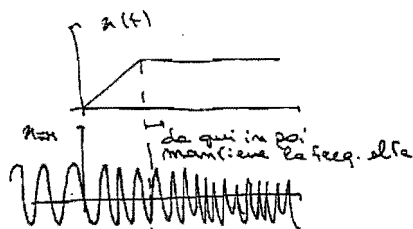
la frequenza spettrale $\hat{=}$ una variabile indipendente

$$\text{Dopo 9.2} \quad \begin{aligned} f_A &= 75 \text{ KHz} \\ B &= 15 \text{ KHz} \end{aligned} \quad B_{PM} \approx \begin{cases} 210 \text{ KHz} & 2(f_0 + 2B) \\ 120 \text{ KHz} & 2(f_0 + B) \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f_A &= 75 \text{ KHz} \\ B &= 15 \text{ KHz} \end{aligned}} \right\} 200 \text{ KHz}$$

accorrendo due segnali a 200 KHz non c'è interferenza

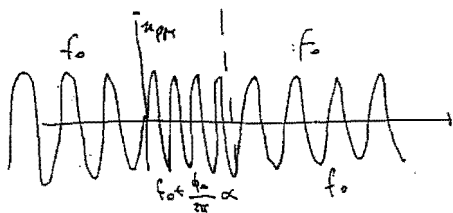
$$B_{FH} = 2(f_0 + (2)B)$$

ES



Modulando in FH significa modulare in FH la derivata del segnale

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_0 + \frac{\phi_A}{2\pi} n(t)$$



Consideriamo un generico segnale PAM espresso dalla relazione

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT) \quad (13.1)$$

questo è un processo non stazionario; allora l'auto-correlazione dipende oltre che da τ , anche da t .

Tuttavia

$$R_s(t, \tau) = E\{s(t+\tau)s(t)\} \quad (13.2)$$

dipende dal tempo in modo periodico, cioè

$$R_s(t+T, \tau) = R_s(t, \tau)$$

inoltre il valore medio

$$\eta_s(t) = E\{s(t)\} = \eta_s(t+T) \quad (13.3)$$

questo processo, per il quale valgono le relazioni (13.2) e (13.3), si dice CICLOSTAZIONARIO.

$$s(t) \rightarrow S_T(f) \xrightarrow{s(t) \text{ per } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}} S_T(f)$$

$$s(t) \text{ per } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$W_s(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{E\{|S_T(f)|^2\}}{T_0}$$

La densità spettrale di potenza del processo $s(t)$ $W_s(f)$ risulta

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2 \quad (13.4)$$

nella quale $W_a(f)$ è la densità spettrale di potenza del processo tempo discreto a_k ; in particolare si calcola

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\} \quad (13.5.1)$$

$$W_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_a(m) e^{-j2\pi f m T} \quad (13.5.2)$$

Nella relazione (13.4), il termine $|P(f)|^2$ non è altro che lo spettro dell'impulso $p(t)$ dalla (12.2.1) in particolare

$$|P(f)|^2 = G(f)$$

dove $G(f)$ è il caso rialzato.

Esempio

134

Consideriamo come impulso $p(t)$ la radice di un coseno rialzato con rolloff α . Qualtre consideriamo un alfabeto

$$A = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm(\pi-1)\}$$

con eventi indipendenti ed equiprobabili con $p_i = \frac{1}{M}$.

Calcoliamo l'autocorrelazione:

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\}$$

distinguiamo due casi:

1. Se $m = 0$

$$R_a(m) = R_a(0) = E\{a_k^2\}$$

2. Se $m \neq 0$

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\} = E\{a_{k+m}\} E\{a_k\}$$

↑
perché indipendenti

Osserviamo che

$$E\{a_k\} = 1 \cdot \frac{1}{M} + (-1) \frac{1}{M} + 3 \frac{1}{M} + (-3) \frac{1}{M} + \dots = 0$$

e questo vale anche per $E\{a_{k+m}\}$. Il valore quadratico medio

$$\begin{aligned} E\{a_k^2\} &= (1)^2 \frac{1}{M} + (-1)^2 \frac{1}{M} + (3)^2 \frac{1}{M} + (-3)^2 \frac{1}{M} + \dots = \\ &= \frac{M^2 - 1}{3} \quad \leftarrow \text{formula generale valida per ogni } M \end{aligned}$$

Allora:

$$\text{Se } m = 0 \quad R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\} = E\{a_k^2\} = \frac{M^2 - 1}{3}$$

$$\text{Se } m \neq 0 \quad R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\} = E\{a_{k+m}\} E\{a_k\} = 0$$

Calcoliamo ora la densità spettrale di potenza del processo a_k detta $W_a(f)$.

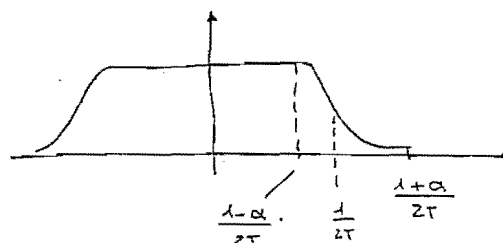
Sulla base della relazione (13.3.2)

135

$$W_a(f) = \sum_m R_a(m) e^{-j2\pi f m T} = R_a(0) = \frac{M^2 - 1}{3} \quad h(f) = \frac{M^2 - 1}{3} \delta_m$$

La dens. spett. di potenza del segnale PAM risulta

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2 = \frac{M^2 - 1}{3T} G(f)$$



Es.

Osservazione: se avessimo scelto $p(t)$

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

come noto la TCF

$$P(f) = T \text{sinc}(fT)$$

avremmo avuto

$$W_s(f) = \frac{M^2 - 1}{3T} |P(f)|^2 =$$

$$= \frac{M^2 - 1}{3T} |T \text{sinc}(fT)|^2$$

Esempio

Si consideri $p(t)$ come nell'esempio precedente, con un alfabeto $a_k \in \{0, 1\}$

Per trovare lo spettro calcoliamo l'autocorrelazione

l'autocorrelazione

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\}$$

Es.

come prima

$$\text{Se } m=0 \quad R_a(m) = R_a(0) = E\{a_k^2\} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \frac{1}{2}$$

se $m \neq 0$ $R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\} = E\{a_{k+m}\} E\{a_k\} = \frac{1}{4}$ 136
 allora $E\{a_k\} = (0)^{\frac{1}{2}} + (1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
 $E\{a_{k+1}\} = (0)^{\frac{1}{2}} + (1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$$R_a(m) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \delta_m$$

Calcoliamo la densità spettrale di potenza $W_a(f)$ secondo la ()

$$W_a(f) = \sum_m R_a(m) e^{-j2\pi f m T} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j\pi f m T} + \frac{1}{4}$$

Ripetendo che

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi m f T} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

avremo

$$W_a(f) = \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j\pi 2m f T} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) + \frac{1}{4}$$

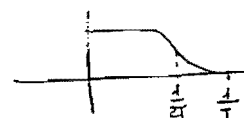
quindi dalla (13.4)

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2 =$$

$$= \frac{|P(f)|^2}{4T} + \frac{1}{4T^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |P\left(\frac{m}{T}\right)|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

Essendo $p(t)$ un casoso rialzato, $P(f)$ è nulla in $\frac{m}{T}$ se $m \neq 0$, allora rimane

$$W_s(f) = \frac{|P(f)|^2}{4T} + \frac{1}{4T^2} |P(0)|^2 \delta(f)$$



Il casoso rialzato p annulla al più in $\frac{1}{T}$ allora per ogni m/T e se $m \neq 0$ $P(\frac{m}{T}) = 0$

Rispetto all'esempio precedente, $W_s(f)$ è identico, 138
 con l'aggiunta di una δ nell'origine.

Esempio

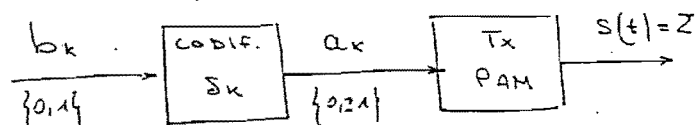
Supponiamo di avere dei simboli b_k prodotti dalla sorgente; - - - rielaborare questi simboli attraverso un CODIFICATORE che li trasforma nei simboli a_k . Il codificatore è una macchina a stati finiti per la quale

$$a_k = f(b_k, S_k)$$

nella quale S_k è lo stato interno definito come

$$S_{k+1} = g(b_k, S_k)$$

I simboli a_k sono poi trasmessi attraverso un tx PAM.



$$\text{con } s(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

Consideriamo allora un codificatore impiegato per produrre CODICI DI LINEA AMI (Alternate Mark Inversion): ad ogni trasmissione di un uno si inverte il segno. Allora lo stato è definito

$$S_k = \begin{cases} 1 & \text{se la volta precedente si ha } t_k = 1 \\ -1 & \text{se la volta precedente si ha } t_k = -1 \end{cases}$$

[Va bene anche il contrario, basta che memorizzi l'ultima trasmissione]
 S_k va inizializzato a 1 o -1 in maniera arbitraria

La funzione di uscita invece sarà:

$$a_k = b_k(-S_k) = -b_k S_k$$

La legge di transizione di stato sarà

$$S_{k+1} = S_k (1 - 2b_k)$$

Se b_k è nullo 138

$$S_{k+1} = S_k$$

Se b_k è uno si
inverte lo stato.

Supponiamo che b_k rappresenti il sistema binario

$$b_k \in \{0, 1\}$$

allora

$$a_k \in \{0, 1, -1\}$$

Calcoliamo l'autocorrelazione del processo a_k

$$\begin{aligned} R_a(m) &= E\{a_{k+m} a_k\} = E\{-(b_{k+m} S_{k+m})(-b_k S_k)\} = \\ &= E\{(b_{k+m} b_k) S_k S_{k+m}\} \end{aligned}$$

Vediamo alcuni casi

$$m=0 \quad R_a(0) = E\{b_k^2 S_k^2\} = E\{b_k^2\} = \frac{1}{2}$$

perché b_k e S_k sono indipendenti
e siccome S_k vale 1 o -1

$$E\{S_k^2\} = 1$$

$$m=1 \quad R_a(1) = E\{b_{k+1} b_k S_{k+1} S_k\} =$$

$$= E\{b_{k+1} b_k S_k^2 (1 - 2b_k)\} =$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Siccome } b_k, b_{k+1} \text{ e } S_k \text{ sono indipendenti e} \\ E\{S_k^2\} = 1 \end{array} \right.$$

$$= E\{b_{k+1} b_k (1 - 2b_k)\} =$$

$$= E\{b_k b_{k+1}\} - 2 E\{b_k^2 b_{k+1}\} =$$

$$= E\{b_k\} E\{b_{k+1}\} - 2 E\{b_k^2\} E\{b_{k+1}\} =$$

$$= \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$m=2 \quad R_a(2) = E\{b_{k+2} b_k s_k s_k\} = 0$$

Calcolando $R_a(m)$ per $m \geq 2$ otteniamo zero.
 L'insieme dell'autocorrelazione è pari.

$$R_a(-1) = R_a(1) = -\frac{1}{4}$$

$$R_a(0) = \frac{1}{2}$$

$$R_a(-2) = R_a(2) = 0$$

$\vdots$

$$R_a(-m) = R_a(m) = 0 \quad \text{per } m > 2$$

Procedendo

$$W_a(f) = \sum_m R_a(m) e^{-j2\pi m f T} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-j2\pi f T} - \frac{1}{4} e^{j2\pi f T} =$$

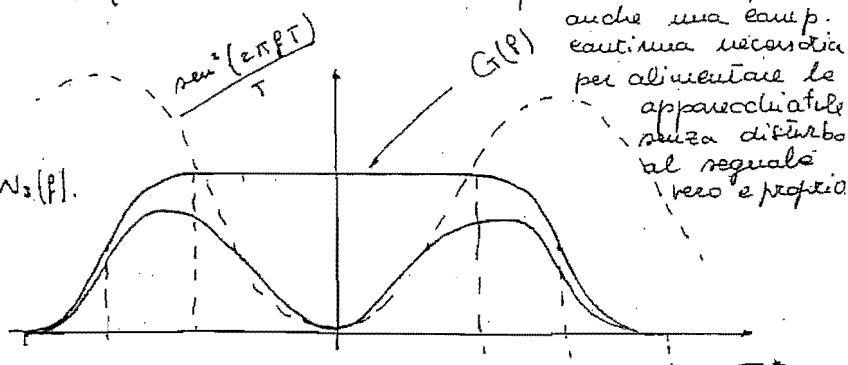
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi f T)$$

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2 = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi f T)\right)}{T} G(f) =$$

$$= \frac{\sin^2(\pi f T)}{T} G(f)$$

quindi:

Il codificatore
ha lo spettro $W_s(f)$.



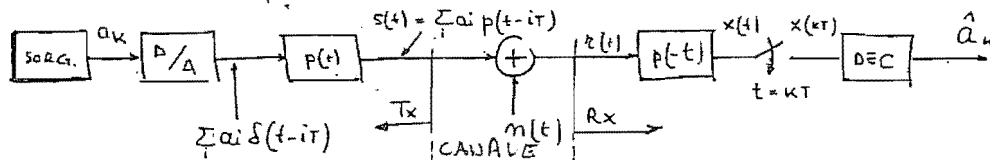
Se $p(t)$ è
un coseno
rialzato
 $|P(f)|^2 = G(f)$

Il fatto che i segnali
abbiano componenti
spettrali nulle in zero
è utile perché in
questo modo si può trasmettere
anche una comp.
continua necessaria
per alimentare le
apparecchiature
senza disturbare
il segnale
vero e proprio.

MODULAZIONE PAM M-ARIA

140

Il sistema può essere schematizzato nel modo seguente



Sia a_k il simbolo tratto da un alfabeto A di M simboli

$$a_k \in A = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm(\pi-1)\}$$

indipendenti ed equivalenti.

$$x(kT) = a_k g_0 + \sum_{i \neq k} a_i [(k-i)T] + n_1(kT)$$

$$x(t) = \sum_i a_i g(t - kT) + n_1(t)$$

$n_1(t)$, attenuato dal filtraggio di $n(t)$, è gaussiano a media nulla, con varianza

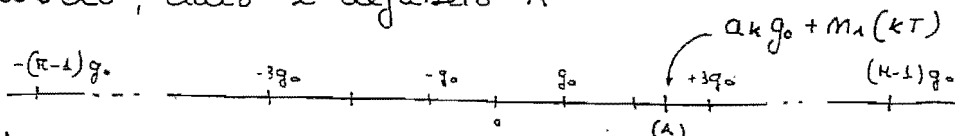
$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = \frac{N_0}{2} g_0 = \frac{N_0 E_p}{2}$$

È necessario capire come estrarre il "decidere" affinché, sulla base di $x(kT)$,

venga determinata a_k . In assenza di rumore riceviamo

$$x^{(0)}(kT) = a_k g_0$$

ovvero, dato l'alfabeto A



Il rumore $m_1(t)$ fa in modo che $x(kT)$ cada all'interno degli intervalli considerati, ad esempio in (A). Il decidere dovrà avere $M-2$ soglie λ_i .

Se gli eventi fossero equiprobabili si può scegliere come soglia il pt. medio fra i due simboli.

Logicamente a seconda della "casellazione" di simboli alcuni di essi risulteranno più protetti di altri.

Nel caso generale quindi si usa un DECISORE a $M-2$ SOGLIE. Calcoliamo la PROBABILITA' DI ERRORE SU SIMBOLO in sostanza sappiamo che, per definizione

$$P_s(\text{probabilità di errore su simbolo}) = P(\hat{a}_k \neq a_k) = \\ = \sum_{\alpha \in A} P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = \alpha) P(a_k = \alpha) =$$

Teorema della Probabilità Totale. 141

Probabilità di errore condizionata alla trans. del carattere qualitativo $\alpha \in A$

Se i simboli sono equiprobabili

$$P(a_k = \alpha) = \frac{1}{M}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{\alpha \in A} P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = \alpha) \quad (14.1)$$

Supponiamo α interno, ovvero $\alpha \neq M-1$ e $\alpha \neq -(M-1)$:

$$P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = \alpha) =$$

$$= P\{x(kT) > (\alpha+1)g_0 | a_k = \alpha\} + P\{x(kT) < (\alpha-1)g_0 | a_k = \alpha\}$$

Sono eventi disgiunti che è improbabile che $x(kT)$ sia contempor. maggiore di una soglia e minore di un'altra più piccola.

$$= P\{\alpha g_0 + m_1(kT) > (\alpha+1)g_0\} + \\ + P\{\alpha g_0 + m_1(kT) < (\alpha-1)g_0\} =$$

$$P\{m_1(kT) > g_0\} + P\{m_1(kT) < -g_0\} =$$

dividendo per σ diventiamo v.e. gaussiane STANDARD $\frac{g_0}{\sigma}$

$$= P\left\{\frac{m_1(kT)}{\sigma} > \frac{g_0}{\sigma}\right\} + P\left\{\frac{m_1(kT)}{\sigma} < -\frac{g_0}{\sigma}\right\}$$

$$= 2 P\left\{\frac{m_1(kT)}{\sigma} > \frac{g_0}{\sigma}\right\} = 2 Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$$

(14.2)

Sostituendo ad $x(kT)$ la sua espressione che tiene conto di α , ovvero

$$x(kT) = \alpha g_0 + m_1(kT)$$

inserisco la condizione

$$a_k = \alpha$$

nell'evento ①,

$\Rightarrow$ possiamo togliere il condizionamento.

essendo $m_1(kT)/\sigma$ gaussiana la prob. che sia magg. è uguale a quella che sia minore (per simmetria)

Supponiamo ora che α sia un ESTREMO; poniamo $\alpha = M-1$, perché il caso $\alpha = -(M-1)$ è identico con uguale probabilità.

$$P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = M-1) = P(x(kT) < (\pi-2)g_0 | a_k = \pi-1) =$$

$$= P\{(\pi-1)g_0 + m_1(kT) < (\pi-2)g_0\} = P\{m_1(kT) < -g_0\} = \underbrace{Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)}_{(14.3)}$$

Tornando all'espressione di P_s data dalla (14.1), inserendo i risultati (14.2) e (14.3) otteniamo

$$P_s = P(\hat{a}_k \neq a_k) = \frac{1}{M} \left[\underbrace{(M-2)}_{\text{M-2 simboli interni}} 2 Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right) + \underbrace{2}_{\text{due simboli agli estremi}} Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{M} Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right) [2(M-2) + 2] = \boxed{2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)} \quad (14.4)$$

Consideriamo ad esempio il caso di $M=4$:
l'alfabeto diviene:

$$A = \{\pm 1, \pm 3\}$$

Supponiamo che

la sorgente produca il simbolo 1, trasmesso da Tx

ricevuto da Rx; supponiamo

che il decisore commetta un errore e decida per il simbolo -1. In generale i simboli di A derivano da un codice binario; in base ad una mappa π

si passa dal codice binario al simbolo. In ricezione, in base ad una mappa π^{-1} si passa dal simbolo al codice binario. Se avessimo associato bit e

simboli nel modo seguente (MAPPA NATURALE)

all'errore su simbolo

corrispondano DUE errori

sul bit; vengano erroneamen-

te valutati entrambe i bit

b_0 e b_1 .

00	01	11	10 (M. GRAY)
00	01	11	11 (M. NATURALE)
-3	-1	1	3
*	*	*	*

1	→	10
3	→	11
-1	→	01
-3	→	00
		$b_0 b_1$

Si può pensare che impiegando una mappatura differente ad un errore sul simbolo corrisponda un solo errore su bit. Questo risultato può essere ottenuto con una MAPPA GRAY.

La mappa Gray associa a simboli adiacenti configurazioni di bit che differiscano fra loro solo di un bit 143

ad esempio assegnando

$$\begin{aligned} -1 &\rightarrow 01 \\ 1 &\rightarrow 11 \end{aligned}$$

Si ha un solo bit che cambia.

Se il numero tipicamente è piccolo e a media nulla associando ai simboli una "mappatura Gray" si fa in modo che un errore su bit significhi l'interpretazione di un simbolo come quello adiacente a quello realmente trasmesso.

Osserviamo che la probabilità di errore sul simbolo P_s equivale al rapporto fra il numero di simboli errati N_{sE} e quelli trasmessi N_{sT}

$$P_s = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}} \right) = \frac{N_{sE}}{N_{sT}}$$

La probabilità di errore sul bit sarà invece

$$P_b = \frac{N_{bE}}{N_{bT}} = \frac{N_{bE}}{N_{sT} \cdot \log_2 M} =$$

Applicando una MAPPA GRAY.

$$N_{sE} \approx N_{bE}$$

allora la probabilità di errore su bit

$$P_b = \frac{N_{bE}}{N_{bT}} = \frac{N_{sE}}{N_{sT} \log_2 M} \approx \frac{P_s}{\log_2 M} =$$

$$= \frac{2}{\log_2 M} \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}} \right)$$

Un segnale PAM M-ario, può essere scritto come

$$s(t) = \sum_i a_i p(t - iT)$$

ad ogni simbolo sarà associata una Energia

$$a_i p(t - iT) \rightarrow a_i^2 E_p$$

mediamente

$$E_s = E\{a_i^2 E_p\} = E\{a_i^2\} E_p = \frac{M^2 - 1}{3} E_p$$

per ogni bit invece

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{M^2 - 1}{3 \log_2 M} E_p$$

allora

$$E_p = \frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1} E_b$$

La probabilità di errore nel bit diviene

$$P_b = \frac{2}{\log_2 M} \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M E_b}{(M^2 - 1) N_0}} \right)$$

Prendendo

$$s(t) = \sum_i a_i p(t - iT)$$

$$W_s(f) = \frac{M^2 - 1}{3T} |P(f)|^2$$

Il tempo per trasmettere un bit sarà uguale alla durata dell'intervallo di segnalazione diviso il numero di bit associati a ciascun simbolo

$$T_b = \frac{T}{\log_2 M} \Rightarrow T = T_b \log_2 M$$

La banda del segnale PAM risulta

$$B_s = \frac{1}{2T} = \frac{1}{2T_b \log_2 M}$$

Si può osservare che l'efficienza spettrale è tanto maggiore quanto maggiore è M . L'efficienza energetica invece cala all'aumentare di M .

se ho la prob. sul simbolo come n-fo ho fissore la prob di errore sul bit

$N_{se} = n^o \text{ errore}$
 $N_{IT} = n^o \text{ simboli}$
 trasmissi

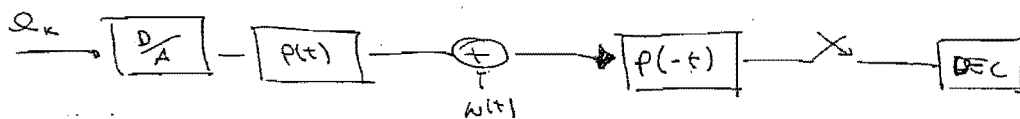
$$P_s = \frac{N_{se}}{N_{IT}} \approx \frac{N_{be}}{N_{bT} \cdot \frac{1}{\log_2 M}} = P_b \log_2 M$$

$$N_{bT} = N_{IT} \log_2 M$$

$$P_b = P_s / \log_2 M$$

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = f(0) = 1$$

calcolo dell'errore con alfabeto M -ario



$$f(t) = p(t) \otimes p(-t)$$

$$p_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$X(nT) = Q_n + jM(nT)$$

$$Q_k \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)\}$$

$$P(\hat{Q}_n \neq Q_n) = \sum_{\alpha \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)\}} P(\hat{Q}_n \neq Q_n / Q_n = \alpha) \underbrace{P(Q_n = \alpha)}_{\frac{1}{M}} \quad \frac{1}{M} \sum_{\alpha} P(\hat{Q}_n \neq Q_n / Q_n = \alpha)$$

mi interessano solo 2 casi, quando α è interno ($\alpha = \pm 1$)

$$P(\hat{Q}_n \neq Q_n / Q_n = \alpha) = P\{X(nT) > \alpha + 1 \vee X(nT) < \alpha - 1 / Q_n = \alpha\}$$

$$= P\left(\begin{matrix} \alpha + n(nT) > \alpha + 1 \\ \alpha + n(nT) < \alpha - 1 \end{matrix}\right) = P(n(nT) > 1 \vee n(nT) < -1) = 2P\left(\frac{n(nT)}{\sigma} > \frac{1}{\sigma}\right) = 2Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

guardo il caso esterno

$$P(\hat{Q}_n \neq Q_n / Q_n = (M-1)) = P(X(nT) > -(M-2) / Q_n = -(M-1)) = P(-(M-1) + n(nT) > -(M-2))$$

$$= P(n(nT) > 1) = Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

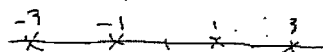
in totale

$$\frac{1}{M} \sum P(\hat{Q}_n \neq Q_n / Q_n = \alpha) = \frac{1}{M} [(M-2) 2Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) + 2Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)] = \frac{2}{M} (M-1) Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

probabilità di errore su PAM M -ARIA

Es)

ho una sim trasmissione quaternaria



prendo i bit a coppie

00 01 10 11 naturale
00 01 11 10 prob

cerchiamo di minimizzare la prob di errore sui bit

Gray per 3 bit

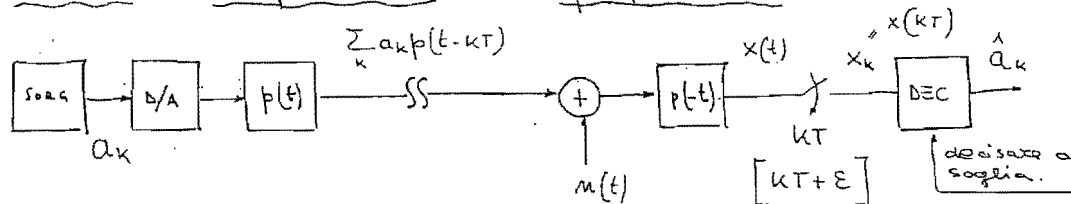
000
001
011
010
110
111
101
100

INTERFERENZA INTERSINBOLOCA E PROBABILITA' D'ERRORE 105

Si consideri un sistema binario con alfabeto

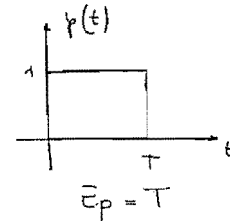
$$a_k \in \{\pm 1\}$$

Consideriamo un impulso $p(t)$ e supponiamo i simboli indipendenti e equiprobabili.



Come già ricavato se $\Pi=2$ la probabilità di errore risulta

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2T}{N_0}}\right)$$

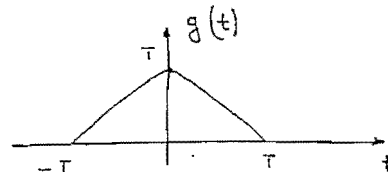


- Valutiamo il funzionamento del sistema se viene introdotto un ritardo ϵ nel campionamento (avendo supposto la durata D dell'impulso pari all'intervallo di regolazione T).

Osserviamo che

$$p(t) \otimes p(-t) \rightarrow \text{triangular pulse}$$

$$g(kT) = \begin{cases} T & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

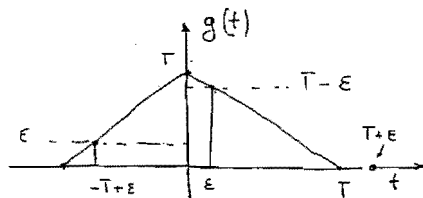


Sappiamo che

$$x(t) = \sum_l a_l g(t - lT) + n_s(t)$$

$$x(kT + \epsilon) = \sum_l a_l g(kT - lT + \epsilon) + n_s(kT + \epsilon)$$

$$g(kT + \epsilon - lT) = g((k-l)T + \epsilon)$$



$$= \sum_l a_l g[T(k-l) + \epsilon] + n_s(kT + \epsilon) =$$

$$= a_k \overbrace{g(\epsilon)}^{T-\epsilon} + a_{k+1} \overbrace{g(-T+\epsilon)}^{\epsilon} +$$

$$+ a_{k-1} \overbrace{g(T+\epsilon)}^{\epsilon} + \dots + n_s(kT + \epsilon) =$$

$$= a_k (T - \epsilon) + \epsilon a_{k+1} + n_s(kT + \epsilon)$$

Calcoliamo la probabilità di errore

146

perché indep

$$P_b(\varepsilon) = P(\hat{a}_k \neq a_k) =$$

$$P(a_k = 1, a_{k-1} = 1) = P(a_{k-1} = 1) P(a_k = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} &= P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 1, a_{k-1} = 1) P(a_k = 1, a_{k-1} = 1) + \\ &+ P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 1, a_{k-1} = -1) P(a_k = 1, a_{k-1} = -1) + \\ &+ P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1, a_{k-1} = 1) P(a_k = -1, a_{k-1} = 1) + \\ &+ P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1, a_{k-1} = -1) P(a_k = -1, a_{k-1} = -1) = \frac{1}{4} (15.1) \end{aligned}$$

Quattro casi da decidere a soglia

$$P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 1, a_{k-1} = \alpha) =$$

$$= P\{x(kT + \varepsilon) < 0 | a_k = 1, a_{k-1} = \alpha\} =$$

$$= P\{T - \varepsilon + \varepsilon \alpha + m_1(kT + \varepsilon) < 0\} =$$

$$= P\{m_1(kT + \varepsilon) < -[T + \varepsilon \alpha - \varepsilon]\} =$$

$$= P\left\{\frac{m_1(kT + \varepsilon)}{\sigma} < -\frac{T - \varepsilon + \varepsilon \alpha}{\sigma}\right\} = Q\left(\frac{T - \varepsilon + \varepsilon \alpha}{\sigma}\right)$$

dividendo
per σ si riconduce
a una gauss.
standard.

$$\frac{T}{\sigma} = \frac{I}{\sigma}$$

Analogamente

$$P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1, a_{k-1} = \alpha) = Q\left(\frac{T - \varepsilon - \varepsilon \alpha}{\sigma}\right)$$

Tornando alla (15.1), sostituendo

$$P_b(\varepsilon) = \frac{1}{2} Q\left(\frac{I}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{T - 2\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Osserviamo che se $\varepsilon = 0$ si torna all'espressione del caso attimo (). Ovviamente all'aumentare di ε , cioè all'aumentare dell'ISI, aumenta la

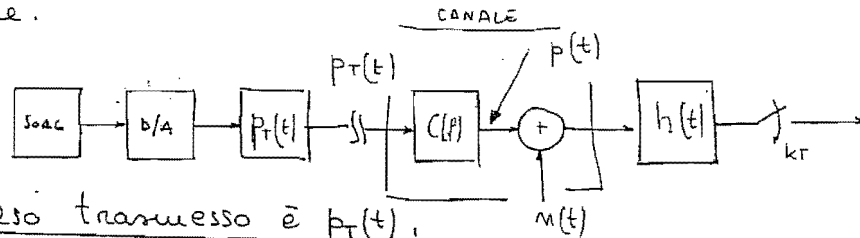
probabilità di errore.

147

se non si conosce l'ISI: importante δ .

EQUAZIONE

Cominceremo ora il campartamento da filtro $C(f)$ del canale; il sistema può essere schematizzato come segue.



Se l'impulso trasmesso è $p_T(t)$, passa attraverso il canale $C(f)$ e ne esce "distorto".

Se il canale è tempo invariante, la $C(f)$ è reale, perciò

$$p(t) = p_T(t) \otimes c(t)$$

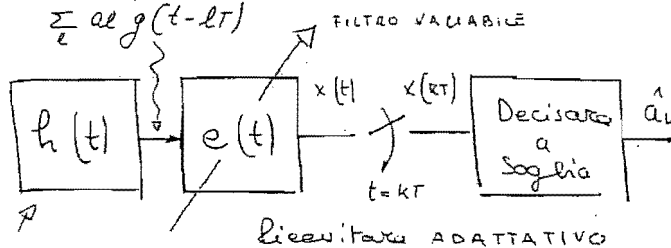
Il filtro frontale del ricevitore deve essere ADATTATO a $p(t)$ anziché a $p_T(t)$; in particolare

$$G(f) = \underbrace{P_T(f) C(f) P^*(f)}_{P(f)} = \text{Condizione di Nyquist}$$

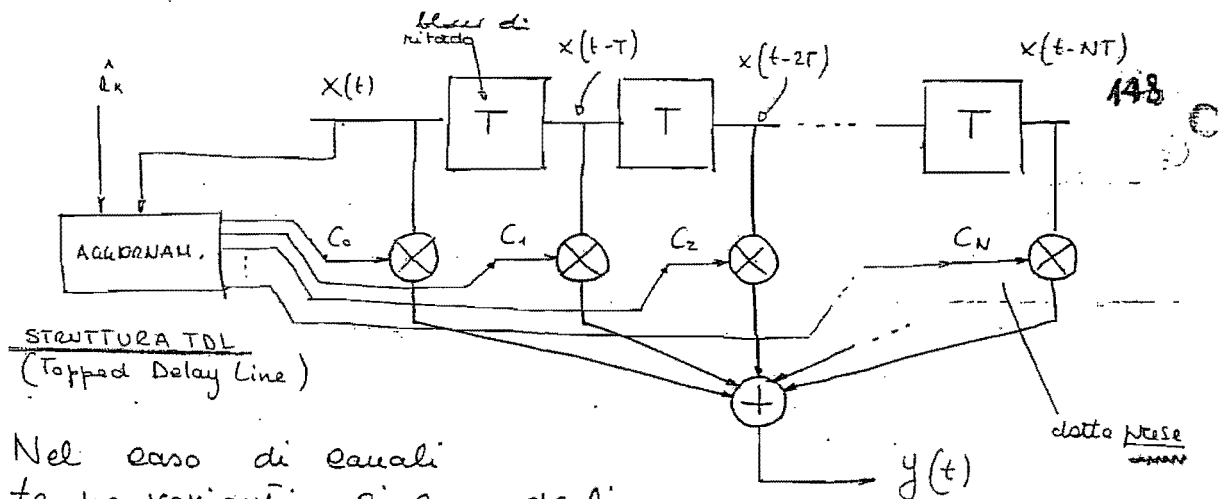
soddisfacendo la condizione di Nyquist.

Se il canale non è tempo invariante, non è possibile determinare a priori $p(t)$ e quindi non è possibile determinare il filtro adattato. In generale allora si considera come ricevitore il seguente:

Il filtro frontale ha una risposta in frequenza $H(f)$ passa basso oppure



ADATTATO ALL'IMPULSO TRASMESSO $p_T(t)$. Il secondo filtro, detto EQUAIZZATORE, ha una risposta in frequenza variabile dall'esterno. In generale la sua struttura può essere rappresentata come segue.



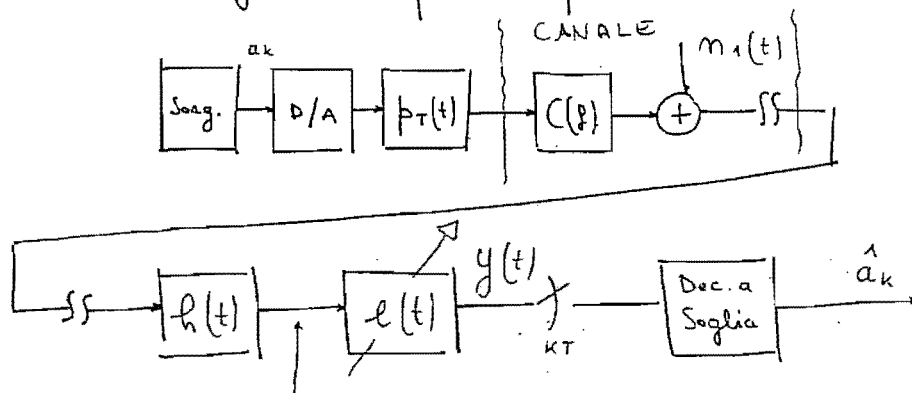
Nel caso di canali tempo variabili, ci sono degli algoritmi che aggiornano in tempo reale i coefficienti C_i in base alle decisioni già prese $\hat{a}_k$ e al segnale ricevuto e prefiltrato.

$$h(t) = \sum e_i s(t - \tau_i)$$

$$F(f) = \sum e_i e^{-j2\pi f \tau_i}$$

CRITERIO ZERO FORCING

Per il dimensionamento degli equalizzatori esistono diversi criteri fra i quali quello dello zero forcing.



$$x(t) = \sum_l a_l g(t - lT) + m_1(t)$$

L'operazione dell'equalizzatore può essere riassunta come segue.

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^N C_k x(t - kT) = \\ &= \sum_{k=0}^N C_k \left\{ \sum_l a_l g(t - lT - kT) \right\} + \sum_{k=0}^N C_k m_1(t - kT) = \end{aligned}$$

$$= \sum_e a_e \sum_{k=0}^N C_k g(t-lT-kT) + m_z(t) =$$

149

$$= \sum_e a_e q(t-lT) + m_z(t) \quad y(kT) = \sum_e a_e q[(k-l)T] + m_z(kT)$$

Osserviamo che

$$q(t) = \sum_{k=0}^N C_k g(t-kT)$$

CONDIZIONE VOWTA
PER NON AVERE ISI

con

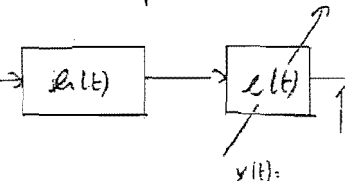
$$q(mT) = \begin{cases} 1 & m = m_0 \\ 0 & m \neq m_0 \end{cases} = \sum_{k=0}^N C_k g[(m-k)T] \Rightarrow y(kT) = a_{k-m_0} + m_z(kT)$$

Dimensionare il dispositivo di equalizzazione, significa risolvere infinite equazioni in $N+1$ incognite. Allora non si ha la soluzione
- attima ma solo approssimata

Il criterio dello "zero forcing" guarda solo i campioni precedenti, trascurando completamente il rumore; ciò che succede il più delle volte è che il rumore $m_z(t)$ ne esce amplificato, con un conseguente peggioramento del rapporto S/N.

Per calcolare C_k si FORZANO A ZERO I CAMPIONI

Supponiamo che il filtro frontale abbia espressione

$$g(kT) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0,2 & k=1 \\ -0,1 & k=-1 \\ 0 & |k| \geq 2 \end{cases} \quad \text{CANALE}$$


il segnale sarà quindi in uscita da esso $\sum_e a_e g(t-lT)$

$$x_k = a_k g(0) + a_{k+1} g(1) + a_{k-1} g(-1) + m_z(t)$$

Sappiamo che

$$q(mT) = \sum_{k=0}^N C_k g[(m-k)T]$$

Supponiamo di volere un equalizzatore a 3 prese

ciò $N=2$, quindi

150

$$q(mT) = \sum_{k=0}^2 C_k g[(m-k)T] = C_0 g(mT) + C_1 g((m-1)T) + C_2 g((m-2)T) \quad \text{C}$$

A questo punto ci deve imporre la condizione

$$q(mT) = \begin{cases} 1 & m = m_0 \\ 0 & m \neq m_0 \end{cases} \quad \text{con } m_0 \text{ arbitrario}$$

allora, prendiamo $m_0 = 1$, la condizione diviene

$$q(0) = 0 \quad q(1) = 1 \quad q(2) = 0$$

che si traduce nelle equazioni

$$\begin{cases} q(0) = C_0 g(0) + C_1 g(-1) + C_2 g(-2) = 0 \\ q(1) = C_0 g(1) + C_1 g(0) + C_2 g(-1) = 1 \\ q(2) = C_0 g(2) + C_1 g(1) + C_2 g(0) = 0 \end{cases} \quad \text{C}$$

dal quale

$$C_0 = 0,1 \quad (0,096)$$

$$C_1 = 0,96$$

$$C_2 = -0,18 \quad (-0,192)$$

lunga

pa

Osserviamo che

$$y(kT) = a_{k-1} + a_{k-2}(-0,1) - 0,1 a_k + m_2(kT)$$

Si verifica ancora ISI, ma in maniera attenuata.

$$y(kT) = \sum_l a_l q[(k-l)T] + m_2(kT) =$$

$$= \sum_l a_l [C_0 g[(k-l)T] + C_1 g[(k-l-1)T] + C_2 g[(k-l-2)T]] =$$

$$\begin{aligned} k-l = m_0 &\Rightarrow l = k - m_0 \\ k-l-1 = m_0 &\Rightarrow l = k - m_0 - 1 \\ k-l-2 = m_0 &\Rightarrow l = k - m_0 - 2 \end{aligned}$$

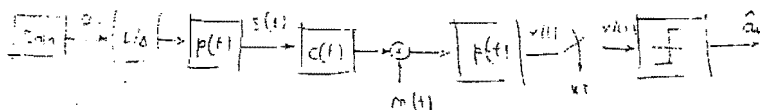
Si consideri il sistema di figura, con

- $a_k \in \{\pm 1\}$ equiprobabili e indipendenti
- l'impulso $p(t)$ radice di coseno rialzato con α

definiamo anche

$$g_N(t) = p(t) \otimes p(-t) \quad g_N(kT) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$g_N(0) = E_p = 1$$



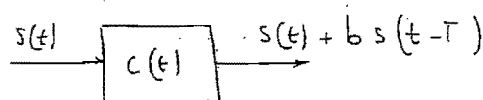
Supponiamo che il canale abbia risposta all'impulso $c(t) = \delta(t)$ (CASO IDEALE) proiettore ricevuto ottimo e prob di errore

la prob. di errore nel caso ideale risulta

$$P_b^{(id)} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

$$\frac{m(t)}{\frac{N_0}{2}} \rightarrow \boxed{p(t)} \rightarrow \frac{m_1(t)}{\frac{N_0}{2} |p(f)|^2} \quad \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int |p(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} E_p = \frac{N_0}{2}$$

Supponiamo ora che il canale sia REALE modellato dal seguente schema



ovvero con una risposta

$$c(t) = \delta(t) + b \delta(t-T) \quad 0 \leq b < 1$$

Il canale ha risposta in frequenza

$$C(f) = 1 + b e^{-j2\pi f T} = \frac{1 + b^2 \cos^2 2\pi f T + 2b \cos 2\pi f T + b^2 \sin^2 2\pi f T}{1 + b^2 + 2b \cos 2\pi f T}$$

$$= (1 + b \cos 2\pi f T) + j b \sin 2\pi f T$$

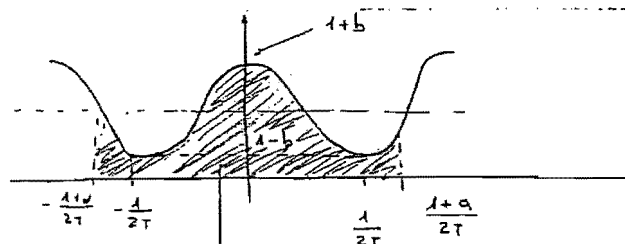
$$|C(f)| = \sqrt{1 +}$$

152

$$= \sqrt{(1+b^2) + 2b \cos(2\pi f)} = \begin{cases} \sqrt{(1+b)^2} = 1+b \\ \sqrt{(1-b)^2} = 1-b \end{cases}$$

L'impulso ha
banda (il rolloff α)

$$B_p = \frac{1+\alpha}{2T}$$

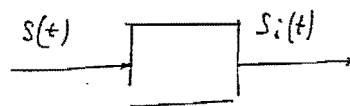


Questa è la zona in cui
c'è il segnale utile e, in questa
zona, il segnale è fortemente attenuato

Osserviamo che

$$s(t) = \sum_i a_i p(t-iT)$$

$$S_i(t) = \sum_i a_i p_r(t-iT)$$



$$\text{e con } p_r(t) = p(t) \otimes c(t) = p(t) + b p(t-T)$$

In questo caso c'è ISI, quindi dovremmo cambiare
il filtro adattato e il decidere a soglia in uno
di Viterbi. Proviamo a lasciare tutto inalterato,
analizziamo come degradano le prestazioni
In uscita dal filtro adattato

$$x(t) = \sum_i a_i g(t-iT) + n_1(t)$$

dato l'errore commesso nel
caso del canale non
ideale

nella quale

$$\begin{aligned} g(t) &= p_r(t) \otimes p(-t) = p(t) \otimes c(t) \otimes p(-t) = \\ &= g_N(t) \otimes c(t) = g_N(t) + b g_N(t-T) \end{aligned}$$

Campionando

$$g(kT) = g_N(kT) + b g_N[(k-1)T] = \delta_k + b \delta_{k-1} =$$

$$\delta_k = \text{delta di Kronecker}$$

$$g(kT) = \delta_k + b\delta_{k-1} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ b & k=1 \\ 0 & k \neq 0,1 \end{cases}$$

Calcoliamo la probabilità di errore

$$P_b^{(\text{REALE})} = P(a_k \neq \hat{a}_k) = \frac{1}{4} \left[P(a_k \neq \hat{a}_k | a_k = 1, a_{k-1} = 1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} P(a_k \neq \hat{a}_k | a_k = 1, a_{k-1} = -1) + P(a_k \neq \hat{a}_k | a_k = -1, a_{k-1} = 1) \right. \\ \left. + P(a_k \neq \hat{a}_k | a_k = -1, a_{k-1} = -1) \right] \frac{1}{4} = (*)$$

Come già visto in teoria

$$P(a_k \neq \hat{a}_k | a_k = 1, a_{k-1} = \alpha) = P(x(kT) < 0 | a_k = 1, a_{k-1} = \alpha) = \\ = P(1 + b\alpha + n_1(kT) < 0) = P(n_1(kT) < -(1 + b\alpha)) = \\ = Q\left(\frac{1 + b\alpha}{\sigma}\right)$$

analogamente per gli altri termini riscriviamo la (*)

$$P_b^{(\text{REALE})} = \left[Q\left(\frac{1+b\alpha}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1-b\alpha}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1+b\alpha}{\sigma}\right) + \right. \\ \left. + Q\left(\frac{1-b\alpha}{\sigma}\right) \right] \frac{1}{4} =$$

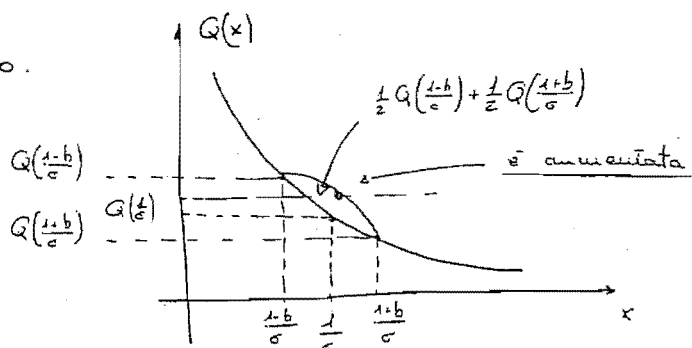
Confrontiamo il caso reale e il caso ideale per $\alpha = 1$

$$P_b^{(\text{ID})} = \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

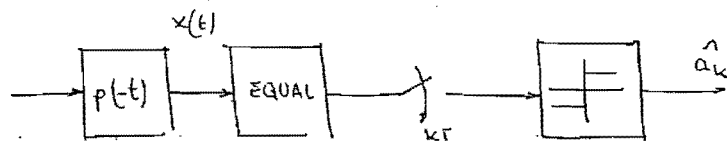
$$P_b^{(\text{REALE})} = \frac{1}{2} Q\left(\frac{1+b}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1-b}{\sigma}\right)$$

e si osserva un aumento della prob. di errore.

$$\frac{dQ(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \frac{d^2Q(x)}{dx^2} = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Au-zi-che cam-bia-re l'in-te-ro ri-ce-ve-re, in-seria-mo 154
un equalizzatore (prima o dopo il cam-pi-on è in-dif-fe-ren-te)
come se-gue e de-ci-da-mo an-ca-ra a so-glia



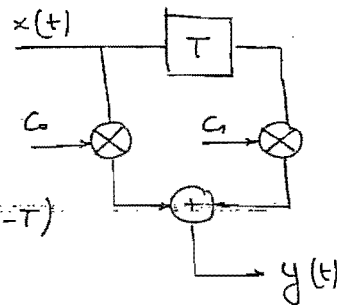
Cam-bi-a-mo mi
equalizzatore a due pre-te
Sap-pia-mo che

$$y(t) = \sum_i a_i q(t-iT) + m_2(t)$$

e-an

$$q(t) = \sum_{l=0}^1 C_l g(t-lT) = C_0 g(t) + C_1 g(t-T)$$

$$m_2(t) = C_0 m_1(t) + C_1 m_1(t-T)$$



Cam-pi-on-a-mo

$$q(kT) = C_0 g(kT) + C_1 g[(k-1)T] =$$

$$= C_0 [\delta_k + b \delta_{k-1}] + C_1 [\delta_{k-1} + b \delta_{k-2}] =$$

$$= C_0 \delta_k + (C_0 b + C_1) \delta_{k-1} + C_1 b \delta_{k-2} =$$

$$= \begin{cases} C_0 & k=0 \\ C_0 b + C_1 & k=1 \\ C_1 b & k=2 \\ 0 & k \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

Cal-co-la-mo C_0 e C_1 con lo "Zero forcing".

Pro-vi-a-mo i vari ca-si:

$$\textcircled{1} \begin{cases} q(0) = 0 = C_0 \\ q(T) = 1 = C_1 + C_0 b = C_1 \end{cases}$$

Non va bene perche è
un semplice ritardatore

$$\textcircled{2} \begin{cases} q(T) = 1 \\ q(2T) = 0 \end{cases} \begin{cases} C_0 b + C_1 = 1 \\ C_1 b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1/b \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q(0) = 1 \\ q(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = -b \end{cases} \Rightarrow q(kT) = \begin{cases} C_0 = 1 & k=0 \\ b-b=0 & k=1 \\ -b^2 & k=2 \\ 0 & k \neq 0,1,2 \end{cases} \quad 155$$

$$y(kT) = a_k - b^2 a_{k-2} + m_2(kT)$$

In questo senso si può sperare che le prestazioni siano migliorate; il termine interferente a_{k-2} è pesato con b^2 e, siccome $0 < b < 1$, è diminuito; ciò non basta per sapere se effettivamente l'eq. è sufficientemente accurata,

$m_2(kT)$ è diverso da m_1 . Attraverso analoghi passaggi a si può verificare che

$$p_b(\bar{E}Q) = \frac{1}{2} Q\left(\frac{1+b^2}{\sigma_2}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1-b^2}{\sigma_2}\right)$$

nella quale σ_2^2 è la varianza di m_2 .

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= E\{m_2^2(t)\} = E\{[C_0 m_1(t) + C_1 m_1(t-T)]^2\} = \\ &= E\{C_0^2 m_1^2(t) + C_1^2 m_1^2(t-T) + 2C_0 C_1 m_1(t) m_1(t-T)\} = \\ &= E\{C_0^2 m_1^2(t)\} + E\{C_1^2 m_1^2(t-T)\} + E\{2C_0 C_1 m_1(t) m_1(t-T)\} = \\ &= \underbrace{C_0^2 E\{m_1^2(t)\}}_{\sigma^2} + \underbrace{C_1^2 E\{m_1^2(t-T)\}}_{\sigma^2 \text{ perche stat. in senso lato e quindi ind. dal tempo}} + 2C_0 C_1 \underbrace{E\{m_1(t) m_1(t-T)\}}_{R_{m_1}(T)} \end{aligned}$$

$$\frac{N_0}{2} |P(f)|^2 = \frac{N_0}{2} G_N(f)$$

$$\Rightarrow \frac{N_0}{2} g_N(\nu)$$

$$\Rightarrow R_{m_1}(T) = \frac{N_0}{2} (g_m(T))$$

$$\frac{m(t)}{\frac{N_0}{2}} \rightarrow [P(-f)] \rightarrow \frac{M_1(f)}{\frac{N_0}{2} |P(f)|^2}$$

ma $g_N(kT) = 0$ per $k=1$

$$\Rightarrow R_{m_1}(T) = 0$$

$$\frac{m(t)}{\frac{N_0}{2}} \rightarrow [h(t)] \rightarrow \frac{m_1(t)}{\frac{N_0}{2}} \quad \xrightarrow{(FT)^{-1}} R_{m_1}(\tau) = \frac{N_0}{2} h(t) \otimes h(-t)$$

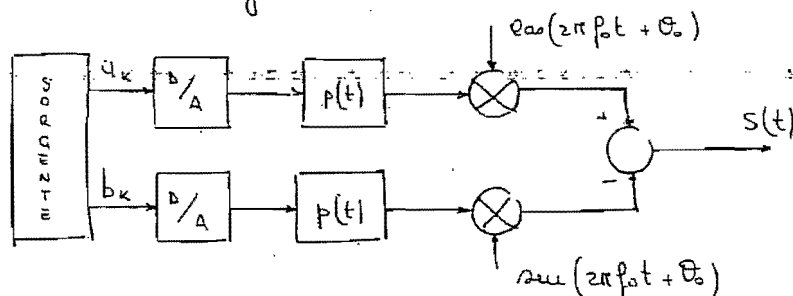
Un segnale modulato numericamente in banda base può essere scritto come

$$s'(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

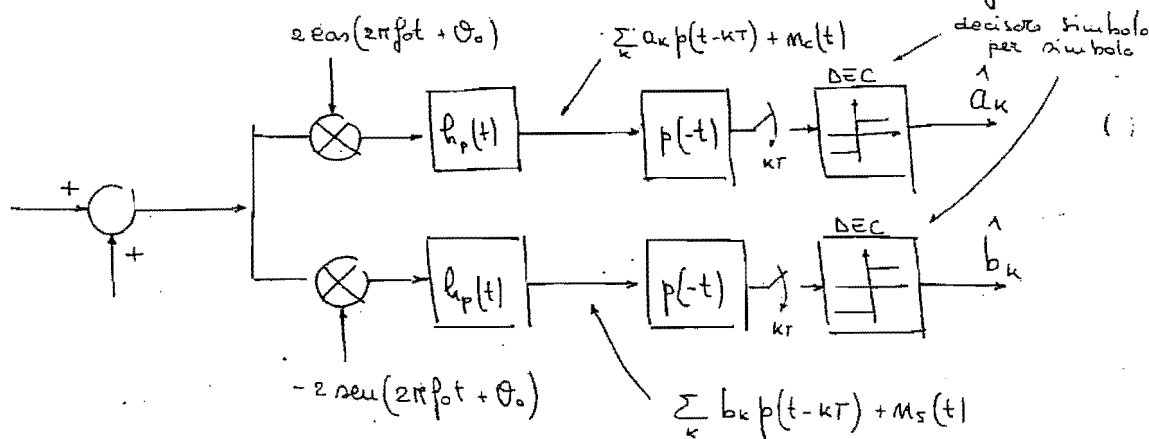
Per la trasmissione in banda passante si generano la componente in fase e quella in quadratura nel modo seguente

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \sum_k b_k p(t - kT) \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Lo schema di un trasmettitore in banda passante risulta il seguente.



Il canale introduce un rumore AWGN $n(t)$; la ricevitore può essere schematizzato come segue



In portanza si hanno due segnali PAM M-ari portante in fase e uno sulla portante in quadratura. Questo tipo di trasmissione si dice QAM (Quadrature Amplitude modulation). In particolare si parla di M^2 -QAM, nella quale si hanno due PAM m-arie.

L'inviluppo complesso del segnale M²QAM risulta 157

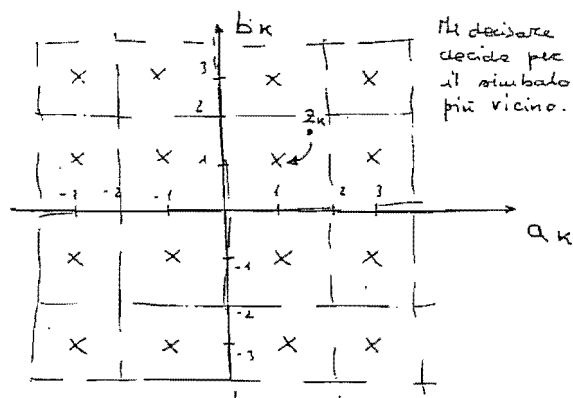
$$\tilde{s}(t) = \sum_k a_k p(t-kT) + j \sum_k b_k p(t-kT) =$$

$$= \sum_k (a_k + j b_k) p(t-kT) =$$

$$= \sum_k c_k p(t-kT)$$

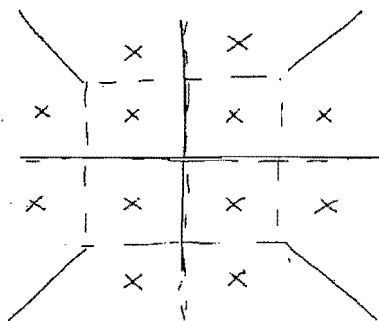
nella quale c_k è un SIMBOLO COMPLESSO. Se anche a_k e b_k appartengono ad ^{uno stesso} alfabeto di M simboli c_k va a formare una COSTELLAZIONE DI PUNTI detta QUADRATA.

Il decidere può essere indipendente per ciascuno ramo; uno decide per il simbolo a_k e uno per il simbolo b_k . In questo caso si parla di M²-QAM (nella quale M è il numero di simboli)



Se invece si scelgano a_k e b_k da alfabeti differenti si possono ottenere costellazioni diverse. Un esempio può essere la π -CROSS (a croce).

La distanza si elimina alcuni dei punti della costellazione in particolare quelli sugli angoli della costellazione precedente.



In questo caso il decidere essere unico perché deve prendere una decisione su uno dei due simboli.

La scelta di una costellazione differente da quella quadrata risulta utile per diversi motivi. Ad esempio la costellazione 12-cross rappresentata in figura, non ha i punti negli angoli; vi sono i simboli

con il modulo dell'involuppo complesso più grande, ¹⁵⁸
 ovvero quelli che per essere trasmessi richiedono la
 maggiore energia; questa caratteristica può essere
 sfruttata per minimizzare la potenza del segnale
 trasmesso.

Un'alternativa alla QAM è la "modulatione di fase
 numerica" PSK (Phase Shift Keying). Con essa rimane
 costante il modulo dell'involuppo complesso e viene
 modulato l'argomento.

$$S(t) = A_0 \cos[2\pi f_c t + \theta_k]$$

Analogamente si realizza
 una FSK (Frequency Shift Keying)
 nella quale

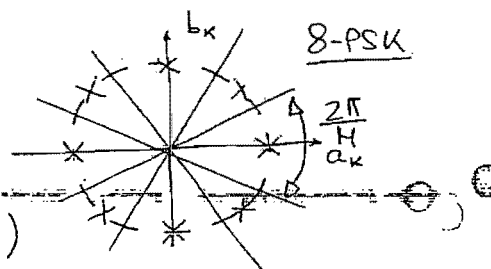
$$S(t) = A_0 \cos[2\pi f_{ck} t + \theta]$$

È una modulazione che risponde alle stesse necessità della modulazione
 CROSS

QAM } modulazioni numeriche LINEARI
 CROSS } in banda passante
 PSK }

(Cambie solo il decisore, per il
 resto hanno lo stesso scheme)

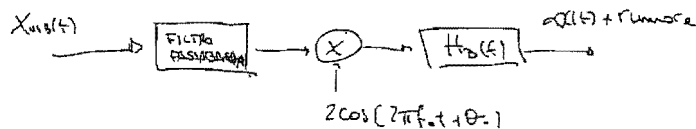
La FSK NON È LINEARE!



in questo caso a e b_k
 non sono indipendenti.

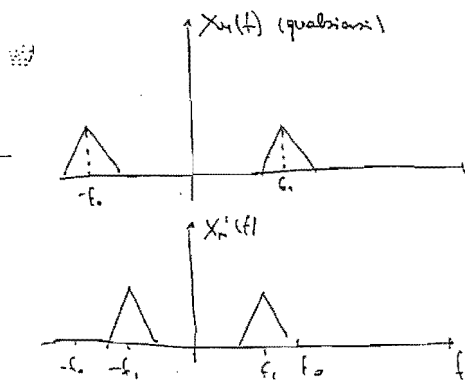
$$x_{\text{mod}}(t) = m(t) \cos = T[m] \cos$$

l'operazione di demodulazione riconduce al segnale iniziale



Per quanto riguarda questa prima parte, il inverso segnali x_{mod} , x_{mod} ciò che cambia è solo il filtro passabanda

CONVERSIONE DI FREQUENZA

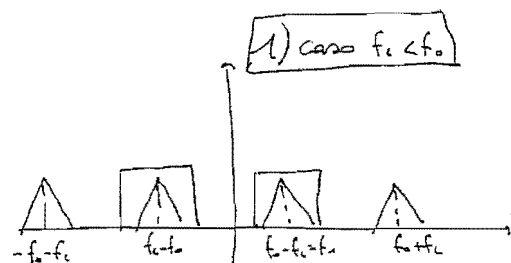
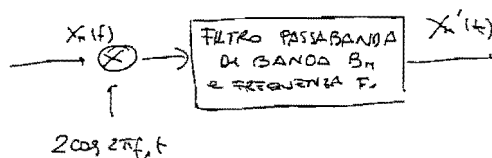


$$x_n(t) \leftrightarrow X_n(f)$$

$$2x_n(t) \cos 2\pi f_0 t \leftrightarrow X_n(f - f_0) + X_n(f + f_0)$$

2) caso $f_c > f_0$

traslo e rim di f_0



scelgo $f_c = f_0 - f_1$ e effettuo la conversione di frequenza

