

COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova finale del 10/1/2006

Tempo a disposizione: 2 h.

1. Si vuole trasmettere un segnale audio $x(t)$ di banda $B_x = 10$ kHz. Per far ciò, il segnale, normalizzato in modo che sia $|x(t)| \leq 1$, è prima campionato e poi quantizzato su $q = 1024$ livelli. Per la trasmissione si utilizza una PAM quaternaria.
 - (a) Si calcoli la potenza del rumore di quantizzazione.
 - (b) Si determini la minima banda occupata nella trasmissione.
2. Si enunci e si dimostri la condizione (di Nyquist) che deve soddisfare lo spettro dell'impulso dopo il filtro adattato affinché si abbia l'assenza di interferenza intersimbolica.
3. In un sistema di comunicazione PAM quaternario con impulso trasmesso $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}(\frac{t}{T})$, i simboli trasmessi a_k appartengono all'alfabeto $\{\pm\alpha, \pm3\}$, con $0 < \alpha < 3$ e sono indipendenti ed equiprobabili. L'intervallo di simbolo è $T = 50 \mu\text{s}$ ed il segnale è trasmesso su un canale che introduce rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$.
 - (a) Si determini la densità spettrale di potenza del segnale trasmesso (e se ne disegni il grafico) e la banda occupata.
 - (b) Si dica se, dopo il filtro adattato, è soddisfatta la condizione per l'assenza di interferenza intersimbolica.
 - (c) Nell'ipotesi di utilizzare un decisore a soglia, si determini il valore di α che consente di minimizzare la probabilità d'errore sul simbolo.

Risultati e soluzione: <http://www.tlc.unipr.it/people/colavolpe>

Soluzione

1.

(a) Come è noto, la potenza del rumore di quantizzazione ha espressione

$$N_q = \frac{1}{3q^2}$$

e pertanto

$$N_q \simeq 3.2 \cdot 10^{-7} \simeq -65 \text{ dB.}$$

(b) La minima banda occupata si ottiene quando si campiona con la minima frequenza di campionamento (pari a $F_c = 2B_x$ e quindi l'intervallo di campionamento è $T_c = 1/2B_x$) e quando si utilizza per la trasmissione un impulso con spettro a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 0$. Poiché $\nu = \log_4 1024 = 5$, per ogni campione e cioè ogni T_c secondi si devono trasmettere 5 simboli quaternari. Pertanto l'intervallo di segnalazione dovrà essere $T = T_c/5$ e quindi la banda occupata sarà

$$B = \frac{1 + \alpha}{2T} = \frac{1}{2T} = \frac{5}{2T_c} = 5B_x = 50 \text{ kHz.}$$

2. Domanda di teoria.

3.

(a) La densità spettrale di potenza del segnale trasmesso è

$$S_s(f) = \frac{S_a(f)}{T} |P(f)|^2$$

dove

$$S_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi f m T}$$

con

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\} = \begin{cases} E\{a_k^2\} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 9) & \text{per } m = 0 \\ E\{a_{k+m}\} E\{a_k\} = 0 & \text{per } m \neq 0 \end{cases}.$$

Pertanto

$$S_a(f) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 9)$$

e poiché

$$P(f) = \sqrt{T} \text{rect}(fT) = \sqrt{T} \prod(fT)$$

si ha

$$S_s(f) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 9) \prod(fT)$$

il cui grafico è mostrato in fig. 1. La banda occupata è $B = \frac{1}{2T} = 10 \text{ kHz}$.

(b) Poiché è

$$G(f) = |P(f)|^2 = T \prod(fT)$$

l'impulso $g(t)$ ha spettro a coseno rialzato con roll-off zero e quindi è soddisfatta la condizione per l'assenza di interferenza intersimbolica.

(c) Determiniamo prima di tutto la probabilità d'errore in funzione di α . Poiché è $g(0) = E_p = 1$, il campione x_k all'uscita del filtro adattato ha espressione

$$x_k = a_k + n_k$$

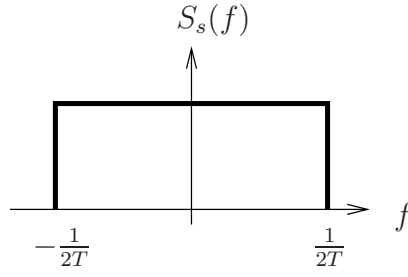


Figura 1:

dove n_k è una variabile casuale gaussiana a media nulla e varianza $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$. Poiché i simboli sono equiprobabili, il decisore avrà soglie a metà tra i simboli e cioè $0, \pm \frac{3+\alpha}{2}$. La probabilità d'errore ha espressione

$$P(\hat{a}_k \neq a_k) = \frac{1}{4}P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = \alpha) + \frac{1}{4}P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -\alpha) \\ + \frac{1}{4}P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 3) + \frac{1}{4}P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -3).$$

Per simmetria

$$P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = \alpha) = P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -\alpha) \\ P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 3) = P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -3).$$

Pertanto

$$P(\hat{a}_k \neq a_k) = \frac{1}{2}P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -\alpha) + \frac{1}{2}P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -3).$$

Calcoliamo il secondo termine direttamente:

$$P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -3) = P\{x_k > -\frac{3+\alpha}{2} | a_k = -3\} = P\{n_k > \frac{3-\alpha}{2}\} = Q\left(\frac{3-\alpha}{2\sigma}\right).$$

Per quanto riguarda l'altro termine, calcoliamo prima la probabilità di corretta decisione condizionata:

$$P(\hat{a}_k = a_k | a_k = -\alpha) = P\{-\frac{3+\alpha}{2} < x_k < 0 | a_k = -\alpha\} = P\{-\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2} < n_k < \alpha\} \\ = 1 - Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{3-\alpha}{2\sigma}\right)$$

e quindi

$$P(\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -\alpha) = Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{3-\alpha}{2\sigma}\right)$$

e quindi

$$P_S = P(\hat{a}_k \neq a_k) = Q\left(\frac{3-\alpha}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right).$$

Derivando rispetto ad α ed uguagliando a zero la derivata, si trova il minimo di P_S con il vincolo che sia $0 < \alpha < 3$. È

$$\frac{dP_S}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{3-\alpha}{2\sigma}\right)^2\right\} \frac{1}{2\sigma} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\sigma}$$

da cui

$$(3-\alpha)^2 = 4\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$$

che ammette due soluzioni, ma solo una nell'intervallo di interesse e cioè $\alpha = 1$.