

COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

Prova del 10/1/2007
Tempo a disposizione: 2 ore

1. Si illustri il funzionamento di un ricevitore supereterodina, spiegando il funzionamento dei singoli blocchi costituenti.
2. Si consideri il processo $n(t)$ ottenuto filtrando un processo di rumore gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$ con un filtro passa banda ideale di banda B intorno alla frequenza f_0 . Si dimostri che il processo $n_c(t)$ della decomposizione

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) - n_s(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

ha autocorrelazione indipendente da θ .

Suggerimento: si esprima $n_c(t)$ in funzione di $n(t)$ e della sua trasformata di Hilbert e se ne calcoli l'autocorrelazione.

3. In un sistema di trasmissione FM, il segnale modulante ha banda $B = 15$ kHz e potenza media $P_x = 10^{-3} \text{ V}^2$. Il modulatore è caratterizzato da una deviazione di frequenza pari a $f_\Delta = 200$ kHz.
 - (a) Si determini la banda del segnale FM.
 - (b) Si dimostri come ricavare il rapporto segnale-rumore S_u/N_u all'uscita del demodulatore avendo noto il rapporto segnale-rumore S_i/N_i al suo ingresso.
 - (c) Sapendo che il rapporto segnale-rumore all'ingresso del demodulatore è $S_i/N_i = 20$ dB, si valuti il rapporto segnale-rumore S_u/N_u all'uscita del demodulatore stesso (in dB).

COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

Prova del 10/1/2007
Tempo a disposizione: 2 ore

1. In un sistema di trasmissione PAM, il segnale trasmesso è

$$s(t) = \sum_i a_i p(t - iT).$$

I simboli a_i sono indipendenti e possono assumere 0 ed 1 con la stessa probabilità. L'impulso $p(t)$ è del tipo RZ (con ritorno a zero) con duty cycle del 50% ovvero

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < t < T/2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

- (a) Si calcoli la funzione di autocorrelazione dei simboli a_i .
 (b) Si determini l'espressione della densità spettrale di potenza di $s(t)$ e se ne rappresenti il grafico.
2. Si consideri il ricevitore per segnali numerici in Fig. 1. La trasmissione è binaria ed i simboli

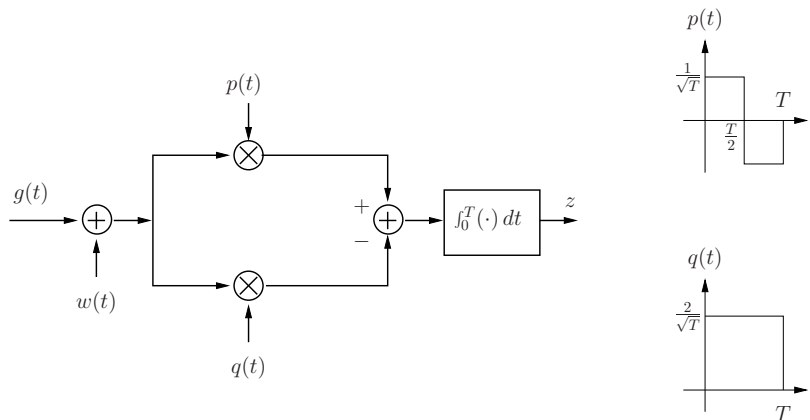


Figura 1:

emessi dalla sorgente possono assumere i valori 0 e 1 con uguale probabilità. Quando viene trasmesso il simbolo 0, l'impulso $g(t)$ vale

$$g_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} \sin(2\pi \frac{t}{T}) & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

mentre quando viene trasmesso 1 vale

$$g_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} \sin(\pi \frac{t}{T}) & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Il rumore $w(t)$ è gaussiano, bianco, con densità spettrale di potenza $N_0/2$.

- (a) Si calcoli il valor medio e la varianza di z condizionatamente alla trasmissione di 0 e 1.
 (b) Si determini la strategia del decisore ottimo che opera su z e si calcoli la probabilità d'errore.
 (c) Sostituendo nello schema di Fig. 1 $p(t)$ con $g_0(t)$ e $q(t)$ con $g_1(t)$, si calcoli la probabilità d'errore.

Soluzione parte analogica

1. Domanda di teoria
2. Indicando con $\check{n}(t)$ la trasformata di Hilbert di $n(t)$, la componente in fase $n_c(t)$ può essere espressa come

$$n_c(t) = n(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) + \check{n}(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta).$$

L'autocorrelazione di $n_c(t)$ può quindi essere espressa come

$$\begin{aligned} R_c(\tau) &= E\{n_c(t+\tau)n_c(t)\} \\ &= E\{n(t+\tau)n(t)\} \cos[2\pi f_0(t+\tau) + \theta] \cos[2\pi f_0 t + \theta] \\ &\quad + E\{n(t+\tau)\check{n}(t)\} \cos[2\pi f_0(t+\tau) + \theta] \sin[2\pi f_0 t + \theta] \\ &\quad + E\{\check{n}(t+\tau)n(t)\} \sin[2\pi f_0(t+\tau) + \theta] \cos[2\pi f_0 t + \theta] \\ &\quad + E\{\check{n}(t+\tau)\check{n}(t)\} \sin[2\pi f_0(t+\tau) + \theta] \sin[2\pi f_0 t + \theta]. \end{aligned}$$

Indichiamo con $S_n(f)$ la densità spettrale di potenza di $n(t)$ e con $S_{\check{n}}(f)$ quella di $\check{n}(t)$. Poiché $\check{n}(t)$ si ottiene come mostrato in Fig. 2, è

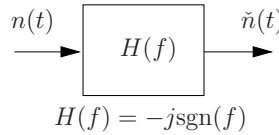


Figura 2:

$$S_{\check{n}}(f) = S_n(f) |H(f)|^2 = S_n(f)$$

e quindi

$$R_n(\tau) = E\{n(t+\tau)n(t)\} = E\{\check{n}(t+\tau)\check{n}(t)\} = R_{\check{n}}(\tau).$$

Analogamente

$$E\{\check{n}(t+\tau)n(t)\} = -E\{n(t+\tau)\check{n}(t)\} = h(\tau) \otimes R_n(\tau)$$

dove $h(t)$ è la risposta impulsiva del filtro di Hilbert. Pertanto è $h(\tau) \otimes R_n(\tau) = \check{R}_n(\tau)$. Quindi

$$\begin{aligned} R_c(\tau) &= R_n(\tau) \{ \cos[2\pi f_0(t+\tau) + \theta] \cos[2\pi f_0 t + \theta] + \sin[2\pi f_0(t+\tau) + \theta] \sin[2\pi f_0 t + \theta] \} \\ &\quad - \check{R}_n(\tau) \{ \cos[2\pi f_0(t+\tau) + \theta] \sin[2\pi f_0 t + \theta] - \sin[2\pi f_0(t+\tau) + \theta] \cos[2\pi f_0 t + \theta] \} \\ &= R_n(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) - \check{R}_n(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

indipendente da θ .

3.

- (a) La banda del segnale FM è

$$B_{FM} \simeq 2(f_\Delta + 2B) = 460 \text{ kHz}.$$

- (b) Domanda di teoria. Dopo i passaggi svolti a lezione si trova

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{3f_\Delta^2 P_x B_{FM}}{B^3} \frac{S_i}{N_i}.$$

- (c) Esprimendo la relazione precedente in dB si ha

$$\left(\frac{S_u}{N_u} \right)_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{3f_\Delta^2 P_x B_{FM}}{B^3} \right) + \left(\frac{S_i}{N_i} \right)_{dB} = 32.14 \text{ dB}.$$

Soluzione parte digitale

1.

(a) La funzione di autocorrelazione dei simboli a_i è

$$R_a(m) = E\{a_{i+m}a_i\} = \begin{cases} E\{a_i^2\} = \frac{1}{2} \\ E\{a_{i+m}\}E\{a_i\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases} \begin{matrix} \text{per } m = 0 \\ \text{per } m \neq 0 \end{matrix} = \frac{1}{4}\delta(m) + \frac{1}{4}.$$

(b) La densità spettrale di potenza $W_s(f)$ di $s(t)$ ha espressione

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2.$$

Per quanto riguarda la densità spettrale di potenza dei simboli è

$$W_a(f) = \sum_m R_a(m) e^{-j2\pi f_0 T} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4T} \sum_m \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

e pertanto

$$W_s(f) = \frac{|P(f)|^2}{4T} + \frac{1}{4T^2} \sum_m |P(\frac{m}{T})|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right).$$

Per quanto riguarda $P(f)$ è

$$P(f) = \frac{T}{2} \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) e^{-j\pi fT/2}$$

e quindi

$$W_s(f) = \frac{T}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) + \frac{1}{16} \sum_m \text{sinc}^2\left(\frac{m}{2}\right) \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

il cui grafico è mostrato in Fig. 3.

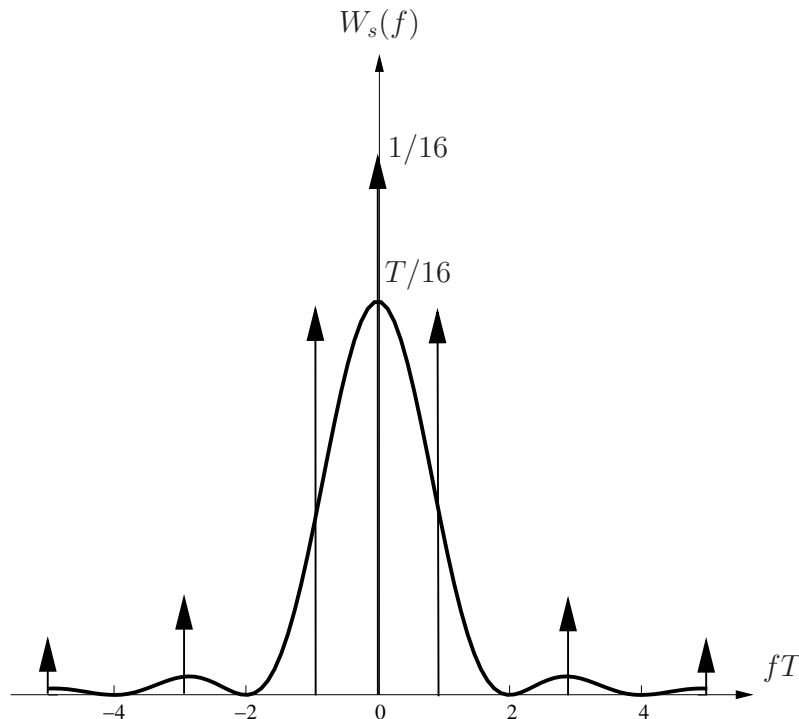


Figura 3:

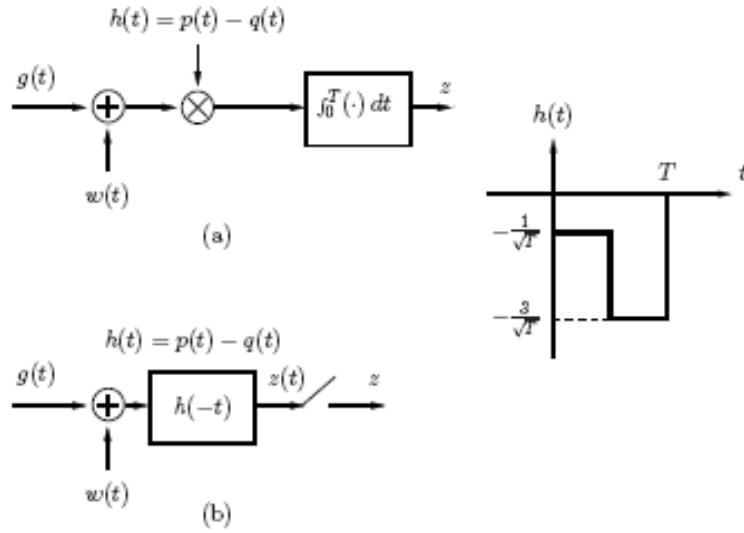


Figura 4:

2. Il ricevitore in Fig. 1 può equivalentemente essere rappresentato come in Fig. 4(a) o in Fig. 4(b).

(a) Il segnale all'uscita del filtro $h(-t)$ risulta quindi

$$z(t) = [g(t) + w(t)] \otimes [h(-t)].$$

Pertanto è

$$z = g(t) \otimes h(-t)|_{t=0} + w(t) \otimes h(-t)|_{t=0} = z_s + z_w$$

dove identifichiamo con

$$z_s = g(t) \otimes h(-t)|_{t=0}$$

il termine di segnale e con

$$z_w = w(t) \otimes h(-t)|_{t=0}$$

il termine di rumore. Essendo z_w frutto di un'operazione lineare su un processo di rumore gaussiano, è una variabile casuale gaussiana. I suoi momenti principali sono ovviamente:

$$\begin{aligned} E\{z_w\} &= 0 \\ E\{z_w^2\} &= \frac{N_0}{2} E_h \end{aligned}$$

dove $E_h = 5$ è l'energia di $h(t)$. Pertanto $E\{z_w^2\} = \frac{5}{2}N_0$. La componente di segnale z_s è invece

$$z_s = \begin{cases} \int_0^T g_0(t)h(t)dt = \frac{2}{\pi} & \text{per } a = 0 \\ \int_0^T g_1(t)h(t)dt = -\frac{4}{\pi} & \text{per } a = 1 \end{cases}$$

dove con a si è indicato il simbolo trasmesso. Pertanto, valor medio e varianza di z risultano:

$$\begin{aligned} E\{z\} &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{per } a = 0 \\ -\frac{4}{\pi} & \text{per } a = 1 \end{cases} \\ \text{var}\{z\} &= \frac{5}{2}N_0 = \sigma_1^2. \end{aligned}$$

- (b) Come decisore si sceglie un decisore a soglia con soglia di decisione $-1/\pi$ tale che la sua uscita \hat{a} sia:

$$\hat{a} = \begin{cases} 0 & \text{per } z > -1/\pi \\ 1 & \text{per } z < -1/\pi \end{cases}$$

La probabilità di errore risulta:

$$\begin{aligned} P\{\hat{a} \neq a\} &= P\{\hat{a} \neq a|a=0\} P\{a=0\} + P\{\hat{a} \neq a|a=1\} P\{a=1\} \\ &= P\{\hat{a} \neq a|a=0\} \frac{1}{2} + P\{\hat{a} \neq a|a=1\} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} P\{\hat{a} \neq a|a=0\} &= P\{z < -\frac{1}{\pi}|a=0\} = P\{\frac{2}{\pi} + z_w < -\frac{1}{\pi}\} = P\{z_w < -\frac{3}{\pi}\} \\ &= P\{z_w > \frac{3}{\pi}\} = Q\left(\frac{3}{\pi\sigma_1}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{18}{5\pi^2 N_0}}\right). \end{aligned}$$

Analogamente

$$P\{\hat{a} \neq a|a=0\} = Q\left(\sqrt{\frac{18}{5\pi^2 N_0}}\right)$$

e quindi

$$P\{\hat{a} \neq a\} = Q\left(\sqrt{\frac{18}{5\pi^2 N_0}}\right).$$

(c) Ripetendo i calcoli del punto precedente e tenendo conto che, in questo caso,

$$\begin{aligned} \int_0^T g_0(t)g_1(t) dt &= 0 \\ \int_0^T g_0^2(t) dt &= \frac{1}{2} \\ \int_0^T g_1^2(t) dt &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} E\{z\} &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } a=0 \\ -\frac{1}{2} & \text{per } a=1 \end{cases} \\ \text{var}\{z\} &= \frac{N_0}{2} = \sigma_z^2. \end{aligned}$$

In questo caso quindi

$$P\{\hat{a} \neq a\} = Q\left(\frac{1}{2\sigma_z}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2N_0}}\right).$$