

COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Prova del 18/2/2009

Tempo a disposizione: 3 ore

1. E' dato il sistema di Fig. 1 dove $x_c(t) = (1 + \mu x(t)) \cos 2\pi f_c t$ è la modulazione AM di un segnale $x(t)$. Il messaggio $x(t)$ è di banda B , potenza $S_x = 4 \text{ V}^2$ e tale che $|x(t)| \leq 1$.

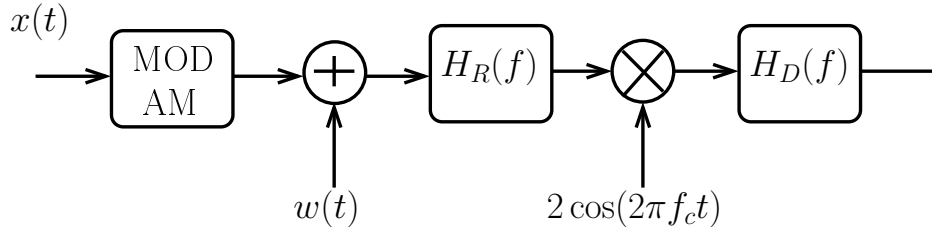


Figura 1: Sistema analogico.

Il filtro BPF, di simmetria hermitiana, ha risposta in frequenza $H_R(f)$ per $f > 0$ pari a:

$$H_R(f) = \begin{cases} j2\pi(f - f_c) & |f - f_c| < B \\ 0 & \text{altr.} \end{cases}$$

$w(t)$ è un rumore a media nulla e densità spettrale di potenza bilatera $N_0/2$. Il filtro $H_D(f)$ è passa basso di banda B . Si calcoli:

- (a) il massimo valore di μ in modo che $x_c(t)$ sia AM e con $\langle x_c^2(t) \rangle \leq 1 \text{ V}^2$;
 - (b) il rapporto segnale-rumore all'uscita supponendo $x(t) = A \cos(2\pi Bt)$;
 - (c) nell'ipotesi che si abbia a disposizione un filtro integratore $H_I(f) = 1/(j2\pi f)$, si giustifichi brevemente il suo impatto nel caso venga posizionato all'ingresso o all'uscita dello schema di Fig. 1.
2. Sia dato un segnale PAM $x(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$ dove $a_k = b_k + \alpha b_{k-1}$, essendo $b_k = \{\pm 1\}$ simboli indipendenti e $0 < \alpha < 1$. L'impulso di supporto è $p(t) = \text{sinc}(t/T)$ e il segnale è trasmesso su un canale che introduce rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$. Si calcoli:
- (a) la densità spettrale di potenza di $x(t)$;
 - (b) la probabilità di errore di b_k nell'ipotesi di usare un ricevitore composto da un filtro adattato a $p(t)$, un campionatore e un decisore a soglia di decisione nulla.

Risultati e soluzione: <http://www.tlc.unipr.it/people/colavolpe>
oppure
<http://www.tlc.unipr.it/people/serena>

1. Soluzione:

- (a) Il segnale affinché sia AM deve avere $\mu < 1$. Tuttavia il vincolo sulla massima potenza è più stringente. Infatti, la potenza del segnale AM è legata a quella di $x(t)$ da:

$$S_c = \langle x_c^2(t) \rangle = \frac{1 + \mu^2 S_x}{2}$$

quindi $S_c \leq 1 \text{ V}^2$ richiede $\mu \leq 0.5$.

- (b) Il filtro $H_R(f)$ è un derivatore nella banda del segnale, dotato di equivalente passabasso $H_{lp}(f) = j4\pi f$ per $|f| < B$. L'equivalente passabasso del segnale trasmesso, risulta:

$$x_{lp}(t) = 1 + \mu x(t).$$

$x_{lp}(t)$ all'uscita di $H_R(f)$ fornisce il segnale:

$$Y_{lp}(f) = \frac{1}{2} X_{lp}(f) H_{lp}(f) = \frac{\delta(f) + \mu X(f)}{2} j4\pi f \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \mu \frac{dx}{dt}.$$

Quindi il segnale passabanda dopo $H_R(f)$ è $y(t) = \text{Re} \{ y_{lp}(t) e^{j2\pi f_c t} \} = \mu \frac{dx}{dt} \cos(2\pi f_c t)$. Inserendo anche il rumore:

$$y(t) = \mu \frac{dx}{dt} \cos(2\pi f_c t) + n_i(t) \cos(2\pi f_c t) - n_q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

quindi un segnale con parte in fase $\mu \frac{dx}{dt} + n_i(t)$ e parte in quadratura $n_q(t)$. Il filtro $H_R(f)$ è seguito da un ricevitore sincrono che estrae la parte in fase, quindi all'uscita del circuito si ha:

$$y_o(t) = -2\pi B \mu A \sin(2\pi B t) + n_i(t).$$

La potenza di segnale è $S = 4\pi^2 B^2 \mu^2 A^2 / 2$. Il rumore $n(t)$ presenta densità spettrale di potenza $G_n(f) = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2$. Essendo:

$$G_{n_i}(f) = \frac{1}{2} [1 + \text{sgn}(f + f_c)] G_n(f + f_c) + \frac{1}{2} [1 - \text{sgn}(f - f_c)] G_n(f - f_c)$$

risulta:

$$N = \langle n_i^2(t) \rangle = \int \frac{N_0}{2} (2 \cdot |j2\pi f|^2) |H_D(f)|^2 df.$$

Svolgendo i calcoli:

$$N = \frac{N_0}{2} \int_{-B}^B 8\pi^2 f^2 df = \frac{N_0}{2} 8\pi^2 2 \frac{B^3}{3}.$$

Il rapporto segnale rumore è S/N :

$$\frac{S}{N} = \frac{3 A^2 \mu^2}{4 N_0 B}.$$

- (c) il segnale ricevuto è la derivata di quello trasmesso, quindi integrarlo all'uscita o prima di trasmetterlo corrisponde ad effettuare una equalizzazione perfetta in ambo i casi. Così non è per il rumore, in quanto ponendo l'integratore in uscita si de-enfatizzano tutte le frequenze elevate del rumore ($|H_I(f)|^2 \propto 1/f^2$).

2. Soluzione:

- (a) L'impulso trasmesso è

$$p(t) = \text{sinc}(t/T) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P(f) = T \text{rect}(fT).$$

La densità spettrale di potenza ha espressione (si noti che $\text{rect}(fT) = \text{rect}^2(fT)$)

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2 = TW_a(f) \text{rect}(fT)$$

dove

$$W_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi m f T}$$

e

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\}.$$

Risulta

$$\begin{aligned} E\{a_{k+m} a_k\} &= E\{(b_{k+m} + \alpha b_{k+m-1})(b_k + \alpha b_{k-1})\} \\ &= R_b(m) + \alpha R_b(m+1) + \alpha R_b(m-1) + \alpha^2 R_b(m) \end{aligned} \quad (1)$$

dove, essendo i simboli b_k indipendenti, vale:

$$R_b(m) = E\{b_{k+m} b_k\} = \begin{cases} E\{b_k^2\} & m = 0 \\ E\{b_{k+m}\} E\{b_k\} & m \neq 0. \end{cases}$$

Con simboli $b_k = \{\pm 1\}$ risulta:

$$\begin{aligned} E\{b_k^2\} &= 1 \\ E\{b_k\} &= 0 \end{aligned}$$

quindi $R_b(m) = \delta(m)$ che inserito nella (1) fornisce:

$$R_a(m) = (1 + \alpha^2) \delta(m) + \alpha \delta(m+1) + \alpha \delta(m-1)$$

e

$$W_a(f) = (1 + \alpha^2) + \alpha e^{+j2\pi f T} + \alpha e^{-j2\pi f T}.$$

Pertanto la densità spettrale di potenza è

$$W_s(f) = T (1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2\pi f T)) \text{rect}(fT).$$

(b) Utilizzando un ricevitore ottimo $h(t) = \frac{1}{T} p(-t)$ si ottiene all'uscita:

$$y(t_k) = a_k + n_k$$

dove $a_k = b_k + \alpha b_{k-1}$ mentre n_k è un rumore gaussiano a media nulla e varianza:

$$\sigma^2 = \int \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \frac{1}{T^2} \int |P(f)|^2 df = \frac{N_0}{2T}.$$

Essendo i simboli b_k indipendenti si può calcolare la probabilità di sbagliare b_k come segue:

$$\begin{aligned} P_e &= P_r\{b_k + \alpha b_{k-1} + n_k < 0 | b_k = +1, b_{k-1} = +1\} \frac{1}{4} + \\ &P_r\{b_k + \alpha b_{k-1} + n_k > 0 | b_k = -1, b_{k-1} = +1\} \frac{1}{4} + \\ &P_r\{b_k + \alpha b_{k-1} + n_k < 0 | b_k = +1, b_{k-1} = -1\} \frac{1}{4} + \\ &P_r\{b_k + \alpha b_{k-1} + n_k > 0 | b_k = -1, b_{k-1} = -1\} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
P_r\{1 + \alpha + n_k < 0\} &= Q\left(\frac{1 + \alpha}{\sigma}\right) \\
P_r\{-1 + \alpha + n_k > 0\} &= Q\left(\frac{1 - \alpha}{\sigma}\right) \\
P_r\{1 - \alpha + n_k < 0\} &= Q\left(\frac{1 - \alpha}{\sigma}\right) \\
P_r\{-1 - \alpha + n_k > 0\} &= Q\left(\frac{1 + \alpha}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

In definitiva, ponendo $E_b = T$, si ha:

$$P_e = \frac{1}{2} \left(Q\left((1 + \alpha) \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) + Q\left((1 - \alpha) \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \right).$$