

COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Prova del 20/2/2008

Tempo a disposizione: 3 ore

1. In un sistema di trasmissione analogico per segnali di banda $B = 10$ kHz e potenza $P_x = 0.5$ V², la banda complessiva a disposizione sul canale è $B_c = 1$ MHz. Si utilizza la modulazione DSB o la modulazione PM con $\phi_\Delta = 1$ rad per modulare i segnali da trasmettere. In entrambi i casi, si determini:
 - (a) il numero totale di segnali trasmissibili sulla banda B_c nell'ipotesi di separare i segnali multiplati con una banda di guardia di $B_g = 5$ kHz;
 - (b) il rapporto segnale-rumore all'ingresso del demodulatore relativo al generico segnale trasmesso, nell'ipotesi che la potenza ricevuta per ciascun segnale modulato sia $P_r = 1$ V² e la densità spettrale di potenza del rumore all'ingresso del demodulatore sia $N_0/2$ con $N_0 = 10^{-6}$ V²/Hz;
 - (c) il rapporto segnale-rumore all'uscita del demodulatore in funzione del rapporto segnale-rumore all'ingresso del demodulatore stesso (con i dettagli analitici del caso).
2. In un sistema di comunicazione digitale in banda base il segnale trasmesso è

$$s(t) = \sum_i p(a_i; t - iT)$$

dove i simboli a_i , binari, indipendenti ed equiprobabili, appartengono all'alfabeto $\{0, 1\}$, mentre gli impulsi $p(0; t)$ e $p(1; t)$ (associati rispettivamente ai simboli $a_i = 0$ e $a_i = 1$) hanno la seguente espressione

$$p(0; t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad p(1; t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq t \leq T/2 \\ -1 & \text{per } T/2 < t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il canale è ideale e introduce solo rumore gaussiano bianco additivo con densità spettrale di potenza $N_0/2$. Il ricevitore è mostrato in Fig. 1. La decisione sul simbolo a_k viene presa secondo la regola

$$\hat{a}_k = \begin{cases} 0 & \text{per } z_0(k) > z_1(k) \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $z_0(k)$ e $z_1(k)$ sono i campioni mostrati in figura.

- (a) Si calcoli l'energia media E_s del segnale utile ricevuto per intervallo di segnalazione.
- (b) Si dimostri che i campioni di rumore all'uscita dei due filtri sono due variabili casuali indipendenti e se ne calcoli la varianza.
- (c) Si calcoli la probabilità d'errore sui simboli a_i in funzione del rapporto E_s/N_0 e la si confronti poi con la probabilità d'errore (sempre calcolata in funzione del rapporto E_s/N_0) di un sistema PAM binario con simboli di canale appartenenti all'alfabeto $\{\pm 1\}$.

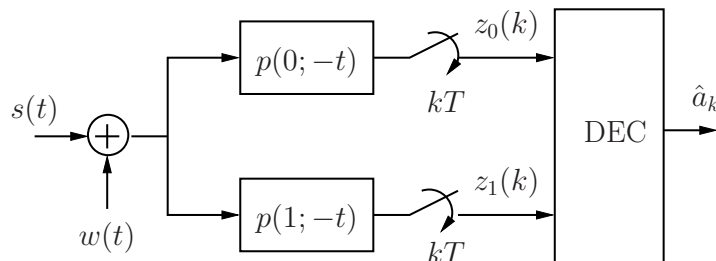


Figura 1:

Risultati e soluzione: <http://www.tlc.unipr.it/people/colavolpe>
oppure
<http://www.tlc.unipr.it/people/serena>

Soluzione:

1.

- (a) La banda occupata dal generico segnale modulato è $B_{DSB} = 2B = 20$ kHz nel caso della modulazione DSB e $B_{PM} = 2(\phi_\Delta + 1)B = 40$ kHz nel caso della modulazione PM. Pertanto, il numero di segnali trasmissibili è

$$N_{DSB} = \left\lfloor \frac{B_c}{B_{DSB} + B_g} \right\rfloor = 40$$

nel caso della modulazione DSB e

$$N_{PM} = \left\lfloor \frac{B_c}{B_{PM} + B_g} \right\rfloor = 22$$

nel caso della modulazione PM

- (b) Il rapporto segnale-rumore all'ingresso del demodulatore è ($S_i = P_r$)

$$\left(\frac{S_i}{N_i} \right)_{DSB} = \frac{P_r}{N_0 B_{DSB}} = 50 \text{ (17 dB)}$$

nel caso della modulazione DSB e

$$\left(\frac{S_i}{N_i} \right)_{PM} = \frac{P_r}{N_0 B_{PM}} = 25 \text{ (14 dB)}$$

nel caso della modulazione PM.

- (c) Omettendo i dettagli teorici sviluppati a lezione, per la modulazione DSB, è

$$\left(\frac{S_u}{N_u} \right)_{DSB} = 2 \left(\frac{S_i}{N_i} \right)_{DSB} = 100 \text{ (20 dB)}$$

mentre per la modulazione PM è

$$\left(\frac{S_u}{N_u} \right)_{PM} = \phi_\Delta^2 P_x \frac{B_{PM}}{B} \left(\frac{S_i}{N_i} \right)_{PM} = 50 \text{ (17 dB)}.$$

2. Gli impulsi associati ai simboli 0 e 1 sono entrambi di durata limitata T . Tali impulsi godono delle seguenti proprietà

$$E_S(a_k = 0) = \int_0^T p^2(0; t) dt = T$$

$$E_S(a_k = 1) = \int_0^T p^2(1; t) dt = T$$

$$p(0; t) \otimes p(1; -t)|_{t=0} = p(1; t) \otimes p(0; -t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} p(0; t) p(1; t) dt = 0.$$

Da tali proprietà deriva che:

- se nel k -esimo intervallo di segnalazione viene trasmesso il simbolo $a_k = 0$ si ha

$$z_0(k) = T + n_0(k)$$

$$z_1(k) = n_1(k)$$

- nel k -esimo intervallo di segnalazione viene trasmesso il simbolo $a_k = 1$ si ha

$$z_0(k) = n_0(k)$$

$$z_1(k) = T + n_1(k)$$

I campioni di rumore $n_0(k)$ e $n_1(k)$ possono essere espressi come

$$n_0(k) = \int w(\tau_1) p(0; \tau_1 - kT) d\tau_1$$

$$n_1(k) = \int w(\tau_2) p(1; \tau_2 - kT) d\tau_2.$$

(a) L'energia media per intervallo di segnalazione è

$$E_S = \frac{1}{2}E_S(a_k = 0) + \frac{1}{2}E_S(a_k = 1) = T.$$

(b) I campioni di rumore sono ovviamente a media nulla e congiuntamente gaussiani. Per dimostrarne l'indipendenza, basta dimostrarne l'ortogonalità:

$$\begin{aligned} E\{n_0(k)n_1(k)\} &= E\left\{\iint w(\tau_1)w(\tau_2)p(0;\tau_1-kT)p(1;\tau_2-kT)d\tau_1d\tau_2\right\} \\ &= \iint E\{w(\tau_1)w(\tau_2)\}p(0;\tau_1-kT)p(1;\tau_2-kT)d\tau_1d\tau_2 \\ &= \frac{N_0}{2}\iint \delta(\tau_1-\tau_2)p(0;\tau_1-kT)p(1;\tau_2-kT)d\tau_1d\tau_2 \\ &= \frac{N_0}{2}\int p(0;\tau_1-kT)p(1;\tau_1-kT)d\tau_1 \\ &= \frac{N_0}{2}\int p(0;\tau)p(1;\tau)d\tau = 0. \end{aligned}$$

Pertanto i campioni sono indipendenti. È inoltre

$$E\{n_0^2(k)\} = E\{n_1^2(k)\} = \frac{N_0}{2}T = \sigma^2.$$

(c) È ovviamente

$$P\{\hat{a}_k \neq a_k\} = \frac{1}{2}P\{\hat{a}_k \neq a_k|a_k = 0\} + \frac{1}{2}P\{\hat{a}_k \neq a_k|a_k = 1\}$$

dove, tenendo conto del fatto che la variabile casuale $n_1(k) - n_0(k)$ è gaussiana a media nulla con varianza pari alla somma delle varianze e cioè $2\sigma^2$,

$$\begin{aligned} P\{\hat{a}_k \neq a_k|a_k = 0\} &= P\{\hat{a}_k = 1|a_k = 0\} = P\{z_1(k) > z_0(k)|a_k = 0\} \\ &= P\{n_1(k) > T + n_0(k)\} = Q\left(\frac{T}{\sqrt{2}\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

analogamente

$$P\{\hat{a}_k \neq a_k|a_k = 1\} = Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right)$$

e quindi

$$P\{\hat{a}_k \neq a_k\} = Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right).$$

Nel caso di una PAM binaria, come è noto dalla teoria è invece

$$P\{\hat{a}_k \neq a_k\} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_S}{N_0}}\right)$$

e cioè nel caso in esame ho una perdita di 3 dB rispetto al caso della PAM binaria.