

## COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

**Prova intermedia del 21/1/2009 - Comunicazioni digitali**

**Tempo a disposizione: 2 ore**

1. Si considerino due sistemi di trasmissione PAM binari con simboli equiprobabili che impiegano un impulso rettangolare di durata  $T/2$  (dove  $T$  è l'intervallo di segnalazione) ed energia  $E_p$ . Il primo dei due sistemi utilizza i simboli  $\{0, 1\}$  mentre il secondo i simboli  $\{\pm 1\}$ . Il canale introduce rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza  $N_0/2$ .
  - (a) Si calcoli la densità spettrale di potenza nei due casi e se ne disegni il grafico.
  - (b) Si dica come è fatto il ricevitore ottimo nei due casi.
  - (c) Si calcoli la probabilità d'errore sul bit in funzione del rapporto  $E_b/N_0$ , dove  $E_b$  è l'energia media per bit e si confrontino i due sistemi da tale punto di vista.
  - (d) Nel caso del sistema che utilizza i simboli  $\{0, 1\}$ , si calcoli la soglia ottima di decisione quando i simboli non sono equiprobabili ma hanno rispettivamente probabilità  $p$  e  $1 - p$ .

**Risultati e soluzione:** <http://www.tlc.unipr.it/people/colavolpe>  
oppure  
<http://www.tlc.unipr.it/people/serena>

**Soluzione:**

1. L'impulso trasmesso è

$$p(t) = \sqrt{\frac{2E_p}{T}} \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P(f) = \sqrt{\frac{TE_p}{2}} \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right).$$

(a) In entrambi i casi la densità spettrale di potenza ha espressione

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2 = \frac{W_a(f)}{2} E_p \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right)$$

dove

$$W_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi m f T}$$

e

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\}.$$

Essendo i simboli indipendenti, è

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\} = \begin{cases} E\{a_k^2\} & m = 0 \\ E\{a_{k+m}\} E\{a_k\} & m \neq 0. \end{cases}$$

Nel caso della trasmissione OOK (cioè quando l'alfabeto è  $\{0, 1\}$ ) è

$$\begin{aligned} E\{a_k^2\} &= \frac{1}{2} \\ E\{a_k\} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e quindi

$$R_a(m) = \frac{1}{4} \delta(m) + \frac{1}{4}$$

e

$$W_a(f) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right).$$

Pertanto la densità spettrale di potenza è

$$W_s(f) = \frac{E_p}{8} \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) + \frac{E_p}{8T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

ed è mostrata in Fig. 1 (nell'ipotesi che sia  $E_p = 1$ ).

Nel caso della trasmissione con simboli  $\{\pm 1\}$  si ha invece

$$\begin{aligned} E\{a_k^2\} &= 1 \\ E\{a_k\} &= 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$R_a(m) = \delta(m)$$

e

$$W_a(f) = 1.$$

Pertanto la densità spettrale di potenza è

$$W_s(f) = \frac{E_p}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right).$$

ed è mostrata in Fig. 2 (sempre nell'ipotesi  $E_p = 1$ ).

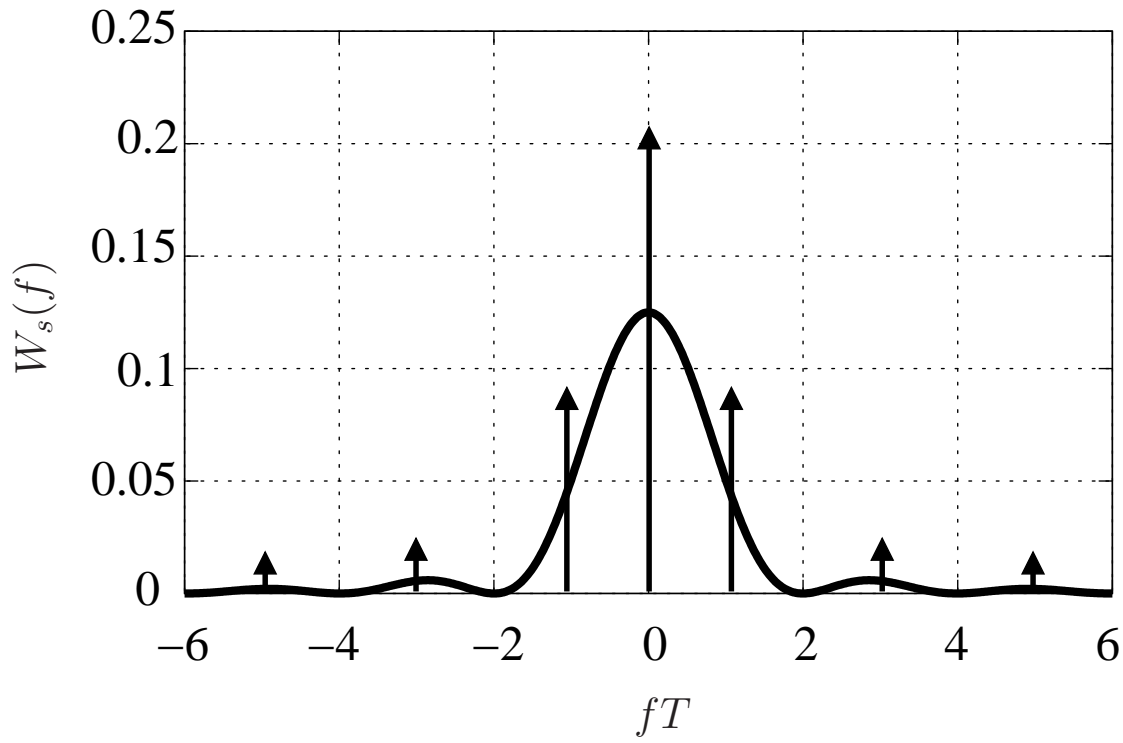


Figura 1:

- (b) In entrambi i casi il primo blocco del ricevitore è un filtro adattato all'impulso  $p(t)$  seguito da un campionario agli istanti  $kT$ . Visto che non c'è sicuramente ISI, il campione all'uscita del filtro adattato è

$$x_k = E_p a_k + n_k$$

con  $n_k \in \mathcal{N}(0, \frac{N_0 E_p}{2})$ . Pertanto, nel caso della OOK il decisore a soglia avrà soglia  $\frac{E_p}{2}$  mentre nel caso dei simboli  $\{\pm 1\}$  la soglia è a zero.

- (c) Omettendo i calcoli perchè svolti a lezione, la probabilità d'errore è

$$P_b = \begin{cases} Q\left(\sqrt{\frac{E_p}{2N_0}}\right) & \text{OOK} \\ Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right) & \text{alfabeto } \{\pm 1\}. \end{cases}$$

Poiché è

$$E_b = \begin{cases} \frac{E_p}{2} & \text{OOK} \\ E_p & \text{alfabeto } \{\pm 1\} \end{cases}$$

si ha

$$P_b = \begin{cases} Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) & \text{OOK} \\ Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) & \text{alfabeto } \{\pm 1\}. \end{cases}$$

Nel caso del sistema utilizzando l'alfabeto  $\{\pm 1\}$  si ha quindi un guadagno di 3 dB.

- (d) Domanda di teoria. Rispetto al caso visto a lezione, in cui l'alfabeto era  $\{\pm 1\}$ , ora l'alfabeto è  $\{0, 1\}$ . Ripetendo lo stesso procedimento si ottiene che la soglia ottima è

$$\lambda = \frac{E_p}{2} + \frac{N_0}{2} \ln \frac{p}{1-p}.$$

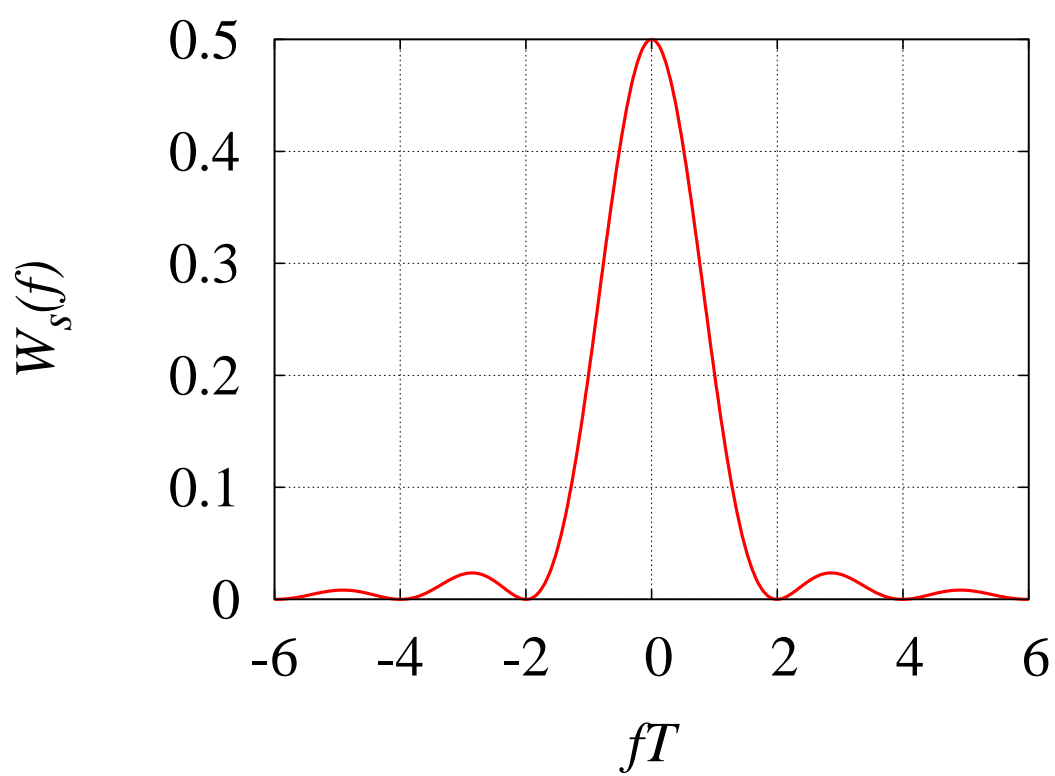


Figura 2: