

COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Prova intermedia del 16/1/2008 (Parte II)

Tempo a disposizione: 2 ore

In un sistema di comunicazione PAM quaternario i simboli $\{a_k\}$ appartengono all'alfabeto $a_k \in \{\pm\alpha, \pm3\}$, con $0 < \alpha < 3$, e sono equiprobabili ed indipendenti. L'impulso trasmesso $p(t)$ è mostrato in Fig. 1. Tale segnale è trasmesso su un canale che introduce rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$.

- a. Si calcoli la densità spettrale di potenza del segnale trasmesso e se ne disegni il grafico.
- b. Si determini la struttura del ricevitore ottimo.
- c. Si calcoli la probabilità d'errore sul simbolo in funzione di α .
- d. Si calcoli la probabilità d'errore sul bit in funzione di α nell'ipotesi di utilizzo di mappa Gray.
- e. Si determini il valore di α che minimizza la probabilità d'errore sul simbolo.

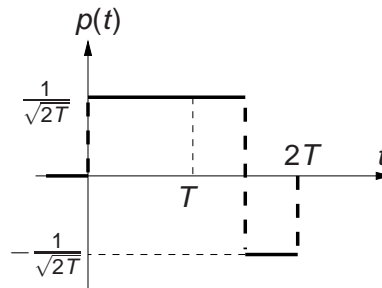


Figura 1:

Risultati e soluzione: <http://www.tlc.unipr.it/people/colavolpe>
oppure
<http://www.tlc.unipr.it/people/serena>

Soluzione:

- a. Come è noto, la densità spettrale di potenza del segnale

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

è

$$W_s(f) = W_a(f) \frac{|P(f)|^2}{T}$$

dove $W_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi f m T}$ e

$$R_a(m) = E\{a_{k+m} a_k\} = \begin{cases} E\{a_k^2\} = \frac{9+\alpha^2}{2} & m = 0 \\ E\{a_{k+m}\} E\{a_k\} = 0 & m \neq 0 \end{cases}.$$

Pertanto $W_a(f) = \frac{9+\alpha^2}{2}$. Per quanto riguarda l'impulso $p(t)$, lo possiamo esprimere come

$$p(t) = q(t) + q(t - T) + q(t - 2T) - q(t - 3T)$$

dove

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2T}} \text{rect} \left[\frac{2}{T} \left(t - \frac{T}{4} \right) \right]$$

la cui trasformata è

$$Q(f) = \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{2}} \text{sinc} \left(\frac{fT}{2} \right) e^{-j\pi f T/2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} P(f) &= Q(f) [1 + e^{-j2\pi f T} + e^{-j4\pi f T} - e^{-j6\pi f T}] \\ &= 2Q(f) \left[e^{-j\pi f T} \left(\frac{e^{j\pi f T} + e^{-j\pi f T}}{2} \right) + j e^{-j4\pi f T} e^{-j\pi f T} \left(\frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j} \right) \right] \\ &= 2Q(f) e^{-j\pi f T} [\cos(\pi f T) + j e^{-j4\pi f T} \sin(\pi f T)] \\ &= 2Q(f) e^{-j\pi f T} [\cos(\pi f T) + \sin(4\pi f T) \sin(\pi f T) + j \cos(4\pi f T) \sin(\pi f T)] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |P(f)|^2 &= 4|Q(f)|^2 [(\cos(\pi f T) + \sin(4\pi f T) \sin(\pi f T))^2 + (\cos(4\pi f T) \sin(\pi f T))^2] \\ &= 4|Q(f)|^2 [1 + \sin(4\pi f T) \sin(2\pi f T)] = 4Q^2(f) A(f). \end{aligned}$$

La densità spettrale di potenza è pertanto

$$W_s(f) = \frac{9+\alpha^2}{2T} 4|Q(f)|^2 A(f) = \frac{9+\alpha^2}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{fT}{2} \right) A(f)$$

il cui grafico è mostrato in Fig. 2 nel caso $\alpha = 1$.

- b. L'impulso $g(t) = p(t) \otimes p(-t)$ è mostrato in Fig. 3. Come si può osservare, è soddisfatta la condizione di assenza di ISI. Il ricevitore ottimo è quindi costituito da un filtro adattato all'impulso $p(t)$, un campionatore agli istanti kT ed un semplice decisore a soglie. Dal momento che $g(0) = 1$, i campioni x_k all'uscita del filtro adattato possono esprimersi come

$$x_k = a_k + n_k$$

con $n_k \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, con $\sigma^2 = N_0/2$. Le soglie di decisione saranno pertanto $\{0, \pm \frac{3+\alpha}{2}\}$.

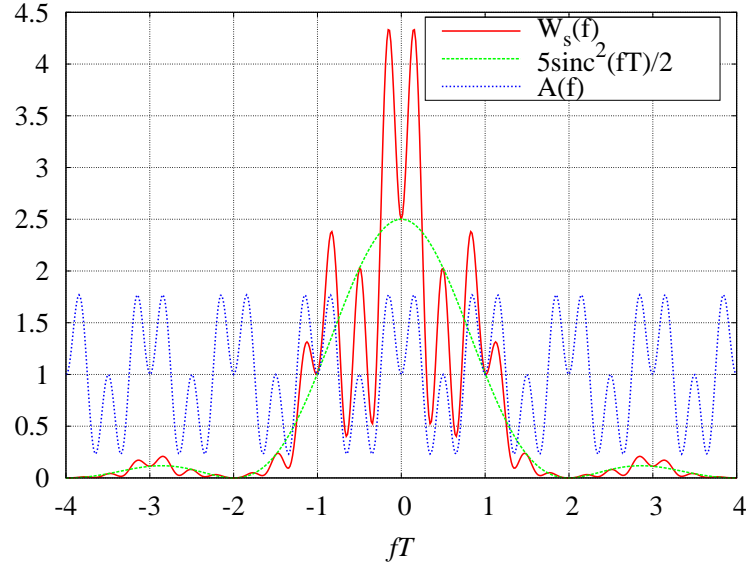


Figura 2:

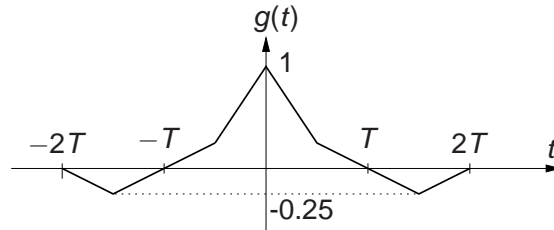


Figura 3:

c. La probabilità d'errore sul simbolo può essere calcolata come

$$P\{\hat{a}_k \neq a_k\} = \frac{1}{4}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 3\} + \frac{1}{4}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = \alpha\} + \frac{1}{4}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -\alpha\} + \frac{1}{4}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -3\}.$$

Per simmetria

$$\begin{aligned} P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 3\} &= P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -3\} \\ P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = \alpha\} &= P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -\alpha\} \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -3\} &= P\{x_k > -\frac{3+\alpha}{2} | a_k = -3\} = P\{-3 + n_k > -\frac{3+\alpha}{2}\} \\ &= P\{n_k > \frac{3-\alpha}{2}\} = Q\left(\frac{3-\alpha}{2\sigma}\right) \\ P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -\alpha\} &= 1 - P\{\hat{a}_k = a_k | a_k = -\alpha\} = 1 - P\left\{-\frac{3+\alpha}{2} \leq x_k < 0\right\} \\ &= 1 - P\left\{-\frac{3+\alpha}{2} \leq -\alpha + n_k < 0\right\} = \end{aligned}$$

$$= 1 - P\left\{-\frac{3-\alpha}{2} \leq n_k < \alpha\right\} = Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{3-\alpha}{2\sigma}\right).$$

Quindi

$$P\{\hat{a}_k \neq a_k\} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{3-\alpha}{2\sigma}\right).$$

d. Adottando la mappa Gray è

$$P_b = \frac{P\{\hat{a}_k \neq a_k\}}{\log_2 M} = \frac{P\{\hat{a}_k \neq a_k\}}{2} = \frac{1}{4}Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{3-\alpha}{2\sigma}\right).$$

e. Poiché è

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

si ha

$$\frac{dP\{\hat{a}_k \neq a_k\}}{d\alpha} = -\frac{1}{2\sigma} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right\} + \frac{1}{2\sigma} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(3-\alpha)^2}{8\sigma^2}\right\}.$$

Uguagliando a zero tale derivata, si ottiene l'equazione

$$\frac{\alpha^2}{2} = \frac{(3-\alpha)^2}{8}$$

o equivalentemente

$$\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$$

le cui radici sono $\alpha = 1$ e $\alpha = -3$. Quindi $\alpha = 1$ è la soluzione cercata.