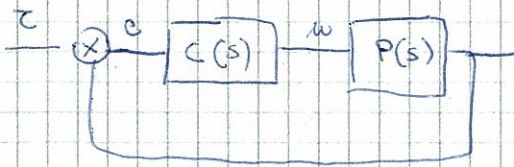


# CONTROLLI DIGITALI.



$P(s)$  : impianto

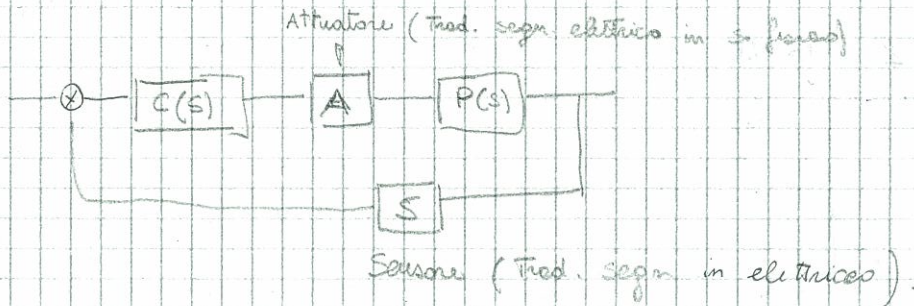
$C(s)$  : controllore

$y$  : uscita variabile di interesse.

$C(s)$  : mi migliora le prestazioni

Errore e Regime  
Velocità e Regime

Passando ad uno schema più reale.

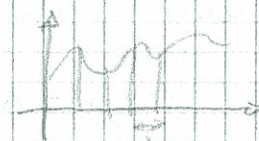
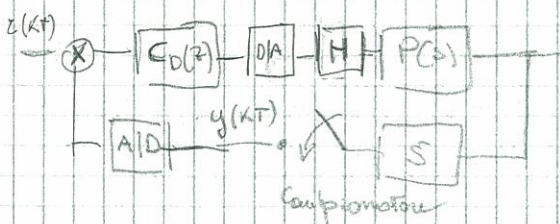


Un regolatore analogico è un circuito elettronico e se vogliamo fare un controllore di ordine  $n$  allora devo aggiungere  $n$  elementi con delle imprecisioni che sommate danno un errore molto alto.

Se dobbiamo cambiare un controllore dobbiamo cambiare tutta la rete elettrica (con una grande spesa).

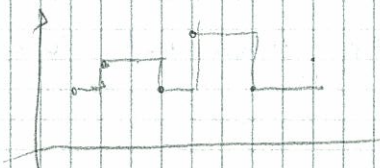
Quindi conviene passare al digitale  $\rightarrow$  computer.

Dobbiamo discretizzare il segnale nel tempo.



tempo di campionamento  
Dato il tempo minore  $\rightarrow$  costo.

H: Hold : Trattiene un dato campionato in continuo.





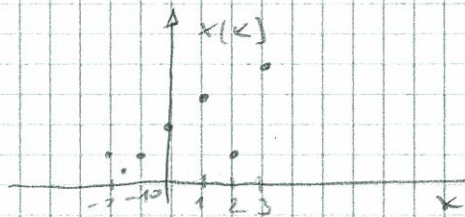
## Alcune Definizioni.

- Un SEGNALE CONTINUO è rappresentato da una funzione  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

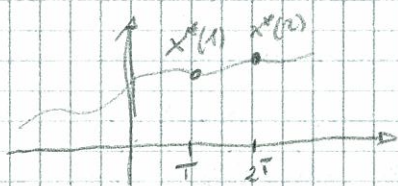


- Un SEGNALE DISCRETO è rappresentato da una successione

$$x(k) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$



- Il CAMPIONAMENTO è un PROCEDIMENTO che associa ad un segnale continuo  $x(t)$  un segnale discreto  $x^*(k)$  con  $x^*(k) = x(kT)$  con  $T$  intervallo di campionamento



$$\text{ES } \begin{aligned} x(t) &= e^{At} \\ x^*(k) &= e^{ATk} \end{aligned}$$

- La delta di Dirac  $\delta(t)$  è una funzione generalizzata che soddisfa questa relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) h(t) dt = h(0)$$

È una funzione generalizzata campionatrice

- Possiamo definire un TRENO di DELTA di Dirac.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Possiamo rappresentare il segnale  $x(t)$  campionato con

$$x^*(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \cdot x(t)$$

• Segnale campionato.



# TRASFORMATA ZETA.

Def. La trasformata zeta è un operatore che associa ad una successione  $x(k)$  una funzione di variabile complessa definita da

$$Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k}.$$

Proprietà: La trasformata zeta è una trasformata monolaterale che dipende solo dei termini  $k$  positivi.

$x(k)$  = serie di stati

$X(z)$  = trasformata zeta di  $x(k)$ .

Def. Una serie di funzioni complesse

$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$  converge SEMPLICEMENTE se

$$\forall \epsilon > 0, \forall z \in G, \exists \bar{k}; \left| \sum_{k=\bar{k}}^{+\infty} f_k(z) \right| < \epsilon. \quad (*)$$

Def. La convergenza si dice UNIFORME in un dominio  $D \subset \mathbb{C}$

$$\text{se } \forall \epsilon > 0, \exists \bar{k}; \left| \sum_{k=\bar{k}}^{+\infty} f_k(z) \right| < \epsilon, \forall z \in D.$$

La convergenza è molto importante perché posso dire che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z) \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} f_k(z).$$

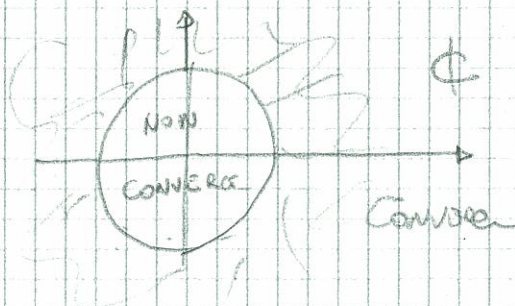
Formula di HADAMARD.

$Z\{x(k)\}$  converge uniformemente sugli insiemi

$\{z: |z| > R, \text{ con } R > r\}$ . Dove

$$r = \limsup_{k \rightarrow +\infty} |f(k)|^{1/k}.$$

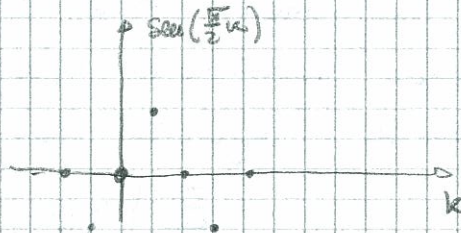
e NON CONVERGE per  $|z| < r$ .





Il  $\limsup_{k \rightarrow +\infty} a(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{i \geq k} \{a(i)\}$ . (è sempre ben definito)

Es.  $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{\pi}{2} k \right)$ .



$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{\pi}{2} k \right)$  non esiste.

$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{\pi}{2} k \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ \sup_{i \geq k} \left( \sin \frac{\pi}{2} i \right) \right] = 1$

\* Serie geometrica

$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k, a \in \mathbb{C}$

$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k = 1 + a \sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} = 1 + a \sum_{j=0}^{\infty} a^j$

$S = 1 + aS \Rightarrow S = \frac{1}{1-a}$

Trasformata zeta notevole:

• FUNZIONE COSTANTE. = GRADINO. (la trasf. zeta è monolaterale)

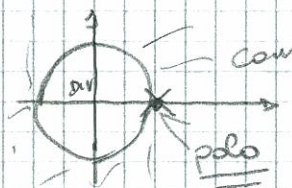
$x(k) = 1$

$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{z} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$

Cerchiamo il raggio di convergenza

$\rho = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{1} = 1$

Polo  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{1} = 1$



: sempre tra zona di convergenza e non convergenza

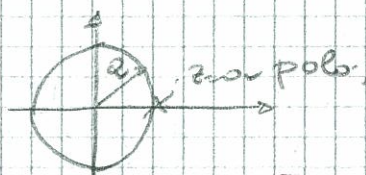


## • SEQUENZA ESPONENZIALE.

$$x(k) = a^k$$

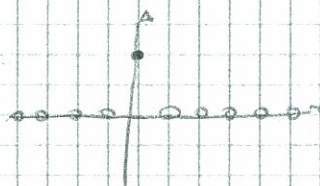
$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

$$\begin{aligned} r &= \limsup_{k \rightarrow +\infty} (a^k)^{1/k} = \\ &= \limsup_{k \rightarrow +\infty} a = a \end{aligned}$$



## • DELTA DI DIRAC DISCRETA

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k) z^{-k} = 1$$

## PROPRIETÀ della TRASFORMATA Z.

### 1. LINEARITÀ.

$$\mathcal{Z}\{a x(k) + b y(k)\} = a \mathcal{Z}\{x(k)\} + b \mathcal{Z}\{y(k)\}.$$

D.M.

$$\mathcal{Z}\{a x(k) + b y(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} (a x(k) + b y(k)) z^{-k}$$

$$= a \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} + b \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) z^{-k}$$

$$\downarrow \\ = a X(z) + b Y(z) \quad \text{c.v.d.}$$

Esempio

$$\mathcal{Z}\{1 + 3 \cdot 2^k\} = \mathcal{Z}\{1\} + 3 \mathcal{Z}\{2^k\} = \frac{z}{z-1} + 3 \frac{z}{z-2} = \frac{z(z-2) + 3z(z-1)}{(z-1)(z-2)}$$

$$= \frac{4z^2 - 5z}{(z-1)(z-2)}$$



## • TRASFORMATA ZETA di SENO e COSENO.

Grazie alle proprietà della linearità e delle formule di Eulero posso calcolare la trasformata di seno e coseno.

$$\text{Sen } wk = \frac{e^{jwk} - e^{-jwk}}{j2}$$

$$\boxed{Z\{\text{sen } wk\}} = Z\left\{\frac{e^{jwk} - e^{-jwk}}{j2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{j2} \left[ Z\{e^{jwk}\} - Z\{e^{-jwk}\} \right]$$

$$= \frac{1}{j2} \left[ \frac{z}{z - e^{jw}} - \frac{z}{z - e^{-jw}} \right] = \frac{1}{2j} \frac{z(e^{jw} - e^{-jw})}{(z - e^{jw})(z - e^{-jw})}$$

$$= \boxed{\frac{Z \text{ Sen } w}{z^2 - z2 \cos w + 1}}$$

$$\boxed{Z\{\cos wk\}} = \frac{z^2 - z \cos w}{z^2 - z2 \cos w + 1}$$

## 2. TRASLAZIONE IN AVANTI.

Se  $x(k)$  è tale che  $x(k) = 0$  per  $k < 0$ ,

$$Z\{x(k-m)\} = z^{-m} Z\{x(k)\}.$$

DIM

$$Z\{x(k-m)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-m) z^{-k} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) z^{-(i+m)}$$

$$= z^{-m} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) z^{-i}$$

Siccome per  $i < 0$   $x(i) = 0$   
allora

$$= z^{-m} \sum_{i=0}^{\infty} x(i) z^{-i}.$$



ES

$$Z \{ z^{k-3} \} = z^{-3} Z \{ z^k \} = z^{-3} \frac{z}{z-2} = \frac{1}{z^2(z-2)}.$$

### 3. TRASLAZIONE ALL'INDIETRO.

$$Z \{ x(k+m) \} = z^m Z \{ x(k) \} = \sum_{i=0}^{m-1} z^{m-i} x(i).$$

DIM

$$Z \{ x(k+m) \} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+m) z^{-k} \quad i = k+m.$$

$$k = i - m.$$

$$i = k + m$$

$$= \sum_{i=m}^{\infty} x(i) z^{-i+m} + \sum_{i=0}^{m-1} x(i) z^{-i+m} = \sum_{i=0}^{m-1} x(i) z^{-i+m}$$

$$= z^m \sum_{i=0}^{\infty} x(i) z^{-i} = \sum_{i=0}^{m-1} x(i) z^{m-i}.$$

Oss.

$$Z \{ x(k-1) \} = (z^{-1}) Z \{ x(k) \} \quad \leftarrow \text{RITARDO}$$

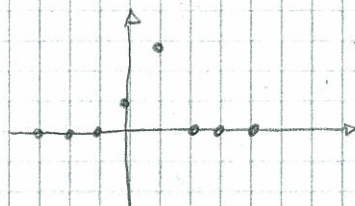
$$Z \{ x(k+1) \} = (z) Z \{ x(k) \} - z x(0) \quad \leftarrow \text{ANTICIPO}$$

ES

$$Z \{ z^{k+2} \} = z^2 Z \{ z^k \} = z^2 x(0) - z x(1) = z^2 \frac{z}{z-2} - 4z^2 - 8z.$$

ES

$$x(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases}$$



$$x(k) = \delta(k) + 3\delta(k-1).$$

$$X(z) = Z \{ \delta(k) \} + 3 Z \{ \delta(k-1) \} = 1 + 3z^{-1}.$$



#### 4. VALORE INIZIALE.

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} z \{x(k)\}$$

DIM

$$z \{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} \rightarrow \lim_{z \rightarrow +\infty} z \{x(k)\} \Rightarrow$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} = \lim_{k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} = \lim_{z \rightarrow +\infty} x(0) = x(0)$$

#### 5. TRASFORMATA $z^k x(k)$ .

$$z \{z^k x(k)\} = z \{x(k)\} \left(\frac{z}{z}\right) = z \{x(k)\} \Big|_{z=\frac{z}{z}}$$

DIM

$$\begin{aligned} z \{z^k x(k)\} &= \left( \sum_{k=0}^{+\infty} z^k x(k) \left(\frac{z}{z}\right)^{-k} \right) = z \{x(k)\} \left(\frac{z}{z}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} z^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \left(\frac{z}{z}\right)^{-k} \end{aligned}$$

ES.

$$x(k) = 2^k 3^k$$

$$z \{3^k\} = \frac{z}{z-3}$$

$$X(z) = \frac{z/z}{\frac{z}{2} - 3} = \frac{z}{z-6}$$

#### CONVOLUZIONE DISCRETA.

Dati due segnali discreti  $x(k)$  e  $y(k)$  la loro convoluzione discreta si indica con  $(x * y)(k)$  e data da

$$(x * y)(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i) y(i).$$

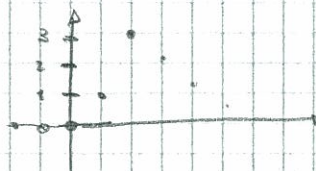
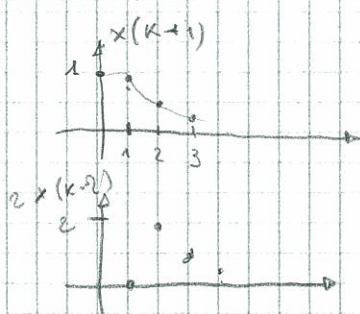
ES

$$x(k) = 0,5^k, \quad x(k) = 0 \text{ se } k < 0$$

$$y(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \leq 0 \\ 1 & \text{se } k = 1 \\ 2 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{se } k \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x * y)(k) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i) y(i) \\ &= x(k-1) y(1) + x(k-2) y(2) \\ &= x(k-1) + 2x(k-2). \end{aligned}$$





## 6. PR. SULLA CONVOLUZIONE.

Se  $x(k)$  e  $y(k)$  :  $x(k)=0$  e  $y(k)=0$  ,  $k < 0$

Allora 
$$Z\{x * y\} = Z\{x(k)\} \cdot Z\{y(k)\}.$$

DIM

$$\begin{aligned} Z\{(x * y)(k)\} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i) y(i) \right) z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i) y(i) z^{-k+i-i} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i) z^{-(k-i)} y(i) z^{-i} = \end{aligned}$$

$$l = k - i$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-i}^{+\infty} x(l) z^{-l} y(i) z^{-i}$$

Siccome  $x(l)$  e  $y(i)$  per  $l < 0$  e  $i < 0$  sono uguali a zero  
allora posso scrivere

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} x(l) z^{-l} y(i) z^{-i} = \underbrace{\sum_{l=0}^{+\infty} x(l) z^{-l}}_{Z\{x(k)\}} \sum_{i=0}^{+\infty} y(i) z^{-i} = \\ &Z\{x(k)\} \cdot Z\{y(k)\}. \end{aligned}$$

## FUNZIONI ANALITICHE.

→ funzioni oloforme

Una funzione complessa

$f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  si dice oloforma

se è definito il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \triangleq \frac{df}{dz} \Big|_{z=z_0}.$$



I monomi del tipo  $z^n$  sono olomorfi

$$\frac{dz^n}{dz} = n z^{n-1}$$

$$e^z \text{ è olomorfo, } \rightarrow \frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z$$

Se  $f(z)$  e  $g(z)$  sono olomorfe

$f(z) + g(z)$  e  $f(z)g(z)$  sono olomorfe

$$\frac{f(z)}{g(z)} \text{ è olomorfo } \forall z \text{ t.c. } g(z) \neq 0$$

## 7. OLOMORFISMO

La trasformata Zeta  $z \{x(k)\}$  è olomorfa all'interno dell'insieme in cui converge.

## 8. DERIVATA della trasformata Z.

$$-z \frac{d}{dz} z \{x(k)\} = z \{k x(k)\}$$

Dim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z \{x(k)\} &= \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dz} x(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) (-k z^{-k-1}) = -z^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k x(k) z^{-k} = -z^{-1} z \{k x(k)\} \end{aligned}$$

ES

$$x(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \\ k & \text{se } k \geq 0 \end{cases}$$

$$k \cdot 1(x) \quad z \{k \cdot 1(x)\} = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = -z \frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

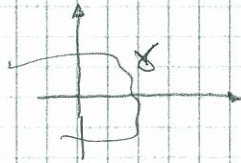
$$z \{k^2\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \quad \underline{\text{olim}}$$



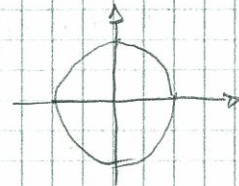
# ANTI TRASFORMATA $\mathbb{Z}$ .

Alcuni cenni ai risultati di funzioni analitiche.

Def Una curva  $\gamma$  sul piano complesso è data da  
 $\gamma(\tau) : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{C}$ .

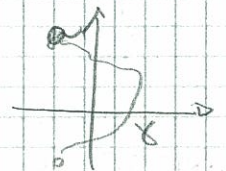


ES:  $\gamma(\tau) = e^{j\tau}$ ,  $\tau \in [0, 2\pi]$   
 $= \cos \tau + j \sin \tau$



Def Integrale di una funzione complessa lungo una curva  $\gamma$  è definito come,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{\infty} f(\gamma(\tau)) \frac{d\gamma}{d\tau} d\tau$$



con  $z = \gamma(\tau)$   $dz = \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} d\tau$

Es:  $f(z) = z^m$ ,  $\gamma(\tau) = e^{j\tau}$   $\tau \in [0, 2\pi]$ .

$$\int_{\gamma} z^m dz = \int_0^{2\pi} e^{j\tau m} j e^{j\tau} d\tau =$$

$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\tau} = j e^{j\tau}}$$

$$= \int_0^{2\pi} j e^{j\tau(m+1)} d\tau = \frac{j}{m+1} \left[ \frac{e^{j\tau(m+1)}}{j} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{m+1} \left[ \cos((m+1)\tau) + j \sin((m+1)\tau) \right]_0^{2\pi} = 0$$

Se  $m = -1$

$$\int_{\gamma} z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} j d\tau = j 2\pi$$



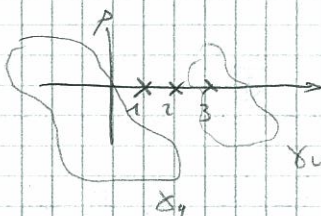
## TEOREMA di CAUCHY.

Dato una funzione  $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e una curva chiusa  $\gamma$ , tale che  $f(z)$  è olomorfa nella regione di PIANO COMPLESSO da essa racchiusa, allora

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

ES

$$f(z) = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$



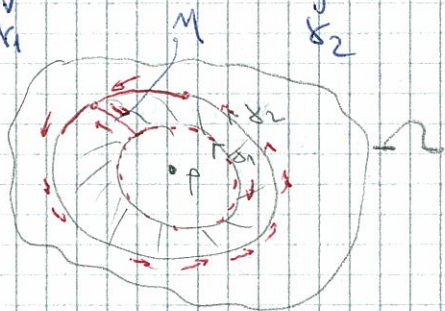
$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = 0$$

$$\oint_{\gamma_2} f(z) dz \neq 0 \quad (\text{Non ci è da nessuna inf. sulle curve che comprendono i poli}).$$

## PROPRIETÀ

Se  $\Omega$  è un intorno di  $p$  e se  $f(z)$  è olomorfa in  $\Omega \setminus \{p\}$ , allora, se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono due curve chiuse che circondano una volta  $p$  in senso ANTICLOCKWISE,

$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz.$$



DIM

Per il teorema di Cauchy

$$\oint_{\gamma_2} f(z) dz - \oint_{\gamma_1} f(z) dz = 0.$$

(Percorriamo in senso orario)



Se consideriamo le curve

$$\Gamma = \gamma_2 + \eta - \eta - \gamma_1$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\eta} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$$

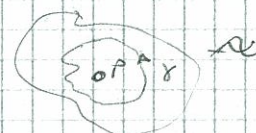
$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

Def: RESIDUO.

Dato  $p \in \mathbb{C}$ , un suo intorno  $\mathcal{A}$  e una funzione  $f(z)$  OLOMORFA su  $\mathcal{A} \setminus \{p\}$  il residuo di  $f(z)$  in  $p$  è dato da

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \triangleq \text{Res}(f, p).$$

Dove  $\gamma$  è una curva che circonda  $p$  1 volta in senso antiorario



Def 1 POLO

Se  $f(z)$  è una funzione olomorfa su  $\mathcal{A} \setminus \{p\}$ , dove  $\mathcal{A}$  è un intorno di  $p$ . Si dice che  $f(z)$  presenta una SINGOLARITA' POLARE o POLO di ordine  $n$  in  $p$  se

$$f(z) = g(z) \cdot \frac{1}{(z-p)^n}, \quad g(z) \text{ è olomorfa su } \mathcal{A}$$

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3(z-2)^2}$$



**FORMULA PER IL CALCOLO dei RESIDUI.**

Se  $f(z)$  ha un polo di ordine  $n$  in  $p$ , Allora

$$\text{Res}(f, p) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z-p)^n] \Big|_{z=p}.$$



DIM  $f(z)(z-p)^n$  è olomorfa su  $\mathbb{C}$ .

Le funt. olomorfe possono essere sviluppate come serie di Taylor

$$f(z)(z-p)^n = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dz^i} [f(z)(z-p)^n] \Big|_{z=p} (z-p)^i.$$

Sviluppo in serie di Taylor.

$$\text{Res}(f, p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$$

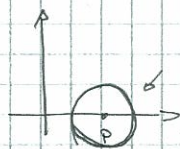
$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dz^i} [f(z)(z-p)^n] \Big|_{z=p} (z-p)^{i-n}$$

$$\text{Res}(f, p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dz^i} [f(z)(z-p)^n] \Big|_{z=p} (z-p)^{i-n} dz$$

Si come la serie converge uniformemente

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dz^i} [f(z)(z-p)^n] \Big|_{z=p} \oint_{\gamma} (z-p)^{i-n} dz.$$

$$\oint_{\gamma} z^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } m = -1 \\ 0 & \text{se } m \neq -1 \end{cases}$$



curve  $\gamma$  più semplice è il cerchio (tratto in senso orario)

$$\gamma(\omega) = p + e^{j\omega}, \quad \omega \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_{\gamma} (z-p)^{i-n} dz = \oint_0^{2\pi} (p + e^{j\omega} - p)^{i-n} j e^{j\omega} d\omega = \begin{cases} j 2\pi & \text{se } i-n = -1 \\ 0 & \text{se } i-n \neq -1 \end{cases}$$

$$\gamma = p + e^{j\omega}, \quad \omega \in [0, 2\pi]$$

$$dz = \frac{d\gamma}{d\omega} d\omega = j e^{j\omega} d\omega.$$

è il Termine

L'unico Termine diverso da zero della serie  $\gamma$  in cui  $i = n-1$

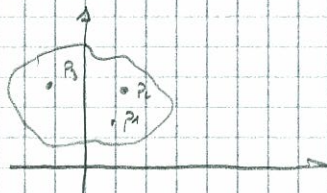
$$\text{Res}(f, p) = \frac{1}{j 2\pi} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z-p)^n] \Big|_{z=p}.$$



## TEOREMA dei RESIDUI.

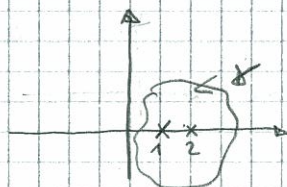
Se  $f(z)$  è una funzione complessa e  $\gamma$  è una curva che circonda una volta in senso antiorario una regione del piano complesso in cui  $f(z)$  è olomorfa tranne un insieme di punti finito  $p_1, p_2, \dots, p_l$ . Allora

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^l \text{Res}(f, p_i).$$



Es.

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$



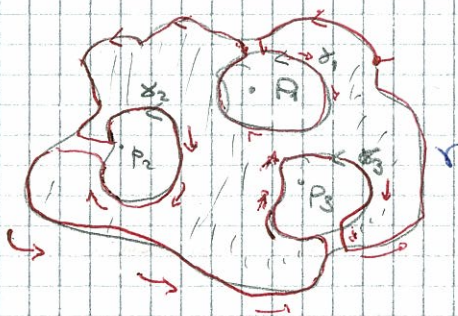
$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, 1) - \text{Res}(f, 2)] = 2\pi i.$$

$$\text{Res}(f, 1) = f(z)(z-1) \Big|_{z=1} = \frac{z(z-1)}{(z-1)(z-2)} \Big|_{z=1} = -1$$

$$\text{Res}(f, 2) = \frac{z(z-2)}{(z-1)(z-2)} \Big|_{z=2} = 2.$$

DIM

$$l=3$$



$$\Gamma = \gamma - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= 0 \quad (\text{Per Cauchy}) \Rightarrow \oint_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_3} f(z) dz = 0 \\ &\Rightarrow \oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz \end{aligned}$$



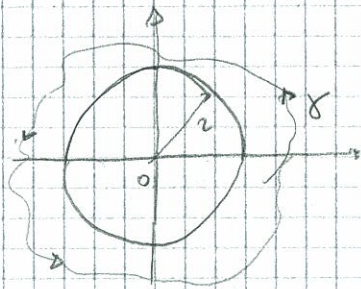
$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^L \text{Res}(f, p_i).$$

$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, p_1)$$

## INTEGRALE DI INVERSIONE.

$$x(k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z \{x(k)\} z^{k-1} dz.$$

dove  $\gamma$  è un cammino chiuso che circonda 1 volta l'origine in senso antiorario e appartiene alla regione di convergenza.



$$\stackrel{\text{DM}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[ \sum_{i=0}^{+\infty} x(i) z^{-i} \right] z^{k-1} dz.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{+\infty} x(i) \oint_{\gamma} z^{k-1-i} dz = \frac{1}{2\pi i} x(k) \oint_{\gamma} dz$$

$$\oint_{\gamma} z^{k-i-1} dz = \begin{cases} 0 & \text{se } k-i-1 \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } k-i-1 = -1 \\ \Rightarrow k=i \end{cases}$$



$$x(k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z \{x(k)\} z^{k-1} dz. \quad \text{o.v.d.}$$

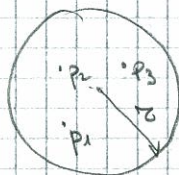
▲ Applicando il Teorema dei residui  $\rightarrow$  ANTITRASFORMATA

Applicando il Teorema dei residui possiamo scrivere

$$x(k) = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum_{i=1}^L \text{Res}(z \{x(k)\} z^{k-1}, p_i).$$

$$x(k) = \sum_{i=1}^L \text{Res}(z \{x(k)\} z^{k-1}, p_i).$$





$$\frac{E_s}{X(z)} = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

$$X(k) = \sum_{i=1}^2 \text{Res} (X(z) z^{k-1}, p_i) =$$

$$= \frac{z \cdot z^{k-1} (z-1)}{(z-1)(z-2)} \Big|_{z=1} + \frac{z \cdot z^{k-1} (z-2)}{(z-1)(z-2)} \Big|_{z=2}$$

$$= -1 + 2^k = \boxed{2^k - 1}$$

Proprietà dei residui.

$$f(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

Se  $m > n+1$

allora  $\sum \text{Res}(f, p_i) = 0$

Se  $m \leq n+1$

allora  $\sum \text{Res}(f, p_i) = -\frac{b_m}{a_n}$

Esercizi.

①  $X(z) = \frac{2z+3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$

$$X(k) = \sum_{i=1}^3 \text{Res} (X(z) z^{k-1}, p_i)$$

$$X(z) \cdot z^{k-1} = \frac{(2z+3) z^{k-1}}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

Se  $k=0$  i poli sono 0, 1, 2, 3.

Se  $k > 0$  i poli sono 1, 2, 3.

$$X(0) = \sum_{i=1}^3 \text{Res} \left( \frac{2z+3}{(z-1)(z-2)(z-3)z}, p_i \right) = 0$$

per le più spesso visto.

Se  $k > 0$

$$\text{Res} \left\{ X(z) z^{k-1}, 1 \right\} = \frac{(2z+3) z^{k-1} (z-2)}{(z-1)(z-2)(z-3)} \Big|_{z=1} = \frac{5}{2} 1^{k-1} = \frac{5}{2}$$



$$\text{Res} \left\{ x(z) z^{k-1}, 2 \right\} = \frac{(2z+3) z^{k-1} (\cancel{z-2})}{(z-1) (\cancel{z-2}) (z-3)} \Big|_{z=2} = -7 \cdot 2^{k-1}$$

$$\text{Res} \left\{ x(z) z^{k-1}, 3 \right\} = \frac{(2z+3) z^{k-1} (\cancel{z-3})}{(z-1) (z-2) (\cancel{z-3})} \Big|_{z=3} = \frac{9}{2} 3^{k-1}$$

$$x(k) = \begin{cases} \frac{5}{2} - 7 \cdot 2^{k-1} + \frac{9}{2} 3^{k-1} & \text{se } k > 0 \\ 0 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

## Esercizio 2.

$$x(z) = \frac{z+3}{(z-1)^2(z-2)}$$

$$\text{Res} \left( \frac{(z+3) z^{k-1}}{(z-1)^2(z-2)}, p_i \right)$$

$$\text{Se } k=0 \Rightarrow x(0) = \sum_{i=1}^3 \text{Res} \left( \frac{(z+3)}{z(z-1)^2(z-2)}, p_i \right) = 0$$

$$\text{Se } k > 0 \quad x(k) = \text{Res} \left( x(z) z^{k-1}, p_1 \right) + \text{Res} \left( x(z) z^{k-1}, 2 \right)$$

$$\text{Res} (f(z), p) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ f(z) (z-p)^m \right] \Big|_{z=p}$$

$$\begin{aligned} \text{Res} \left( x(z) z^{k-1}, 1 \right) &= \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{dz} \left[ \frac{(z+3) z^{k-1}}{(z-1)^2(z-2)} (z-1)^2 \right] \Big|_{z=1} \\ &= \frac{\left( z^{k-1} + (z+3)(k-1) z^{k-2} \right) (z-2) - z+3 z^{k-1}}{(z-2)^2} \Big|_{z=1} = -4k-1 \end{aligned}$$

$$\text{Res} \left( x(z) z^{k-1}, 2 \right) = \frac{(z+3) z^{k-1} (\cancel{z-2})}{(z-1)^2 (\cancel{z-2})} \Big|_{z=2} = 5 \cdot 2^{k-1}$$

$$x(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k=0 \\ -4k-1 + 5 \cdot 2^{k-1} & \text{se } k > 0 \end{cases}$$







Assumiamo che tutti i poli siano di grado pari a 1.

$$\textcircled{*} = \sum_{i=1}^l z \{x(k)\} z^{k-1} (z-p_i) \Big|_{z=p_i}$$

$$|\textcircled{*}| = \sum_{i=1}^l \underbrace{|z \{x(k)\} z^{k-1} (z-p_i)|}_{\text{per } z=p_i}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\textcircled{*}| = 0 \quad \text{perché } |z|^{k-1} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

Es.

$$X(z) = \frac{(z-3)}{(z-0,5)(z-1)}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = x(z)(z-1) \Big|_{z=1} = \frac{(z-3)(z-1)}{(z-0,5)(z-1)} \Big|_{z=1} = -\frac{2}{0,5} = -4$$

Sviluppo in fattori semplici.

$$\text{ES} \quad f(z) = \frac{(z-1)(z-2)}{(z+1)^2(z+2)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{C}{(z+2)}$$

$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{(z-p_1)(z-p_2) \dots (z-p_n)}$$

Assumiamo  $n > m$  (strettamente propria).

$$X(z) = \frac{C_1}{(z-p_1)} + \frac{C_2}{(z-p_2)} + \dots + \frac{C_n}{(z-p_n)}$$

$$\text{Con } C_i = X(z)(z-p_i) \Big|_{z=p_i}$$

• Scomposizione con poli di ordine n.

$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{(z-p_1)^{r_1} (z-p_2)^{r_2} \dots (z-p_n)^{r_n}}$$

$$X(z) = \frac{C_{1,1}}{z-p_1} + \frac{C_{1,2}}{(z-p_1)^2} + \dots + \frac{C_{1,r_1}}{(z-p_1)^{r_1}} + \frac{C_{2,1}}{z-p_2} + \frac{C_{2,2}}{(z-p_2)^2} + \dots$$

$$\frac{C_{n,1}}{(z-p_n)^1} + \dots + \frac{C_{n,r_n}}{(z-p_n)^{r_n}}$$



$$\underset{\substack{\text{ordine} \\ \text{polo}}}{\text{CO}} = \underset{\substack{\text{ordine} \\ \text{polo}}}{\text{CO}} = \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[ f(z) (z-p_i)^j \right] \Big|_{z=p_i}$$

Es.  $z^{-1} \left\{ \frac{1}{(z-a)^n} \right\} =$

$$z \{ e^k \} = \frac{z}{z-a}$$

$$z \{ x(k-m) \} = z^{-m} z \{ x(k) \}$$

$$z \{ a^{k-1} 1(k-1) \} = z^{-1} \frac{z}{z-a} = \frac{1}{z-a}$$

$$\boxed{z^{-1} \left\{ \frac{1}{(z-a)} \right\} = a^{(k-1)} 1(k-1)}$$

$$z^{-1} \left\{ \frac{1}{(z-a)^2} \right\}$$

$$z \{ a^k x(k) \} = z \{ x(k) \} \Big|_{\frac{z}{a}}$$

$$z \{ k \} = \frac{z}{(z-1)^2} \rightarrow z \{ a^k k \} = \frac{z}{(z-1)^2} \Big|_{\frac{z}{a}} = \frac{z/a}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

Applico il Teorema della traslazione in avanti per  $n=1$ .

$$z \{ a^{(k-1)} (k-1) 1(k-1) \} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$z^{-1} \left\{ \frac{1}{(z-a)^2} \right\} = a^{k-2} (k-1) 1(k-1)$$

$$z^{-1} \left\{ \frac{1}{(z-a)^n} \right\} = (k-1)(k-2) \dots (k-n+1) a^{k-n} 1(k-1)$$



ES.

$$X(z) = \frac{2z+3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

$$C_1 = X(z) (z-1) \Big|_{z=1} = \frac{5}{2}$$

$$C_2 = \frac{(2z+3)(z-2)}{(z-1)(z-3)(z-2)} \Big|_{z=2} = -7$$

$$C_3 = +\frac{9}{2}$$

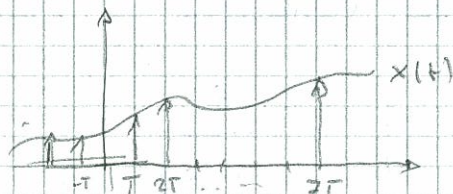
$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$\begin{aligned} z^{-1} \{X(z)\} &= \frac{5}{2} z^{-1} \left\{ \frac{1}{z-1} \right\} - 7 z^{-1} \left\{ \frac{1}{z-2} \right\} + \frac{9}{2} z^{-1} \left\{ \frac{1}{z-3} \right\} \\ &= \frac{5}{2} \underbrace{1^{(k-1)}}_{1} 1^{(k-1)} - 7 \cdot 2^{k-1} 1^{(k-1)} + \frac{9}{2} 3^{k-1} 1^{(k-1)} \end{aligned}$$

Segnale Campionato.

Dato  $x(t)$

$$x^*(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

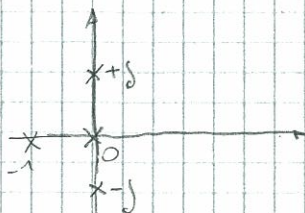


TEOREMA della TRASFORMATA di Laplace di un segnale campionato.

$$\left[ \begin{aligned} \text{Se } x^*(t) &= x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \\ \mathcal{L}[x^*(t)] &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(s - \frac{j2\pi}{T} k\right) \end{aligned} \right] \quad \text{dove } T \text{ è il periodo di campionamento}$$

ES

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)(s^2+1)}$$

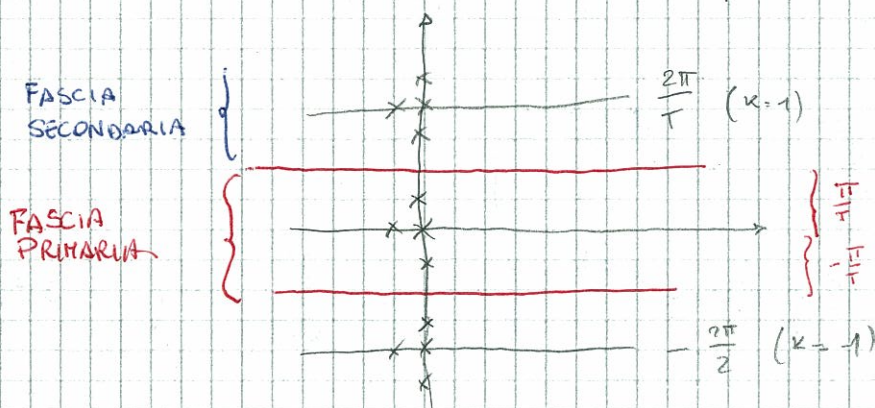


$$X(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(s - \frac{j2\pi}{T} k\right)$$



$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(s - \frac{j2\pi}{T} k\right) \left(s - \frac{2\pi j k}{T} + 1\right) \left(s - \frac{2\pi j k}{T} + j\right) \left(s - \frac{2\pi j k}{T} - j\right)}$$

$$p = \left\{ 0 + \frac{2\pi j}{T} k, -1 + \frac{2\pi j k}{T}, \pm j + \frac{j2\pi}{T} k \right\}, k \in \mathbb{Z}$$



Nella fascia primaria sono contenuti i poli del segnale non campionato.  
La configurazione dei poli diventa molto + complessa se si superano le fasce di ripetizione.

DIM.

$$x^*(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Se  $p(t)$  è un segnale periodico di periodo  $T$  allora possiamo scrivere  $p(t)$  in Serie di Fourier

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j \frac{2\pi}{T} t k}$$

$$\text{con } a_k = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} t k} dt$$

Nel caso in cui  $p(t)$  è un treno di delta di periodo  $T$ , allora

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T \delta(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} t k} dt = \frac{1}{T} \text{ quindi}$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j \frac{2\pi}{T} t k}$$

Per questo possiamo scrivere

$$x^*(t) = x(t) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j \frac{2\pi}{T} t k}$$



$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j \frac{2\pi k}{T} t}$$

Ricordando che

$$\mathcal{L} \{ x(t) e^{at} \} = X(s+a)$$

Dim

$$\mathcal{L} \{ x(t) e^{at} \} = \int_0^{+\infty} x(t) e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{(a-s)t} dt = X(s-a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ x^*(t) \} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j \frac{2\pi k}{T} t} \right\} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} \left\{ x(t) e^{j \frac{2\pi k}{T} t} \right\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X \left( s - j \frac{2\pi k}{T} \right) \end{aligned}$$

c.v.d.

### Trasformata z e Trasformata di Laplace

Il segnale campionato si può così descrivere

$$x^*(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \quad \rightarrow \text{La Place}$$

$$x^*(k) = x(kT) \quad \rightarrow \text{Zeta}$$

PROPRITÀ: Relazioni tra la trasf. z e la trasf. di Laplace per un segnale campionato.

$$\mathcal{L} \{ x^*(t) \} = \mathcal{Z} \{ x(kT) \} \Big|_{z=e^{sT}}$$

Dim

$$\mathcal{L} \{ x^*(t) \} = \int_0^{+\infty} x^*(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \delta(t-kT) \right] e^{-st} dt$$

x conv. della serie  $\rightarrow$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x(kT) \delta(t-kT) e^{-st} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) e^{-s kT}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) (e^{sT})^{-k} = \mathcal{Z} \{ x(kT) \} \Big|_{z=e^{sT}}$$



$Z = e^{sT}$  è una relazione molto importante  
in particolare  $x$  piano trasf.  $Z$  è piano delle trasf. di Laplace

Esempio.

$$x(t) = e^{at} \rightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$x^*(t) = x(kT) = e^{aTk} = (e^{aT})^k$$

$$Z\{x^*(k)\} = \frac{Z}{Z - e^{aT}}$$

Da queste proprietà discende la nuova notazione per il segnale campionato -

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{kaT} \delta(t - kT)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x^*(t)\} &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(s - \frac{j2\pi k}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s - j\frac{2\pi}{T}k - a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x^*(t)\} &= Z\{x^*(k)\} \Big|_{Z=e^{sT}} \\ &= \frac{e^{sT}}{e^{sT} - e^{aT}} \end{aligned}$$

TRASFORMATA di FOURIER.

Dato un segnale continuo  $x(t)$ , allora

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

Usiamo  $\omega$  al posto di  $2\pi f$  perché  $\overset{\text{cont}}{v}$  diretta corrisponde  
con la trasf. di Laplace



PROPRIETÀ: Relazione tra la Trasf. di Fourier e la Trasf. di Laplace

Se  $x(t) \neq 0$ ,  $t \leq 0$  allora

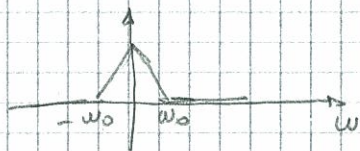
$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \Big|_{s=j\omega}$$

Dim

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-\underset{\substack{\uparrow \\ s}}{j\omega} t} dt = \mathcal{L}\{x(t)\} \Big|_{s=j\omega}$$

Def: Un segnale  $x(t)$  è un segnale PASSA-BASSO di Banda  $\omega_0$

se  $X(\omega) = 0$ ,  $|\omega| > \omega_0$ .



Teorema del CAMPIONAMENTO.

Un segnale  $x(t)$ , passa-basso di banda  $\omega_0$ , può essere ricostruito dall'istantanea se è soddisfatta la relazione:

$$\omega_0 < \frac{\pi}{T}$$

Chiedere che  $\omega_0 < \frac{\pi}{T} \Rightarrow T < \frac{\pi}{\omega_0} \Rightarrow \frac{1}{T} > \frac{\omega_0}{\pi}$

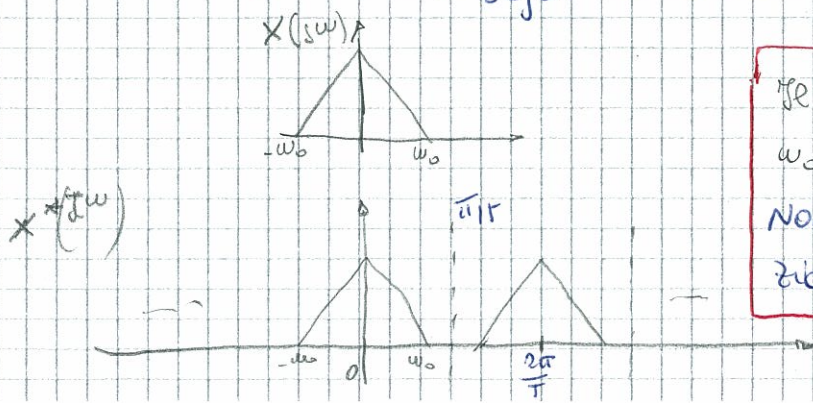
Ovvero la freq. minima con cui deve essere presi i campioni al fine di ricostruire il segnale

frequenza di Nyquist.

Dim

$$\mathcal{L}\{x^*(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = \mathcal{L}\{x^*(t)\} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(j\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

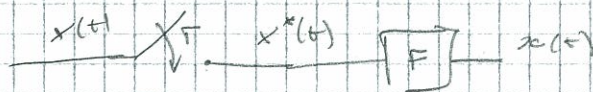


Se fatto di aver imposto  $\omega_0 < \frac{\pi}{T}$  garantisce che NON vi siano sovrapposizioni tra le copie dello spettro del segnale



Il segnale di partenza si può ricostruire con il filtro

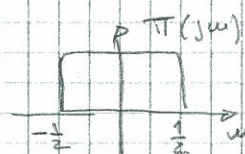
$$F(j\omega) = \begin{cases} T, & \text{se } |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & \text{se } |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$



FILTRO RICOSTRUTTORE.

$$F(j\omega) = \begin{cases} T, & \text{se } |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & \text{se } |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

$$\Pi(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\Pi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{j\frac{1}{2}t} - e^{-j\frac{1}{2}t}}{j\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \frac{t}{2}}{t/2} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sinc} \left( \frac{t}{2} \right)$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{2} X\left(\frac{j\omega}{2}\right)$$

$$F(j\omega) = T \Pi\left(\frac{j\omega}{2\pi/T}\right) = T \Pi\left(\frac{j\omega T}{2\pi}\right)$$

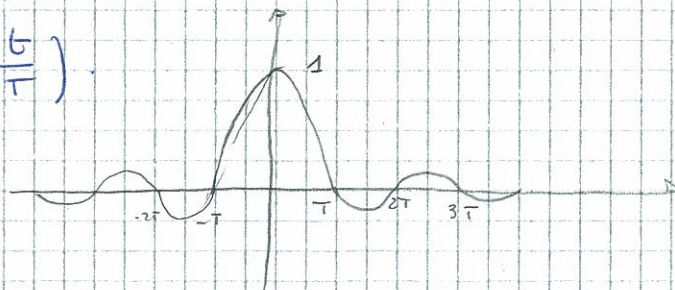
$$\frac{\omega}{\frac{2\pi}{T}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ T \Pi\left(\frac{j\omega T}{2\pi}\right) \right\} = \cancel{\frac{T}{2\pi}} \frac{2\pi}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2} \frac{2\pi}{T}\right) = \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

Il filtro ricostruttore ideale ha la risposta all'impulso

$$p(t) = \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

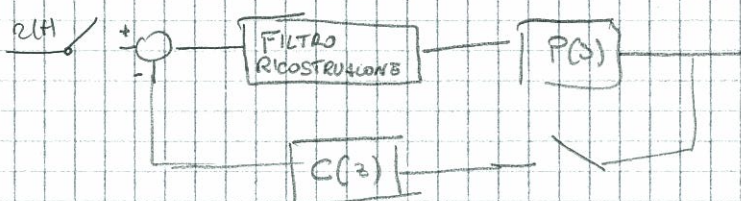
$$p(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi \frac{t}{T}}$$





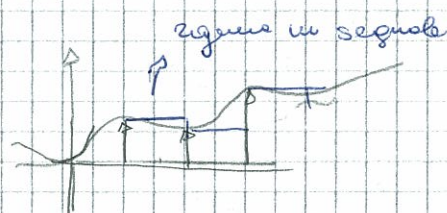
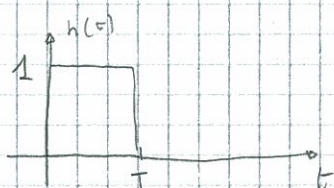
Questo filtro è un filtro non realizzabile perché non è causale.

Se dovessimo costruire un sistema di comunicazione allora potremmo introdurre un ritardo e quindi avere un segnale causale. Questo non può avvenire in un sistema di controllo perché anche un piccolo ritardo introdotto causa un ~~notevole~~ deterioramento del segnale. Questo perché il sistema di controllo è ad anello chiuso.



**FILTRO di Hold.**

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

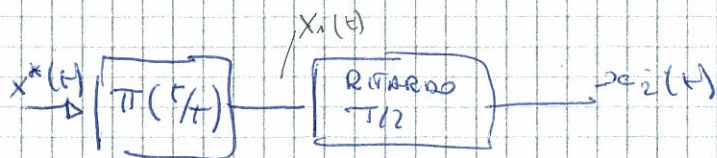
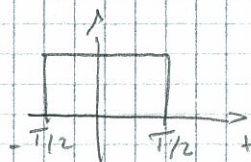


$$x_R(t) = x^*(t) * h(t) \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t - kT) x(kT)$$

Facciamo la Trasf. di Fourier.

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$H\left(\frac{f}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } f \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



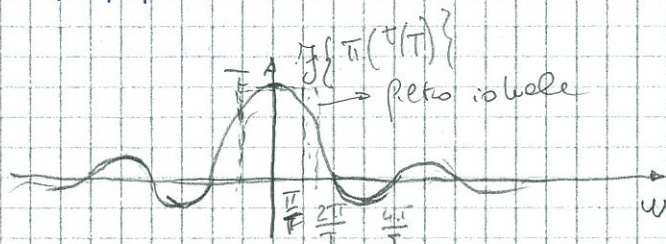
Ha un RITARDO INTRINSECO di  $\frac{T}{2}$ .



Il ritardo serve per rendere il filtro non causale.

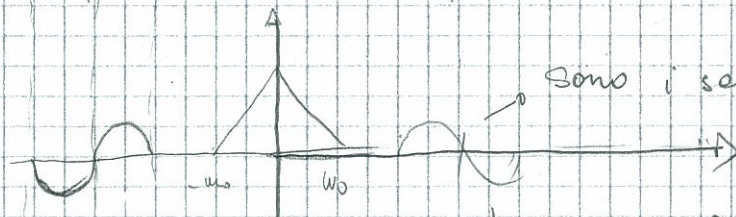
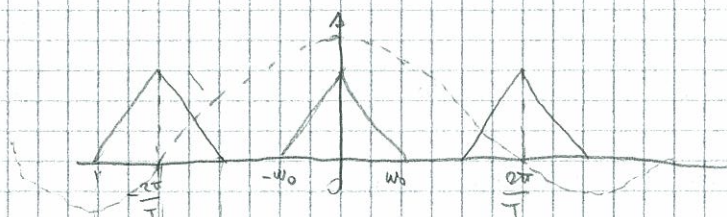
$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\pi(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega t} dt = \left[ \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} \\ &= \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\left\{\pi\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right).$$



? Il filtro di hold è una approssimazione del filtro di hold ideale.

$$X_1(j\omega) = X^*(j\omega) T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right).$$



Sono i salti bruschi.

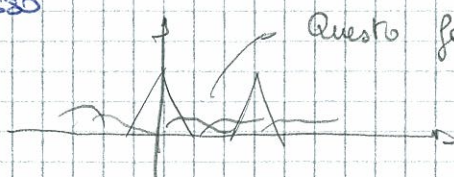
↓ componenti frequenziali non presenti nello spettro originale

Questo fenomeno si chiama FOLDING.

Il grande problema dell'hold è il ritardo di  $T/2$ .

\* FENOMENO delle Aliasing.

I segnali reali hanno una coda e non sono fase a basso



Questo fa sì che vi sia una sovrapposizione fra i segnali



Per evitare l'errore di aliasing si utilizza un filtro anti-aliasing, che ha una banda passante  $\frac{\pi}{T}$ , in modo tale da togliere tutte le code del segnale che causano rumore.

## SISTEMI DISCRETI.



Def Un sistema discreto è dato da un operatore  $L$  che associa un segnale discreto  $y(k)$  ad ogni segnale di ingresso discreto  $u(k)$ .

$$y(k) = L[u(k)].$$

Es 1)  $y(k) = \sum_{i=-\infty}^k u(i) \rightarrow$  Integratore discreto

2)  $y(k) = u(k) - u(k-1)$

3)  $y(k) = u^2(k)$

4)  $y(k) = k u(k)$

I sistemi che noi usiamo sono LINEARI e a TEMPO INVARIANTE.

Def: Un sistema discreto  $L$  è lineare se

$$L[aw_1(k) + bw_2(k)] = aL[u_1(k)] + bL[u_2(k)].$$

Gli esempi 1, 2, 4 sono sistemi lineari.

Def: Un sistema discreto  $L$  è a TEMPO INVARIANTE se

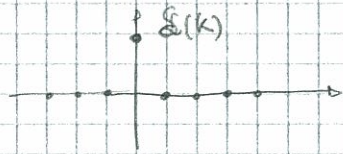
$$y(k) = L[u(k)] \Rightarrow y(k-m) = L[u(k-m)].$$

$$\forall m \in \mathbb{Z}.$$

Es 1, 2, 3 sono  $\forall$  Tempo invarianti.



Def: La RISPOSTA all'IMPULSO di un sistema discreto  $L$  è data da  $L[\delta(k)] \triangleq h(k)$ .



$$\delta(0) = 1 \quad \delta(k) = 0 \text{ per } k \neq 0$$

PROPRIETA': uscita di un sistema discreto - lineare - Tempo invariante.

Dato un sistema lineare e tempo invariante rappresentato da un operatore  $L$ , per cui

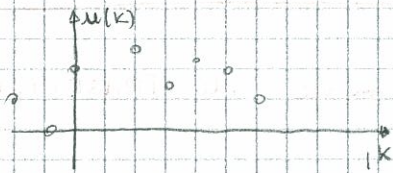
$$y(k) = L[u(k)], \text{ abbiamo che}$$

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i) h(k-i) = (u * h)(k),$$

dove  $h(k)$  è la ~~rappresentazione~~ <sup>risposta</sup> all'impulso del sistema.

DIM

$$u(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(k-i) u(i)$$



$$y(k) = L[u(k)] = L\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(k-i) u(i)\right]$$

Sfruttando la linearità di  $L$   $\rightarrow$  
$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} L[\delta(k-i)] u(i) =$$

scambio  $L$  con la sommatoria 
$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(k-i) u(i).$$

perché  $\rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} L[\delta(k)] &= h(k) \\ L[\delta(k-i)] &= h(k-i) \end{aligned} \right\} \text{ sfruttando la Tempo invariante}$$

Es. 1 
$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^k u(i)$$

$$L[\delta(k)] = \sum_{i=-\infty}^k \delta(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \\ 1 & \text{se } k \geq 0 \end{cases}$$



Esempio 2

$$y(k) = u(k) - u(k-1)$$

$$h(k) = \mathcal{L}[\delta(k)] = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ -1 & \text{se } k=1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

~ La Trasformata Z.

$$\mathcal{Z}\{(a * b)(k)\} = \mathcal{Z}\{a(k)\} \cdot \mathcal{Z}\{b(k)\}.$$

Se  $a(k)$  e  $b(k) = 0$ ,  $\forall k < 0$ .

↗ utilizzando queste proprietà.

Se il segnale di ingresso  $u(k)$  è uguale a zero per ogni  $k < 0$  e la risposta all'impulso di un sistema discreto  $h(k) = \mathcal{L}[\delta(k)]$  ha la proprietà che  $h(k) = 0, \forall k < 0$

Allora 
$$\mathcal{Z}\{\mathcal{L}[u(k)]\} = \mathcal{Z}\{u(k)\} \cdot \mathcal{Z}\{h(k)\}$$

$\mathcal{Z}\{h(k)\}$  è definita funzione di TRASFERIMENTO discreto



## Equazioni alle differenze autonome.

$$\begin{cases} x(k+m) = a_0 x(k) + a_1 x(k+1) + a_2 x(k+2) + \dots + a_{m-1} x(k+m-1) \\ x(0) = x_0 ; \quad x(1) = x_1 ; \quad \dots ; \quad x(m-1) = x_{m-1} \end{cases}$$

Sistemi discreti derivanti da componenti di sistemi continui  
A ogni sistema continuo corrisponde un sistema discreto.

Es (sistema bancario)

Le uscite di un conto corrente in banca

$$\begin{cases} x(k+1) = \underbrace{(1+e)}_{\text{tasso di interesse}} \underbrace{x(k)}_{\text{capitale al mese } k} \\ x(0) = C \end{cases}$$

• metodo risolutivo computazionale

$$x(0) = C \Rightarrow x(1) = (1+e)C \Rightarrow x(2) = (1+e)^2 C$$

• metodo risolutivo utilizzando la trasformata Zeta.

### METODO RISOLUTIVO delle EQUAZIONI alle DIFFERENZE

1. Fare la trasformata Zeta dell'equazione usando le proprietà:

$$Z \{ x(k+m) \} = z^m Z \{ x(k) \} - \sum_{i=0}^{m-1} x(i) z^{m-i}$$

2. Risolviamo l'equazione algebrica trovando  $x(z)$

$$3. \quad x(k) = z^{-1} \{ x(z) \}$$

Es

$$\begin{cases} x(k+1) = (1+e) x(k) \\ x(0) = C \end{cases}$$

$$z X(z) - z X(0) = (1+e) X(z)$$

$$X(z) (z - 1 - e) = zC$$

$$X(z) = \frac{Cz}{z - 1 - e}$$

$$x(k) = z^{-1} \{ x(z) \} = C(1+e)^k$$

↑  
metodo dei residui



Es. Eq. di Fibonacci.

$$\begin{cases} x(k+2) = x(k) + x(k+1) \\ x(0) = 1, \quad x(1) = 1 \end{cases}$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 2, \quad x(3) = 3, \quad x(4) = 5.$$

$$X(z)z^2 - z^2x(0) - zx(1) = X(z) + zX(z) - zx(0)$$

$$X(z)[z^2 - z - 1] = z^2$$

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$

$$\text{Poli sono } p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$X(z) = \frac{z^2}{\left(z - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(z - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}$$

$$x(k) = \sum \text{Res} \frac{z^2 z^{k-1}}{\left(z - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(z - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}$$

$$= \left. \frac{z^{k+1}}{\left(z - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)} \right|_{z = \frac{1-\sqrt{5}}{2}} + \left. \frac{z^{k+1}}{\left(z - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)} \right|_{z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \right]$$



## Eq. alle differenze non autonome

Aggiungo al sistema un ingresso

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 y(k) &= a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_m y(k-m) + \\ &\quad b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) \\ y(-1) &= 0, \quad y(-2) = 0, \quad y(-m) = 0 \end{aligned} \right.$$



Questo sistema mi descrive un controller automatico.  
Questa equazione alle differenze definisce un sistema DISCRETO, che associa ad  $u(k)$ , con  $u(k) = 0$  per  $k < 0$  l'uscita  $y(k)$ ; Soluzione dell'equazione  
$$y(k) = H[u(k)]$$

Questo sistema è lineare e Tempo invariante.

### PROPRIETÀ

La funzione di trasferimento associata al sistema  $H$  è data da

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}$$

Abbiamo una funzione razionale.

DM Sfruttiamo la proprietà

$$z \{ y(k-m) \} = z^{-m} z \{ y(k) \}, \quad \text{se } y(k) = 0 \text{ per } k < 0$$

$$a_0 Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_m z^{-m} Y(z) + b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z)$$

$$Y(z) = U(z) \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}$$



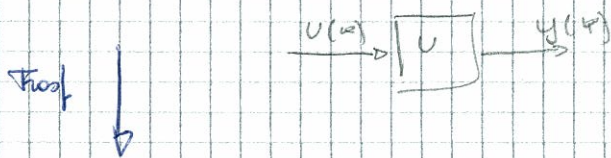
$$H(z) = z \left\{ \delta(x) \right\} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{z_0 + z_1 z^{-1} + \dots + z_m z^{-m}} \quad \text{C.Vol}$$

**Esempio** (... Conto in banca)

$$\begin{cases} x(k) = (1+a) x(k-1) + u(k) \\ x(-1) = 0 \end{cases}$$

$x(k)$  = soldi nel conto

$u(k)$  = ingresso



$$X(z) = (1+a) z^{-1} X(z) + U(z)$$

$$z X(z) = (1+a) X(z) + z U(z)$$

$$X(z) = U(z) \frac{z}{z - (1+a)}$$

→ FUNZIONE di TRASFERIMENTO del sistema  $H(z)$

$$h(k) = z^{-1} \{ H(z) \} = (1+a)^k$$

**Es.**

$$G(z) = \frac{z}{(z-0,2)(z+0,3)}$$

→ Trovare la risposta all'impulso e l'equazione alle d.f. associata

$$g(k) = z^{-1} [G(z)] = \sum \text{Res} \frac{z z^{k-1}}{(z-0,2)(z+0,3)}$$

$$= \frac{z^k}{(z-0,2)} \Big|_{z=0,3} + \frac{z^k}{(z+0,3)} \Big|_{z=-0,3} = \frac{1}{2} [0,2^k - (-0,3)^k]$$

$$y(z) = G(z) U(z) = \frac{z}{(z-0,2)(z+0,3)} u(z)$$

$$y(z) [(z-0,2)(z+0,3)] = z U(z)$$



$$z^{-2} y(z) = [z^2 + 0,1z + 0,06] = z U(z) z^{-2}$$

$$y(z) [1 + 0,1z^{-1} - 0,06z^{-2}] = u(z) z^{-1}$$

$$y(k) + 0,1y(k-1) - 0,06y(k-2) = u(k-1)$$

eq. alle  
differenze

Implementazione delle  
eq. di Trasformata

Eq. alle differenze con autonome con condizioni iniziali diverse da zero

$$\begin{cases} y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_m y(k-m) + \\ \quad + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) \\ y(-1) = y_1, \quad y(-2) = y_2, \quad \dots, \quad y(-m) = y_m \\ u(-1) = u_1, \quad u(-2) = u_2, \quad \dots, \quad u(-m) = u_m \end{cases}$$

Per risolvere queste equazioni sfruttiamo le seguenti PROPRIETÀ

$$z \{ x(k-m) \} = z^{-m} z \{ x(k) \} + \sum_{i=0}^{m-1} z^{-i} x(i-m)$$

(ci è già termine  $x(k) \neq 0$  per  $k < 0$   
e quindi annullano i contributi)

$$\underline{\text{DIM}} \quad z \{ x(k-m) \} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-m) z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} x(k-m) z^{-k} + \sum_{k=m}^{+\infty} x(k-m) z^{-k+m-m}$$

$$l = k-m \quad \left( \sum_{k=0}^{m-1} x(k-m) z^{-k} + \left( \sum_{l=0}^{+\infty} x(l) z^{-l} \right) z^{-m} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} x(k-m) z^{-k} + z^{-m} z \{ x(k) \}$$

c.v.d.



$$\sum_{i=0}^m a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^m b_i u(k-i).$$

Chiamiamo l'eq. differenziale

$$Z\{y(k-i)\} = \left[ \sum_{l=0}^{i-1} z^{-l} y(l-i) + z^{-i} Z\{y(k)\} \right].$$

$$\sum_{i=0}^m a_i \left[ \underbrace{z^{-i} Y(z)}_{\text{Condizioni iniziali su } y} + \underbrace{\sum_{l=0}^{i-1} z^{-l} y(l-i)}_{\text{Condizioni iniziali su } y} \right] = \sum_{i=0}^m b_i \left[ \underbrace{z^{-i} U(z)}_{\text{Condizioni iniziali su } u} + \underbrace{\sum_{l=0}^{i-1} z^{-l} u(l-i)}_{\text{Condizioni iniziali su } u} \right].$$

Separiamo i termini con le condizioni iniziali.

$$\left( \sum_{i=0}^m a_i z^{-i} \right) Y(z) = \left( \sum_{i=0}^m b_i z^{-i} \right) U(z) - \sum_{i=0}^m a_i \sum_{l=0}^{i-1} z^{-l} y(l-i) + \sum_{i=0}^m b_i \sum_{l=0}^{i-1} z^{-l} u(l-i).$$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}}_{\text{Evoluzione forzata}} U(z) + \underbrace{\frac{-\sum_{i=0}^m a_i \sum_{l=0}^{i-1} z^{-l} y(l-i) + \sum_{i=0}^m b_i \sum_{l=0}^{i-1} z^{-l} u(l-i)}{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA}}.$$

**Esempio**

$$\begin{cases} y(k) = y(k-1) - 0,24 y(k-2) + u(k) \\ y(-2) = 0, \quad y(-1) = 1 \end{cases}$$

$$Y(z) = z^{-1} Y(z) + y(-1) - 0,24 [z^{-2} Y(z) + y(-2) + z^{-1} y(-1)] + U(z).$$

$$Y(z) = z^{-1} Y(z) + 1 - 0,24 (z^{-2} Y(z) + z^{-1}) + U(z).$$

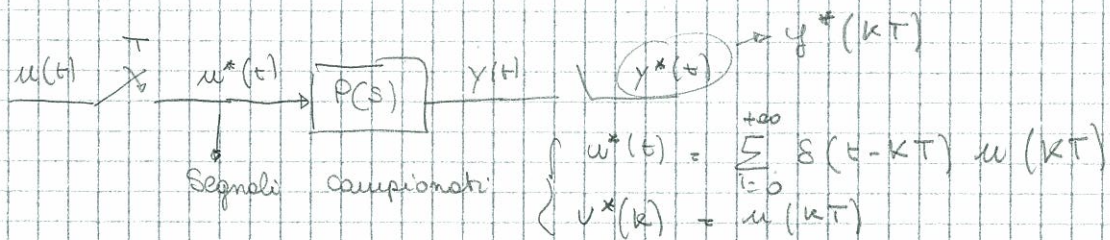
$$z^2 Y(z) = z Y(z) + z^2 - 0,24 (Y(z) + z) + z^2 U(z)$$

$$Y(z) [z^2 - z + 0,24] = z^2 - 0,24 z + z^2 U(z)$$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{z^2}{z^2 - z + 0,24}}_{\text{ev. forzata}} U(z) + \underbrace{\frac{z^2 - 0,24 z}{z^2 - z + 0,24}}_{\text{ev. libera}}.$$



## CAMPIONAMENTO DEI SISTEMI CONTINUI.



Vogliamo trovare un sistema equivalente discreto che dato in ingresso  $u^*(kT)$  ottenga  $y^*(kT)$ .



Def. L'equivalente discreto del sistema continuo  $P(s)$  è quel sistema discreto  $p^*$  che mette in relazione i segnali  $u^*(kT)$  e  $y^*(kT)$ , ovvero

$$y^*(kT) = p^* [u^*(k)].$$

L'equivalente discreto è un sistema lineare e Tempo invariante

### PROPRIETÀ

La funzione di Trasferimento che caratterizza l'equivalente discreto di un sistema continuo  $P(s)$ , sarà

$$P(z) = Z \{ p(kT) \}, \quad \text{dove } p(t) = \mathcal{L}^{-1} [P(s)].$$

Dim

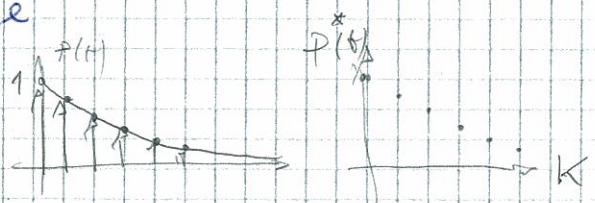
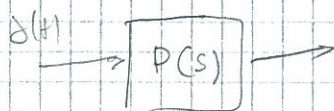
$$u(k) = \delta(k) \rightarrow u^*(t) = \delta(t)$$

$$y(t) = p(t) = \mathcal{L}^{-1} [P(s)].$$

Campioniamo  $y^*(kT) = p(kT).$

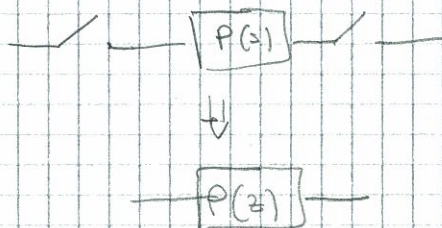
$$P(z) = Z [p(kT)] \quad \text{c.v.d.}$$

Es  $P(s) = \frac{1}{s+2} \rightarrow p(t) = e^{-2t}$





Questo sistema



$$P(z) = Z \{ p(kT) \} = Z \{ e^{-\alpha kT} \} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$$

In generale

$$P(z) = Z \left\{ \mathcal{L}^{-1} [P(s)] \Big|_{t=kT} \right\}$$

Con altra notazione

$$P(z) = Z [P(s)]$$

ES. Nel nostro esempio

$$Z \left\{ \frac{1}{s+\alpha} \right\} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$$

Si procede a arrivare alle trasf. zete. (Eq. Discrete)

$$1) P(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} p(t) \rightarrow P(z) = Z \{ p(kT) \}$$

$$2) P(s) \xrightarrow{\text{TABELLE}} P(z)$$

3) FORMULA di TRASFORMAZIONE

ES.

$$P(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

$$1) p(t) = \mathcal{L}^{-1} [P(s)] = t e^{-\alpha t}$$

$$p^*(k) = kT e^{-\alpha kT}$$

$$Z \{ k e^{-\alpha kT} \} = \frac{\alpha z}{(z - e^{-\alpha T})^2}$$

$$Z \{ k e^{-\alpha kT} \} = \frac{e^{-\alpha T} z}{(z - e^{-\alpha T})^2}$$

$$P(z) = Z \{ kT e^{-\alpha kT} \} = \frac{e^{-\alpha T} z T}{(z - e^{-\alpha T})^2}$$



$$2) \quad \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{(s+a)^2} \right\} = \frac{e^{-aT} z T}{(z - e^{-aT})^2}$$

c'è nella Tabella

### 3) FORMULA di TRASFORMAZIONE.

Se  $P(s)$  è una funzione razionale strettamente propria allora

$$P(z) = \sum_{\text{poli di } P(s)} \text{Res} \left\{ P(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right\}$$

... Continua esempio.

$$P(z) = \sum_{\text{poli di } P(s)} \text{Res} \left\{ \frac{1}{(s+a)^2} \frac{z}{z - e^{sT}} \right\}$$

1 polo in  $-a$

$$P(z) = \text{Res} \left\{ \frac{1}{(s+a)^2} \frac{z}{z - e^{sT}} \right\} \Big|_{s=-a}$$

$$= \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{(s+a)^2} \frac{z}{z - e^{sT}} \right) \cdot \frac{(s+a)^2}{(s+a)^2} \Big|_{s=-a}$$

$$= z \frac{e^{sT}}{(z - e^{sT})^2} \Big|_{s=-a} = \frac{z T e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$$

### Esercizio

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right)$$

(con metodo 2).

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = \frac{z}{z-1} \quad \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} = \frac{z}{z - e^{-2T}}$$

$$P(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-2T}} \right]$$

con metodo 3.

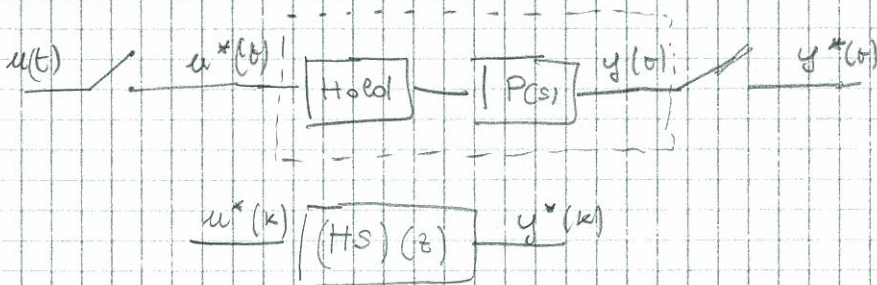
$$P(z) = \sum_{\text{poli}} \text{Res} \left[ P(s) \cdot \frac{z}{z - e^{sT}} \right]$$



$$P(z) = \left. \frac{1}{(s+a)} \cdot \frac{z}{z-e^{-asT}} \right|_{s=0} + \left. \frac{1}{s} \cdot \frac{z}{z-e^{-asT}} \right|_{s=\infty}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{1}{a} \cdot \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

Sistema Campionato con Filtro di Hold.



PROPRIETÀ:

Se  $H(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$ , allora

$$Z \{ H(s) P(s) \} = (1-z^{-1}) Z \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\}.$$

DIT

$$Z \{ H(s) P(s) \} = Z \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} P(s) \right\} = Z \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} P(s) \right] \right\}_{t=KT}$$

Chiamiamo  $\mathcal{L} \{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{P(s)}{s} \right] \}$ , Allora

$$Z \left\{ \left[ e(t) - e(t-T) \right] \right\}_{t=KT}$$

↑  
Per la regola  
del segnale ritardato.

$$Z \{ e(KT) - e((K-1)T) \} = (1-z^{-1}) Z \{ e(KT) \} = (1-z^{-1}) Z \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\}$$

$$Z \{ e((K-1)T) \} = z^{-1} Z \{ e(KT) \}$$

ES

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$Z \{ H(s) P(s) \} = (1-z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \right\}.$$



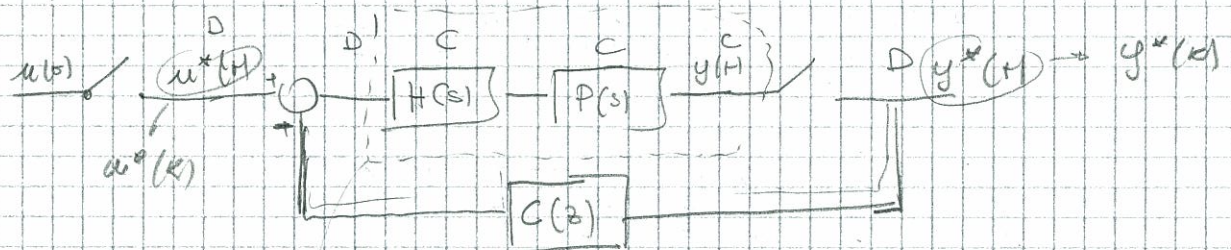
$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \right\} = \sum_{\text{poles}} \text{Residui} \left\{ \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \frac{z}{z - e^{-sT}} \right\}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \frac{z}{z - e^{-sT}} \Big|_{s=0} + \frac{1}{s(s+2)} \frac{z}{z - e^{-sT}} \Big|_{s=-1} + \frac{1}{s(s+1)} \frac{z}{z - e^{-sT}} \Big|_{s=-2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{-2T}}$$

$$\mathcal{Z} \{ H(s) P(s) \} = \frac{1}{2} - \frac{z-1}{z - e^{-T}} + \frac{1}{2} \frac{z-1}{z - e^{-2T}}$$

Applichiamo l'equivalente discreto ad un semplice sistema a retroazione.



Presenza di segnali continui e discreti o disturbo

La sostituiamo con un sistema equivalente discreto



A utenze operon nel discreto

Sistema parametricamente discreto (facilmente trovare la fun. di trasferimento)

$$L(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\}$$

$$T(z) = \frac{L(z)}{1 + C(z)L(z)}$$



Es

$$P(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$C(z) = \frac{z}{z-0,5}$$

$$T(z) = ?$$

$$L(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{(s+2)} \cdot \frac{1}{s} \right\}$$

(2º método)

$$\frac{1}{(s+2)} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{1}{2} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{Z} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{s+2} \right\} = -\frac{1}{2} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} \rightarrow \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \frac{1}{2} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} \right\}$$

$$L(z) = (1-z^{-1}) \left[ -\frac{1}{2} \frac{z}{z-e^{-2T}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} \right]$$

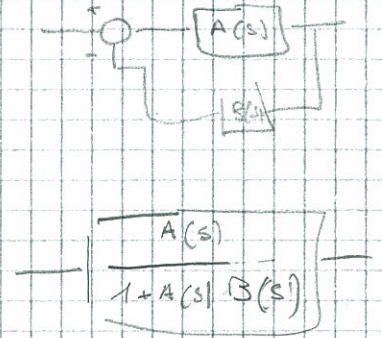
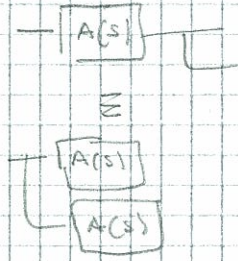
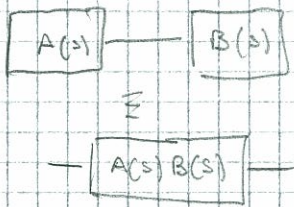
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z+1}{z-e^{-2T}} = \frac{1}{2} \frac{1-e^{-2T}}{z-e^{-2T}}$$

$$T(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)C(z)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1-e^{-2T}}{z-e^{-2T}}}{1 + \frac{z}{z-0,5} \cdot \frac{1}{2} \frac{1-e^{-2T}}{z-e^{-2T}}}$$

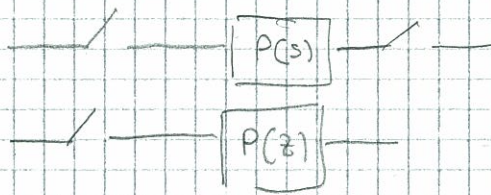
$$= \frac{(1-e^{-2T})(z-0,5)}{2(z-0,5)(z-e^{-2T}) + z(1-e^{-2T})}$$



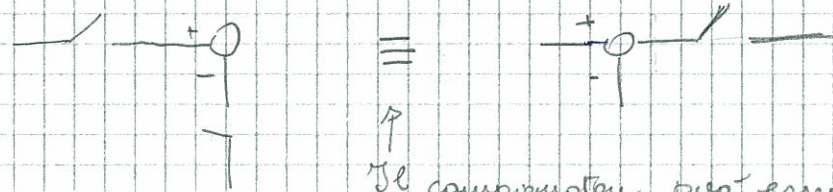
## Semplificazione dei blocchi



In digitale abbiamo una complessità in più perché abbiamo segnali continui e discreti.



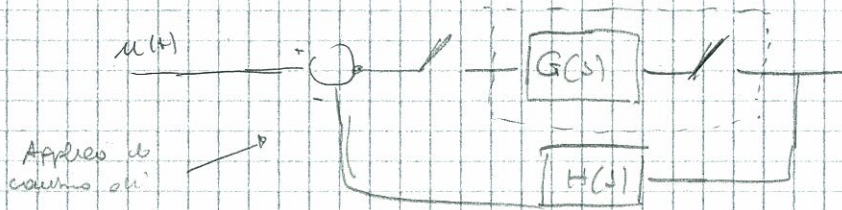
$$P(z) = z \{ P(s) \}$$



Il campionatore può essere portato dopo il sommatore



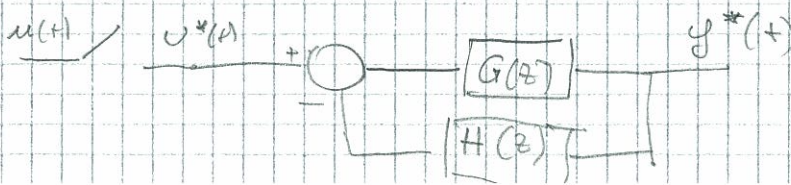
## Esempio



Esistono sia segnali continui che discreti, si devono portare tutti in discreto



Applico la discretizzazione





$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

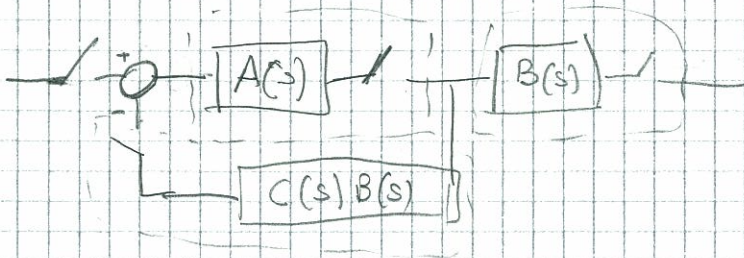
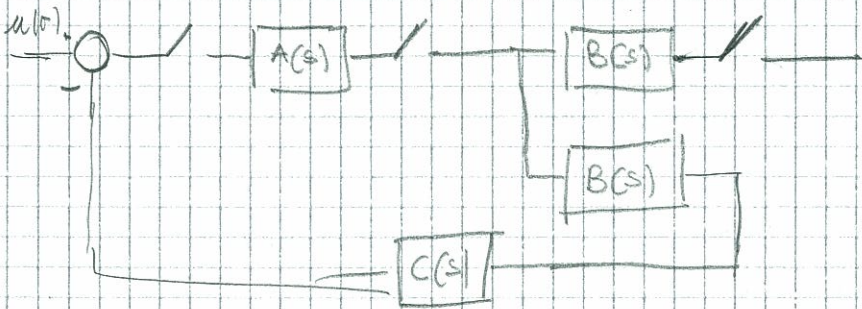
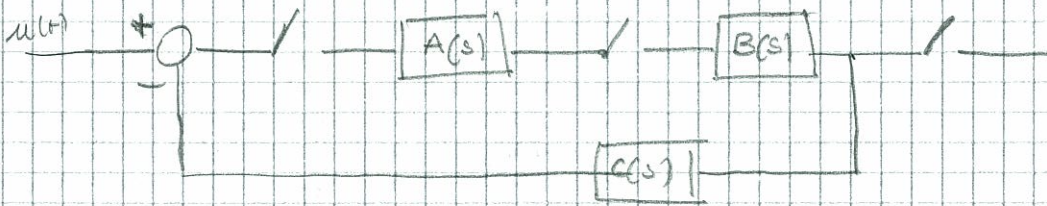
$$Y(z) = T(z) U(z)$$

$u(t) \rightarrow \text{continuous} \rightarrow U(s)$

$u^*(t) \rightarrow \text{campionato}$

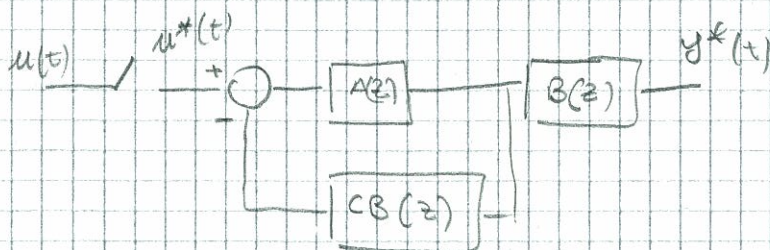
$u^*(k) \rightarrow u(kT) \rightarrow U(z)$

Esempio



ATTENZIONE !!

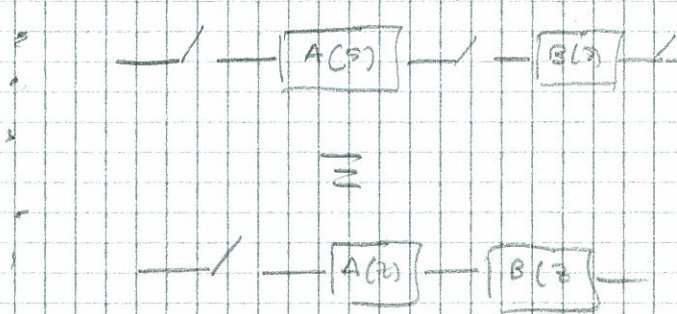
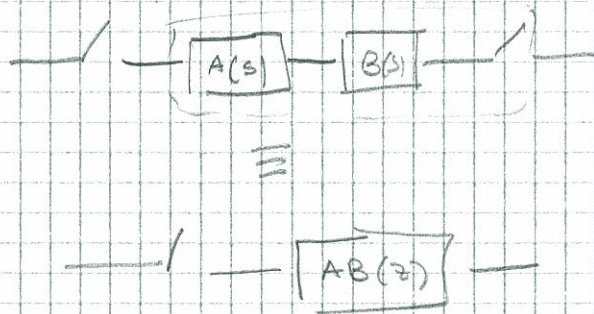
$$\mathcal{Z}\{C(s)B(s)\} \neq \mathcal{Z}\{C(s)\} \cdot \mathcal{Z}\{B(s)\}$$



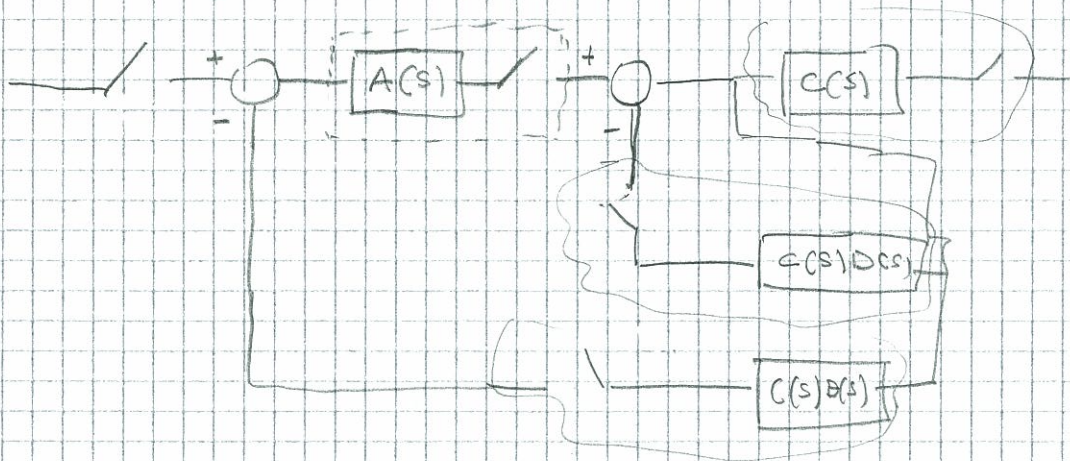
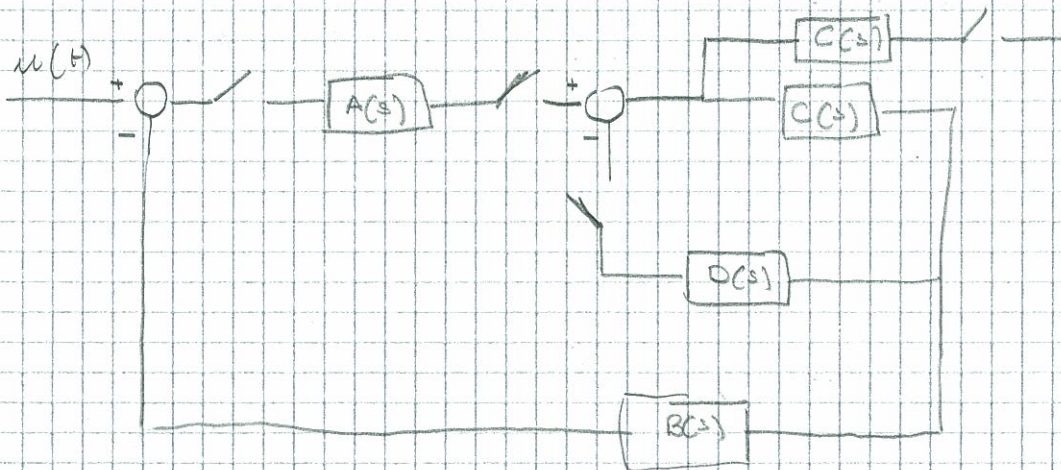
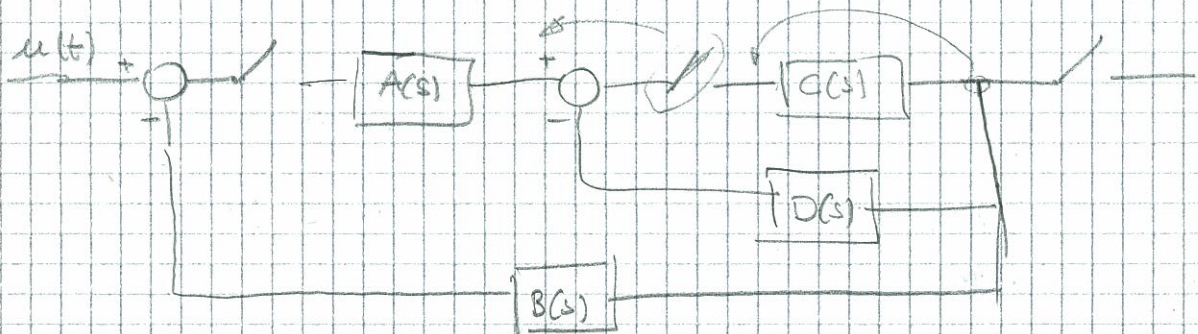
$$Y(z) = U(z) \cdot \frac{A(z) B(z)}{1 + A(z) (CB)(z)}$$



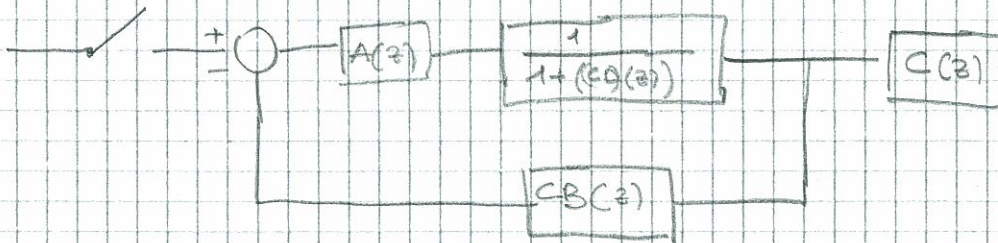
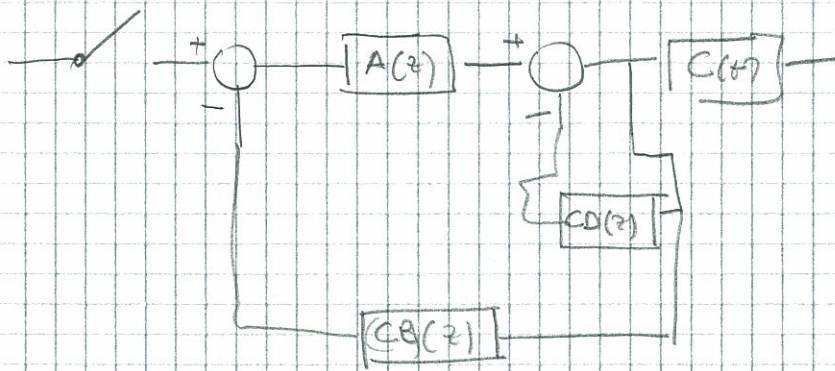
## Attention



## Exemples



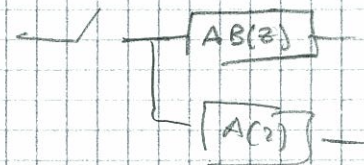




$$T(z) = \frac{\frac{A(z)}{1 + (CD)(z)} C(z)}{1 + \frac{A(z)(CB)(z)}{1 + (CD)(z)}} = \frac{A(z) C(z)}{[1 + (CD)(z)] + A(z)(CB)(z)}$$



$\Rightarrow$





## Modi

$p(t)$  è la risposta all'impulso.

$$P(s) \leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}[P(s)] = p(t).$$

$$\text{ES } P(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2(s+3)^3} \leftrightarrow p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + C_3 t^2 e^{-3t} + C_4 t e^{-3t} + C_5 e^{-3t},$$

Questi sono i modi del sistema.

Più gli esponenti sono a coefficienti altri negativi, più il sistema si stabilisce rapidamente.

## Modi discuti.

Proprietà.

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{(z-p)^l} \right\} = \frac{1}{(l-1)!} (k-1)(k-2)\dots(k-l+1) p^{k-l} \frac{1}{l!} (k-1)$$

DIM.

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{(z-p)^l} \right\} = \sum \text{Res} \frac{1}{(z-p)^l} z^{k-1}$$

$$\text{Se } k=0 \rightarrow x(0) = \sum \text{Res} \frac{1}{z(z-p)^l} \begin{cases} = 0 & l > 0 \\ = 1 & l = 0 \end{cases}$$

Se  $k > 0$

$$x(k) = \text{Res} \left( \frac{z^{k-1}}{(z-p)^l} P \right) = \frac{1}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} z^{k-1} \Big|_{z=p}$$

$$z^{k-1} \xrightarrow{\frac{d}{dz}} (k-1) z^{k-2} \xrightarrow{\frac{d}{dz}} (k-2)(k-1) z^{k-3} \dots$$

→ eseguendo l'operazione  $l-1$  volte

$$\frac{d^{l-1} z^{k-1}}{dz^{l-1}} = (k-1)(k-2)\dots(k-l+1) z^{k-l}.$$



## PROPRIETÀ (Modi di un sistema discreto)

Dato un sistema discreto descritto dalla funzione di trasferimento strettamente propria

$$P(z) = \frac{N(z)}{(z-p_1)^{g_1} (z-p_2)^{g_2} \dots (z-p_m)^{g_m}}$$

Per  $k \geq 0$

$$p(k) = z^{-1} \{ P(z) \}$$

$$= \text{Lin} \left\{ p_1^k, k p_1^k, \dots, k^{(g_1-1)} p_1^k, \right. \\ \left. p_2^k, k p_2^k, \dots, k^{(g_2-1)} p_2^k, \dots, p_m^k, \dots, p_m^k k^{(g_m-1)} \right\}$$

Es.

$$P(z) = \frac{z}{(z+1)^2 (z-2)^3}$$

$$\text{Modi} = (-1)^k, k(-1)^k, 2^k, k2^k, k^2 2^k.$$

DIM.

$$P(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{g_i} \frac{C_{i,l}}{(z-p_i)^l}$$

$$p(k) = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{g_i} \frac{C_{i,l}}{(l-1)!} z^{-1} \left\{ \frac{1}{(z-p_i)^l} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{g_i} C_{i,l} \underbrace{(k-1)(k-2)\dots(k-l+1)}_{\text{polinomio di grado } l-1 \text{ in } k} p_i^{k-l} \cdot 1(k-1)$$

polinomio di grado  $l-1$  in  $k$ .

$$= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{l=1}^{g_i} \frac{C_{i,l}}{(l-1)!} (k-1)(k-2)\dots(k-l+1) p_i^{k-l} \right) p_i^k$$

polinomio di  $k$  di grado  $g_i-1 = h_i(k)$

$$= \sum_{i=1}^m h_i(k) p_i^k$$



Allora  $h_i(k) p_i^{\pm k} = (c_0 + c_1 k + \dots + c_{p-1} k^{p-1}) p_i^{\pm k}, \dots$

Es.

$$P(z) = \frac{z}{(z+2)^2 [(z-1)^2 + 4]}$$

$$p = -2 \rightarrow p = 2$$

$$p = 1 \pm 2j$$

$$\text{medi} = \{ (-2)^k, k(-2)^k, (1+2j)^k, (1-2j)^k \}$$

$$\left( \begin{matrix} -2 \\ 1+2j \\ 1-2j \end{matrix} \right) \rightarrow \dots$$

PROPRIETÀ: importante \* la Trasf. da  $P(s)$  a  $P(z)$

$$P(s) \rightarrow P(z)$$

I poli di  $P(s)$  vengono TRASFORMATI in poli di  $P(z)$  secondo la relazione

$$z = e^{sT}$$

Es

$$P(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$-1 \rightarrow m=1$$

$$-2 \rightarrow m=2$$

$$P(z) = \frac{N(z)}{(ze^{-sT})^1 (ze^{-2T})^2}$$

Esempio

$$P(z) = \frac{z}{(z+2)^2 ((z-1)^2 + 4)}$$

$$\text{Poli } p = -2 \rightarrow p = 2$$

$$p = 1 \pm 2j$$

$$\text{medi} = \{ z^k, k z^k, (1+j)^k, (1-j)^k \}$$

$$(1+j^2) = \sqrt{5} e^{s_{\text{cerca}} 2} = \sqrt{5} e^{j^{1,102}}$$



$$(1+j2)^k = \left( \sqrt{5} e^{j1,107} \right)^k = \sqrt{5}^k e^{j1,107k}$$

$$= \sqrt{5}^k \left[ \cos(1,107k) + j \sin(1,107k) \right]$$

$$(1-j2)^k = \sqrt{5}^k \left[ \cos(1,107k) - j \sin(1,107k) \right]$$

1° modo reale  $m_1 = 2\sqrt{5}^k \cos(1,107k)$  [somma]

2° modo reale  $m_2 = 2\sqrt{5}^k \sin(1,107k)$  [moltiplica e sottrae]

$$A \sqrt{5}^k \cos(1,107k + \varphi)$$

PROPRIETÀ

Se  $P(s)$  è una funzione di trasferimento razionale strettamente propria

$$P(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^{p_1} (s-p_2)^{p_2} \dots (s-p_m)^{p_m}}, \text{ Allora}$$

$$P(z) = Z\{P(s)\} = \frac{N_z(z)}{(z-e^{p_1 T})^{p_1} (z-e^{p_2 T})^{p_2} \dots (z-e^{p_m T})^{p_m}}$$

Se  $p$  è polo di  $P(s)$ , allora  $e^{pT}$  è polo di  $P(z)$ .

DIM

Assumiamo che  $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_m = 1$ .

$P(s)$  si può esprimere in fattori semplici e così scritto

$$P(s) = \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} + \dots + \frac{C_m}{s-p_m}$$

$$P(z) = Z\{P(s)\} = \frac{C_1 \frac{z}{z-e^{p_1 T}} + C_2 \frac{z}{z-e^{p_2 T}} + \dots + C_m \frac{z}{z-e^{p_m T}}}{N(z)}$$

$$= \frac{N(z)}{(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T}) \dots (z-e^{p_m T})}$$



Esempio.

$$P(s) = \frac{(s-1)(s-3)}{s^2(s-2)^2((s+1)^2+4)}$$

$\hookrightarrow P \sim -1 \pm 2j$

$$\text{Modi} \left\{ 1, t, t e^{2t}, e^{2t}, e^{-t} \sin(2t), e^{-t} \cos(2t) \right\}.$$

$$P(z) = \frac{N(z)}{(z-1)^2 (z - e^{2T})^2 (z - e^{(-T+j2T)}) (z - e^{(-T-j2T)})}$$

$$\text{modi} = \left\{ 1, kT, e^{2kT}, kT e^{2kT}, e^{-kT} \sin(2kT), e^{-kT} \cos(2kT) \right\}$$

CORRISPONDENZA tra i piani  $s$  e  $z$ .

La relazione  $z = e^{sT}$  è periodica rispetto all'asse immaginario.

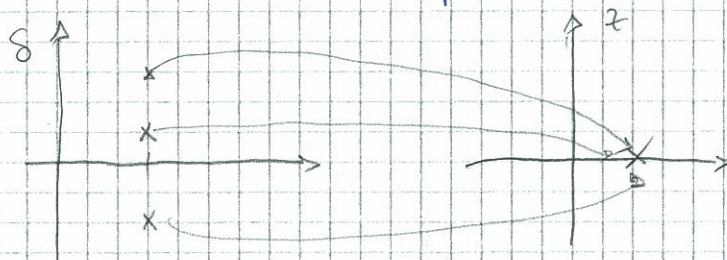
$$s_1 = a + bj, \quad s_2 = a + bj + \frac{2\pi}{T} k$$

$$z_1 = e^{s_1 T} = e^{aT + bjT} = e^{aT} (\cos(bT) + j \sin(bT)).$$

$$z_2 = e^{s_2 T} = e^{aT + bjT + \frac{2\pi}{T} kT} = e^{aT} \left( \cos\left(bT + \frac{2\pi}{T} kT\right) + j \sin\left(bT + \frac{2\pi}{T} kT\right) \right)$$

$$= e^{aT} [\cos(bT) + j \sin(bT)] = z_1.$$

Abbiamo verificato che se prendiamo poli sulla retta parallela all'asse immaginario, questi vengono compressi in un unico punto.





Verifichiamo che sono i modi campionati

$$s_1 = a + jb$$

$$e^{s_1 T} = e^{at} (\cos bt + j \sin bt)$$

$$s_2 = a + bj + \frac{2\pi}{T} kT$$

$$e^{s_2 T} = e^{at} \left( \cos \left( bt + \frac{2\pi}{T} kT \right) + j \sin \left( bt + \frac{2\pi}{T} kT \right) \right)$$

$$e^{s_1 T} \xrightarrow{t=kT} e^{a kT} (\cos(b kT) + j \sin(b kT))$$

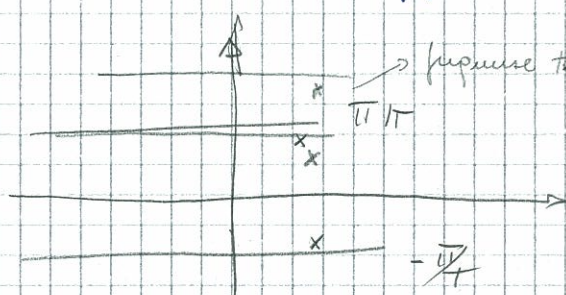
$$e^{s_2 T} = e^{a kT} \left( \cos \left( b kT + \frac{2\pi}{T} kT \right) + j \sin \left( b kT + \frac{2\pi}{T} kT \right) \right)$$

*2πk è multiplo intero di 2π e seno e coseno*

$$\left\{ e^{a kT} (\cos(b kT) + j \sin(b kT)) \right\}$$

Modi continui a frequenze diverse, ma con lo stesso modo in decibel

Possiamo scorporare il piano in fasce per cui nelle fasce prima viene mappato un polo



di campionamento.

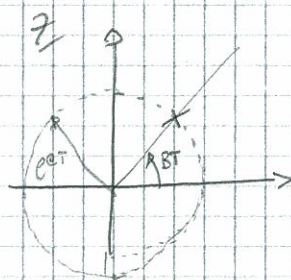
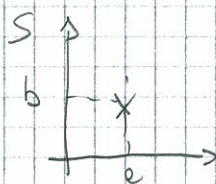
Diversi poli in  $s$  danno lo stesso polo in  $z$

**CORRISPONDENZA tra LUOGHI SIGNIFICATIVI del PIANO  $s$  e il piano  $z$ .**

### 1) Polo Singolo

$$s = a + jb$$

$$z = e^{sT} = e^{aT} (\cos(bT) + j \sin(bT))$$

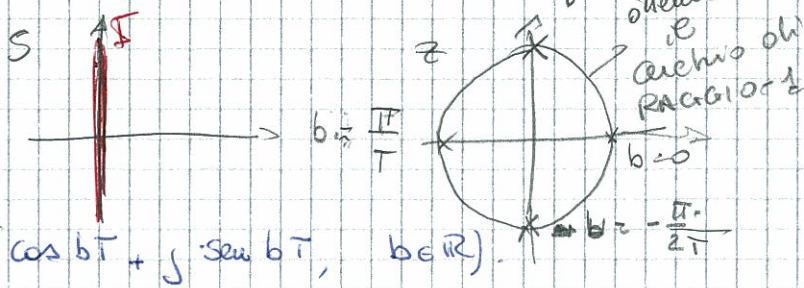


$e^{aT} \rightarrow$  modulo  
 $bT \rightarrow$  argomento

### 2) Asse Immaginario

$$\tilde{\Gamma} = \{s = bT, b \in \mathbb{R}\}$$

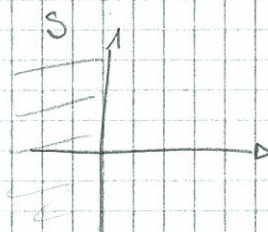
$$z = e^{sT} \rightarrow \{e^{bT}, b \in \mathbb{R}\} = \{\cos bT + j \sin bT, b \in \mathbb{R}\}$$



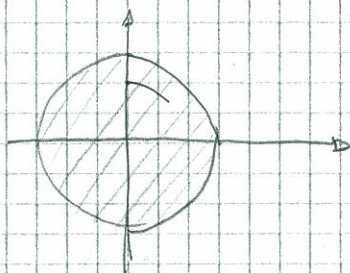


### 3) Regione di stabilità.

$$\Phi^-: \{s \mid s = a + jb, a < 0, b \in \mathbb{R}\}$$



$$z = e^{sT} \rightarrow \{z \mid z = e^{aT} (\cos bT + j \sin bT), a < 0, b \in \mathbb{R}\}$$

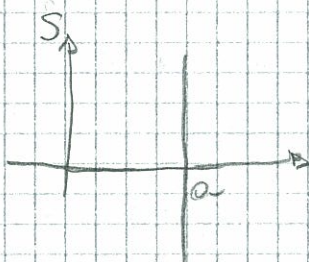


$$a = 0 \rightarrow \cos bT + j \sin bT$$

$$a = -1 \rightarrow e^{-T} (\cos bT + j \sin bT)$$

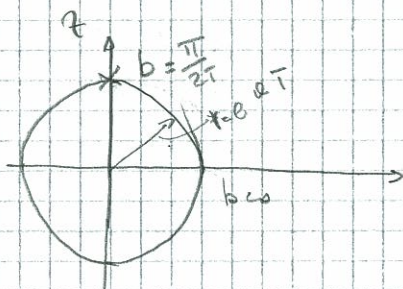
### 4) Regione dei poli a crescita esponenziale costante.

$$\mathcal{L} = \{s = a + jb, b \in \mathbb{R}\}$$



$$\text{modi} = e^{aT} \{ \cos bT + j \sin bT \}$$

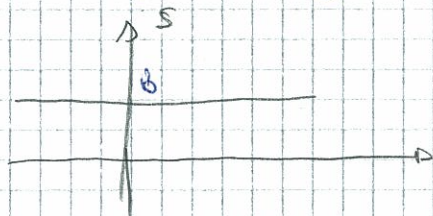
$$z = e^{sT} \rightarrow \{z = e^{aT} (\cos bT + j \sin bT), b \in \mathbb{R}\}$$



### 5) Regione dei poli a pulsazione costante

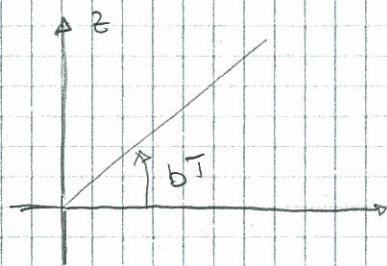
$$\mathcal{L} = \{s = a + jb, a \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{modi} = e^{aT} (\cos bT + j \sin bT)$$





$$z = e^{st} \rightarrow \left\{ z = e^{et} (\cos(bt) + j \sin(bt)), e \in \mathbb{R} \right\}.$$



## STABILITÀ di SISTEMI discreti.

### Def STABILITÀ SEMPLICE.

Un sistema discreto descritto dalla funzione di Trasferimento  $G(z)$  si dice semplicemente STABILE quando la sua risposta all'impulso è limitata,

cioè se  $\exists M \mid |g(k)| < M, \forall k \geq 0$ , dove  $g(k) = z^{-1} \{ G(z) \}$ .

### Def STABILITÀ ASINTOTICA.

Un sistema discreto, con funzione di trasferimento  $G(z)$  si dice asintoticamente stabile quando

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g(k) = 0, \text{ dove } g(k) = z^{-1} \{ G(z) \}.$$

### Def INSTABILE.

Un sistema è instabile quando non è semplicemente stabile.

### PROPRIETÀ

Un sistema descritto dalla funzione di trasferimento  $G(z)$  è asintoticamente STABILE

SE E SOLO SE

TUTTI I POLI sono all'interno del cerchio unitario

$$|P_i| < 1, \quad P_i \in \text{Poli} \{ G(z) \}.$$



### DIM (Necessità).

$$G(z) = \frac{N(z)}{(z-p_1)^{p_1} (z-p_2)^{p_2} \dots (z-p_m)^{p_m}}$$

$$g(k) = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{p_i-1} C_{i,l} k^l p_i^k$$

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} g(k) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{p_i-1} C_{i,l} \lim_{k \rightarrow \infty} k^l p_i^k \right| = 0$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} k^l p_i^k \rightarrow 0$

Abbiamo dimostrato la necessità

### PROPRIETÀ.

Un sistema con funzione di Trasferimento  $G(z)$

è semplicemente stabile se e solo se

TUTTI I SUOI POLI SONO ALL'INTERNO del CERCHIO UNITARIO  
OPPURE SUL SUO BORDO, e quelli che si trovano sul  
BORDO hanno MOLTEPLICITÀ PARI A UNO

$$|p_i| \leq 1, \forall p_i \in \text{POLI } \{G(z)\} \text{ se } |p_i| = 1, p_i^{p_i} = 1$$

### Es.

$$G(z) = \frac{z}{(z-0,2)(z+0,3)}$$

$$\text{POLI} = \{0,2, -0,3\}$$

Asintoticamente e semplicemente

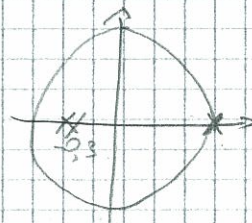
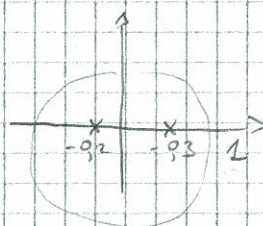
Stabile

$$G(z) = \frac{z}{(z+1)(z+0,3)^2}$$

Semplicemente Stabile

$$G(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+0,1)}$$

Non Stabile.





## STABILITÀ

## INGRESSO-LIMITATO

## e USCITA-LIMITATA

Un sistema discreto con ingresso  $u(k)$  e uscita  $y(k)$  è stabile ingresso limitato e uscita limitata se

$$\exists M_u \text{ t.c. } |u(k)| < M_u, \forall k > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists M_y \text{ che } |y(k)| < M_y \forall y.$$

### • PROPRIETÀ

Dato un sistema discreto con funzione di trasferimento  $P(z)$  le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

1.  $P(z)$  è stabile ingresso limitato - uscita limitata (I.L.U.L.)
2.  $P(z)$  ha tutti i poli all'interno del cerchio unitario
3.  $\sum_{k=0}^{+\infty} |p(k)| < +\infty$ , dove  $p(k) = z^{-1} \{P(z)\}$ .

### Esempi

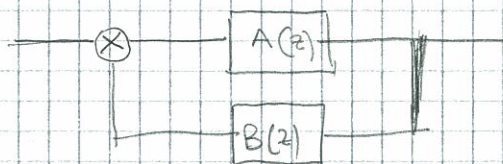
$$P(z) = \frac{z}{(z-0,1)(z+0,1)}$$

S.S. (semplicemente stabile)  
A.S. (A. stabile)  
S. I.L.U.L.

$$P(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0,1)}$$

S.S.  
A.S.  
~~S. I.L.U.L.~~

• Vediamo come determinare la stabilità di un sistema



$$T(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)B(z)}$$

Analizziamo 3 metodi per vedere se i poli sono all'interno del cerchio unitario e studiare la stabilità

- 1) Trasformazione bilineare
- 2) tabella di Jury
- 3) diagramma di Nyquist,



## • TRASFORMAZIONE BILINEARE

Otteniamo un nuovo polinomio a partire da quello dato il sistema sarà stabile se questo nuovo polinomio avrà poli a parte Reale negativa (Criterio di Routh).

## • PROPRIETÀ

La "corrispondenza bilineare"

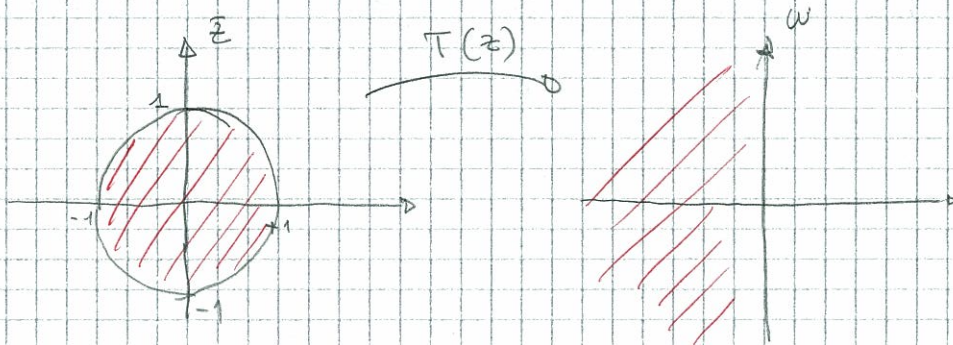
$$w = T(z) = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{ha}$$

la proprietà che se  $z \neq -1$

$$\operatorname{Re} T(z) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z| > 1$$

$$\operatorname{Re} T(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1$$

$$\operatorname{Re} T(z) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z| < 1$$



Attraverso questa trasformazione riconduciamo il problema della stabilità in un sistema già noto.

2. Dim  $z = a + bj$

$$w = T(z) = \frac{a + bj - 1}{a + bj + 1} = \frac{(a + jb - 1)(a - jb + 1)}{(a + jb + 1)(a - jb + 1)}$$

$$= \frac{a^2 - 1 + b^2 + j2ab}{(a+1)^2 + b^2}$$

$$\operatorname{Re}[T(z)] = \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a+1)^2 + b^2} = \frac{|z|^2 - 1}{(a+1)^2 + b^2} = \frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2} \Rightarrow \frac{(|z|-1)(|z|+1)}{|z+1|^2}$$

Il segno di  $\operatorname{Re}[T(z)]$  è legato al segno di  $|z| - 1$ .



## CORRISPONDENZA INVERSA.

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

$$(z+1)w = z-1$$

$$zw + w = z - 1$$

$$z(w-1) = -1-w$$

$\Rightarrow$

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

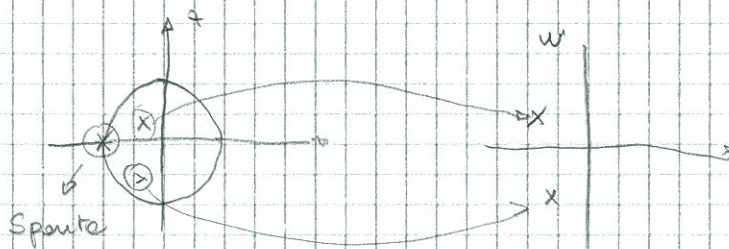
### PROPRIETÀ

Se l'equazione caratteristica

$$G(z) = 0$$

ha  $l$  radici in  $-1$  e ha  $n-l$  radici in  $p_1, p_2, \dots, p_{n-l} \neq -1$

$G(T^{-1}(w))$  ha le radici in  $T(p_1), T(p_2), \dots, T(p_{n-l})$



Possiamo accorgerci che le radici ~~da~~  $-1$  sono spunte se  $\tilde{e}$  cambiato di questo il polinomio.

DM.

Per semplicità PRENDIAMO  $l=1, n=3$

$$G(z) = K(z+1)(z-p_1)(z-p_2)$$

$$z \rightarrow \frac{1+w}{1-w}$$

$$G(w) = K \left( \frac{1+w}{1-w} + 1 \right) \left( \frac{1+w}{1-w} - p_1 \right) \left( \frac{1+w}{1-w} - p_2 \right)$$

Obbiamo  
un osservatore  
di grado

$$\begin{aligned} &= K \left( \frac{1+w+1-w}{1-w} \right) \left( \frac{1+w-p_1+p_1w}{1-w} \right) \left( \frac{1+w-p_2+p_2w}{1-w} \right) \\ &= \frac{Kz}{(1-w)^3} (w(1+p_1) + 1 - p_1) (w(1+p_2) + 1 - p_2) \end{aligned}$$



$$= \frac{2K \left( w - \frac{p_{1-1}}{p_{1+1}} \right) \left( w - \frac{p_{2-1}}{p_{2+1}} \right)}{(1-w)^3 (1+p_1) (1+p_2)}$$

$$= \frac{2K (w - T(p_1)) (w - T(p_2))}{(1-w)^3 (1+p_1) (1+p_2)}$$

→ Le radici sono in  $T(p_1)$  e  $T(p_2)$ .

**PROPRIETÀ.**

Un sistema discreto con funzione di trasferimento  $G(z)$  è asintoticamente stabile



$G(T^{-1}(w))$  ha tutte le radici a parte reale negativa e ha lo stesso grado di  $G(z)$ .

**Es.**

$$P(z) = \frac{z}{z^3 + 0,1z^2 - 0,04z - 0,004}$$

$$z \rightarrow \frac{1+w}{1-w}$$

• applichiamo tabella di Routh.

$$\left( \frac{1+w}{1-w} \right)^3 + 0,1 \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^2 - 0,04 \left( \frac{1+w}{1-w} \right) - 0,004 = 0$$

$$(1+w)^3 + 0,1 (1+w)^2 (1-w) - 0,04 (1+w) (1-w)^2 - 0,004 (1-w)^3 = 0$$

$$0,864 w^3 + 2,928 w^2 + 3,152 w + 1,056 = 0.$$

0,864	3,152	0	$\frac{3,152 \cdot 2,928 - 0,864 \cdot 1,056}{2,928}$
2,928	1,058	0	
2,8404			
1,056			

3 Permanenze di segno,  
3 radici negative quindi

Sistema asintoticamente stabile.



Es.

$$P(z) = z^3 + z^2 - 0,01z - 0,01.$$

$$z \rightarrow \frac{1+w}{1-w}$$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 - 0,01 \left(\frac{1+w}{1-w}\right) - 0,01 = 0$$

$$1,98w^2 + 4,04w + 1,98 = 0.$$

→ ABBONNAMENTO di GRADO → radice in  $-1$ .

→ Semplicemente stabile. (2 radici negative).

↓ (perché ha una radice in  $-1$  non può essere asintoticamente stabile).

→ Nel continuo per definire la stabilità.

→ Contorno

→ Cond. Necessarie (se ho un polinomio con segno opposto allora instabile)

→ Routh.

→ NEL DISCRETO.

PROPRIETÀ (CONDIZIONE NECESSARIA per la STABILITÀ).

Condizioni necessarie affinché il polinomio

$$P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0, \text{ con } a_m > 0$$

Sia asintoticamente stabile

$$1) a_m > |a_0|$$

$$3) P(-1) > 0 \quad \text{se } n \text{ pari}$$

$$2) P(1) > 0$$

$$\{P(-1) < 0 \quad \text{se } n \text{ dispari}\}$$

DIM

Per semplicità assumiamo che  $P(z)$  abbia una radice reale in  $p$  e due radici complesse coniugate in  $x \pm jy$ .

$$P(z) = (z-p)(z-x-jy)(z-x+jy).$$



Il termine  $z^3$  ha coefficiente  $K = a_3 = a_0$  e

il termine noto è dato da  $a_0 = K(-p)(-x-jy)(x+jy)$ .

$$|a_0| = K \underbrace{|p|}_{<1} \underbrace{|a+jb|}_{<1} \underbrace{|a-jb|}_{<1} < K = |a_n|.$$

Abbiamo dimostrato che  $|a_0| < |a_n|$ .

Calcoliamo  $P(1) = K(1-p)(1-a-jb)(1-a+jb)$

$$\stackrel{!}{=} K(1-p) \underbrace{\left( (1-a)^2 + b^2 \right)}_{>0} > 0.$$

*ipotesi  $\rightarrow >0$   $\rightarrow >0$   $\rightarrow >0$   $\rightarrow$  devono essere all'interno del cerchio unitario.*

Verifichiamo ora la 3<sup>a</sup> condizione.

$$P(-1) = K(-1-p)(-1-a-jb)(-1-a+jb)$$
$$\stackrel{!}{=} K(-1-p) \underbrace{\left( (a+1)^2 + b^2 \right)}_{>0} < 0 \quad (n=3)$$

$<0$   $>0$

### PROPRIETÀ.

Se  $n=2$ , cioè se  $P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ ,  $a_2 > 0$

Allora il sistema è ASINTOTICAMENTE STABILE se e solo se

$$a_2 > a_0, \quad P(1) > 0, \quad P(-1) > 0.$$

### DM.

Assumiamo  $a_2 > |a_0|$ ,  $a_2 + a_1 + a_0 > 0$ ,  $a_2 - a_1 + a_0 > 0$ .

$$z \rightarrow \frac{1+w}{1-w}.$$

$$a_2 \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^2 + a_1 \left( \frac{1+w}{1-w} \right) + a_0 = 0$$

$$a_2 (1+w^2+2w) + a_1 (1-w^2) + a_0 (1-w^2-2w) = 0$$

$$w^2 (a_2 - a_1 + a_0) + w (2a_2 - 2a_0) + a_2 + a_1 + a_0 = 0$$

$>0 \text{ IP3} \quad >0 \text{ IP1} \quad >0 \text{ IP2}$

I radici sono negative  $\rightarrow$  AS. stabile



Es.

$$P(z) = \frac{z}{z^2 + 0,2z + 0,08}$$

- 1)  $1 > 0,08$  si
- 2)  $P(1) = 1 + 0,2 + 0,08 > 0$  si
- 3)  $P(-1) = 1 - 0,2 - 0,08 > 0$  si

} E asintoticamente stabile.

Es.

$$A(z) = \frac{z - 0,2}{z^3 - 2z^2 - 0,01z + 0,02}$$

- 1)  $1 > +0,02$  si.
- 2)  $P(1) = 1 - 2 - 0,01 + 0,02 < 0$  NO

NEV instabile.

Es.

$$A(z) = \frac{z - 0,5}{z^4 + 0,1z^3 + 0,11z^2 + 0,001z + 0,0006}$$

$Q(z)$

- 1)  $1 > 0,0006$  si
- 2)  $Q(1) = 1 + 0,1 + 0,11 + 0,001 - 0,0006 > 0$  si.
- 3)  $Q(-1) = 1 - 0,1 + 0,11 - 0,001 - 0,0006 > 0$  si.

Condizione necessaria verificata



Es.

$$Q(z) = z^4 + 0,1z^3 + 0,11z^2 + 0,001z + 0,0006$$

Applico la Tabella di Jury per vedere la stabilità.

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$	
1	-0,0006	0,001	0,11	0,1	1	
2	1	0,1	0,11	0,001	-0,0006	← Riga sopra invertita
3	$*_1$	$*_2$	$*_3$	$*_4$		
4	-0,0006	-0,1101	-0,1	-1		
5	$*_5$	$*_6$	$*_7$			

$$*_1 = \begin{vmatrix} -0,0006 & 1 \\ 1 & -0,006 \end{vmatrix} = 1$$

$$*_2 = \begin{vmatrix} -0,0006 & 0,1 \\ 1 & 0,001 \end{vmatrix} = -0,1$$

$$*_3 = \begin{vmatrix} -0,0006 & 0,11 \\ 1 & 0,11 \end{vmatrix} = -0,1101$$

$$*_4 = \begin{vmatrix} -0,0006 & 0,001 \\ 1 & 0,1 \end{vmatrix} = -0,00106$$

$$*_5 = \begin{vmatrix} -1 & 0,00084 \\ -0,00106 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$*_6 = \begin{vmatrix} -1 & -0,1101 \\ -0,00106 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,1$$

$$*_7 = \begin{vmatrix} -1 & -0,1 \\ -0,00106 & -0,1101 \end{vmatrix} = 0,1102$$

1) Devono essere soddisfatte le condizioni necessarie.

2) In tutte le righe dispari, eccetto la prima,

deve essere verificato il fatto:

$$|\text{PRIMO ELEMENTO}| > |\text{ULTIMO ELEMENTO}|$$



Se sono verificate le condizioni sopradette  
allora il sistema è ASINTOTICAMENTE STABILE.

## TABELLA di JURY.

Dato il polinomio

$$G(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0.$$

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$	...	$z^n$
1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	$a_{n-4}$	...	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	...	$b_{n-1}$
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	...	...	...	$b_0$

Con  $b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_m & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_m & a_1 \end{vmatrix}$

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_m & a_k \end{vmatrix}.$$

Le righe di ordine PARI sono dette dalle righe precedenti invertite nell'ordine.

Le righe dispari successive alle 3<sup>a</sup> si costruiscono nello stesso modo delle terze.

Il procedimento termina quando arriviamo ad una riga con 3 elementi.

## CRITERIO di STABILITA'.

Il polinomio  $G(z)$  ha tutte le RADICI ALL'INTERNO del CERCHIO UNITARIO SE E SOLO SE

1)  $a_n > |a_0|$

2)  $G(1) > 0$

3)  $G(-1) > 0$  se  $n$  pari  
 $< 0$  se  $n$  dispari

4) In tutte le righe dispari deve essere verificato: |PRIMO EL. | > |ULTIMO EL. |  
 primo e per



Es.

Verifica se il sistema con la seguente eq. caratteristica è stabile

$$P(z) = z^4 - 1,2z^3 + 0,07z^2 + 0,3z - 0,08.$$

→ Verif. le cond. necessarie.

1)  $1 > |-0,08|$  Sì.

2)  $P(1) = 1 - 1,2 + 0,07 + 0,3 - 0,08 = 0,09 > 0$  ok.

3)  $P(-1) = 1 + 1,2 + 0,07 - 0,3 - 0,08 = 1,89 > 0$  ok.

	$z^4$	$z^3$	$z^2$	$z^1$	$z^0$
1	-0,08	0,3	0,07	-1,2	1
2	1	-1,2	0,07	0,3	-0,08
3	-0,9936	1,176	-0,0756	-0,204	
4	-0,204	-0,0756	1,176	-0,9936	
5	0,9456	-1,1839	0,3150		

$$S_0 = \begin{vmatrix} -0,9936 & -0,2040 \\ -0,2040 & -0,9936 \end{vmatrix} = 0,9456$$

4)  $|-0,9936| > |0,204|$  ok

$|0,9456| > |0,3150|$  ok

Il sistema è asintoticamente stabile.

$$S_0 = \begin{vmatrix} -0,08 & 1 \\ 1 & -0,08 \end{vmatrix} = -0,9936$$

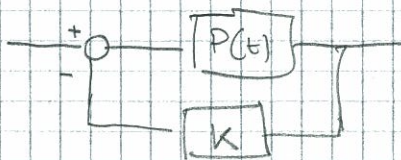
$$S_1 = \begin{vmatrix} -0,08 & -1,2 \\ 1 & 0,3 \end{vmatrix} = 1,1760$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} -0,08 & 0,07 \\ 1 & 0,07 \end{vmatrix} = -0,0756$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} -0,08 & 0,3 \\ 1 & -1,2 \end{vmatrix} = -0,2040$$



Es.



$$P(z) = \frac{0,4z + 0,2}{z^2 - 1,4z + 0,4}$$

Per quali valori  $K \in \mathbb{R}$  il sistema è asintoticamente stabile?

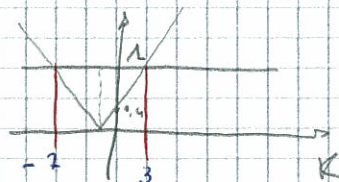
$$T(z) = \frac{P(z)}{1 + KP(z)} = \frac{\frac{0,4z + 0,2}{z^2 - 1,4z + 0,4}}{1 + K \frac{0,4z + 0,2}{z^2 - 1,4z + 0,4}} = \frac{0,4z + 0,2}{z^2 - 1,4z + 0,4 + K(0,4z + 0,2)}$$

$$Q(z) = z^2 - z(1,4 + 0,4K) + 0,4 + 0,2K$$

1)  $1 > |0,4 + 0,2K| \Rightarrow$  via grafica.

2)  $R(1) > 0 \quad 1 - 1,4 + 0,4K + 0,4 + 0,2K > 0 \Rightarrow K > 0$

3)  $R(-1) > 0 \quad 1 + 1,4 + 0,4K + 0,4 + 0,2K > 0 \Rightarrow K \geq -4$



$$1 = 0,4 + 0,2K$$

$$K = \frac{0,6}{0,2} = 3$$

$$1 = -0,4 - 0,2K$$

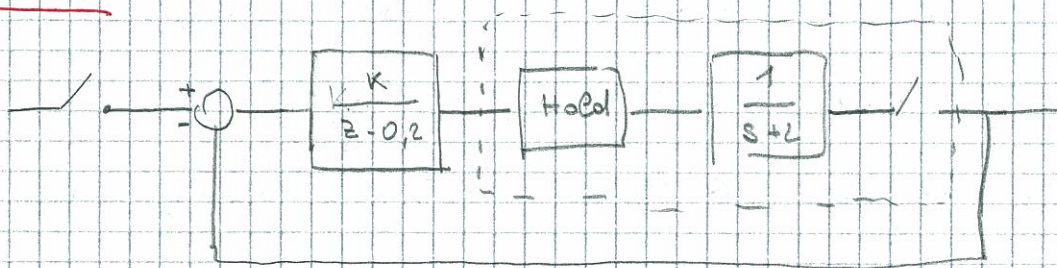
$$K = -\frac{1,4}{0,2} = -7$$

$$-7 < K < +3$$

$K(z)$  è asintoticamente stabile per  $0 < K < +3$ .



# Esercizio

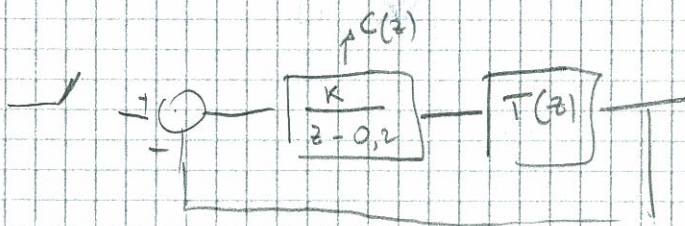


$T = 0,5 \text{ s}$  Intervallo di  $K \in \mathbb{R}$  per cui il sistema è asintoticamente stabile.

$$\mathcal{Z} \left\{ H(s) \frac{1}{s+2} \right\} = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{(s+2)s} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s+2)} \right\} &= \sum \text{Res} \left( \frac{1}{(s+2)s} \frac{z}{z-e^{sT}} \right) \\ &= \frac{1}{(s+2)s} \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=0} + \frac{1}{s} \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=-2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2T}} \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{Z} \left\{ H(s) \cdot \frac{1}{s+2} \right\} = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{(s+2)s} \right\} = \frac{1-e^{-2T}}{2(z-e^{-2T})} = T(z).$$



$$H(z) = \frac{C(z)T(z)}{1 + C(z)T(z)} = \frac{(1-e^{-2T})K}{2(z-e^{-2T})(z-0.2) + K(1-e^{-2T})}$$

$$2z^2 + z(-0.4 - 2e^{-2T}) + 0.4e^{-2T} + K(1-e^{-2T}) = 0$$

$$T = 0,5$$

$$2z^2 + 1,1353z + 0,1472 + K \cdot 0,6321 = 0$$



$$1) \quad 2 > |0,1472 + K \cdot 0,6321| \quad \Rightarrow \quad K \in (-3,3369, 2,9322)$$

$$2) \quad 2 - 1,1358 + 0,1472 + K \cdot 0,6321 > 0 \quad K > -1,6$$

$$3) \quad 2 + 1,1358 + 0,1472 + K \cdot 0,6321 > 0 \quad K > -5,194$$

$$K \in (-1,6; 2,9312)$$

Es.

$$\begin{cases} x(k+1) = y(k) \\ y(k+1) = -x(k) - 2y(k) \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z x(z) - x = y(z) \\ z y(z) - z = -x(z) - 2y(z) \end{cases}$$

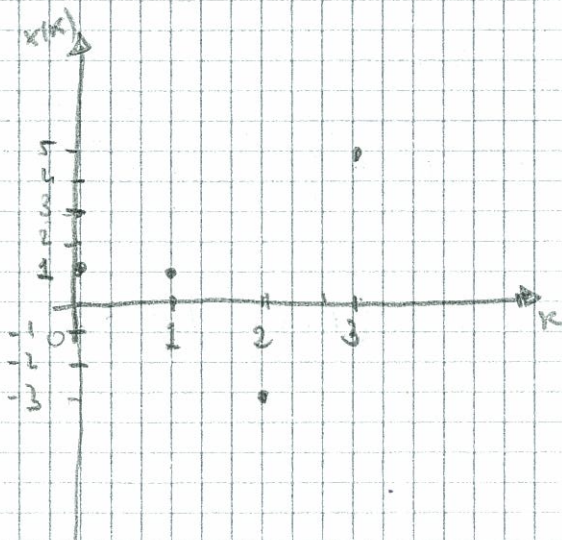
$$\begin{cases} y(z) = z x(z) - z \\ z^2 x(z) - z^2 - z = -x(z) - 2z x(z) + 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(z) = z x(z) - z \\ x(z) = \frac{z^2 + 3z}{z^2 + 2z + 1} = \frac{z(z+3)}{(z+1)^2} \end{cases}$$

$$x(k) = \text{Res} \left( \frac{z^k (z+3)}{(z+1)^2}, -1 \right) = k z^{k-1} (z+3) + z^k \Big|_{z=-1}$$

$$= 12(-1)^{k-1} + (-1)^k$$

$$y(k) = (-1)^k + k(-1)^{k-1}(-2)$$

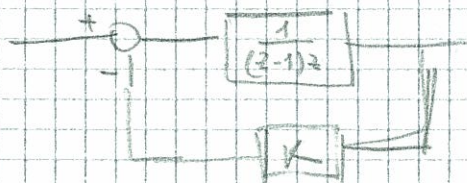


$$(-1)^k [1 - 2k]$$



## Esercizio

Determinare l'insieme dei valori  $K \in \mathbb{R}$  per cui il sistema è stabile



$$T(z) = \frac{\frac{1}{(z-1)z}}{1 + K \frac{1}{(z-1)z}} = \frac{1}{(z-1)z + K} = \frac{1}{z^2 - z + K}$$

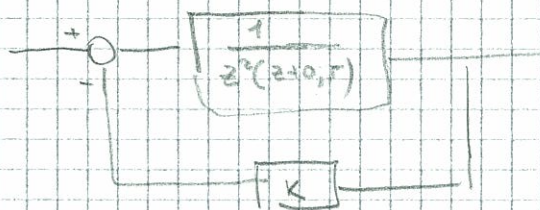
$$1 > |K| \rightarrow -1 < K < 1$$

$$P(1) = 1 - 1 + K > 0 \rightarrow K > 0$$

$$\Rightarrow 0 < K < 1$$

$$P(-1) = 1 + 1 + K > 0 \rightarrow K > -2$$

Es.



$$T(z) = \frac{1}{z^3 + 0,5z^2 + K}$$

$$1) \quad 1 > |K| \rightarrow -1 < K < 1$$

$$K \in (-0,781; 0,5)$$

$$2) \quad 1 + 0,5 + K > 0 \rightarrow K > -1,5$$

$$3) \quad -1 + 0,5 + K < 0 \rightarrow K < 0,5$$

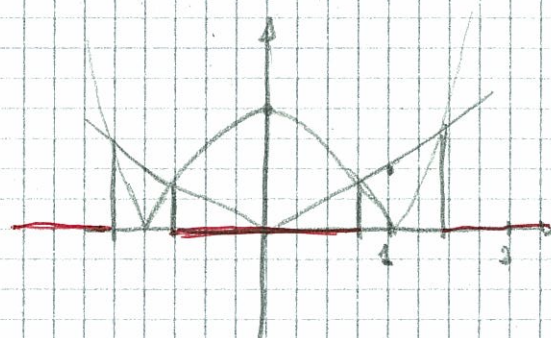
K	0	0,5	1
1	0,5	0	K
$K^2 - 1$	-0,5	0,5K	

$$|K^2 - 1| > |0,5K|$$

$$K \in (-\infty, -1,281) \cup$$

$$K \in (-0,781, +0,781) \cup$$

$$K \in (1,281, \infty)$$



$$K_1 \quad 1 - K^2 = 0,5K$$

$$K^2 + 0,5K - 1 = 0$$

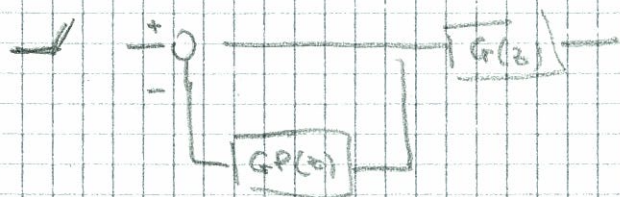
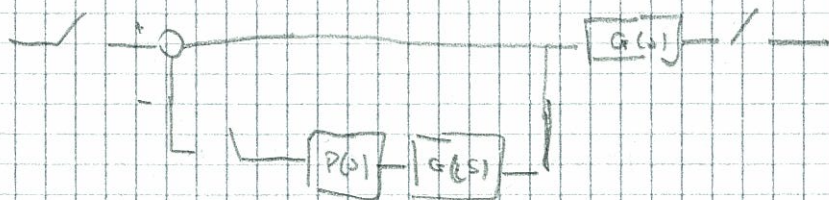
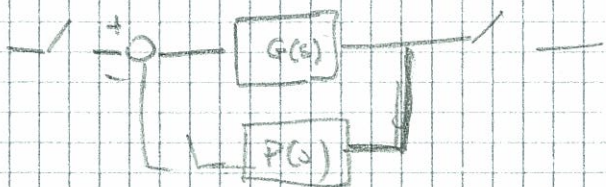
$$K_1 = 0,781$$



Es

$$G(s) = \frac{s}{s+a}$$

$$P(s) = \frac{1}{s+a}$$



more strictly  
proper

$$z \left\{ \frac{s}{s+a} \right\} = z \left\{ 1 - \frac{a}{s+a} \right\}$$

$$z \left\{ 1 \right\} - z \left\{ \frac{a}{s+a} \right\}$$

$$1 - a \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$z \left\{ \frac{s}{(s+a)^2} \right\} = \sum_{\text{poles}} \left\{ \frac{s}{(s+a)^2} \cdot \frac{z}{z - e^{sT}} \right\}$$

$$= \frac{d}{ds} s \cdot \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-a}$$

$$= \frac{z}{z - e^{-aT}} + s \cdot \frac{-T e^{sT} z}{(z - e^{sT})^2} \Big|_{s=-a}$$

$$= \frac{z}{z - e^{-aT}} + \frac{aT \cdot e^{-aT} z}{(z - e^{-aT})^2} = \frac{z(z - e^{-aT}) - aT e^{-aT} z}{(z - e^{-aT})^2}$$

$$T(z) = \frac{1 - a \frac{z}{z - e^{-aT}}}{1 + \frac{z(z - e^{-aT}) - aT e^{-aT} z}{(z - e^{-aT})^2}}$$

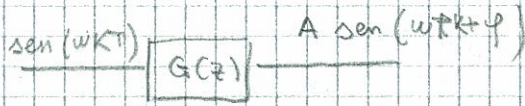
$$= \frac{(z - e^{-aT} - a z)(z - e^{-aT})}{(z - e^{-aT})^2 + [z^2 + z(-e^{-aT} - T e^{-aT} a)]}$$



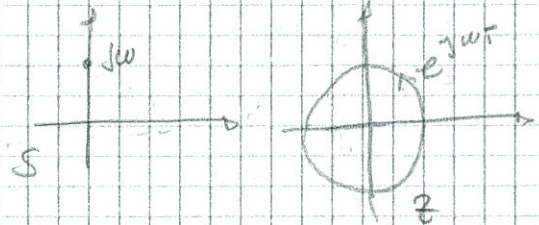
## FUNZIONE di RISPOSTA ARMONICA.



$A e^{j\varphi} = G(j\omega)$  → proprietà intrinseca dei sistemi lineari.



$$A e^{j\varphi} = G(e^{j\omega T})$$



La dipendenza è più complicata x' c'è una funzione trascendentale

### PROPRIETÀ.

Un sistema discreto, asintoticamente stabile, che ha in ingresso una funzione armonica

$$u(k) = \sin(kT\omega)$$

ha, in uscita, a regime, la FUNZIONE

$$y(k) = A(\omega T) \sin(kT\omega + \varphi(\omega T))$$

$$\text{con } A(\omega T) e^{j\varphi(\omega T)} = G(e^{j\omega T})$$

In base a qsta proprietà abbiamo che la funzione

$G(e^{j\omega T})$  si chiama FUNZIONE di RISPOSTA ARMONICA DISCRETA.

$$|G(e^{j\omega T})| \rightarrow \text{GUADAGNO IN AMPIEZZA.}$$

$$\angle G(e^{j\omega T}) \rightarrow \text{DIFFERENZA di FASE.}$$

D.M.

$$u(k) = \sin(\omega T k) = \frac{1}{2j} \left[ e^{j\omega T k} - e^{-j\omega T k} \right]$$

$$u(z) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right]$$

$$Y(z) = U(z) G(z)$$

$$y(k) = \sum \text{Res} \left( \frac{1}{2j} \left[ \frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right] G(z) z^{k-1} \right)$$

poli =  $\{ e^{j\omega T}, e^{-j\omega T}, \underbrace{p_1, \dots, p_n}_{\text{poli di } G(z)} \}$  Sono tutti i termini che vanno a zero per  $k \rightarrow +\infty$



I poli  $p_1 \dots p_m$  sono associati a modi che asintoticamente vanno a zero.

Gli unici termini che devo considerare sono  $e^{j\omega T}$  e  $e^{-j\omega T}$ .

$$Y_R(k) = \frac{z^k}{2j} G(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} - \frac{z^k}{2j} G(z) \Big|_{z=e^{-j\omega T}}$$

$$= \frac{e^{j\omega T k}}{2j} G(e^{j\omega T}) - \frac{e^{j\omega T k}}{2j} G(e^{-j\omega T})$$

Sfruttiamo la proprietà che

$$G(z^*) = G^*(z).$$

Quindi possiamo scrivere

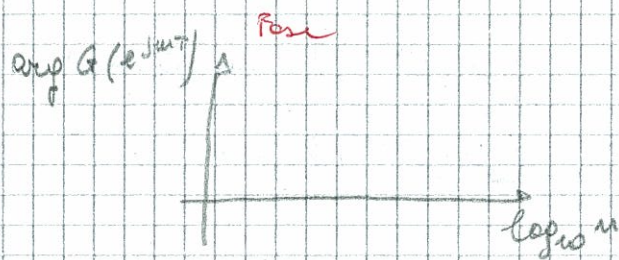
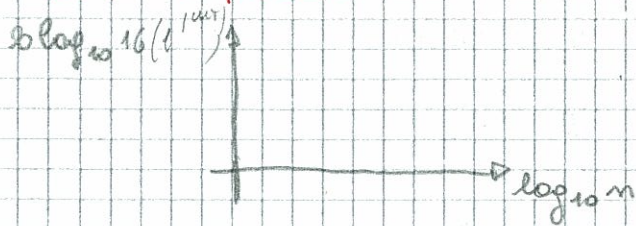
$$G(e^{-j\omega T}) = G(e^{j\omega T})^*$$

$$|G(e^{-j\omega T})| e^{j \arg G(e^{-j\omega T})} = |G(e^{j\omega T})| e^{-j \arg G(e^{j\omega T})}.$$

$$Y_R(k) = \frac{1}{2j} |G(e^{j\omega T})| \left\{ e^{j\omega T k} e^{j \arg G(e^{j\omega T})} - e^{-j\omega T k - j \arg G(e^{j\omega T})} \right\}$$

$$= |G(e^{j\omega T})| \sin(\omega T k + \arg G(e^{j\omega T})) \quad \text{c.v.d.}$$

**Bode Ampiezze.**



Nel seguito consideriamo le figure nell'intervallo

$$[0, \frac{\pi}{2}]$$



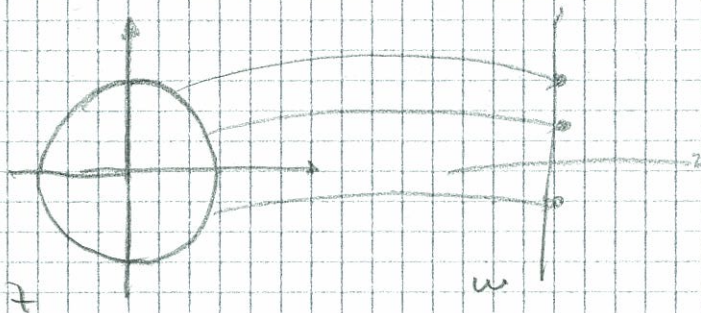
Esercizio

$$G(z) = \frac{z-0,2}{z+0,5}$$

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{e^{j\omega T} - 0,2}{e^{j\omega T} + 0,5}$$

Posiamo fare il grafico attraverso la Trasf. bilineare.

$$z = \frac{1+w}{1-w} = T^{-1}(w)$$



PROPRIETA'

$$G(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = G(T^{-1}(w)) \Big|_{w=j \tan\left(\frac{T}{2} \omega\right)}$$

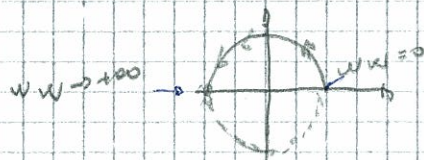
Dim

$$T^{-1}(w) = \frac{1+w}{1-w}$$

$$w = j \omega_w$$



$$T^{-1}(j\omega_w) = \frac{1+j\omega_w}{1-j\omega_w} = \frac{\sqrt{1+\omega_w^2} e^{j \arctg \omega_w}}{\sqrt{1+\omega_w^2} e^{-j \arctg \omega_w}} = e^{j2 \arctg \omega_w}$$



$$z = T^{-1}(j\omega_w) = e^{j2 \arctg \omega_w}$$

$$G(T^{-1}(w)) \Big|_{w=j\omega_w} = G\left(e^{j2 \arctan \omega_w}\right)$$

$$\text{Poniamo } 2 \arctan \omega_w = \omega T,$$

$$\omega_w = \tan \frac{\omega T}{2}$$



$$G(T(\omega)) \Big|_{p = j \cdot \tan \frac{\omega T}{2}} = G(e^{j\omega T})$$

■ Per costruire il diagramma di Bode.

1)  $z \rightarrow \frac{1+w}{1-w}$

2) Costruiamo il diagramma di Bode per  $w = j\omega$   
Applicando le regole del caso continuo

3) le pulsazioni discrete soddisfanno

$$\omega = \frac{2}{T} \arctg w$$

Es... continue

$$G(z) = \frac{z \cdot 0,2}{z + 0,5}$$

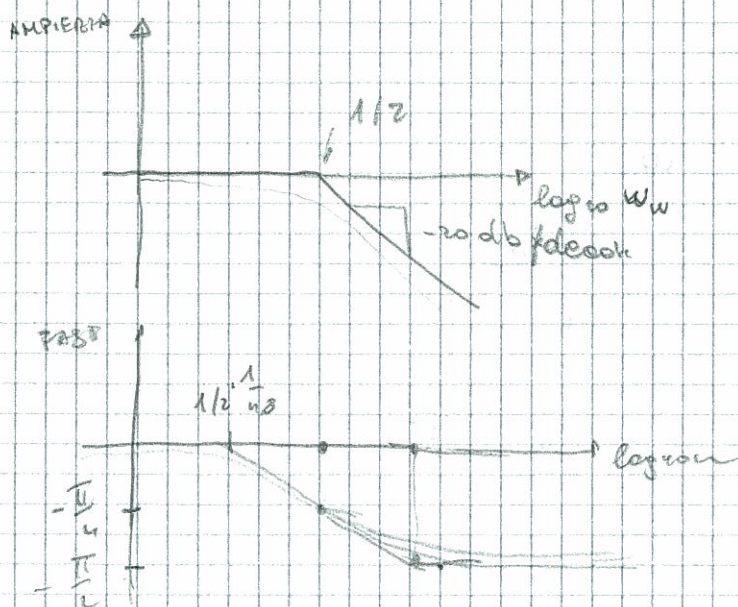
$$G(w) = \frac{\frac{1+w}{1-w} - 0,2}{\frac{1+w}{1-w} + 0,5} = \frac{0,8 + 1,2w}{1,5 + 0,5w}$$

$$G(w) = \frac{0,8}{1,5} \cdot \frac{1 + \frac{1,2}{0,8} w}{1 + \frac{0,5}{1,5} w} = \frac{0,8}{1,5} \cdot \frac{1 + 1,5w}{1 + 0,333w}$$

$$G(w) = K \frac{(1 + \underbrace{z_1 w}_{\text{cost. di tempo}})}{(1 + z_3 w) (1 + z_4 w) (1 + 2\delta \frac{w}{\omega_n}) \left(1 + 2\frac{\delta}{\omega_n} w + \frac{w^2}{\omega_n^2}\right)}$$

Pol. complessi coniugati.

$$\frac{1}{(1 + z w)}$$





$$\frac{1}{1 + 2\delta \frac{\omega}{\omega_n} + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

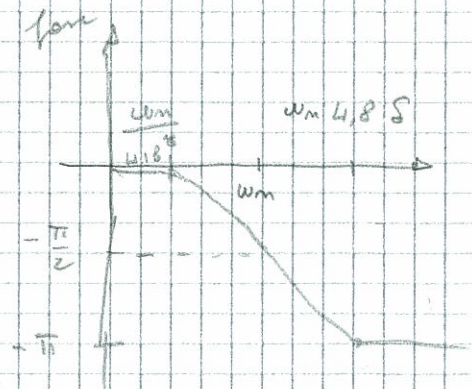
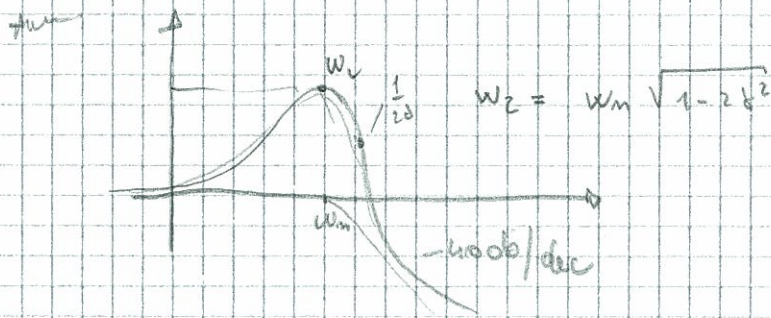
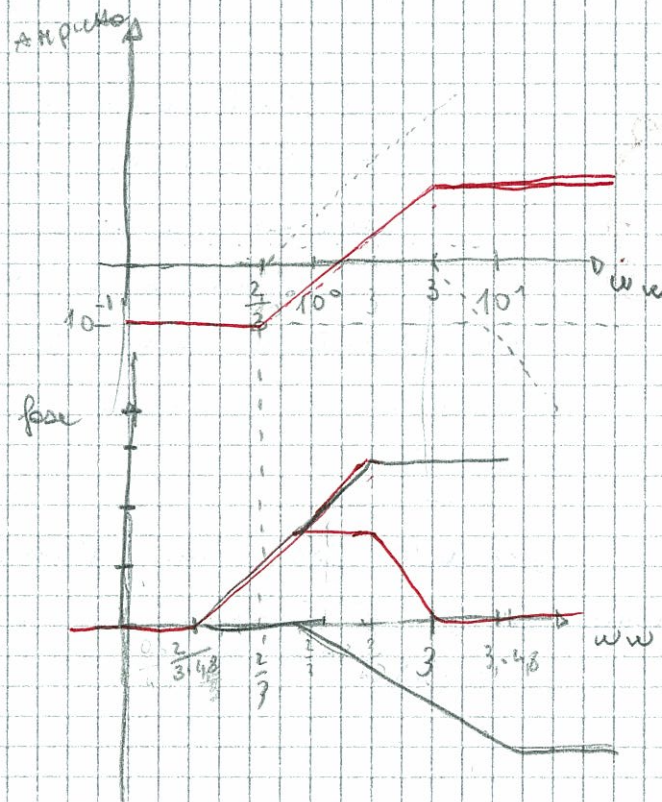


Diagramma esercizio-

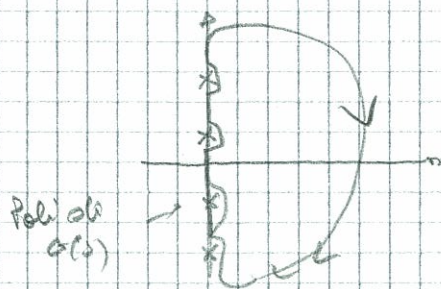


$$\omega = \frac{2}{3} \tan \omega_n$$



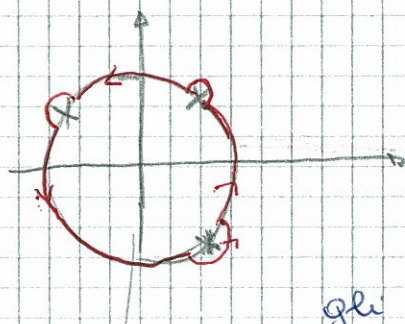
## DIAGRAMMA di Nyquist.

→ Nel Continuo  $G(s)$  lungo una curva di Nyquist



→ Nel Discreto

Il contorno di Nyquist è la circonferenza unitaria e in caso di poli ci sono delle semicirconferenze esterne.

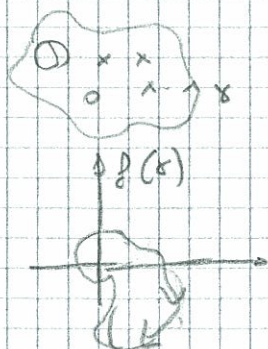


Il contorno di Nyquist per un sistema discreto è un cammino ~~chiuso~~ che percorre 1 volta in senso antiorario il cerchio unitario, gli eventuali poli sul cerchio unitario sono circondati in senso antiorario con piccoli semicircoli.

Def Il Diagramma di Nyquist per una funzione di trasferimento discreta  $G(z)$  è l'immagine del contorno di Nyquist rispetto a  $G(z)$ .

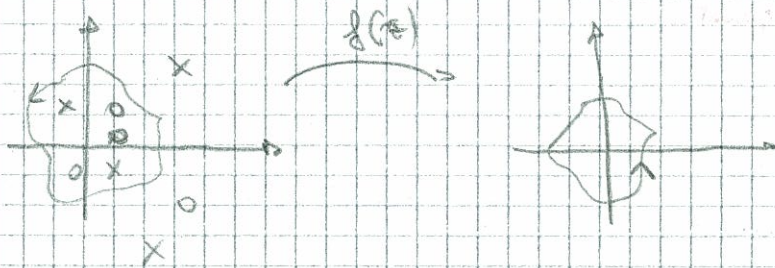
Principio dell'argomento.

Dato una funzione complessa  $f(z)$ , definita come rapporto tra due polinomi, e dato una curva  $\gamma$  che non tocca



nessun polo di  $f(z)$  e che circonda 1 volta in senso antiorario una regione del piano complesso  $D$ ; allora la curva  $f(\gamma)$ , immagine di  $\gamma$  rispetto a  $f(z)$  circonda l'origine un numero di volte pari a  $z - p$  dove  $z$  e  $p$  sono i numeri di zeri e poli racchiusi nella regione  $D$ .





Il teorema di Nyquist serve per valutare la stabilità del sistema



**TEOREMA di Nyquist per i sistemi discreti.**

Un sistema discreto con guadagno ad anello  $G(z)$  razionale e strettamente propria, collegato in retroazione unitaria ~~è~~ asintoticamente stabile se e solo se il diagramma di Nyquist circonda il punto critico  $-1$  un numero di volte in senso antiorario pari al numero di poli instabili di  $G(z)$ .

**D.I.H.**  $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ ,  $n$  grado di  $D(z)$ .

$T(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$  In particolare  $1+G(z)$  è l'eq. caratteristica

$z_-$  = Zeri stabili di  $1+G(z)$

$z_+$  = Zeri instabili di  $1+G(z)$ .

Possiamo scrivere  $1+G(z) = 1 + \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{D(z) + N(z)}{D(z)}$

I poli di  $1+G(z)$  coincidono con quelli di  $G(z)$ .

Applichiamo il principio dell'Argomento alla funzione  $1+G(z)$ , usando come curve e contorno di Nyquist.

$$\# \text{ giri} = \# \text{ zeri} - \# \text{ poli}$$

Avere stabilità asintotica è equivalente a chiedere  $\# \text{ zeri} = n$ .

$$\# \text{ poli} = n - p_+ \quad \hookrightarrow \text{poli instabili } G(z) \text{ (fuori dal cerchio unitario)}$$

Da cui otteniamo

$$\# \text{ giri} = n - (n - p_+) = p_+$$

Il numero di giri che l'immagine del contorno di Nyquist rispetto alla funzione  $1+G(z)$  percorre intorno all'origine è uguale al numero di giri che l'immagine del contorno di Nyquist rispetto a  $G(z)$  percorre intorno al punto critico  $-1$ .



## Variazione del Teorema di Nyquist.



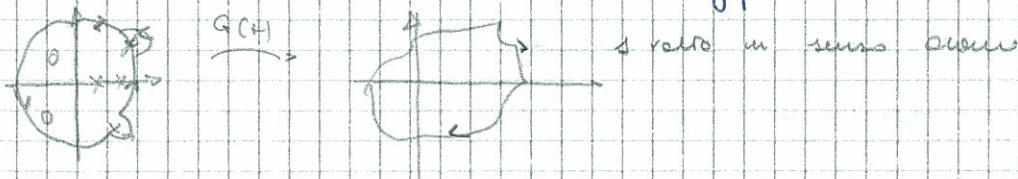
l'equazione  $T(z) = \frac{G(z)}{1 + KG(z)}$ , l'eq. caratteristica è  $1 + KG(z) = 0$

$\frac{1}{K} + G(z) = 0$ . Cambia il fatto che il punto critico è diventato  $-\frac{1}{K}$ .

- Nelle ipotesi del Teorema di Nyquist, se il sistema è collegato in retroazione con un guadagno  $K$ , allora il sistema è asintoticamente stabile se il diagramma di Nyquist circonda il punto critico  $-\frac{1}{K}$  un numero di volte in senso antiorario pari al numero di poli instabili di  $G(z)$ .

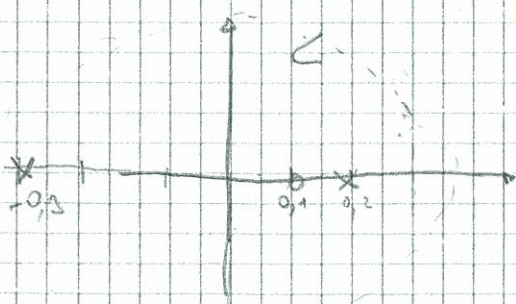
**Proprietà.** (Applichiamo il Teorema dell'argomento)

Il numero di giri che il diagramma di Nyquist completo percorre attorno all'origine in senso antiorario è dato dalla differenza tra numero di poli e zeri contenuti nel contorno di Nyquist.



## Esempio.

$$G(z) = \frac{z - 0,1}{(z - 0,2)(z + 0,3)}$$



$$G(e^{j\omega T}) = \frac{e^{j\omega T} - 0,1}{(e^{j\omega T} - 0,2)(e^{j\omega T} + 0,3)}$$

per  $\omega \in [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  il cerchio unitario.

Problema  $G(z)$  diventa irrazionale

Oppure possiamo utilizzare la Trasformata bilineare.

Se fattorizziamo si lascia fattorizzare!

$$z \rightarrow \frac{1+w}{1-w} \quad G(w) = \frac{\frac{1+w}{1-w} - 0,1}{\left(\frac{1+w}{1-w} - 0,2\right)\left(\frac{1+w}{1-w} + 0,3\right)}$$

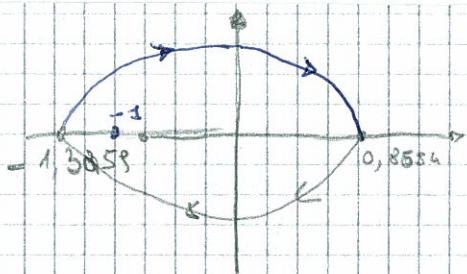
$$= \frac{(1+w)(1-w) - 0,1(1-w)^2}{[(1+w) - 0,2(1-w)][(1+w) + 0,3(1-w)]} = \frac{(0,9 + 1,1w)(1-w)}{(0,8 + 1,2w)(1,3 + 0,2w)}$$

$$G(0) = \text{guadagno statico} = 0,8654$$

$$G(\infty) = -1,3095$$

$$w = j\omega \Rightarrow G(j\omega) = \frac{(0,9 + j1,1\omega)(1 - j\omega)}{(0,8 + j1,2\omega)(1,3 + j0,2\omega)}$$





$$\arg G(j\omega) \big|_{\omega=0} = 0$$

$$\arg G(j\omega) \big|_{\omega=\infty} = -\pi$$

Per fare il grafico completo lo raddoppio.

$$\arg G(j\omega) = \arg \frac{11}{0,8} + \arg(-\omega) - \arctan\left(\frac{1,2}{0,8}\right) - \arctan\left(\frac{0,7}{1,8}\right)$$

Il sistema NON è asintoticamente stabile.

$$\text{Se } G(z) = \frac{K(z-0,1)}{(z-0,2)(z+0,3)}$$

Per quali valori di  $K$  è asint. stabile?

$-\frac{1}{K}$  dovrà stare alla sinistra di  $-1,3095$  o alla destra di  $0,8654$

$$\begin{cases} -\frac{1}{K} < -1,3095 \text{ oppure} \\ -\frac{1}{K} > 0,8654. \end{cases}$$

Esercizio

$$G(z) = \frac{z}{(z-0,6)(z-1,5)}$$

$$z \rightarrow \frac{1+w}{1-w}$$

$$G(w) = \frac{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)}{\left(\frac{1+w}{1-w}-0,6\right)\left(\frac{1+w}{1-w}-1,5\right)}$$

$$= \frac{(1+w)(1-w)}{(0,4+1,6w)(-0,5+2,5w)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{(1+j\omega)(1-j\omega)}{(0,4+1,6j\omega)(-0,5+2,5j\omega)}$$

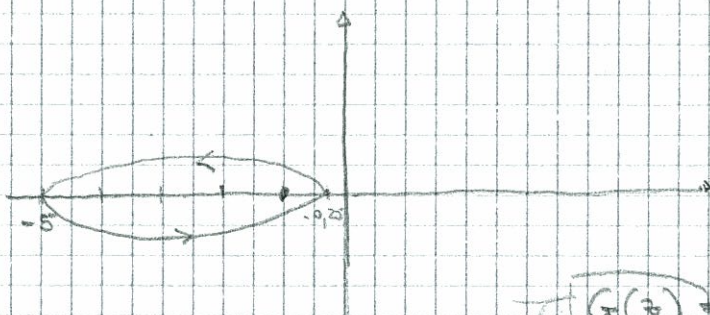
$$G(0) = -5$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = -0,25$$

$$\arg(G(j\omega)) = \arctan(\omega) - \arctan(\omega) + \pi$$

$$\arg(G(j\omega)) \big|_{\omega=0} = \pi$$

$$\arg(G(j\omega)) \big|_{\omega=\infty} = 0$$



Per  $K=1 \Rightarrow p.c. = -1$

Asint. stabile.

$$-5 < -\frac{1}{K} < -0,25$$

$$0,2 < K < 4$$



## Esercizio

$$G(z) = \frac{z+0,5}{(z-1)(z-0,2)}$$

↳ ci sarà una singolarità.

$$G(w) = \frac{\frac{(1+w)}{(1-w)} + 0,5}{\left(\frac{1+w}{1-w} - 1\right) \left(\frac{1+w}{1-w} - 0,4\right)} = \frac{(1,5 + 0,5w)(1-w)}{2w(0,6-w)}$$

Il suo eq. ha un polo in zero ( $1 \rightarrow$  Immaginaria  $\rightarrow$  Origine)

$$G(w) = \frac{1,25 (1 + 0,333w) (1-w)}{w (1 + 2,333w)}$$

condizione necessaria = GUARDAANDO  $[Z_{NUM} - Z_{DEN}]$ .

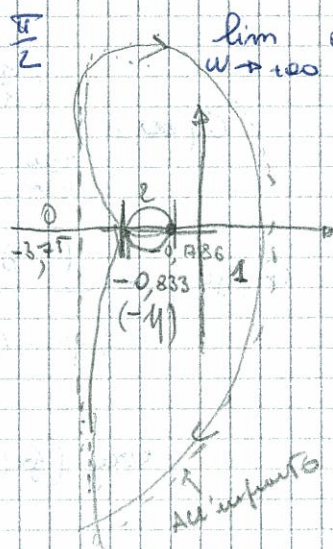
$$G = 1,25 \cdot [0,333 - 1 - 2,333] = -3,75$$

$$G(jw) = 1,25 \frac{(1 + j0,333w) (1 - jw)}{jw (1 + j2,333w)}$$

$$\arg G(jw) = \arctg 0,333w - \arctg w - \frac{\pi}{2} - \arg 2,333w =$$

$$\arg G(0) = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{w \rightarrow \infty} \arg G(jw) = -\pi \quad \lim_{w \rightarrow \infty} |G(jw)| = 0,1786$$

- 1 zero
- 2 poli
- 1 giro in senso orario



Interessa l'asse reale?

→ Interessante con Tabella di Routh

$$1 + G(w) = 0$$

$$w^2(2,8w - 0,5) + w(1,2w - 1) + 1,5 = 0$$

$$2,8w - 0,5 \quad 1,5$$

$$(1,2w - 1) \quad 0$$

volgiam in sei nulla  $1,2w - 1 = 0$

$$w = 0,833$$

Per completare usiamo la PROPRIETA' dei giri attorno all'origine.

$$K = 1 \Rightarrow \text{a. s.}$$

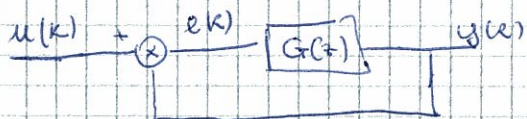
$$-\frac{1}{K} < -0,833$$

$$K \neq 1, 2$$

Condizione dei punti su cui il sistema è stabile.



## Errori a Regime.



$$Y(z) = U(z) \cdot \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

$$e(k) = \text{errore} = u(k) - y(k)$$

$$E(z) = U(z) - Y(z) = U(z) \frac{1}{1+G(z)}$$

▲ Errore a regime con gradino unitario.

$$u(k) = 1$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{1+G(z)}$$

Errore a regime  $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{(z-1)} \frac{1}{1+G(z)} = \frac{1}{1+G(1)}$

$G(1) = \text{GUADAGNO STATICO}$

$$= \frac{1}{1+K_S} \quad \text{con } K_S = G(1)$$

▲ Errore a regime con rampa

$$u(k) = k$$

$$U(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\rightarrow E(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1+G(z)}$$

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \rightarrow E(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cdot \frac{D(z)}{D(z) + N(z)}$$

Se  $D(z)$  non contiene nessun  $(z-1)$ , allora  $E(z)$  avrebbe  $(z-1)^2$  e quindi avrebbe un polo INSTABILE. Quindi dovrà essere

$$D(z) = (z-1) D_1(z)$$

$$E(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cdot \frac{(z-1) D_1(z)}{(z-1) D_1(z) + N(z)}$$

ERRORE A REGIME  $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{(z-1)} \frac{D_1(z)}{(z-1) D_1(z) + N(z)} = \frac{D_1(z)}{N(z)} =$

$$= \frac{1}{\frac{N(z)}{D_1(z)} (z-1)} \bigg|_{z=1} = \frac{1}{K_V}$$

$$P(z)(z-1) = K_V = \text{COSTANTE DI VELOCITA'}$$

Se  $P(z) = \frac{N(z)}{D_1(z)(z-1)^2}$

$$K_V = \frac{N(z)(z-1)}{D_1(z)(z-1)^2} \sim \infty$$

ERRORE A REGIME VA A ZERO

▲ Errore a regime con PARABOLA.

$$u(k) = \frac{k^2}{2}$$

$$U(z) = \frac{z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$E(z) = \frac{z(z+1)}{2(z-1)^3} \cdot \frac{1}{1+G(z)}$$

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$\rightarrow E(z) = \frac{z(z+1)}{2(z-1)^3} \cdot \frac{D(z)}{D(z) + N(z)}$$



Affinche' l'errore non diverga  $D(z)$  deve avere più poli in 1

$$D(z) = (z-1)^2 D_1(z)$$

$$E(z) = \frac{z(z+1)}{2(z-1)^2} \frac{(z-1)^2 D_1(z)}{(z-1)^2 D_1(z) + N(z)}$$

$$l_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{z(z+1)}{2(z-1)^2} \frac{D_1(z)}{D(z)} = \frac{D_1(1)}{N(1)}$$

$$l_{\infty} = \frac{1}{\frac{N(z)}{D(z)} (z-1)^2} \Big|_{z=1} = \frac{1}{K_a}$$

$K_a = \text{COSTANTE DI ACCELERAZIONE} = P(z) (z-1)^2 \Big|_{z=1}$

... Riassumendo

$\mu(k)$	0	1	2	3
1	$\frac{1}{1+k_p}$	0	0	0
K	0	$\frac{1}{K_v}$	0	0
$\frac{K^2}{2}$	0	0	$\frac{1}{K_a}$	0

Si vede il principio del Modello Interno.

Se vogliamo seguire il segnale al suo interno il sistema dovrà avere la stessa conf del segnale in ingresso.

Possono queste formule presentarsi anche nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & \rightarrow 1 \\ K & \frac{1}{T} & \rightarrow K T \\ \frac{K^2}{2} & \frac{T^2}{2} & \rightarrow \frac{K^2 T^2}{2} \end{array}$$

$$l_{\infty} = \frac{1}{1+K_p}$$

$$l_{\infty} = \frac{1}{K_v}$$

$$l_{\infty} = \frac{T^2}{K_a}$$

Esempio

$$G(z) = \frac{1}{18} \cdot \frac{(z+0,8)}{(z-0,8)(z-0,5)}$$



Specifiche: 1.  $l_{\infty}$  al gradino UNITARIO = 0,1  
2.  $\tau_A \approx 3$

1)  $z \rightarrow w$   $z = \frac{1+w}{1-w}$

2)  $C(w) = K \frac{(1+zw)}{(1+zw)}$

3)  $w = \frac{z-1}{z+1} \rightarrow C(z)$



$$1) z \rightarrow \frac{1+w}{1-w}$$

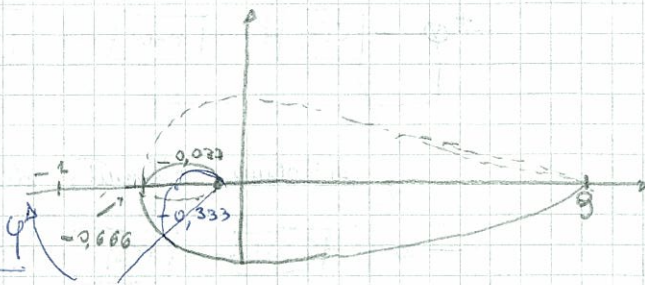
$$G(w) = \frac{1}{18} \frac{(1,8 + 0,2w)(1-w)}{(0,2 + 1,8w)(0,5 + 1,5w)} = \frac{(1 + \frac{1}{9}w)(1-w)}{(1+3w)(1+3w)}$$

$$C(w) = K \frac{(1+2zw)}{(1+zw)}$$

g //

$$K_{eq} = \frac{1}{1+K_S} = \frac{1}{10} \Rightarrow K_S = 9$$

$$K G(j\omega) = \frac{9 \cdot K (1 + 5\omega/9) (1 - j\omega)}{(1 + j\omega 9) (1 + j\omega 3)}$$



$$\arg K G(j\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{9}\right) - \arctg(\omega) - \arctg(9\omega) - \arctg(3\omega)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg K G(j\omega) = -\pi$$

$$\arg K G(0) = 0$$

$$\eta + K G(\omega) = 0 \quad \omega^2 (2,7\eta - 0,1) + \omega (1,2\eta - 0,8) + (9,8 + 0,1\eta)$$

$$1,2\eta - 0,8 = 0 \quad \eta = 0,666$$

$$\eta_A = 1,5 = \frac{-1}{-0,666} \Rightarrow \text{Intensum + vicino al punto } -1.$$

→ Applichiamo le formule di inversione.

$$\text{Trovo } \omega \text{ con } \eta = 0,666 \rightarrow \omega^2 (1,700) + 0,966 = 0 \rightarrow \omega = \pm j 0,75$$

$$\text{Proviamo } \omega_0 = 0,5$$

$$K G(j\omega_0) = -1,117 - j0,471 = 1,213 e^{-j2,24}$$

$$M = 3 \cdot 1,213 = \eta_A |G(j\omega)| = 3,639$$

$$\varphi = \pi - 2,24 = 0,398$$

Posso applicare le formule di Inversione se e solo se

$$\eta \cos \varphi > 1 \quad 3,38 > 1$$

$$\alpha = \frac{\eta \cos \varphi - 1}{\eta (\eta - \cos \varphi)} = 0,238$$

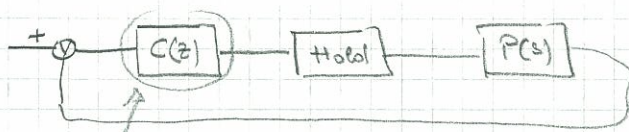
$$z = \frac{\eta - \cos \varphi}{\omega_0 \sin \varphi} = 14,20$$



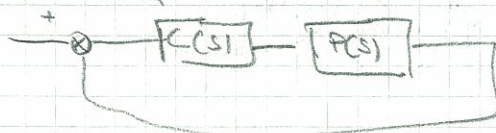
$$C(w) = 9 \frac{1 + 3,334w}{14,00w}$$

$$C(z) = \frac{2,599z - 1,4}{z - 0,866}$$

Progettare un controllore.



controllore ottenuto discretizzando  $C(s)$

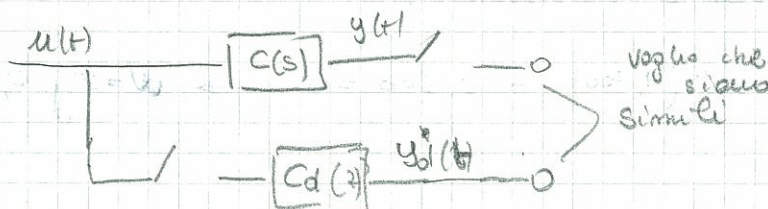


Dove  $C(s)$  è il controllore del sistema continuo  $P(s)$ .

Vi sono vari metodi per fare la discretizzazione

- 1) Approssimazione della derivata continua
  - diff in avanti
  - diff all'indietro
  - trasf. di TUSTIN.
- 2) Invarianza alle risposte ai segnali canonici
- 3) Metodo delle corrispondenze POLI - ZERI.

1) Approssimazione della derivata continua



$$Y(s) = C(s) U(s) \quad \text{dove} \quad C(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}$$

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) U(s)$$

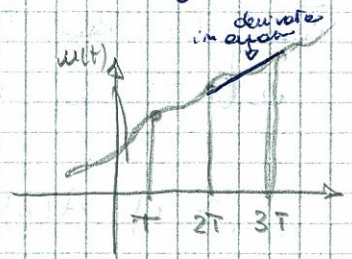
Facciamo la antitrasformata  $L^{-1}$ , allora otteniamo

$$\begin{aligned} a_m D^m y(t) + a_{m-1} D^{m-1} y(t) + \dots + a_0 y(t) = \\ = b_m D^m u(t) + b_{m-1} D^{m-1} u(t) + \dots + b_0 u(t) \end{aligned}$$



Per ottenere un segnale discreto allora dobbiamo approssimare le derivate continue con un operatore discreto.

A seconda di come si approssima la derivata si ottengono i 3 sottometodi detti sopra:



a) Differenza in avanti.

$$D u(t) \big|_{t=kT} \approx \frac{u((k+1)T) - u(kT)}{T}$$

$$Z \{ D u(t) \big|_{t=kT} \} \approx \frac{z U(z) - U(z)}{T} = \left( \frac{z-1}{T} \right) U(z).$$

L'operatore di derivazione nel piano  $z$  è

$$\boxed{\frac{z-1}{T}}$$

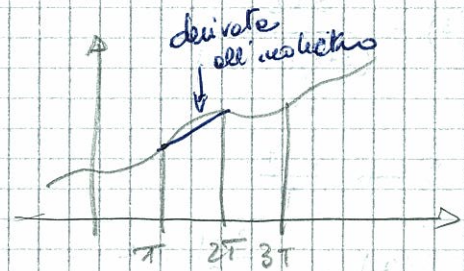
b) Differenza all'indietro.

$$D u(t) \big|_{t=kT} \approx \frac{u(kT) - u((k-1)T)}{T}$$

$$Z \{ D u(t) \big|_{t=kT} \} = \frac{1 - z^{-1}}{T} U(z)$$

L'operatore di derivazione nel piano  $z$  è

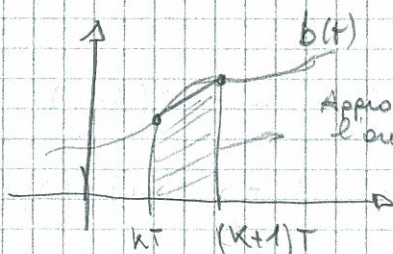
$$\boxed{\frac{z-1}{zT}}$$



c) Trasformazione di Tustin.

$Du(t) = b(t)$  per ipotesi.

$$\int_{kT}^{(k+1)T} D u(t) dt = \int_{kT}^{(k+1)T} b(t) dt$$



facciamo l'integrale su entrambi le parti  
fra gli istanti di campionamento  $kT$  e  $(k+1)T$

con l'area del trapezio.



$$a((k+1)T) - a(kT) = T \left[ \frac{b((k+1)T) + b(kT)}{2} \right]$$

Facendo la trasformata zeta dei segnali campionati  $a(kT)$  e  $b(kT)$ , otteniamo

$$(z-1) A(z) = \frac{T}{2} (z+1) B(z)$$

$$B(z) = \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)} A(z)$$

L'Operatore di derivazione nel piano  $z$  è

$$\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

Esempio.

$$C(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+5)}$$

a)  $s \rightarrow \frac{z-1}{T}$

$$C_d(z) = \frac{\frac{z-1}{T} + 2}{\left( \frac{z-1}{T} + 3 \right) \left( \frac{z-1}{T} + 5 \right)} = zT \frac{z-1+2T}{(z-1+3T)(z-1+5T)}$$

$T = 0,1s$   $C_d(z) = 0,1 \frac{z-0,8}{(z-0,7)(z+4)}$

b)  $s \rightarrow \frac{z-1}{zT}$

$$C_d(z) = \frac{\frac{z-1}{zT} + 2}{\left( \frac{z-1}{zT} + 3 \right) \left( \frac{z-1}{zT} + 5 \right)} = zT \frac{z+1+2zT}{(z-1+3zT)(z-1+5zT)}$$

c)  $s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

$$C_d(z) = \frac{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + 2}{\left( \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + 3 \right) \left( \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + 5 \right)} = \frac{2z - 2 + 2T(z+1)}{(2z - 2 + 3T(z+1)) \left( 2(z-1) + 5T(z+1) \right)} T(z+1)$$



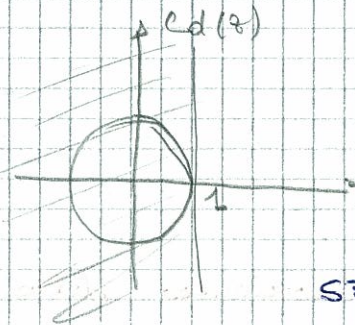
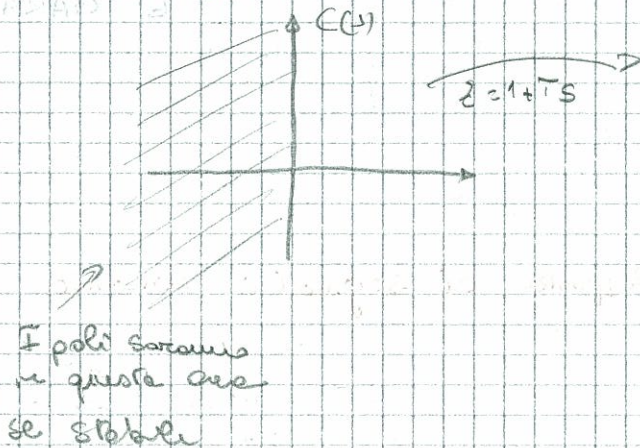
## Stabilità del controllore dopo discretizzazione

Facciamo queste sostituzioni si cambiano i poli  $s \rightarrow z$ .

Io voglio che i poli  $z$  facciano rimanere stabile il controllore. La stabilità del controllore è fondamentale altrimenti vi è una uscita che va all'infinito e questo non va bene.

Verifichiamo che le Trasf. facciano rimanere stabile il controllore

a)  $s \rightarrow \frac{z-1}{T}$



STABILITÀ  
NON  
GARANTITA.

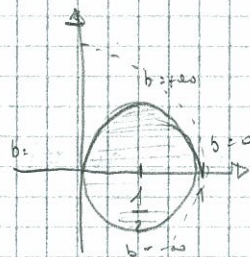
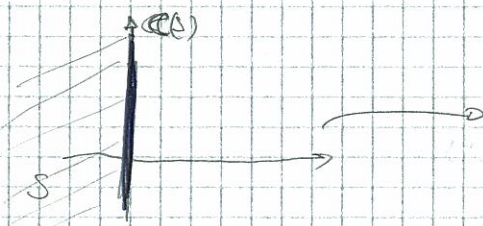
b)  $s \rightarrow \frac{z-1}{z-1}$

ZTS =  $z-1$        $z = \frac{1}{1-Ts}$

Come viene Trasformato l'asse immaginario.

$s = bj \Rightarrow z = \frac{1}{1-bjT} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1+bjT}{1-bjT}$   
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j 2 \arctg bT}$

Si rappresenta con un cerchio



Si trova all'interno del cerchio unitario

STABILITÀ  
GARANTITA.

grazie al ritardo di 1 campione.



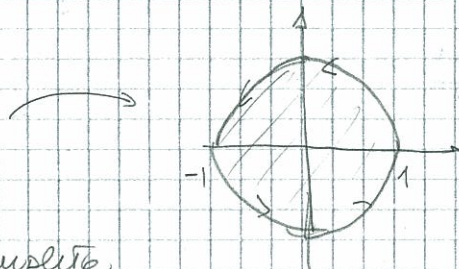
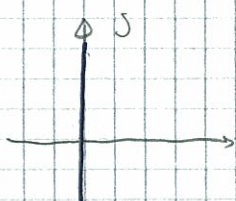
c)  $S \rightarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$  Tustin

$S \rightarrow \frac{z-1}{z+1}$  BILINEARE (Proprietà: stabile  $u_s \rightarrow$  archio unitario)

$$T(z+1)S = 2(z-1)$$

$$z = \frac{Ts + 2}{T - 2} = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} = \frac{1 + j\frac{T}{2}\omega}{1 - j\frac{T}{2}\omega}$$

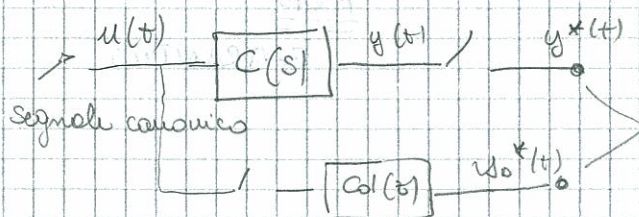
$$|z| = e^{2 \arctan \frac{bT}{2}}$$



LA STABILITÀ  
È GARANTITA

La trasform. di Tustin è completa  
(la Tensione unipolare)

2) Metodo dell'invariante della Risposta ai segnali canonici.



$u(t)$  è specifico

Siano identici

$$y_d^*(t) = y^*(t)$$

$$Z\{Y(s)\} = Z\{y(t) |_{t=kT}\}$$

$$y_d(z) = Z\{Y(s)\}$$

$$Z\{u(s)\} Cd(z) = Z\{u(s) C(s)\}$$

$$Cd(z) = \frac{Z\{u(s) C(s)\}}{Z\{u(s)\}}$$

1) Impulso

$$u(s) = 1 \quad \rightarrow \quad u(t) = \delta(t)$$

$$Cd(z) = Z\{C(s)\}$$



## b) Gradus

$$u(t) = 1 \rightarrow u(s) = \frac{1}{s}$$

$$Cd(z) = \frac{z \left\{ \frac{C(s)}{s} \right\}}{\frac{z}{z-1}} = \frac{z-1}{z} z \left\{ \frac{C(s)}{s} \right\}$$

## c) Rampe

$$u(t) = t \rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Cd(z) = \frac{z \left\{ \frac{C(s)}{s^2} \right\}}{z \left\{ \frac{1}{s^2} \right\}} = \frac{z \left\{ \frac{C(s)}{s^2} \right\}}{\frac{zT^2}{(z-1)^2}} = \frac{(z-1)^2}{zT^2} z \left\{ \frac{C(s)}{s^2} \right\}$$

## Esempio

$$a) C(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Eq. all' impulso

$$Cd(z) = z \left\{ \frac{s}{(s+1)(s+2)} \right\} = -\frac{z}{z-e^{-T}} + z \frac{z}{z-e^{-2T}}$$

$$b) C(s) = \frac{1}{s+3}$$

Esp. al gradus

$$Cd(z) = \frac{z-1}{z} z \left\{ \frac{1}{s(s+3)} \right\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-e^{-3T}}{z-e^{-3T}}$$



## Correzione di prewarping

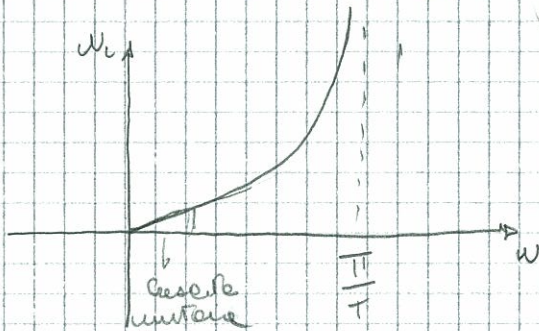
La trasformazione di Tustin introduce uno sfasamento.

PROPRIETÀ (RISPOSTA IN FREQUENZA di un CONTROLLORE discretizzato con Tustin)

Se  $C(s)$  è un controllore continuo e  $C_d(z)$  è il controllore discretizzato ottenuto con la trasformazione di Tustin

$$C_d(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = C(s) \Big|_{s=j\omega_c}$$

dove  $\omega_c = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$ .



se  $\frac{\omega T}{2} \ll \frac{\pi}{2}$  allora

$$\omega_c \approx \omega$$

La pendenza è lineare

Diventa una identità.

## Dimostrazione

$$C_d(z) = C\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right)$$

$$C_d(e^{j\omega T}) = C\left(\frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1}\right) = C\left(\frac{2}{T} \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}}\right)$$

diviso numeratore e denominatore per  $e^{j\frac{\omega T}{2}}$

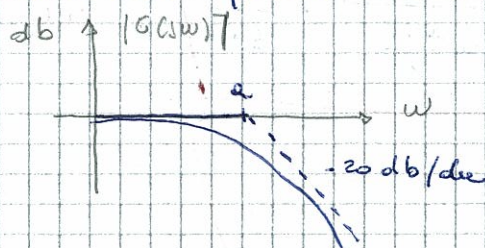
$$= C\left(\frac{2}{T} j \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)$$

$$= C\left(\frac{2}{T} j \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}}\right) = C\left(\frac{2}{T} j \frac{2 \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)}\right)$$



Vediamo cosa succede per un sistema del primo ordine.

$$C(s) = \frac{a}{s+a}$$



$$S \Rightarrow \frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

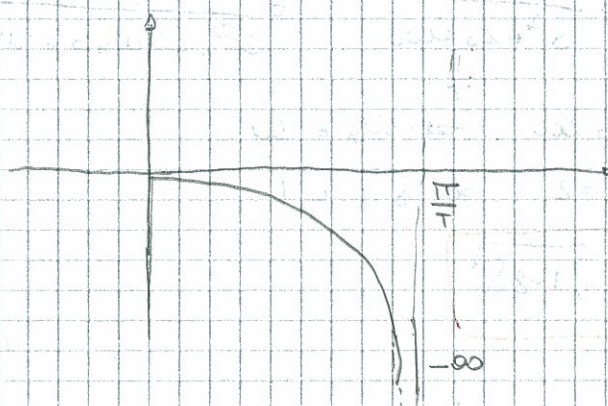
$$C_d(z) = \frac{a}{\frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1} + a}$$

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{a}{\frac{z}{T} \frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1} + a} = \frac{a}{\frac{z}{T} j \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) + a}$$

Il guadagno statico è uguale a prima.

$$\omega \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$\omega = \frac{\pi}{T} \Rightarrow$  la tg diverge  
il guadagno tende a 0



A pulsazioni basse il guadagno è uguale, ma ad alte frequenze il guadagno è molto più basso.

Quindi dobbiamo fare una correzione affinché non vi sia questa distorsione in frequenza.

Per ~~fare~~ fare questa correzione scriviamo che

$$S = \left( f \right) \frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1}, \text{ Allora}$$

$$\omega_c = f \frac{z}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \text{ e quindi possiamo fissare } f$$

in modo tale che la freq. nel continuo e quella discreta coincidano.

$$\boxed{\omega_0}$$

$$\omega_0 = f \frac{z}{T} \tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)$$

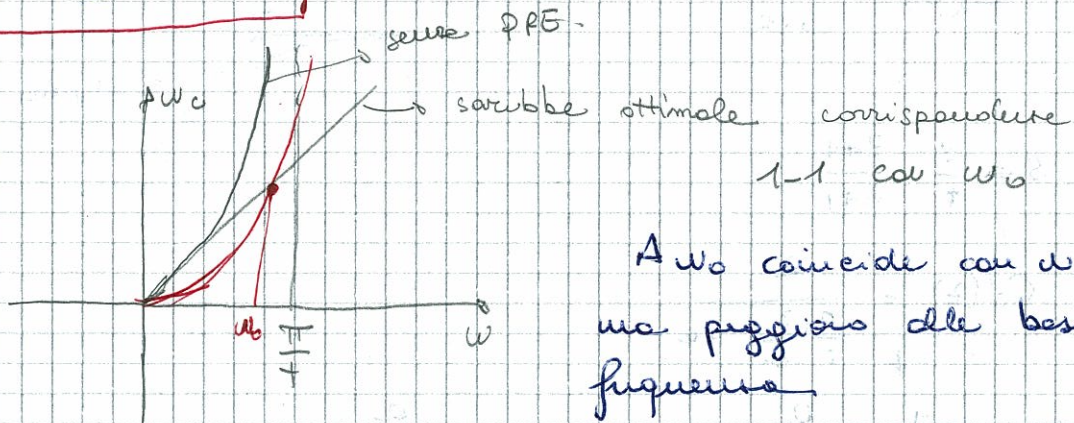
$$f = \frac{\omega_0 T}{2} \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}$$

$$S = \frac{\omega_0 T}{2} \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)} \frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1}$$



$$S = \frac{\omega_0}{\tan \frac{\omega_0 T}{2}} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Trasf. di Tustin  
con PREWARPING.



A  $\omega_0$  coincide con  $\omega_c$   
ma peggiora delle basse  
frequenze.

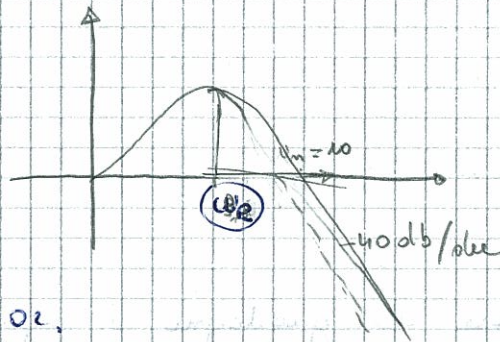
Es.

$$C(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 100} = \frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

$$\omega_m^2 = 100 \Rightarrow \omega_m = 10$$

$$2\delta\omega_m = 2 \Rightarrow \delta = 0,1$$

$$\omega_R = \omega_m \sqrt{1-2\delta^2}$$



$$\omega_R = 9,89$$

$$|G(j\omega_R)| = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}} = 5,02.$$

Può essere importante che alla pulsanza  $\omega_R$  vengano  
lo stesso valore e quindi diciamo vogliamo che il  
controllore vengano quel guadagno e quelle pulsanze  $\omega_R$ .

Come caratteristica chiediamo di fissare  $\omega_m$  ( $\omega_m \approx \omega_R$  in sistemi  
del 2° ordine).

$$S \rightarrow \frac{\omega_0}{\tan \frac{\omega_0 T}{2}} \cdot \frac{z-1}{z+1} = 18,30 \frac{z-1}{z+1}$$

$$\omega_0 = \omega_m = 10 \text{ rad/s} \quad T = 0,1.$$

$$C_d(z) = \frac{100}{\left(18,30 \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 2 \left(18,30 \frac{z-1}{z+1}\right) + 100}$$



### 3) Metodo Corrispondenza Poli - Zeri.

$$C(s) = \frac{K(s-l_1)(s-l_2) \dots (s-l_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_n)}$$

Facciamo la considerazione  $z = e^{sT}$   $s = \frac{\log z}{T}$

Non possiamo fare questa sostituzione perché la funzione è trascendente.

$$C_d(z) = \frac{K \left( \frac{\log z}{T} - l_1 \right) \left( \frac{\log z}{T} - l_2 \right) \dots \left( \frac{\log z}{T} - l_m \right)}{\left( \frac{\log z}{T} - p_1 \right) \left( \frac{\log z}{T} - p_2 \right) \dots \left( \frac{\log z}{T} - p_n \right)}$$

$$C_d(e^{sT}) = \frac{K(j\omega - l_1)(j\omega - l_2) \dots (j\omega - l_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)} = C(j\omega)$$

Sarebbe una corrispondenza perfetta, siccome non si può fare dobbiamo fare delle approssimazioni per renderla possibile la sostituzione (ovvero non trascendente).

Il NUMERATORE di  $C_d(z)$  è 0 se  $z = e^{l_1 T}, e^{l_2 T}, e^{l_m T}$   
e il denominatore si annulla se

$$z = e^{p_1 T}, e^{p_2 T}, \dots, e^{p_n T}$$

$$C_d(z) = K_d \frac{(z - e^{l_1 T})(z - e^{l_2 T}) \dots (z - e^{l_m T})}{(z - e^{p_1 T})(z - e^{p_2 T}) \dots (z - e^{p_n T})}$$

Gli zeri e poli corrispondono qui quello ideale.

La Costante  $K_d$  si determina imponendo che:

$$C(s) \Big|_{s=0} = C_d(z) \Big|_{z=1}$$

PER LA DISCRETIZZAZIONE CON CORRISPONDENZA  $sT \rightarrow zT$ ,

1) Il controllore discretizzato ha i poli in

$e^{p_1 T}, e^{p_2 T}, \dots, e^{p_n T}$  dove  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sono poli di  $C(s)$

ha gli zeri in

$e^{l_1 T}, e^{l_2 T}, \dots, e^{l_m T}$  dove  $l_1, l_2, \dots, l_m$  sono gli zeri di  $C(s)$



2)  $K_d$  si determina imponendo

$$C(s) \Big|_{s=0} = C_d(z) \Big|_{z=1}$$

### Esempio

$$C(s) = \frac{a}{s+a}$$

Polo in  $-a \rightarrow$  polo in  $e^{-aT}$

$$C_d(z) = K_d \frac{a}{z - e^{-aT}}$$

$$C(0) = C_d(1) \quad 1 = \frac{K_d}{1 - e^{-aT}} \quad K_d = 1 - e^{-aT}$$

$$C_d(z) = (1 - e^{-aT}) \frac{a}{z - e^{-aT}} = \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}$$

Nella corrispondenza poli-zeri bisogna aggiungerli tanti zeri affinché il grado relativo sia zero.

Il grado relativo nei sistemi discreti è importante perché definisce quanto tardi l'ingresso influisce l'uscita del sistema.

$$Y(z) = H(z) \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0} \quad \text{grado relativo } m-n$$

$$a_m y(k+m) = -a_{m-1} y(k+m-1) - \dots - a_0 y(k) + b_m u(k+m) + b_{m-1} u(k+m-1) + \dots + b_0 u(k)$$

Ho un controller a velocità

$$C_d(z) = K_d \frac{(z+1)}{(z - e^{-aT})}$$



$\hookrightarrow$  C'è anche un altro motivo per cui aggiungo uno zero in  $-1$ : voglio avere un guadagno che tende a zero quando  $\omega \rightarrow \frac{\pi}{T}$ , perché  $C(s) \rightarrow 0$  per  $s \rightarrow +\infty$ .

$$C(0) = C_d(1)$$

$$1 = K_d \frac{2}{1 - e^{-aT}} \quad K_d = \frac{1 - e^{-aT}}{2}$$

$$C_d(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{2} \frac{z+1}{z - e^{-aT}}$$

Regole generali.

- 1) Gli zeri e i poli si pongono con la relazione  $z = e^{sT}$
- 2) Mettiamo tutti zeri in  $-1$ , quant'è il grado relativo
- 3) Si pone  $C(0) = C_d(1)$ , trovando  $K_d$ .

Es.

$$C(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$$

poli in  $-a, -b$

gr. rel. = 2

$C_d(z)$  avrà 2 poli in  $e^{-aT}$  e  $e^{-bT}$

$$C_d(z) = K_d \frac{(z+1)^2}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$$

$$C(0) = C_d(1)$$

$$\frac{1}{ab} = \frac{K_d 4}{(1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT})}$$

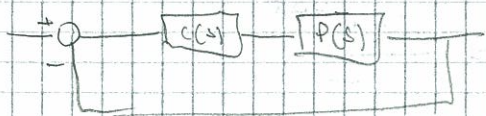
$$K_d = \frac{(1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT})}{4ab}$$

$$C_d(z) = \frac{(1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT})}{4ab} \frac{(z+1)^2}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$$



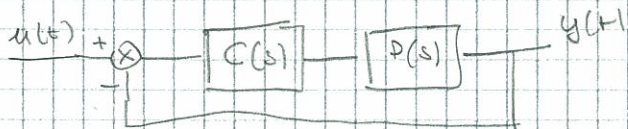
## TEMPO di CAMPIONAMENTO.

Il tempo di Campionamento è un punto critico perché se lo diminuiamo allora le prestazioni migliorano, ma il costo aumenta. Solitamente il tempo è trovato per tentativi.



Se  $x(t)$  un segnale passa basso di banda  $\omega_b$ , allora per il Teorema di campionamento

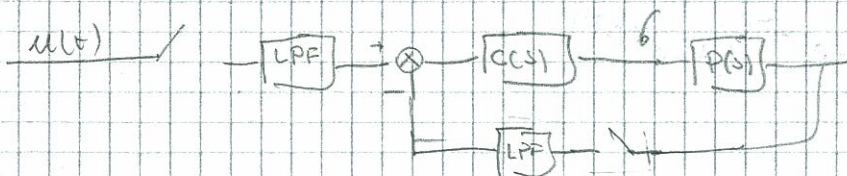
$$\frac{2\pi}{T} > 2\omega_b \rightarrow T < \frac{\pi}{\omega_b}$$



$u(t)$  e  $y(t)$  sono passa basso di banda  $\omega_b$ .

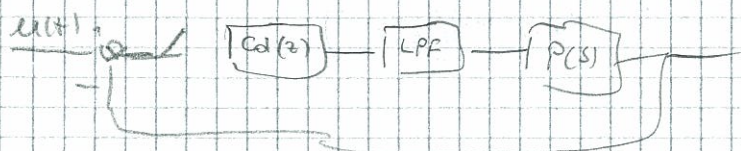
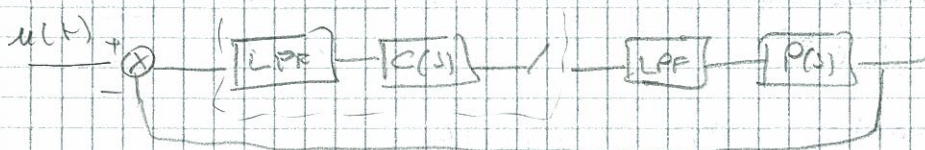
Allora posso aggiungere un campionatore con filtro LPF ideale sia all'ingresso che all'uscita senza modificare nulla.

Anche questo segnale è PB di banda



$\omega_b$  e quindi posso

scrivere

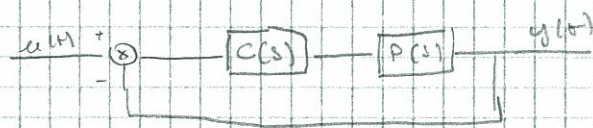


Questo schema è identico al primo ma a' solo due conclusioni non reali:

- segnali passa basso
- LPF (Filtro non realizzabile)



In queste ipotesi ci basta fissare  $\omega_b$  e attraverso la relazione  $T < \frac{\pi}{\omega_b}$ .



$$L(s) = C(s)P(s)$$

$$L(j\omega)$$

$$Y(s) = U(s) \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \rightarrow \text{uscita}$$

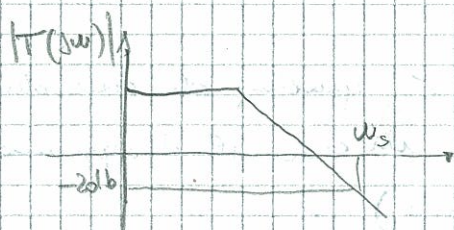
$$u(s) \rightarrow \text{ingresso}$$

La banda  $\omega_b$  è legata alla banda del sistema.

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)}$$

Facciamo il grafico di Bode.



$\omega_s$  è il punto in cui il guadagno del sistema è pari  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Affinché ingresso e uscita siano discriminabili dobbiamo chiedere:

1)  $u(t)$  sia passa-basso con banda  $\omega_b$

2) l'ampiezza di banda <sup>di</sup>  $T(s)$  deve essere minore uguale a  $\omega_b$ .

Questo perché se  $u(t)$  delle pulsazioni  $\omega_b$  è trascurabile, <sup>il guadagno</sup> ma se l'ampiezza di  $T(s)$  è grande allora il guadagno non è trascurabile e noi non ce ne accorgiamo.

Condizione per la scelta di  $T$

$$T < \frac{\pi}{\omega_b} \rightarrow \text{max tra banda di } u(t) \text{ e la lunghezza di banda del sistema.}$$

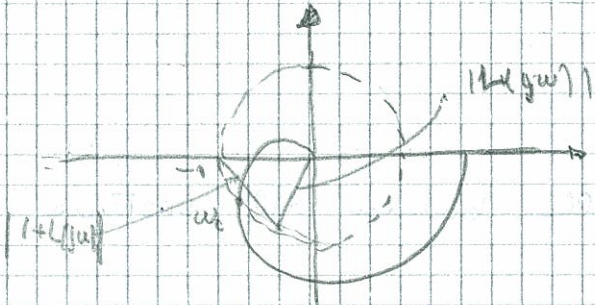
$T$  rimane troppo grande e quindi si impone

$$T < (5 \div 20)^{-1} \frac{\pi}{\omega_b}$$



Oppure per fissare il tempo di campionamento si usa il diagramma di Nyquist.

$$|T(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|}$$



Regola pratica per stimare la banda è quella di stimare  $\omega > \omega_c$ . (5-50).

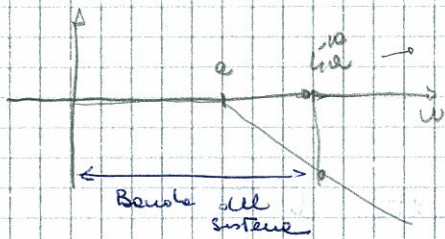
Per stimare le bande del sistema è quella di considerare la pulsazione  $\omega_c$  (ovvero la pulsazione in cui il diagramma di Nyquist interseca il cerchio unitario).

Allora la funzione di Risposta Armonica  $|F(j\omega)|$  è trascurabile  
per  $\omega > \omega_c$  (5.450) Allora

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_c (5 \div 50)}$$

Mutatis x Trouver le Temps d'Compromis

$$A(s) = \frac{b}{s+a}$$



Il quesito del sistema con  
piccolo

$$T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + \underbrace{L(j\omega)}}$$

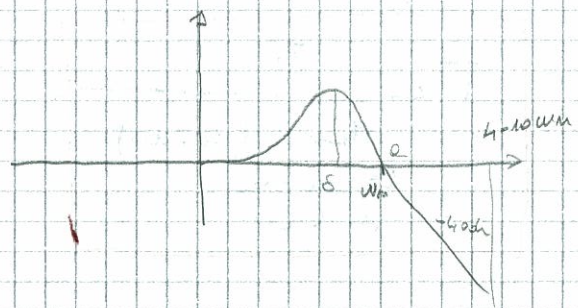
$$\frac{2}{3} L(\text{year}).$$

divente Trascurabile

$$T \leq \frac{\pi}{a \cdot (4 - 10)}$$



$$L(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$



$$T \approx \frac{\pi}{\omega_n (4 \div 10)}$$

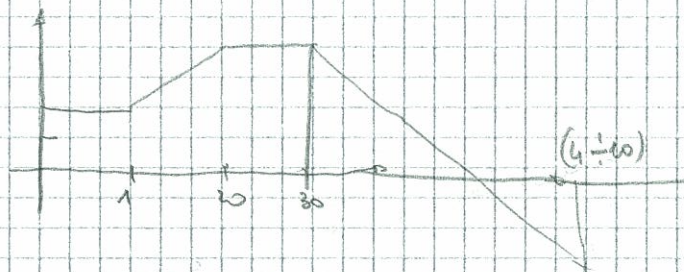
Nel caso generale pensiamo al diagramma di bode.

$$L(s) = \frac{K \left(1 + \frac{s}{z_1}\right) \left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \left(1 + \frac{s}{z_3}\right) \dots \left(1 - \frac{2\delta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}{\left(1 - \frac{s}{p_1}\right) \left(1 - \frac{s}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{2\delta s}{\omega_n'} + \frac{s^2}{\omega_n'^2}\right)}$$

(Regola +20db se zero +40db se zero coniugato -20db se polo -40db se polo con.)

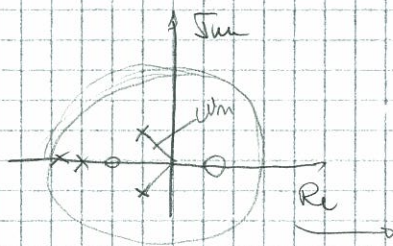
Es.  $L(s) = 10 \frac{s+1}{(s+10)(s+30)}$

Grado Relativo  $\geq 1$



Passato l'ultimo zero o polo c'è moltiplico x un valore per  $\omega = 10$ .

La banda del sistema viene STIMATA in modo approssimativo prendendo il polo o lo zero o la pulsazione naturale più grande della funzione di trasferimento ed quello aperto e moltiplicata per un fattore  $4 \div 10$ .



$$\omega_b = \text{Max } |f| \text{ di } \text{poli e zeri di } L(s)$$

Se  $a \pm jb$  sono due poli complessi coniugati allora  $\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Condizione geometrica:  $\omega_n$  è la distanza dall'origine al cerchio, deve essere  $4 \div 10$  più piccola delle distanza con  $\frac{1}{T}$ .

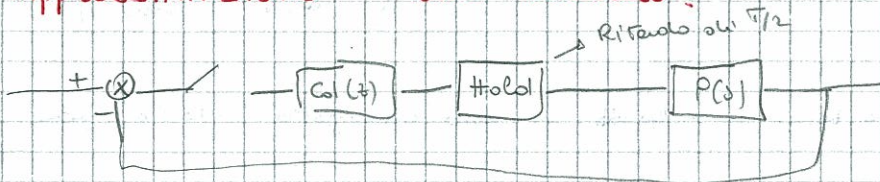


$$T < \frac{\pi}{\max_{\text{le poli e zeri di } L(s)} (4\sigma)}.$$

Vi è una ulteriore semplificazione: vengono considerati solo i poli e gli zeri della ~~del~~ controllata.

$$T < \frac{\pi}{\max_{\text{le poli e zeri di } C(s)} (4\sigma)}.$$

### ■ Approssimazione del Ritardo.

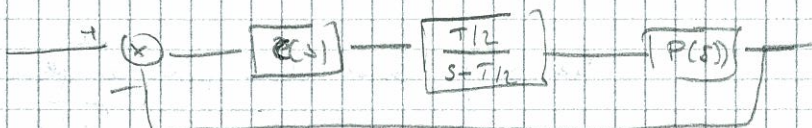


Possiamo fare una prima sostituzione inserendo un <sup>LPF con</sup> ritardo di  $T/2$ .



Ritardo di  $\frac{T}{2} \Rightarrow e^{-T/2 s}$  non ci piace perché è trascendentale, allora si fa d'approssimazione gli zeri al polo vicino

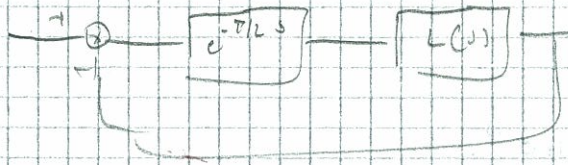
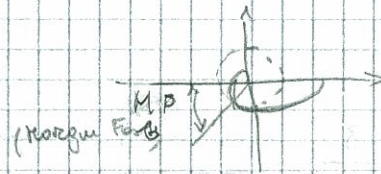
$$e^{-\frac{T}{2}s} = \frac{1}{1 + \frac{T}{2}s} = \frac{2/T}{s + 2/T}$$



Facciamo il progetto calcolando il ritardo.



Vi è un secondo metodo, prima faccio tutti i conti e poi uso il ritardo e guardo se cambia significativamente.



Cio' che cambia è il MF.

$$L_2(s) = e^{-\frac{T}{2}s} L(s)$$

$$|L_2(s)| = |e^{-\frac{T}{2}j\omega}| |L(j\omega)| = |L(j\omega)|$$

Non si cambia il  
Maggio di  
Amplificazione.

$$\arg L_2(j\omega) = \arg L(j\omega) - \frac{T}{2}\omega.$$

Il MF diminuisce di  $\frac{T}{2}\omega_c$ .

Chiediamo che il margine di fase cambi poco.

$$\Delta MF = \frac{T}{2}\omega_c \approx 4^\circ \div 15^\circ$$

↓

$$T \leq \frac{1}{\omega_c} [0,15 \div 0,5]$$



# Esercizio



$$P(s) = \frac{3}{400} \frac{(2-s)(s+200)}{s(s+2)}$$

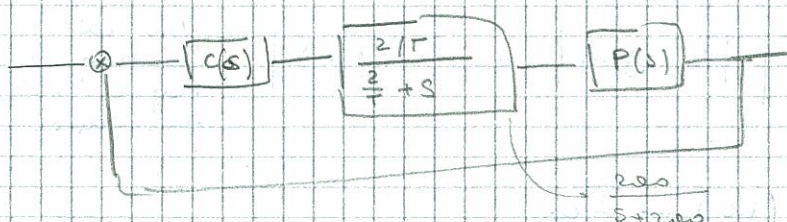
$$T = 0,01 \text{ s}$$

$$C(s) = \frac{1-2s}{1+0,2s}$$

$$M_F = 40^\circ$$

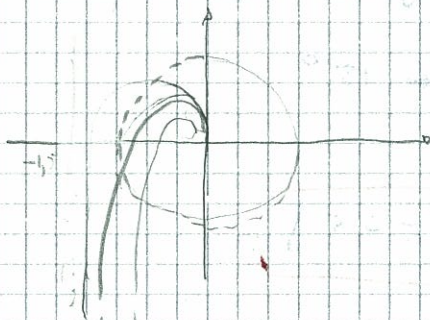
$$e^{-\frac{sT}{2}} \approx \frac{2/T}{\frac{2}{T} + s}$$

Hold in continuous



1. Calcolare il MF prima di inserire il controllore.

$$L_1(s) = \frac{2/T}{s + 2/T} \quad P(s) = \frac{3}{2} \frac{(2-s)}{s(s+2)} = \frac{3}{2} \frac{(1-0,5s)}{s(\frac{s}{2}+1)}$$



$$S_0 = \frac{3}{2} (-0,5) (-0,5) = -3/2$$

$$\arg L_1(j\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$\arg L_1(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg L_2(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = -\frac{3}{2}\pi$$

$$|L_1(j\omega)| = 1 \quad \frac{3}{2} \frac{\sqrt{1+(0,5\omega)^2}}{\omega \sqrt{1+(0,5\omega)^2}} = 1 \quad \omega_c = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\arg L_1(j\omega_c) = -2,86 \text{ rad.}$$

$$M.F. = \pi - 2,86 = 16,26^\circ$$



Rete anticipatrice allora  $\omega > \omega_c$

Proviamo  $\omega_0 = 2 \text{ rad}$

$$L_1(j\omega_0) = \frac{3}{2} \frac{1-s}{2j(s+1)}$$

$$|L_1(j\omega_0)| = \frac{3}{4} \quad \arg L_1(j\omega) = \pi$$

$$M = \frac{4}{3} \quad \varphi = 40^\circ = 0,6981$$

↑  
Anticipiamo la fase di  $40^\circ$ .

$$M \cos \phi = 1,02 > 1 \quad \text{ok.}$$

$$z = \frac{M - \cos \phi}{\omega_0 \cos \phi} = 0,441$$

$$a = \frac{M \cos \phi - 1}{M(M - \cos \phi)} = 0,0282$$

$$C(s) = \frac{1 + 0,4413s}{1 + 0,0248s}$$

$$p_1 = -20,13$$

$$z_1 = -2,266$$

$T = 0,01 \text{ s}$  vediamo se il tempo appropriato

$$T \leq \frac{\pi}{80,13 (4 \div \omega)} \approx 0,01 \text{ s} \quad \text{ok.}$$

con 4

la nuova pulsazione critica è  $\omega_c = 2 \text{ Mod}$

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_c (5 \div 50)} \approx 0,03 \text{ s} \quad (\text{con } 50)$$

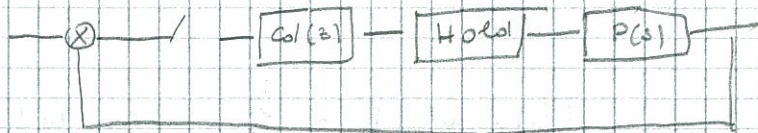
Discontinuo

$$C_d = K_d \frac{z - e^{-2,666T}}{z - e^{-80,13T}} = K_d \frac{z - 0,9776}{z - 9,4488}$$

$$K_d \frac{1 - 0,9776}{1 - 0,4688} \approx 1 \quad \rightarrow K_d = 24,6$$



# Esercizio



$$P(s) = \frac{2-s}{s+2}$$

$$C(s) = K \frac{1+2zs}{1+zs}$$

$$T=0,2 \text{ s.}$$

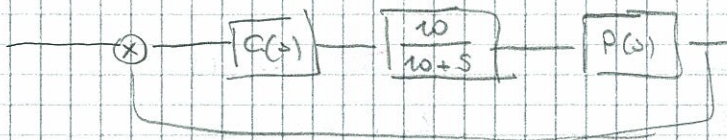
(Rate Ritardatoria)

Specifiche

errore a regime al gradino = 20%

$$M_A = 3.$$

$$e^{-T/\tau} \approx \frac{2\pi}{s + \frac{2}{T}} = \frac{10}{s+10}$$



Per prima cosa

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_S} = \frac{1}{5}$$

$$K_S = 4.$$

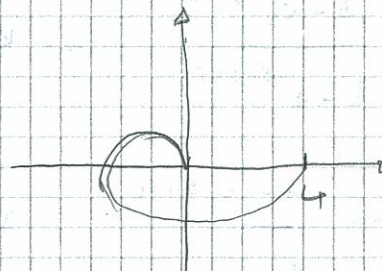
$$K \cdot \frac{1+2zs}{1+zs} \cdot \frac{10}{10+s} \cdot \frac{2-s}{s+2} \Big|_{s=0} = 4 \Rightarrow K=4$$

$$L_1(s) = 4 \cdot \frac{2-s}{s+2} \cdot \frac{10}{s+10}$$

$$= 4 \cdot \frac{(1-0,5s)}{(1+0,5s)} \cdot \frac{1}{1+0,1s}$$

$$|L_1(0)| = 4$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L_1(j\omega)| = 0$$



$$\arg L_1(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

$$\arg L_1(0) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg L_1(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$



Per fissare il margine di ampiezza utilizziamo il criterio di Routh.

$$L_1(s) + \eta = 0$$

$$\eta(s+2)(s+40) + 40(2-s) = 0$$

$$s^2 \eta + s(12\eta - 40) + 20\eta + 80 = 0$$

$$\begin{array}{r} \eta \\ 12\eta - 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20\eta + 80 \end{array}$$

$$12\eta - 40 = 0$$

$$\eta = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$$

$$\omega_c = 2\sqrt{11}$$

$$\left( \frac{10}{3} \omega^2 + 20 \frac{100}{3} + 80 \right) \quad \omega_c = 2\sqrt{11}$$

Dobbiamo scegliere una  $\omega_c$  + basso (RITARATRICE).

$$M_A = 3 \rightarrow \text{Intensit  in } -\frac{1}{3}$$

$$\omega_0 = 5$$

$$(\text{A.H. di Ampere}) M = 3,577 \cdot 3 = 10,73$$

$$\varphi = \pi - 2,844 = 0,29\pi$$

$$|L_1(j\omega)| = 3,577$$

$$\arg L(j\omega) = -2,844$$

$$M_{\text{cos}} > 1 \quad \text{  verificata}$$

$$\zeta = 6,673$$

$$d = 0,08820$$

$$C(s) = 4 \cdot \frac{1 + 0,5890s}{1 + 6,673s}$$

Verifichiamo il Tempo di campionamento

$$z = 1,692$$

$$T \leq \frac{\pi}{\omega} \frac{1}{1,692} \leq 0,4616 \quad \text{OK}$$



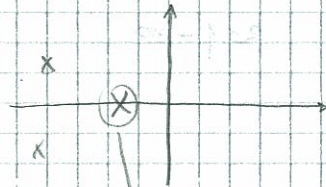
Discutimmo con Tustin

$$S \rightarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$$Cd(z) = 4 \frac{1 + 5,892 \frac{z-1}{z+1}}{1 + 66,23 \frac{z-1}{z+1}}$$

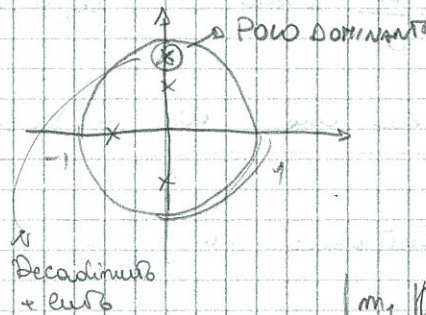
TEMPO di ASSESTAMENTO di un SISTEMA DOMINANTE

$$P(z) = \frac{K}{z^m(z-a)}$$



POLO DOMINANTE nel continuo

- + sono vicini allo zero
- + decedono rapidamente
- + sono vicini a 1
- + decedono lentamente

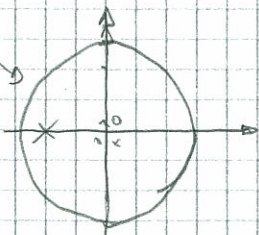


$$m_1 = p_1^K$$

$$m_2 = p_2^K$$

$$m_3 = p_3^K$$

$$|m_1| = |p_1|^K$$



Un esempio di sistema "puro" è un

$$P(z) = K \frac{(z-1)^m(z-a)}{(z-a)(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_m)} \approx \frac{K}{(z-a)^{m+1}}$$

possano essere ricondotti a quella funzione di trasferimento  $\times$  può trascurare quegli zeri e quei poli + vicini a 1.

Prendendo quel sistema e mettendolo in ingresso un gradino

$$U(z) \rightarrow \boxed{P(z)} \rightarrow Y(z)$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

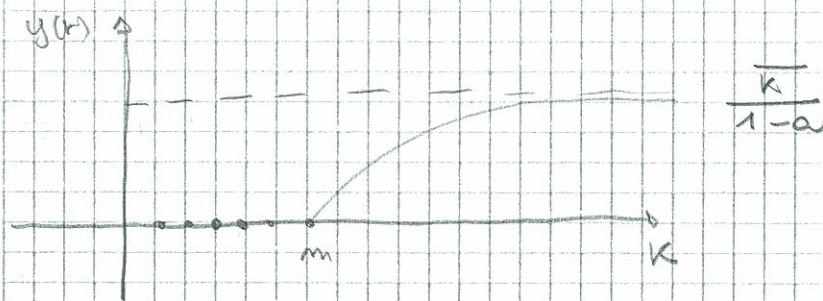
$$Y(z) = \frac{K}{z^m(z-a)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$y(k) = \sum \text{Res} \frac{K z z^{k-1}}{z^m(z-a)(z-1)} = \sum \text{Res} K \frac{z^{k-m}}{(z-a)(z-1)}$$

$$\text{Se } k < m \rightarrow y(k) = 0$$

$$\text{Se } k > m \rightarrow y(k) = \frac{K}{1-a} + \frac{K a^{k-m}}{a-1} = \frac{K}{1-a} (1 - a^{k-m})$$





$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y(k) = \frac{\overline{K}}{1-a}$$

**T** di essentamento è il Tempo impiegato per arrivare ad un valore del 5% del valore finale.

$$y_{\infty} = \frac{\overline{K}}{1-a}$$

$$|y(k) - y_{\infty}| = \frac{\overline{K} |a|^{k-m}}{|1-a|}$$

$$\frac{|y(k) - y_{\infty}|}{\frac{\overline{K}}{1-a}} = \frac{5}{100} \quad |a|^{k-m} = \frac{5}{100}$$

$$\rightarrow e^{\ln |a| (k-m)} = 0,05$$

$$\ln |a| (k-m) \approx -3$$

n° di passi  
prima di  
essentamento

$$k = m - \frac{3}{\ln |a|}$$

Il Tempo di essentamento

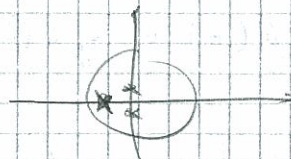
$$T_e \approx T \left[ m - \frac{3}{\ln |a|} \right]$$

Se  $m = 0$

$$T_e \approx -T \cdot \frac{3}{\ln |a|}$$

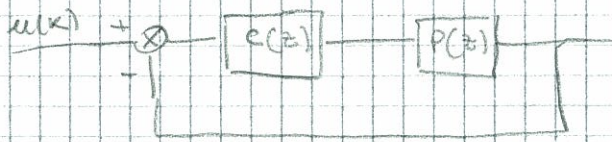
Questa formula viene utilizzata anche dove il POLO DOMINANTE è  $a$ .

$$T_e \approx -T \cdot \frac{3}{\ln |p|}$$





## Progetto Analitico



$$C(z) = \frac{S(z)}{R(z)} \quad \text{rel. 0}$$

$$P(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$T(z) = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} = \frac{\frac{S(z)}{R(z)} \frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{S(z)}{R(z)} \frac{B(z)}{A(z)}} = \frac{S(z)B(z)}{S(z)B(z) + R(z)A(z)}$$

$$\boxed{S(z)B(z) + R(z)A(z) = D_d(z)} \quad (*)$$

## Proprietà

Se  $A(z)$  e  $B(z)$  sono primi tra loro, l'equazione (\*) **AMMETTE**

sempre soluzioni

non hanno  
fattori comuni.

$$\left. \begin{aligned} S(z) &= S_0 + S_1 z^1 + S_2 z^2 + \dots \\ R(z) &= r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \dots \end{aligned} \right\} \text{dobbiamo scegliere il grado in modo adeguato.}$$

# equazioni del sistema = # gradi di libertà

# equazioni = grado eq. diofantea + 1

$$gr A(z) \geq gr B(z)$$

$$gr R(z) \geq gr S(z)$$

[perché il grado relativo sempre maggiore uguale a zero]

$$gr A(z)R(z) \geq gr B(z)S(z)$$

• Quindi il grado dell'equazione diofantea è dato dal grado

$$gr A(z) + gr R(z) + 1$$

• Il numero di gradi di libertà del sistema è  $= gr R(z) + 1 + gr S(z) + 1$

$$\boxed{gr S(z) = gr A(z) - 1}$$



### Esempio

$$P(z) = \frac{(z-0,2)}{(z+0,2)(z+2)}$$

Vogliamo trovare  $C(z)$  in modo tale che il sistema retroazionato abbia in poli in  $\{0,1, 0,2, 0\}$ .

$$A(z) R(z) + B(z) S(z) = D_d(z)$$

$$\begin{aligned} g_1 \ S(z) &= 1 \rightarrow S(z) = s_0 + s_1 z \\ g_2 \ R(z) &= 1 \rightarrow R(z) = r_0 + r_1 z \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} g_1 \ S(z) &= 1 \\ g_2 \ R(z) &= 1 \end{aligned}} \right\} \text{4 gradi di libertà}$$

$$(z+0,2)(z+2)(r_0+r_1 z) + (z-0,2)(s_0+s_1 z) = z(z-0,1)(z-0,2)$$

devono avere lo stesso grado, se sono diversi devo aggiungere poli "veloci", ovvero + vicino allo zero.

$$\begin{aligned} z^3 r_1 + z^2(s_1 + 2,2r_0) + z[0,4r_1 + 2,2r_0 + s_0 - 0,2s_1] + 0,4r_0 + 0,2s_0 &= \\ &= z^3 - 0,3z^2 + 0,02z. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ s_1 + 2,2r_0 = -0,3 \\ 0,4r_1 + 2,2r_0 + s_0 - 0,2s_1 = 0,02 \\ 0,4r_0 - 0,2s_0 = 0 \end{cases}$$

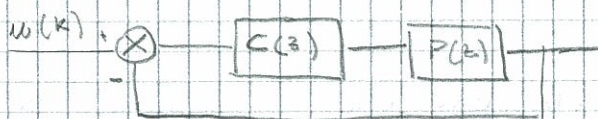
$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ s_1 = -2,3 \\ r_0 = -0,2 \\ s_0 = -0,4 \end{cases}$$

$$C(z) = \frac{-2,3z - 0,4}{z - 0,2}$$



Cancellazione poli - zeri.

Posso CANCELLARE SOLO POLI STABILI.



$$P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^+(z) B^-(z)}{A^+(z) A^-(z)}$$

$A^+(z)$  poli instabili  $A^-(z)$  poli stabili

$$E_s = A(z) = S(z - 0,1)(z + 2)$$

$$A^+(z) = S(z - 0,1)$$

$$A^-(z) = (z + 2)$$

$$L(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{B^+(z) B^-(z)}{A^+(z) A^-(z)}$$

$$S(z) = A^+(z) S'(z)$$

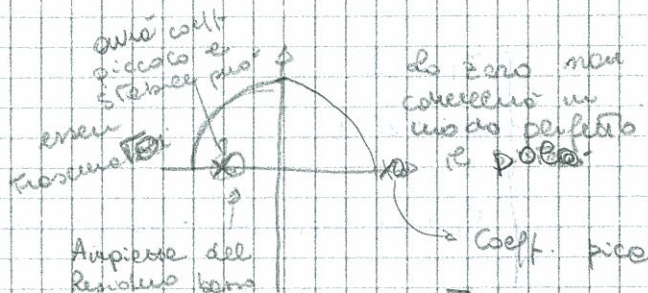
$$R(z) = B^-(z) R'(z)$$

$$T(z) = \frac{S(z) B(z)}{S(z) B(z) + A(z) R(z)} = \frac{A^+ S' B^+ B^-}{A^+ S' B^+ B^- + A^+ A^- B^+ R'}$$

$$= \frac{S' B^-}{S' B^- + R' A^-}$$

$$\frac{A^+ B^-}{A^+ B^+}$$

ci sono piccole differenze



Poi siamo

# equazioni = # incognite

$$\# \text{ equazioni} = g_R R' + g_A A^+ + 1$$

$$\# \text{ incognite} = g_S S' + 1 + g_R R' + 1$$

$$g_S S' = g_A A^+ - 1$$

$g_R R(z) \equiv g_S S(z)$  [grado minimo, risparmio delle uscite]



$$g_z R(t) = g_z S(t) \rightarrow g_z B^+ + g_z R' = g_z A^+ + g_z S^+$$

$$g_z R' = g_z A^+ - g_z B^+ + g_z A^- - 1.$$

Aggiungiamo nel controllore i poli in  $z=1$ , ovvero un'azione integrativa.

$$R(z) = B^+ (z-1)^q R''(z).$$

per avere un seggio nullo con segnali tipici

$$T(z) = \frac{B^-(z) S'(z)}{B^-(z) S'(z) + \underbrace{A^+(z) (z-1)^q R''(z)}_{\text{predo - errore}}}$$

Eq. Diophantea:

$$B^-(z) S'(z) + A^+(z) (z-1)^q R''(z) = D_d(z).$$

# equations = # incognite

$$\# \text{equazioni} = g_z A^-(z) + q + g_z R''(z) + 1$$

$$\# \text{incognite} = g_z S' + 1 + g_z R'' + 1$$

$$g_z S' = g_z A^- + q - 1.$$

$$g_z B^+ + q + g_z R'' = g_z A^+ + g_z S^+$$

$$g_z R'' = g_z S' + g_z A^+ - q - g_z B^+ = \overbrace{g_z A^- + q - 1}^{g_z A} + g_z A^+ - g_z B^+ - q$$

$$g_z R'' = g_z A - 1 - g_z B^+$$



Esempio:

$$P(z) = \frac{(z-0,2)}{(z+2)(z+0,2)}$$

$$C(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{(z+0,2) S'(z)}{(z-0,2) R'(z)}$$

$$B^- = 1$$

$$A^- = (z+2)$$

$$B^+ = (z-0,2)$$

$$A^+ = (z+0,2)$$

$$T(z) = \frac{S'(z) B^+(z)}{S'(z) B^-(z) + R'(z) A^-(z)}$$

$$\# \text{ eqn} = \# \text{ me}$$

$$g_R R' = 0$$

$$\# \text{ eqn} = g_R R' + 1 + 1$$

$$g_S S' = 0$$

$$\# \text{ inc} = g_R R' + 1 + g_S S' + 1 \quad \} \quad g_S S' = 0$$

$$g_R R = g_S S \quad \rightarrow \quad g_R R' + 1 = g_S S' + 1 \quad \Rightarrow$$

$$S(z) = S_0$$

$$R(z) = R_0$$

$$\rightarrow S_0 + R_0 (z+2) = D_0(z)$$

$$\downarrow$$
  

$$\text{polo a } 0,1 \quad (z-0,1)$$

$$R_0 z + 2R_0 + S_0 = z-0,1$$

$$\begin{cases} R_0 = 1 \\ 2R_0 + S_0 = -0,1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_0 = 1 \\ S_0 = -2,1 \end{cases}$$

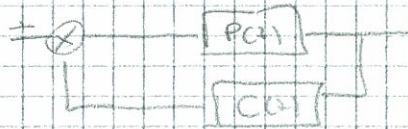
$$G(z) = \frac{-2,1 (z+0,2)}{1 (z-0,2)}$$



## Esercizio

- 1) ordine del gradino = 0.
- 2) Poli in  $[0, 1, 0, 2]$ .

$$P(z) = \frac{(z - 0,2)}{(z+2)(z+0,2)}$$



$$L(z) = P(z) C(z)$$

$$R(z) = B^+(z) (z-1)^q \cdot R^+(z) \quad \text{con } q \geq 1$$

Se ci fosse stato un  $C(z)$  non dovei averlo aggiunto

$$T(z) = \frac{S^+(z) B^-(z)}{S^+(z) B^-(z) + R^+(z) A^-(z) (z-1)}$$

$$\# \text{ eqn} = 1 + g_R R^+ + 1 + 1 \leftarrow \text{Retenuto } B^-$$

$$\# \text{ uc} = g_R R^+ + 1 + g_S S^+ + 1$$

$$\# \text{ epn} = \# \text{ uc}$$

$$g_R S^+ = 1$$

$$g_R R^+ = 0$$

$$g_R R = g_R S \quad 2 + g_R R^+ = g_R S^+ + 1$$

$$g_R R^+ = g_R S^+ - 1 = 0$$

$$\begin{cases} S^+ = S_0 + S_1 z \\ R^+ = R_0 \end{cases}$$

$$(S_1 z + S_0) \cdot 1 + (z-1) R_0 (z+2) = (z-0,2)(z-0,2)$$

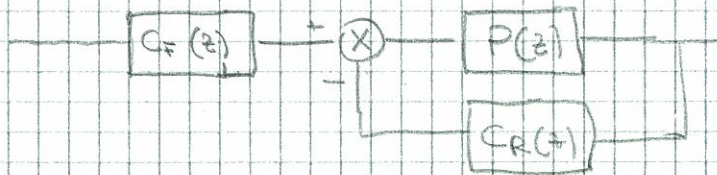
$$z^2 R_0 + z [S_1 + 2R_0] + S_0 - 2R_0 = z^2 - 0,3z + 0,02$$

$$\begin{cases} R_0 = 1 \\ S_1 + 2R_0 = -0,3 \\ S_0 - 2R_0 = 0,02 \end{cases} \quad \begin{cases} R_0 = 1 \\ S_1 = -1,3 \\ S_0 = 2,02 \end{cases}$$



$$C(z) = \frac{(z+0,2)(-1,3z+2,0z)}{(z-0,2)(z-1)}$$

Progetto combinato diretto - retroazione (Ragazzini)



$$C_R(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$$

$$G_F(z) = \frac{W(z)}{R(z)}$$

$$P(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$T(z) = \frac{G_F(z) P(z)}{1 + C_R(z) P(z)} = \frac{\frac{B(z)}{A(z)} \frac{S(z)}{R(z)}}{1 + \frac{B(z)}{A(z)} \frac{S(z)}{R(z)}} = \frac{B(z) W(z)}{A(z) R(z) + B(z) S(z)}$$

L'eq caratteristica è uguale a prima.

Abbiamo un grado di libertà in più  $[W(z)]$ , ci permette di lavorare anche sul numeratore.

$$T(z) = T_d(z) = \frac{N_d(z)}{D_d(z)}$$

$$R(z) = R''(z) (z-1)^q B^+(z)$$

$$S(z) = S'(z) A^+(z)$$

$$W(z) = W'(z) A^+(z)$$

con  $A(z) = A^+(z) A^-(z)$

$B(z) = B^+(z) B^-(z)$

↑  
Questo per completare le cancellazioni poli/zeri.

$$T(z) = \frac{B^+ B^+ W' A^+}{B^+ B^+ S' A^+ + A^+ A^- R'' (z-1)^q B^+}$$

$$= \frac{B^- W'}{B^+ S' + A^- R'' (z-1)^q}$$

← forma di  $T(z)$ .

① Gli ZERI instabili del sistema DEVONO comparire in  $T_d(z)$ .



$$\textcircled{2} \quad N(z) = B(z) W(z)$$

$$D(z) = B(z) S(z) + \underbrace{A(z) R(z)}_{\text{grado maggiore}}$$

$$g_z D(z) = g_z N(z) = g_z A(z) + g_z R(z) - g_z B(z) - g_z W(z)$$

$$g_z R(z) \geq g_z W(z) \quad \text{per come posto } q(z)$$

$$g_z D(z) - g_z N(z) \geq g_z A(z) - g_z B(z) \geq \text{grado rel. di } P(z)$$

$$\text{Il GRADO RELATIVO di } T(z) \geq \text{GRADO RELATIVO di } P(z)$$

Per trovare  $C_F(z)$  e  $C_R(z)$  devo imporre:

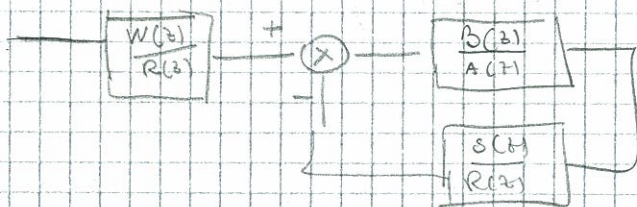
$$\begin{cases} B^- W' = Nd \cdot A_0(z) \\ B^- S' + A^- (z-1)^q R'' = Dd \cdot A_0(z) \end{cases}$$

Non fa parte delle funzioni di trasf. ma fa un uso che a dx e sx abbiano grado' uguali.

$$g_z S'(z) = g_z A^- + q - 1$$

$$g_z R''(z) = g_z A^- - 1 + \text{grad } B^-$$

### Esempio



$$P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z-0,5}{(z-1)(z-0,2)}$$

$$\textcircled{1} T_0 = z^{-1} \rightarrow \text{vogliamo che sia solo unitaria.}$$

Possiamo imporre perché non ci siano poli instabili e grado relativo = 1

$$\textcircled{2} \text{ Error e regime nullo alla rampa (2 poli in } z=1).$$

$$\hookrightarrow q=1$$

$$R(z) = R''(z) (z-1) (z-0,5)$$

$$S(z) = (z-0,2) S'(z)$$

$$W(z) = (z-0,2) W'(z)$$

} se polo stabile va cancellato da entrambe le parti



$$qz S' = 1$$

$$qz R'' = 0$$

Scrivere eq. Diophantea

$$T(z) = \frac{w'(z) B^-(z)}{S^-(z) B^-(z) + A^-(z) (z-1)^q R''(z)}$$

nel caso  $\rightarrow$

$$= \frac{w'(z)}{(s_1 z - s_0) + (z-1)(z-1) z_0}$$

$$= \frac{1}{z}$$

lo impari

$$\frac{z}{z} \rightarrow \frac{z}{z} \rightarrow A_0(z)$$

Se  $x$  uguale gradi

$$\begin{cases} w'(z) = z \\ z_0 z^2 + z (+s_1 - s_0 - 2z_0) + z_0 + s_0 = z^2 \end{cases}$$

$$w'(z) = z$$

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ s_1 = 2 \\ s_0 = -1 \end{cases}$$

$$R(z) = (z-1)(z-0,5)(1)$$

$$S(z) = (z-0,2)(2z-1)$$

$$w(z) = z(z-0,2)$$

Progetto di dead beat.

Error a regime va a zero in un numero finito di passi.



$$u(k) = 1 \rightarrow U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$u(k) = k \rightarrow U(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$u(k) = \frac{k^2}{2} \rightarrow U(z) = \frac{z(2+z)}{(z-1)^3}$$

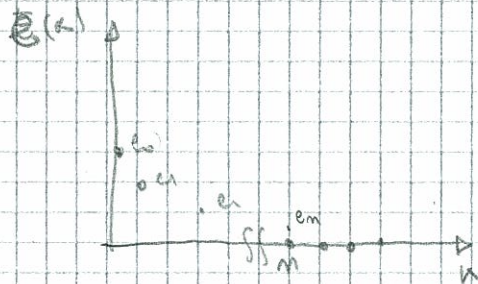
$$U(z) = \frac{f(z)}{(z-1)^q}$$

un  
coppia  
due pari  
sintesi



$$Y(z) = U(z) \frac{P(z) C(z)}{1 + P(z) C(z)}$$

$$E(z) = U(z) - Y(z) = U(z) \frac{1}{1 + P(z) C(z)}$$



$$e(k) = 0 \quad \text{per } k > m.$$

$$Z[e(k)] = e_0 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + \dots + e_m z^{-m}$$

Somma di  
S ritardate

(Applicazione  
diretta della  
trasformata Z)

$$E(z) = e_0 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + \dots + e_m z^{-m}$$

Posso anche scrivere

$$E(z) = \frac{e_0 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + \dots + e_m z^{-m}}{z^m} = \frac{Q(z)}{z^m}$$

$$C(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$$

$$S(z) = S'(z) A^+(z)$$

$$R(z) = R'(z) B^+(z)$$

Insieriamo nella funzione errore

$$E(z) = \frac{U(z)}{1 + P(z) C(z)} = U(z) \frac{1}{1 + \frac{B^+ B^-}{A^+ A^-} \frac{S^+ A^+}{R^+ B^+}}$$

$$= U(z) \frac{A^- R^+}{A^- R^+ + B^- S^+} = \frac{Q(z)}{z^m}$$

pariamo  
uguale

$$U(z) = \frac{f(z)}{(z-1)^e}$$

Per uguagliare devo assolutamente cancellare i poli in 1.

↓ quindi

$A^- R^+$  deve contenere il fattore  $(z-1)^e$ .

$$A^-(z) = (z-1)^p A'(z)$$

$$R^-(z) = (z-1)^q B^+(z) R''(z)$$

$$p+q=e$$

$$R^+(z) = (z-1)^q R''(z)$$



Sostituendo nella funzione di trasferimento.

$$\frac{F(z)}{(z-1)^q} \cdot \frac{A'(z-1)^p (z-1)^q R^n}{A^- R^n (z-1)^q + B^- S^1} \stackrel{\text{imposto}}{=} \frac{Q(z)}{z^m}$$

$$\begin{cases} F(z) \cdot A' \cdot R^n = Q(z) \\ A^- R^n (z-1)^q + B^- S^1 = z^m \end{cases} \leftarrow \text{sequenza degli zeri}$$

Questa è l'unica regola da imporre con un modo tale che  $Q(z)$  e  $z^m$  coincidano.

$$\begin{cases} g_1 S^1 = g_1 A^- + q - 1 \\ g_1 R^n = g_1 A - 1 + g_1 B^+ \end{cases}$$

### Esempio

$$P(z) = \frac{(z-0,2)}{(z+0,3)(z-1)}$$

Errore alle tempo  $\rightarrow 0$

In un NUMERO FINITO di passi

$$W(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$R(z) = (z-1)(z-0,2) R^n(z)$$

$$S(z) = (z+0,3) S^1(z)$$

Scriviamo l'equazione diofantea.

$$R^n(z) (z-1) A^-(z) + S^1(z) B^-(z) = z^m$$

$$g_1 S^1 = 1 \rightarrow S_1 z + S_0$$

$$g_1 R^n = 0 \rightarrow z_0$$

$$z_0 (z-1) (z-1) + (S_1 z + S_0) = z^m$$

$\Rightarrow m=2$   
per uguagliare i membri.

$$z_0 z^2 - 2z z_0 + z_0 + S_1 z + S_0 = z^2$$

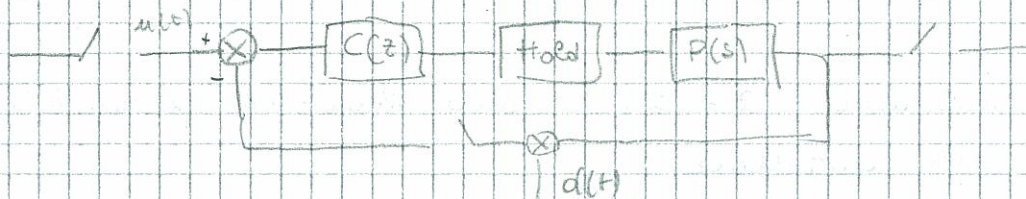
$$z_0 z^2 + z (2z_0 + S_1) + z_0 + S_0 = z^2$$



$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ s_1 = 2 \\ s_0 = -1 \end{cases}$$

$$C(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{(z+0,3)(2z-1)}{(z-1)(z-0,2)}$$

### Esercizio 1.

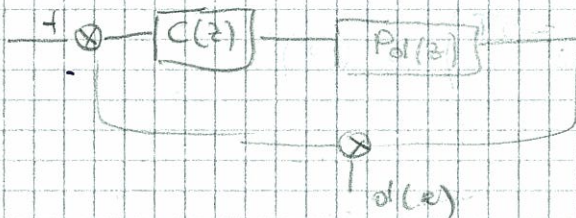
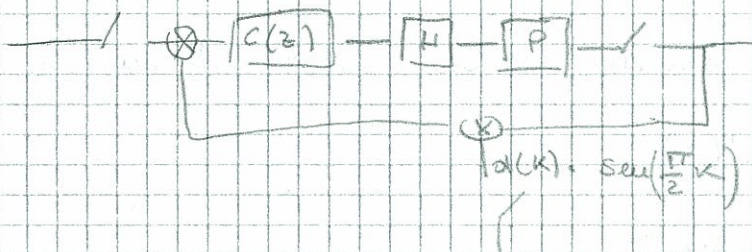


$$d(t) = \text{ocu}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$T = 1$$

- Errore nullo al GRADINO
- Soppressione TOT. ASINTOTICA del disturbo

$$P(s) = \frac{1}{s+s^2}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{P(s) \cdot H(s)\} &= (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+s^2)}\right\} = \frac{z-1}{z} \left[ \frac{1}{s} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{s} \frac{z}{z-e^{-sT}} \right] \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{1-e^{-sT}}{z-e^{-sT}} \right] = \frac{e}{z-e^{-sT}} \end{aligned}$$

L'uscita avrà due contributi (ingresso e disturbo)

asintoticamente dovrà andare a zero. → da specifica SOPPRESSIONE ASINTOTICA TOTALE del SISTEMA.

$$W(z) = - \frac{C(z) P_d(z)}{1 + C(z) P_d(z)}$$

$$D(z) = \frac{z}{z^2+1}$$



$$Y_d = \frac{z}{z^2+1} \cdot \frac{-C_d(z) P_d(z)}{1 + C(z) P_d(z)} = -\frac{z}{z^2+1} \cdot \frac{\frac{S(z)}{R(z)} \cdot \frac{a}{z-e^{-sT}}}{1 + \frac{S(z)}{R(z)} \cdot \frac{a}{z-e^{-sT}}}$$

$$= -\frac{z}{z^2+1} \cdot \frac{a S(z)}{R(z)(z-e^{-sT}) + S(z)a}$$

↑  
i poli sono sulle circonferenza  $z = 1$  dove eliminarli ponendo li al numeratore del controllore.

$$S(z) = (z^2+1) S'(z)$$

Ora siccome la specifica richiede zero nello al giardino

$$R(z) = (z-1) R'(z)$$

Per eliminare il polo stabile

$$S(z) = (z^2+1)(z-e^{-sT}) S''(z)$$

Fatto questo calcolo  $T(z)$ .

$$T(z) = \frac{C(z) P_d(z)}{1 + C(z) P_d(z)} = \frac{(z^2+1)(z-e^{-sT}) S''(z)}{(z-1) R'(z)} \cdot \frac{a}{z-e^{-sT}}$$

$$= \frac{(z^2+1) S''(z) a}{(z-1) R'(z) + (z+1)^2 a S''(z)}$$

$$\# \text{ eqn} = \# \text{ var}$$

$$\# \text{ eqn} = 1 + g_r R'(z) + 1$$

$$\# \text{ var} = g_r R'(z) + 1 + g_r S''(z) + 1$$

$$g_r S''(z) = 0$$

$$g_r R(z) = g_r S(z)$$

$$1 + g_r R'(z) = 2 + 1 + g_r S'(z)$$

$$g_r R' = g_r S''(z) + 2 = 2$$



$$S''(z) = S_0$$

$$R'(z) = z_2 z^2 + z_1 z + z_0$$

8

$$(z-1)(z_2 z^2 + z_1 z + z_0) + (z^2+1) a S_0 = z^3 \text{ a più semplice!}$$

$$z_2 z^3 + z_1 z^2 + z_0 z - z_2 z^2 - z_1 z - z_0 + z^2 a S_0 + a S_0 = z^3$$

$$\begin{cases} z_2 = 1 \end{cases}$$

$$z_1 - z_2 + a S_0 = 0$$

$$z_1 = 1 - a S_0 = 1 - a \frac{z_1}{1}$$

$$z_2 = 1$$

$$z_1 = \frac{1}{2}$$

$$z_0 + a S_0 = 0$$

$$S_0 = \frac{z_0}{a}$$

$$z_0 = \frac{1}{2}$$

$$z_0 - z_1 = 0$$

$$z_0 = z_1$$

$$S_0 = \frac{1}{2a}$$

$$= 2,512$$

$$C(z) = \frac{(z^2+1)(z - e^{-5})}{(z-1)\left(z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\right)} \quad 2,512$$

Esercizio 2.



