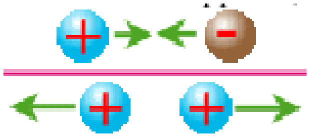
Elettrostatica

La carica elettrica

Tra tutti i tipi di forza che abbiamo incontrato in meccanica, solo la forza peso e quella di gravitazione universale derivano dalla proprietà delle masse di attirare altre masse. Tutte le altre forze, quella elastica, le reazioni vincolari, le forze di attrito, la tensione nelle funi, ecc., altro non sono che manifestazioni dell'interazione elettromagnetica. Nella vita di tutti i giorni è però la forza peso quella di cui ci accorgiamo di più, non fosse altro per la fatica che bisogna fare per sollevare pesi, salire e scendere scale, ecc. Anche nell'antichità, del resto, l'esistenza di una proprietà non spiegabile in termini di forza gravitazionale era stata notata solo per il fatto che pezzi di ambra (electron in greco, da cui poi il nome di elettricità), strofinati con un panno, erano in grado di attirare minuscole particelle di foglie secche o di polvere. La forza di interazione tra l'ambra e le particelle attirate era sorprendentemente intensa, riusciva, infatti, a vincere la forza peso e ad accelerare verso l'alto le particelle di polvere.

Il fatto che le interazioni elettromagnetiche, pur essendo molto più intense delle forze di interazione gravitazionali, si pensi che la forza elettrostatica tra due protoni è 10^{40} volte più grande della loro interazione gravitazionale, siano rimaste nascoste, direi quasi soffocate, dalla forza peso, dipende da una misteriosa simmetria della natura: la carica esiste in due tipi diversi a cui convenzionalmente è stato attribuito il nome di positiva e negativa.

Al contrario quindi della massa, che è tutta dello stesso tipo e, per questo motivo, tutti i corpi che possiedono una massa si attirano l'uno con l'altro, la carica elettrica esiste in due forme diverse: cariche dello stesso tipo si respingono, cariche di tipo diverso si attraggono. I corpi che contengono un'eguale quantità di carica dei due tipi, si dicono neutri, hanno una carica complessiva nulla e non subiscono, né esercitano, forze elettriche. Questa è la condizione normale dei corpi che ci circondano: essi contengono tanta carica positiva quanta negativa. È questa perfetta simmetria che nasconde i fenomeni elettrici.



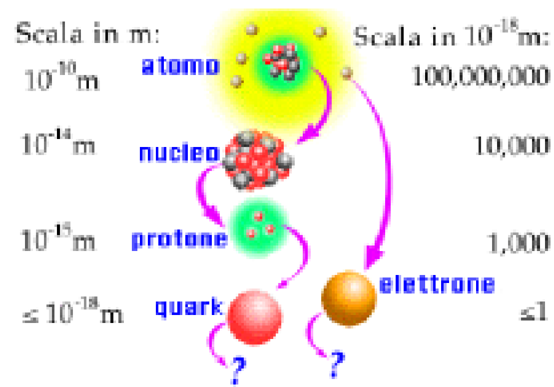
La struttura dell'atomo

La carica elettrica è una proprietà delle particelle che costituiscono gli atomi.

Con questo termine, si identificano i mattoni che costituiscono le molecole. Queste ultime rappresentano l'elemento indivisibile che conserva ancora tutte le proprietà della sostanza in esame. Molte sostanze hanno molecole costituite da singoli atomi. Come abbiamo già discusso, nel caso di alcune sostanze che alla temperatura ambiente sono solide, gli atomi sono organizzati in una struttura ordinata che costituisce il reticolo cristallino.

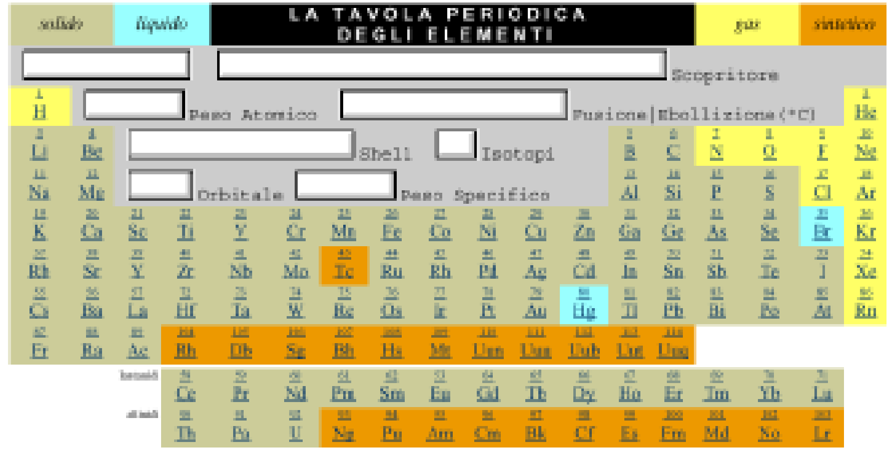
Com’è fatto un atomo?

In figura è mostrato lo schema di un atomo di elio. Naturalmente la figura non è in scala!! L’atomo è composto da un nucleo (la zona verde in figura), in cui è concentrata la quasi totalità della massa dell’atomo, che occupa una regione dalle dimensioni di $10^{-14} \div 10^{-15}$ m. Il nucleo è a sua volta composto da altri oggetti: i protoni (le parti in rosso denominate uud) ed i neutroni (le parti in rosso denominate ddu). I primi hanno una carica positiva (tutti i protoni hanno la stessa carica $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C). I neutroni invece, come dice il loro nome, sono neutri, non possiedono una carica elettrica.
Il numero dei protoni presenti nel nucleo, rappresenta il numero atomico, Z, e determina le proprietà di quella specie atomica (per l’atomo di elio, He, il numero atomico Z è uguale a 2).
Il numero dei neutroni presenti nel nucleo è all’incirca uguale al numero dei protoni. Nuclei che possiedono lo stesso numero atomico ma un numero di neutroni differente sono detti isotopi.
La massa del protone è all’incirca uguale a una unità di massa atomica. La stessa cosa vale per i neutroni. Pertanto la massa atomica è uguale al numero dei protoni (Z) più il numero dei neutroni presenti nel nucleo. Poiché alcune specie atomiche possono avere più di un isotopo, allora la massa atomica si ottiene facendo la media pesata della massa dei diversi isotopi in cui il peso è dato dall’abbondanza in natura di quel particolare isotopo.



Attorno al nucleo si muovono gli elettroni che occupano complessivamente un volume delle dimensioni di 10^{-10} m. Le dimensioni dell’atomo dunque sono 5 ordini di grandezza più grandi di quelle del nucleo. Per avere un’idea possiamo dire che se il raggio del nucleo fosse pari ad un millimetro, il raggio dell’atomo sarebbe invece pari a 100 metri: un campo di calcio!
Gli elettroni hanno una massa che è circa 2000 volte più piccola di quella dei protoni o dei neutroni e, per questo, contribuiscono molto poco alla massa complessiva dell’atomo. Essi, invece, hanno una carica che ha esattamente lo stesso valore, ma è di segno opposto, di quella dei protoni.
Normalmente in un atomo ci sono un numero di elettroni pari a quello dei protoni (Z). Ne segue quindi che l’atomo si presenta perfettamente neutro. Gli elettroni si muovano attorno al nucleo sotto l’azione dell’interazione tra la carica del nucleo, positiva e quella degli elettroni negativa. Un modello molto semplice per immaginare un atomo, che però è un po’ approssimativo, è quello di immaginarlo come un sistema planetario con il sole, che corrisponde al nucleo,

al centro e i pianeti, a cui corrispondono gli elettroni, che orbitano attorno al sole. Gli elettroni sono disposti in una maniera ordinata, essi occupano dei livelli che sono caratterizzati ciascuno da un ben preciso numero posti. Per ogni posto ci può essere al più un elettrone. Normalmente vengono occupati i livelli più interni, che corrispondono ad un'energia più bassa (in meccanica abbiamo imparato che le posizioni di equilibrio stabile corrispondono ai minimi dell'energia potenziale). Quando un livello è completamente pieno, si passa al livello successivo.



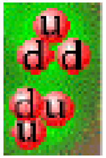
L'ultimo livello può essere solo parzialmente pieno. E' il numero di elettroni presenti nell'ultimo livello che determina le proprietà di quella specie atomica, e quindi la loro posizione nella tabella di Mendeleiev.
Per esempio, quelle specie atomiche che hanno un solo elettrone nell'ultimo livello, si presentano alla temperatura ambiente in forma metallica: sono infatti denominati metalli alcalini. Invece le specie atomiche che hanno l'ultimo livello saturato, si trovano in natura alla temperatura ambiente sotto forma di gas, e costituiscono i cosiddetti gas nobili (le loro molecole sono monoatomiche).
Possiamo notare che gli elettroni in un atomo si trovano in condizioni diverse l'uno dall'altro, due elettroni per esempio possono occupare due livelli differenti. Quindi è lecito ipotizzare che anche il loro moto sia diverso. Questa osservazione, legata al fatto che gli atomi sono perfettamente neutri, ci fa capire che la carica elettrica, al contrario della massa, non dipende dalla velocità della particella che la trasporta.

È possibile eccitare un atomo fornendo ad uno degli elettroni l'energia sufficiente per passare da un livello a più bassa energia ad uno a più elevata energia, che tra l'altro, come nel caso gravitazionale, corrisponde ad una maggiore distanza dal nucleo. Se l'energia fornita all'elettrone è sufficiente (nel corrispondente caso gravitazionale noi diremmo se la velocità di fuga viene superata), allora l'elettrone può staccarsi dall'atomo: si creano così uno ione positivo, l'atomo privato di uno o più elettroni, ed uno o più elettroni liberi.
Se immaginiamo di aver creato questa coppia di ione positivo - elettrone all'interno di un gas, allora possiamo immaginare che l'elettrone nel suo girovagare tra le molecole del gas potrebbe rincontrare lo ione e, in questo

caso, ci potrebbe essere la ricombinazione dei due e la formazione di un atomo o di una molecola neutra. Va comunque osservato immediatamente, questo processo non una grande probabilità di avvenire. È più facile per l'elettrone nel suo girovagare tra le molecole del gas incontrare una specie atomica con forti proprietà elettronegative, capaci cioè di catturare un elettrone. In tal caso si forma uno ione negativo, ossia un atomo con uno o più elettroni in più. I gas che hanno proprietà elettronegative corrispondono a quegli atomi a cui manca un solo elettrone per completare l'ultimo livello (Cloro, fluoro, ecc. comunque anche l'ossigeno dell'aria a cui mancano 2 elettroni per completare il suo ultimo livello ha forti proprietà elettronegative).
Possiamo concludere questo discorso sottolineando ancora una volta come le proprietà degli atomi dipendano dal numero di elettroni che occupano l'ultimo livello: è molto facile ionizzare i metalli alcalini, quegli atomi aventi un solo elettrone nell'ultimo livello, mentre è molto facile la cattura di un elettrone da parte di quelle specie atomiche alle quali manca un solo elettrone per completare l'ultimo livello.

La carica elettrica è quantizzata.
Dalla discussione sulla struttura atomica risulta che la carica elettrica è trasportata dalle particelle che costituiscono gli atomi in particolare dai protoni e dagli elettroni. Abbiamo anche visto che sia i protoni che gli elettroni trasportano la stessa carica ma di segno opposto:

$$e = 1.602 \times 10^{-19} C$$



Non è stata trovata finora alcuna particella avente una carica più piccola della carica dell'elettrone.
Attualmente si pensa che il protone sia una struttura composita, cioè che sia costituito da altre particelle ancora più elementari e con caratteristiche più simili a quelle dell'elettrone. A queste particelle è stato dato il nome di "quark". Tali particelle hanno una carica pari a 1/3 (un terzo) e 2/3 (due terzi) della carica dell'elettrone.
Finora, pur essendoci numerose indicazioni della loro esistenza, non sono ancora state osservate singolarmente ma solo all'interno dei protoni o dei neutroni. Per cui si può ancora affermare che non esistono cariche elettriche più piccole della carica dell'elettrone e che una qualunque carica deve corrispondere ad un numero intero di cariche dell'elettrone.

La carica elettrica si conserva
La conservazione della carica è, dopo l'energia, la quantità di moto, il momento angolare la quarta legge di conservazione che incontriamo.
Questa legge è in parte legata al fatto che le particelle che trasportano la carica sono stabili, non subiscono trasmutazioni. Il fatto che l'universo ormai esiste da molti anni, ci dice che i sui mattoni fondamentali, gli elettroni

e i protoni, sono particelle stabili: se queste particelle si trasformassero in altre dopo un po' di tempo, vuol dire che anche l'universo come lo conosciamo, morirebbe dopo un po' di tempo. Per il protone è stato determinato un limite inferiore di 10^{31} anni della vita media.

L'operazione di depositare una carica elettrica su di un corpo consiste sostanzialmente nel rimuovere o aggiungere ad esso degli elettroni: per esempio strofinando un pezzo di ambra, esso si carica negativamente. Nel processo di strofinamento alcuni elettroni vengono ceduti all'ambra prelevandoli dal panno usato per strofinare. Ovviamente il panno, avendo perso alcuni elettroni si è caricato con una carica di segno opposto.
La carica ovviamente si conserva anche nei processi che involvono particelle elementari: quando per esempio decade un neutrone viene creato un protone e un elettrone in maniera che la carica complessiva sia ancora nulla.
La reazione completa in questo caso è la seguente:

$$n_{neutro} = p_{+} + e_{-} + \nu_{neutro}$$

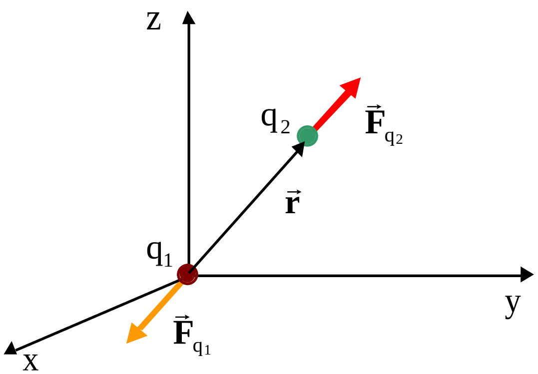
In maniera analoga, quando un'onda elettromagnetica, un fotone, quindi pura energia, si materializza, ossia si trasforma in particelle dotate di massa, allora si osserva che vengono create due particelle, l'elettrone e l'antielettrone, l'antiparticella dell'elettrone chiamato anche positrone, che ha una carica positiva in maniera che la carica complessivamente prodotta è zero.

$$\gamma_{neutro} = e^{+} + e^{-}$$

La forza di Coulomb

Consideriamo una carica puntiforme q_1 posta nell'origine del sistema di riferimento ed un'altra carica puntiforme q_2 in una posizione individuata dal vettore posizione $\vec{\mathbf{r}}$. Supponiamo che non ci sia nient'altro oltre alle due cariche citate, in altri termini le due cariche sono immerse nello spazio vuoto. La legge di Coulomb afferma che la carica q_2 subisce, da parte di q_1, una forza pari a:

$$\vec{\mathbf{F}} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r$$



in cui k è una costante che dipende dalle unità di misura della carica. Nel Sistema Internazionale la carica si misura in coulomb (C). Un coulomb corrisponde alla carica che attraversa la sezione di un conduttore in cui scorre una corrente di un ampere (A) in un secondo. In tal caso la costante k vale $k=8.988 \times 10^9\ Nm^2/C^2$.

Si preferisce comunque esprimere la costante k in termini di un'altra costante ε_o, la costante dielettrica del vuoto, che vale $\varepsilon_o=8.85 \times 10^{-12}\ C^2/Nm^2$. In termini di questa nuova costante, la forza elettrostatica diventa:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r$$

L'espressione della forza di interazione elettrostatica è molto simile a quella della forza di Gravitazione Universale tra un massa m_1 posta nell'origine del sistema di riferimento e la massa m_2 posta nella posizione individuata dal vettore posizione $\vec{r}$, che infatti vale:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

Quindi la forza di Coulomb è sempre diretta lungo la retta congiungente la carica q_1 con la carica q_2, la sua intensità dipende dalla distanza della carica q_2 dalla carica q_1: pertanto essa è, come la forza di gravitazione universale, una forza centrale. La differenza fondamentale tra le due forze è che la forza di gravitazione universale è sempre attrattiva, mentre quella di Coulomb può essere attrattiva se le cariche q_1 e q_2 hanno segno opposto, oppure repulsiva se le due cariche hanno lo stesso segno.

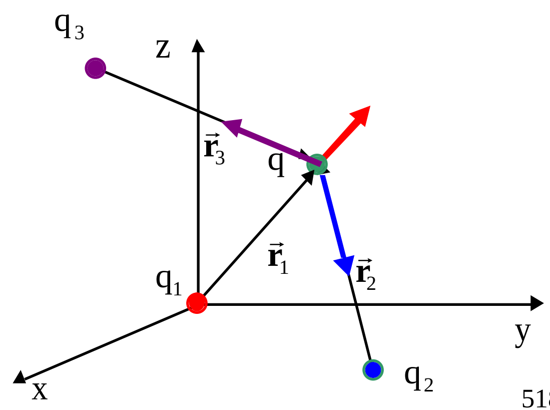
Come tutte le forze centrali, la forza di Coulomb è una forza conservativa.

Ovviamente, anche nel caso della forza di Coulomb è applicabile la terza legge di Newton, quindi la carica q_2 eserciterà a sua volta sulla carica q_1 una forza uguale ed opposta.

Il principio di sovrapposizione

Se la carica q si trova nelle vicinanze di altre cariche, n per l'esattezza, che identifichiamo con i simboli q_1, q_2,… q_i … e q_n, essa subirà una forza che è data dalla risultante delle forze esercitate da ciascuna delle n cariche come se fosse da sola in presenza della carica q. Ossia possiamo scrivere che:

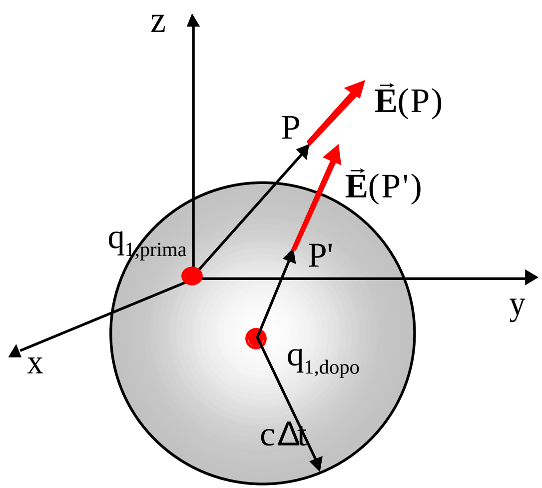
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_i + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_i q}{r_i^2}\vec{u}_{r_i}$$



in cui $\vec{\mathbf{r}}_i$ è il vettore posizione che individua la carica q rispetto alla carica q_i, r_i è il modulo di tale vettore e $\vec{\mathbf{u}}_{r_i}$ il suo versore.

Il campo elettrico

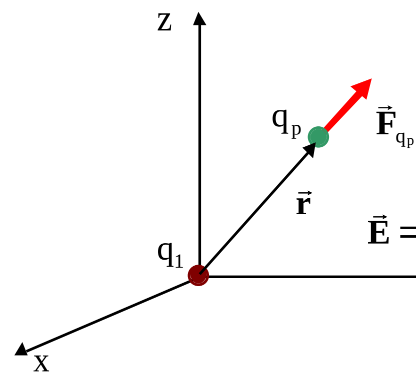
La forza di Coulomb è una forza che agisce a distanza: non è richiesto il contatto tra le due cariche perché esse interagiscano.
Il fatto che la forza di Coulomb debba soddisfare la terza legge di Newton anche quando le distanze tra le cariche sono grandi, porta al seguente interrogativo: come è possibile che le due forze di azione e reazione siano, nello stesso istante, uguali ed opposte, se noi sappiamo che la massima velocità con cui si riesce a far viaggiare l'informazione da un punto ad un altro dello spazio è la velocità della luce, che è una velocità molto grande ma comunque finita?
Si supera questa difficoltà concettuale introducendo il concetto di campo.
Supponiamo sempre di avere la carica q_1 nell'origine del sistema di riferimento. La sua presenza assegnerà a tutti i punti dello spazio (vuoto) una proprietà: ogni punto è caratterizzato dalla forza che risente la carica unitaria posta in quel punto. Così quando ad un certo istante noi andiamo a mettere la carica q nella posizione individuata dal vettore posizione $\vec{\mathbf{r}}$, non sarà necessario sapere, per valutare la forza che agisce sulla carica q, se in quello stesso istante la carica q_1 si trovi ancora nell'origine, ma basterà conoscere il valore del campo elettrico in quell'istante nella posizione in cui andiamo a mettere la carica q, e moltiplicare il suo valore per quello della carica q. La forza dipenderà quindi dalle proprietà locali del campo e non già dall'effettiva posizione in quell'istante della carica q_1.
L'introduzione del concetto di campo aiuta anche ad inquadrare correttamente la terza legge di Newton con la velocità finita della luce.
Supponiamo infatti che la carica q_1 si sia spostata molto rapidamente dall'origine in una nuova posizione. A seguito di questo spostamento occorrerà correggere tutti i valori del campo elettrico in tutti i punti dello spazio, in quanto sono cambiati, a causa dello spostamento della carica, sia la direzione sia il modulo del campo elettrico in tutti i punti dello spazio. Questa correzione non viene effettuata nello stesso istante per tutti i punti dello spazio, ma gradatamente.
Infatti, nel momento in cui è avvenuto lo spostamento della carica



q_1, parte l'informazione che si diffonderà in tutte le direzioni con velocità della luce c. Una volta trascorso un intervallo di tempo Δt, l'informazione avrà raggiunto una distanza dalla nuova posizione della carica q_1 pari a $c\Delta t$. Tutti i punti che si trovano ad una distanza più piccola di $c\Delta t$, saranno stati raggiunti dall'informazione e, quindi, il valore del campo elettrico sarà stato aggiornato per tener conto della nuova posizione della carica, mentre i punti più distanti, non ancora raggiunti dall'informazione, si comporteranno come se la carica q_1 fosse ancora nell'origine del sistema di riferimento. Naturalmente l'effetto sulla carica q, quando occupa una ben determinata posizione dello spazio, dipenderà dal valore locale del campo elettrico. Si intuisce da quest'esempio che il campo elettrico acquista una sua personalità e, si può aggiungere, quasi una indipendenza dalle cariche che lo hanno generato. Quello che a noi interessa è sapere qual è il valore del campo elettrico in una certa posizione e non la distribuzione delle cariche che lo ha generato: questo è sufficiente per determinare gli effetti su una qualsiasi carica che andiamo a mettere in quella posizione.

Definizione del campo elettrico.

Abbiamo affermato che il campo elettrico, in una fissata posizione, è uguale alla forza che subirebbe l'unità di carica (1 coulomb) posta in quella posizione. La sua definizione viene data utilizzando una carica di prova q_p (positiva). Si determina la forza che la carica di prova risente quando viene messa in una particolare posizione. Il valore del campo elettrico è dato dalla forza così determinata diviso per il valore della carica di prova q_p. L'unica precauzione da prendere è quella di utilizzare per la misura della forza valori della carica di prova q_p piuttosto piccoli in maniera da non produrre perturbazioni nella distribuzione di cariche che generano il campo elettrico[1]. Pertanto il campo elettrico viene definito come:



$$\vec{E} = \lim_{q_p \to 0} \frac{\vec{F}_{q_p}}{q_p}$$

[1] Quando parleremo dei materiali conduttori vedremo che le cariche presenti all'interno di essi si muovono liberamente al loro interno. Quindi la presenza della carica di prova potrebbe alterare la configurazione delle cariche e quindi il valore del campo elettrico misurato non sarebbe quello corretto. Anche le cariche presenti nei materiali dielettrici sotto l'azione delle forze elettriche subiscono dei piccoli spostamenti. Occorre quindi che la carica di prova sia la più piccola possibile per non provocare cambiamenti nella configurazione delle cariche.

$$\vec{\mathbf{E}} = \lim_{q_p \to 0} \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q_p}$$

Il campo elettrico è un campo vettoriale (tre componenti per ciascun punto dello spazio). Nel Sistema Internazionale si misurerà in N/C (newton su coulomb).
Se consideriamo una carica puntiforme q_1 posta nell'origine del sistema di riferimento, il valore del campo elettrico nei vari punti dello spazio sarà dato da:

$$\vec{\mathbf{E}} = \lim_{q_p \to 0} \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q_p} = \lim_{q_p \to 0} \frac{1}{q_p} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q_1 q_p}{r^2} \vec{\mathbf{u}}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q_1}{r^2} \vec{\mathbf{u}}_r$$

Se la carica q_1 è positiva, il campo elettrico è diretto lungo la congiungente il punto considerato e la posizione della carica q_1, e il verso è dalla parte opposta rispetto alla carica q_1. Al contrario se la carica q_1 è negativa il campo elettrico sarà diretto verso la carica q_1.
Quando in una regione dello spazio sono presenti n cariche elettriche, che identifichiamo con i simboli q_1, q_2,… q_i … e q_n, il campo elettrico in una qualsiasi posizione dello spazio si può calcolare applicando il principio di sovrapposizione: il campo elettrico totale è uguale alla somma vettoriale dei campi elettrici generati in quel punto da ciascuna delle cariche come se agisse da sola. Ossia possiamo scrivere che:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{E}}_i + \ldots + \vec{\mathbf{E}}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{\mathbf{u}}_{r_i}$$

in cui $\vec{\mathbf{r}}_i$ è il vettore posizione che individua la posizione in cui si vuole calcolare il campo elettrico rispetto alla carica q_i, r_i è il modulo di tale vettore e $\vec{\mathbf{u}}_{r_i}$ il suo versore.

Rappresentazione del campo elettrico

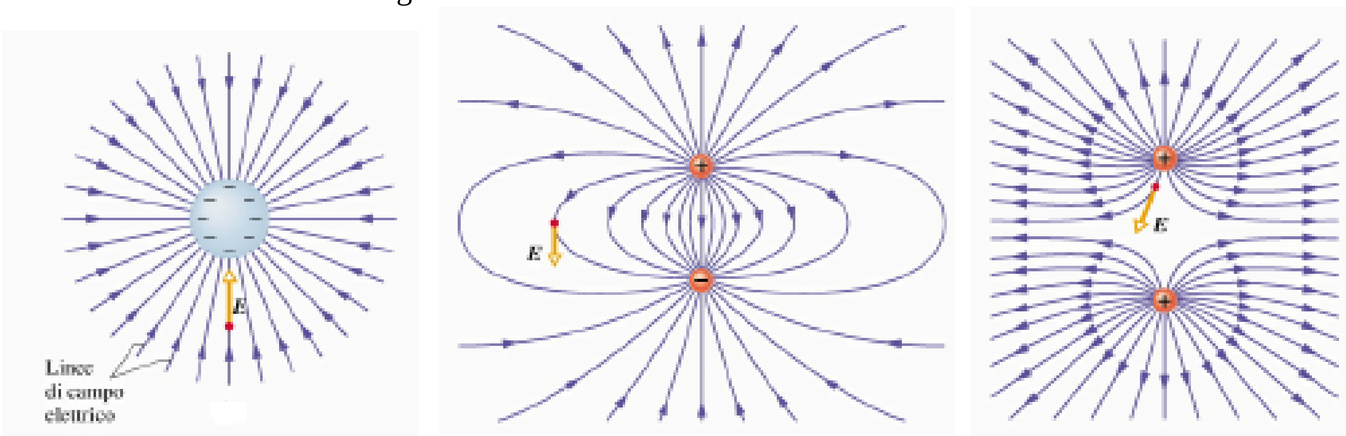
La visualizzazione di un campo elettrico è piuttosto complicata: per ogni punto dello spazio dobbiamo immaginarci un vettore che, come sappiamo, è caratterizzato da tre informazioni distinte (modulo, direzione e verso).
Un'efficace rappresentazione del campo elettrico è quella che fa uso delle linee di forza (o linee di campo).
Per linea di forza si intende una curva che è tangente al campo elettrico in ciascuno dei suoi punti.
Due linee di forza non potranno mai intersecarsi. Infatti il campo elettrico in un particolare punto dello spazio, in condizioni stazionarie, è perfettamente definito. Viceversa se due linee di forza si intersecassero, significherebbe che la direzione del campo elettrico, dovendo essere tangente alle due linee di forza contemporaneamente, non

è univocamente determinata. Da qui l'assurdo. Quindi due linee di forza non potranno mai intersecarsi.
Regole per interpretare la rappresentazione del campo elettrico con le linee di forza:

1. Le linee di forza indicano la direzione del campo elettrico. In ogni punto della linea di forza il campo elettrico è tangente alla linea di forza.
2. Le linee di forza nascono dalle cariche positive (o all'infinito) e muoiono su quelle negative (o all'infinito). Il numero di linee che nascono o muoiono è proporzionale alla carica.
3. La densità di linee di forza è proporzionale all'intensità del campo elettrico.

Nella figura sono mostrate le linea di forza relative ad

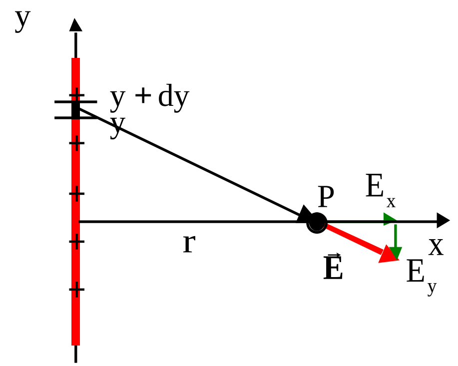
a) una carica puntiforme posta nell'origine
b) due cariche di segno opposto poste ad una certa distanza tra esse
c) due cariche dello stesso segno.



Calcolo del campo elettrico di una distribuzione lineare di carica con il principio di sovrapposizione.

Calcoliamo il valore del campo elettrico a distanza R da una distribuzione lineare di carica avente una carica per unità di lunghezza (o densità lineare di carica) λ costante.
Introduciamo un sistema di riferimento avente l'asse y coincidente con la distribuzione lineare di carica e l'asse x passante per il punto P in cui si desidera calcolare il valore del campo elettrico.
Per effettuare il calcolo, possiamo immaginare di suddividere la distribuzione di carica in tratti infinitesimi di ampiezza dy. In figura è indicato il tratto che si trova tra le coordinate y ed y+dy. Stimare la quantità di carica

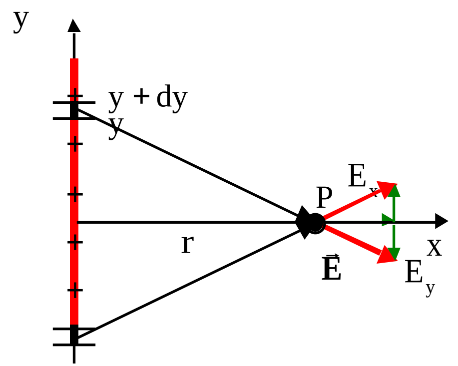
(infinitesima) contenuta sul tratto infinitesimo considerato: $dq=\lambda dy$. Assumere che tale elemento di carica sia approssimabile con una carica infinitesima. Valutare il campo elettrico nel punto P, in modulo, direzione e verso utilizzando l'espressione del campo elettrico per le cariche puntiformi. La direzione ed il verso del campo elettrico dovuto alla carica distribuita sul tratto dy sono mostrati in figura, il modulo invece vale:



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dy}{y^2 + R^2}$$

L'intensità del campo elettrico è infinitesima, perché tale è la carica contenuta nel tratto infinitesimo dy.
Il campo elettrico appena determinato può essere decomposto in una componente parallela alla distribuzione di carica (componente y) ed una componente perpendicolare alla distribuzione di carica (componente x con il sistema di riferimento utilizzato) .

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dy}{y^2 + R^2}\cos\theta \qquad dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dy}{y^2 + R^2}\operatorname{sen}\theta$$



Si può vedere subito che la componente parallela del campo elettrico viene compensato dal campo elettrico dovuto al tratto infinitesimo dy, simmetrico rispetto all'origine, del tratto considerato. Ci si può altresì rendere conto che le componenti perpendicolari del campo elettrico, dovuti ai due tratti dy simmetrici rispetto all'origine del sistema di riferimento, sono concordi.
Il principio di sovrapposizione ci dice che il valore del campo elettrico nel punto P è dato dalla somma di tutti i contributi di tutti i tratti in cui abbiamo suddiviso la distribuzione di carica.
Dalle osservazioni già fatte possiamo concludere che il campo elettrico nel punto P deve essere perpendicolare alla distribuzione di carica. Infatti quando facciamo la somma su tutti i contributi osserviamo,che per quanto riguarda la componente parallela i contributi a due a due si compensano.
Otteniamo allora:

$$E_x = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} dE_x = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda dy}{y^2 + R^2} \cos\theta$$

in cui l'integrale è esteso da meno infinito a più infinito per includere tutti i contributi.
Nell'integrale appena scritto possiamo identificare la variabile di integrazione con la variabile y, ma ci possiamo anche rendere subito conto che al variare della coordinata y del tratto dy considerato varia anche il valore dell'angolo θ, in altri termini θ è funzione di y, $\theta(y)$.
Per poter effettuare l'integrale, è necessario riscrive l'intera funzione come funzione di un'unica variabile, che può essere la coordinata y del tratto considerato, oppure l'angolo θ.
Nel nostro caso particolare si ottiene un integrale più facile da risolvere se esprimiamo il tutto in funzione dell'angolo θ.
Dalla figura possiamo dedurre che:

$\tan g\theta = \frac{y}{R}$ derivando rispetto ad y otteniamo $\frac{d(\tan g\theta)}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{R}\right)$ $\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{R}$

Da cui si ottiene: $dy = \frac{R d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{y^2 + R^2}{R^2}\frac{R d\theta}{} = \frac{y^2 + R^2}{R} d\theta$. Sostituendo al posto di dy nell'integrale si ottiene:

$$E_x = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda dy}{y^2 + R^2} \cos\theta = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda}{y^2 + R^2} \frac{y^2 + R^2}{R} \cos\theta d\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda}{R} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=+\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda}{R} \left[\operatorname{sen}\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda}{R} (1 - (-1)) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda}{R}$$

Possiamo concludere affermando che per una distribuzione lineare di carica il campo elettrico giace nel piano perpendicolare alla distribuzione; in questo piano è diretto radialmente e la sua intensità vale:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{R}$$

Il teorema di Gauss

Il teorema di Gauss consente di valutare il campo elettrico di alcune distribuzioni di cariche in maniera più semplice rispetto al principio di sovrapposizione e di dedurre, in maniera semplice, alcune proprietà del campo elettrico.

Definizione del flusso del campo elettrico.

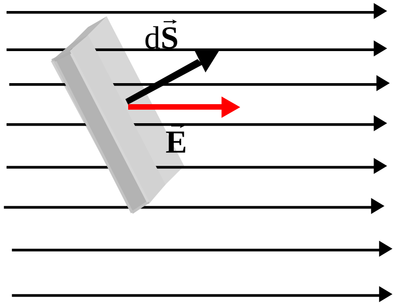
Consideriamo una superficie chiusa S immersa in un campo elettrico.
Su questa superficie consideriamo un suo elemento infinitesimo dS, come quello mostrato in figura.
L'elemento di superficie dS, può essere rappresentato come un vettore, $d\vec{\mathbf{S}}$, caratterizzato da

1. un modulo: pari all'area dell'elemento selezionato, dS.
2. una direzione: perpendicolare alla superficie nel punto considerato (perpendicolare al piano tangente)

3. un verso: verso l'esterno della superficie chiusa.

Si definisce flusso del campo elettrico attraverso la superficie $d\vec{\mathbf{S}}$, il prodotto scalare del campo elettrico sulla superficie dS per il vettore $d\vec{\mathbf{S}}$.

$$d\Phi = \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

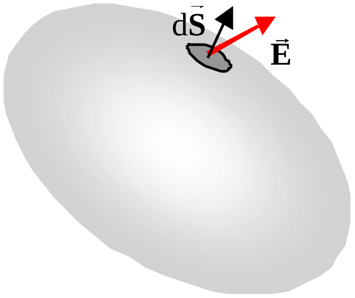


Il flusso complessivo del campo elettrico attraverso la superficie chiusa si otterrà sommando su tutti i contributi al flusso derivanti dagli infiniti elementi infinitesimi in cui è stata suddivisa la superficie chiusa S.

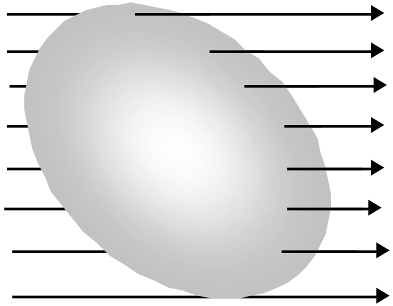
$$\Phi = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

Il circoletto sull'integrale sta ad indicare che l'integrale viene effettuato su una superficie chiusa.
Una stima del flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa può essere effettuata contando il numero

di linee di forza che entrano nella superficie chiuse e quelle che escono.



Se all'interno della superficie chiusa si trova una carica puntiforme positiva, tutte le linee di forze saranno uscenti dalla superficie chiusa, il prodotto scalare tra il campo elettrico e l'elemento di superficie $d\vec{S}$, essendo il verso di $d\vec{S}$ verso l'esterno della superficie chiusa, sarà in media positivo e tale sarà anche il flusso complessivo attraverso la superficie chiusa. Se, invece all'interno della superficie chiusa, c'è una carica negativa, tutte le linee d forza saranno entranti, il prodotto scalare tra il campo elettrico e $d\vec{S}$ sarà in media negativo e tale sarà anche il flusso complessivo. Quando le linee di forza sono in parte entranti, in parte uscenti dalla superficie chiusa, il flusso del campo elettrico sarà legato alla differenza tra il numero di linee uscenti e il numero di quelle entranti.



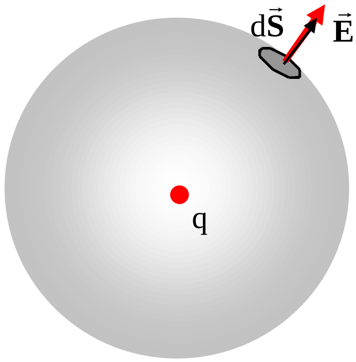
Se all'interno della superficie chiusa non ci sono cariche elettriche, allora le linee di forza non potranno né nascere né morire all'interno della superficie chiusa: in altri termini tutte le linee di forza che entrano all'interno della superficie chiusa devono uscire. La differenza tra le linee di forza uscenti e quelle entranti è nulla e tale è anche il flusso del campo elettrico attraverso la superficie chiusa.
Sottolineamo esplicitamente il fatto che se la carica interna alla superficie chiusa è nulla allora anche il flusso del campo elettrico attraverso la superficie chiusa è nulla.

Enunciato del teorema di Gauss.
Quest'ultimo risultato è compatibile con l'enunciato del teorema di Gauss che afferma:

il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica totale presente all'interno della superficie chiusa diviso per ε_o.

$$\Phi = \oint \vec{E} \; d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_o}$$

Verifica del teorema di Gauss



Noi non dimostreremo il teorema di Gauss ma ne verificheremo la sua validità nel caso di una carica puntiforme.
Vogliamo determinare il flusso del campo elettrico, generato da una carica puntiforme, attraverso una superficie sferica il cui centro corrisponde con la posizione occupata dalla carica puntiforme.
Consideriamo l'elemento di superficie $d\vec{S}$ localizzato attorno al punto P. Sappiamo che il campo elettrico nel punto P è diretto radialmente verso l'esterno se la carica posta al centro della superficie sferica è positiva. Ma anche il vettore $d\vec{S}$ è diretto radialmente verso l'esterno: quindi $\vec{E}$ e $d\vec{S}$ sono paralleli: il loro prodotto scalare sarà dato dal prodotto dei moduli.

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}dS$$

Il flusso attraverso la superficie chiusa sarà:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}dS = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}}_{\text{costante}}\oint \frac{dS}{r^2}$$

Tenendo conto della definizione di angolo solido, notiamo che il termine $\frac{dS}{r^2}$ è proprio uguale all'angolo solido $d\Omega$ sotteso dalla superficie dS (vedi figura). Il flusso del campo elettrico diventa perciò:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}dS = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}}_{\text{costante}}\oint \frac{dS}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\underbrace{\oint d\Omega}_{\substack{\text{angolo solido}\\ \text{totale} = 4\pi}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

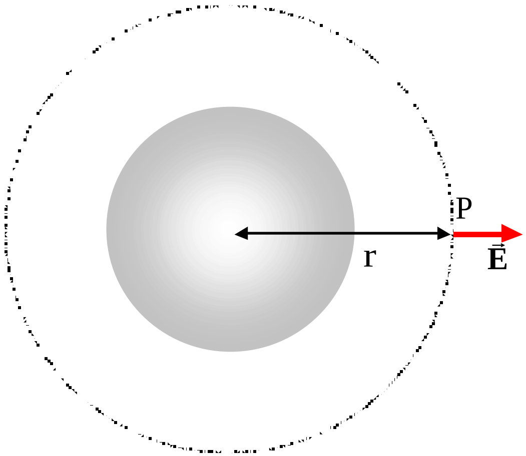
risultato che mostra come il teorema di Gauss, nel caso considerato, sia verificato.

Calcolo del campo elettrico utilizzando il teorema di Gauss

Naturalmente va immediatamente precisato che il teorema di Gauss da solo non è in grado di calcolare alcun campo elettrico: è necessario disporre di ulteriori informazioni che in generale possono essere desunte dalle condizioni di simmetria del problema.

Calcolo del campo elettrico generato da una carica q distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera di raggio R (guscio sferico).

Consideriamo un punto P, esterno al guscio sferico, a distanza r (>R) dal centro della distribuzione sferica.
Osserviamo che, data la simmetria del problema, il campo elettrico deve essere diretto lungo la congiungente il punto P con il centro della distribuzione di carica. Inoltre, il campo elettrico deve avere la stessa intensità in tutti i punti che si trovano ad eguale distanza dal centro della distribuzione di carica.
Applichiamo il teorema di Gauss. Utilizziamo come superficie chiusa una sfera di raggio r concentrica con la distribuzione di carica.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Per le osservazioni precedenti si ha che per ogni elemento $d\vec{S}$ della superficie sferica di raggio r, il campo elettrico $\vec{E}$ è parallelo a $d\vec{S}$. Inoltre, il modulo del campo elettrico è lo stesso su tutti i punti della sfera:

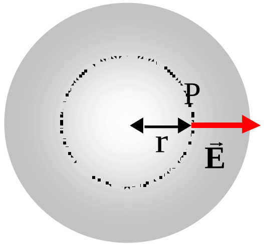
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\oint E dS}_{\substack{\text{il modulo del}\\ \text{campo elettrico}\\ \text{E è costante}}} = E \underbrace{\oint dS}_{\substack{\text{superficie totale}\\ \text{della sfera}\\ = 4\pi r^2}} = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Prendendo in esame l'ultima eguaglianza, possiamo ricavare il modulo del campo elettrico:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$$

Questo risultato ci porta a concludere che il guscio sferico, per i punti esterni si comporta come se la carica q fosse concentrata al centro della distribuzione.

Consideriamo ora il caso di un punto interno al guscio. Indichiamo con r (<R) la distanza del punto P dal centro dalla distribuzione sferica. Consideriamo come superficie di Gauss una superficie sferica di raggio r concentrica con la distribuzione di carica. Le considerazioni di simmetria si applicano allo stesso modo anche in questo caso e ci portano alle medesime conclusioni. Il campo elettrico in ciascun punto della superficie di gauss è parallelo al vettore $d\vec{\mathbf{S}}$, inoltre il modulo del campo elettrico è costante su tutti i punti della superficie di Gauss. L'unica cosa che cambia rispetto al caso predente è che in questo caso la carica contenuta all'interno della superficie di Gauss è nulla.



$$\oint \vec{\mathbf{E}}\, d\vec{\mathbf{S}} = \underbrace{\oint EdS}_{\substack{\text{il modulo del}\\ \text{campo elettrico}\\ \text{E è costante}}} = E \underbrace{\oint dS}_{\substack{\text{superficie totale}\\ \text{della sfera}\\ = 4\pi r^2}} = E4\pi r^2 = 0$$

da cui si ricava che il modulo del campo elettrico sui punti della superficie di Gauss è nullo.
Questo risultato ci porta a concludere che il campo elettrico nei punti interni alla distribuzione di carica è nullo.
Riassumendo:

carica q distribuita uniformemente sulla superficie sferica di raggio R	Punti esterni r>R	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$
	Punti interni r<R	E=0

<u>Calcolo del campo elettrico generato da una carica q distribuita uniformemente all'interno di un volume sferico di raggio R.</u>
Consideriamo un punto P, esterno alla distribuzione di carica, a distanza r (>R) dal suo centro.
Osserviamo che, data la simmetria del problema, il campo elettrico deve essere diretto lungo la congiungente il punto P con il centro della distribuzione di carica. Inoltre, il campo elettrico deve avere la stessa intensità in tutti i punti che si trovano ad eguale distanza dal centro della distribuzione di carica.

Applichiamo il teorema di Gauss. Utilizziamo come superficie chiusa una sfera di raggio r concentrica con la distribuzione di carica.

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Per le osservazioni precedenti si ha che per ogni elemento $d\vec{\mathbf{S}}$ della superficie sferica di raggio r, il campo elettrico $\vec{\mathbf{E}}$ è parallelo $d\vec{\mathbf{S}}$. Inoltre, il modulo del campo elettrico è lo stesso su tutti i punti della sfera:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \underbrace{\oint EdS}_{\substack{\text{il modulo del} \\ \text{campo elettrico} \\ \text{E è costante}}} = E \underbrace{\oint dS}_{\substack{\text{superficie totale} \\ \text{della sfera} \\ = 4\pi r^2}} = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Prendendo in esame l'ultima eguaglianza, possiamo ricavare il modulo del campo elettrico:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$$

Questo risultato ci porta a concludere che la distribuzione sferica di carica, per i punti esterni si comporta come se la carica q fosse concentrata al centro della distribuzione.

Consideriamo ora il caso di un punto interno alla distribuzione. Indichiamo con r (<R) la distanza del punto P dal centro dalla distribuzione sferica. Consideriamo come superficie di Gauss una superficie sferica di raggio r concentrica con la distribuzione di carica. Le considerazioni di simmetria si applicano allo stesso modo anche in questo caso e ci portano alle medesime conclusioni. Il campo elettrico in ciascun punto della superficie di Gauss è parallelo al vettore $d\vec{\mathbf{S}}$, inoltre il modulo del campo elettrico è costante su tutti i punti della superficie di Gauss. L'unica cosa che cambia rispetto al caso predente è che in questo caso la carica contenuta all'interno della superficie di Gauss è data dal prodotto della densità di carica per il volume racchiuso dalla superficie di Gauss:

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad q_{int} = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = q\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = q\frac{r^3}{R^3}$$

Applicando Gauss avremo:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\oint EdS}_{\substack{\text{il modulo del}\\ \text{campo elettrico}\\ \text{E è costante}}} = E\underbrace{\oint dS}_{\substack{\text{superficie totale}\\ \text{della sfera}\\ = 4\pi r^2}} = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}\frac{r^3}{R^3}$$

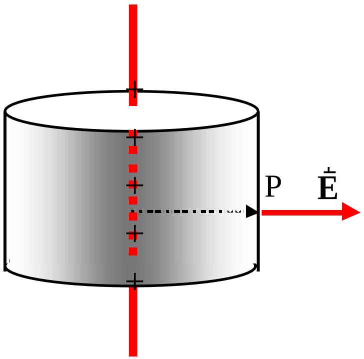
da cui si ricava il modulo del campo elettrico sui punti della superficie di Gauss:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^3}$$

Questo risultato ci porta a concludere che il campo elettrico è nullo al centro della distribuzione e cresce linearmente al crescere della distanza del punto P dal centro della distribuzione.
Riassumendo:

carica q distribuita uniformemente nel volume sferico di raggio R	Punti esterni r>R	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$
	Punti interni r<R	$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^3}$

<u>Calcolo del campo elettrico generato da una distribuzione rettilinea di carica con densità lineare costante λ.</u>
Consideriamo un punto P a distanza r dalla distribuzione rettilinea di carica.
Osserviamo che, data la simmetria del problema, il campo elettrico deve giacere nel piano perpendicolare alla distribuzione rettilinea di carica passante per il punto P ed essere diretto lungo la congiungente il punto P con il punto intersezione tra la retta su cui è distribuita la carica e il piano ad essa perpendicolare precedentemente menzionato: il punto O della figura. Inoltre, il campo elettrico deve avere la stessa intensità in tutti i punti che si trovano sul piano perpendicolare alla distribuzione rettilinea di carica ad eguale distanza dal punto O. Infine il campo elettrico non può dipendere dalla coordinata lungo la distribuzione rettilinea di carica.
Applichiamo il teorema di Gauss. Utilizziamo come superficie chiusa un cilindro, di raggio r ed altezza h, concentrico con la distribuzione rettilinea di carica.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_o}$$

Per le osservazioni precedenti si ha che per ogni elemento $d\vec{S}$ sulle basi del cilindro il campo elettrico è perpendicolare a $d\vec{S}$ e pertanto il flusso relativo è nullo, mentre per ogni elemento di superficie $d\vec{S}$ della superficie laterale del cilindro il campo elettrico $\vec{E}$ è parallelo $d\vec{S}$. Infine, il modulo del campo elettrico è lo stesso su tutti i punti della superficie laterale del cilindro:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{\text{Basi}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\substack{=0 \\ \vec{E} \text{ è perpendicolare a } d\vec{S}}} + \int_{\substack{\text{Superficie}\\ \text{laterale}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\substack{\text{Superficie}\\ \text{laterale}}} E dS = E \underbrace{\int_{\substack{\text{Superficie}\\ \text{laterale}}} dS}_{=2\pi rh} = E 2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_o}$$

Prendendo in esame l'ultima eguaglianza, possiamo ricavare il modulo del campo elettrico:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda}{r}$$

che, ovviamente coincide con il valore attenuto applicando il principio di sovrapposizione.

Riassumendo:

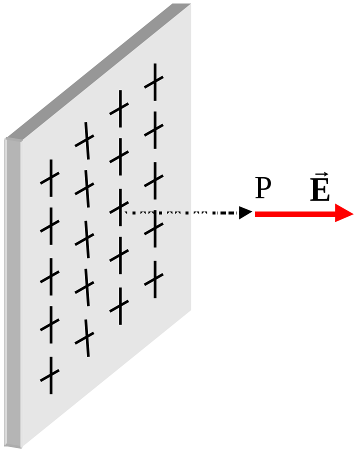
carica distribuita uniformemente su una retta con densità lineare costante λ	a distanza r dalla distribuzione rettilinea di carica	$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda}{r}$

<u>Calcolo del campo elettrico generato da una distribuzione piana di carica con densità superficiale costante σ.</u>

Consideriamo un punto P a distanza r dalla distribuzione piana di carica.

Osserviamo che, data la simmetria del problema, il campo elettrico deve essere diretto perpendicolarmente alla distribuzione superficiale di carica. Inoltre, il campo elettrico deve avere la stessa intensità in tutti i punti che si trovano alla stessa distanza dal piano carico. Infine, il campo elettrico deve essere simmetrico rispetto alla

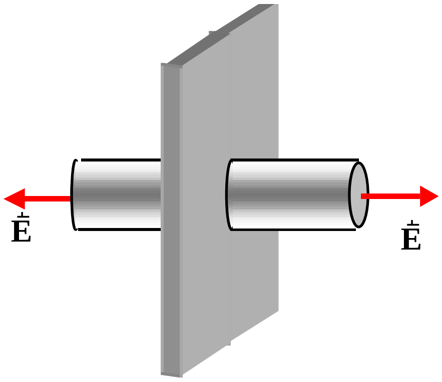
distribuzione di carica.
Applichiamo il teorema di Gauss. Utilizziamo come superficie chiusa un cilindro, di raggio arbitrario ed altezza 2r, con le basi parallele, di area A, e disposte simmetricamente rispetto alla distribuzione di carica.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_o}$$

Per le osservazioni precedenti si ha che per ogni elemento $d\vec{S}$ sulle basi del cilindro il campo elettrico è parallelo a $d\vec{S}$, mentre per ogni elemento di superficie $d\vec{S}$ della superficie laterale del cilindro il campo elettrico $\vec{E}$ è perpendicolare a $d\vec{S}$ e pertanto il flusso relativo è nullo. Infine, il modulo del campo elettrico è lo stesso su tutti i punti delle due basi del cilindro:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Basi}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \underbrace{\int_{\substack{\text{Superficie}\\ \text{laterale}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\substack{=0 \\ \vec{E} \text{ è perpendicolare a } d\vec{S}}} = \int_{\text{Basi}} E dS = E \int_{\substack{\text{Basi}\\ =2A}} dS = E2A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_o}$$



Prendendo in esame l'ultima eguaglianza, possiamo ricavare il modulo del campo elettrico:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

da cui possiamo dedurre che il campo elettrico prodotto da una distribuzione piana ha lo stesso modulo in tutti i punti dello spazio, è perpendicolare alla distribuzione piana e con verso che si allontana dalla carica se questa è positiva.

Riassumendo:

carica distribuita uniformemente su un piano con densità superficiale costante σ	a distanza r dalla distribuzione	$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$

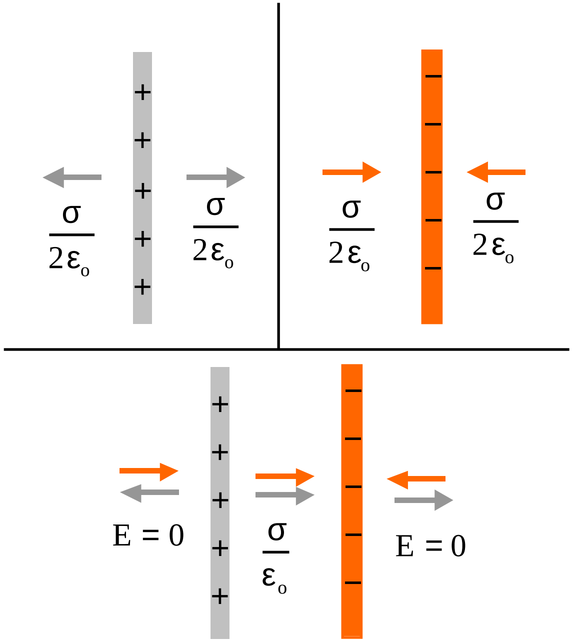
<u>Calcolo del campo elettrico generato da una doppia distribuzione piana di carica con densità superficiale costante +σ e -σ a distanza d.</u>

Possiamo effettuare questo calcolo applicando il principio di sovrapposizione.

Con il teorema di Gauss sappiamo calcolare il campo elettrico prodotto da ciascuna distribuzione, considerata separatamente, in tutti i punti dello spazio. Quando entrambe le distribuzioni di carica sono presenti contemporaneamente, il campo elettrico in un particolare punto dello spazio sarà la somma dei campi elettrici generati dalle due distribuzioni considerate separatamente.

1. Punti esterni alle due distribuzioni: si vede che in questi punti il campo elettrico generato dalle due distribuzioni piane di cariche ha lo stesso modulo, la stessa direzione ma verso opposto. Il campo elettrico risultante è nullo.
2. Punti compresi tra le due distribuzioni: si vede che in questi punti il campo elettrico generato dalle due distribuzioni piane di cariche ha lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso opposto. Il modulo del campo elettrico per questi punto sarà dato da:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$



Riassumendo

Doppia distribuzione piana di carica con densità costanti $+\sigma$ e $-\sigma$ a distanza d	Punti esterni alle due distribuzioni	E=0
	Punti compresi tra le due distribuzioni	$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$

Tabella riassuntiva finale:

carica q distribuita uniformemente sulla superficie sferica di raggio R	Punti esterni r>R	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$
	Punti interni r<R	E=0
carica q distribuita uniformemente nel volume sferico di raggio R	Punti esterni r>R	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$
	Punti interni r<R	$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^3}$
carica distribuita uniformemente su una retta con densità lineare costante λ	a distanza r dalla distribuzione rettilinea di carica	$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r}$
carica distribuita uniformemente su un piano con densità superficiale costante σ	a distanza r dalla distribuzione	$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$
Doppia distribuzione piana di carica con densità costanti $+\sigma$ e $-\sigma$ a distanza d	Punti esterni alle due distribuzioni	E=0
	Punti compresi tra le due distribuzioni	$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$

Moto di cariche in un campo elettrico

Dalla definizione di campo elettrico, si ricava subito che quando una carica puntiforme q viene messa in una regione in cui esiste un campo elettrico essa subisce una forza data da:

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$$

In cui $\vec{\mathbf{E}}$ è il campo elettrico nel punto occupato dalla carica q. Se q è positiva, la forza ha lo stesso verso del campo elettrico, se q è negativa allora la forza ha verso opposto al campo elettrico.
Consideriamo una particella di massa m e che trasporta una carica q. Essa, muovendosi con un velocità v, entra in una regione di spazio in cui è presente un campo elettrico uniforme perpendicolare alla direzione della velocità della particella.
Supponendo che la regione in cui esiste il campo uniforme sia lunga L, determinare lo spostamento trasversale subito dalla particella, quando esce dalla regione in cui è presente il campo elettrico.
Introduciamo un sistema di riferimento con l'asse x coincidente con la traiettoria della particella prima di entrare nella zona in cui è presente il campo elettrico e l'asse y diretto parallelamente al campo elettrico. (Si osservi che il campo elettrico uniforme può essere realizzato con una doppia distribuzione di carica, come abbiamo visto nel paragrafo precedente. Vedremo tra qualche pagina che una doppia distribuzione di cariche può essere ottenuta mediante due piastre metalliche parallele collegate ad una batteria).
Mentre la particella si trova nella zona in cui è presente il campo elettrico subirà una forza di intensità costante, perché tale è il campo elettrico, diretta lungo l'asse delle y, data da:

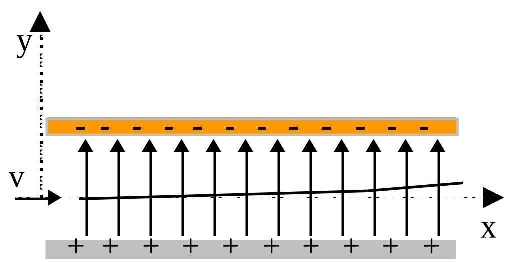
$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$$

Dalla seconda legge di Newton ricaviamo che:

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

Proiettando lungo gli assi coordinati otteniamo:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = ma_x \\ \\ qE = ma_y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \text{moto uniforme} \\ \\ \text{moto uniformemente accelerato} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = vt \\ \\ y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \end{array}$$



Il moto della particella carica risulta quindi del tutto equivalente al moto del proiettile. La traiettoria descritta dalla particella carica è parabolica.
Il tempo impiegato per attraversare la zona interessata dal campo elettrico si ottiene utilizzando la legge oraria del moto lungo l'asse x:

$$L = vt^* \qquad t^* = \frac{L}{v}$$

mentre lo spostamento trasversale all'uscita della regione interessata dal campo elettrico è dato da:

$$y = \tfrac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(t^*\right)^2 = \tfrac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{L}{v}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\frac{qEL^2}{mv^2}$$

L'esempio di moto qui trattato avviene realmente per esempio quando il fascio di elettroni passa tra le due placchette di deflessione (verticale o orizzontale), utilizzate negli oscillografi per indirizzare in un particolare punto dello schermo il fascio di elettroni, o nelle stampanti a getto di inchiostro in cui un meccanismo del tipo descritto viene utilizzato per guidare la macchiolina di inchiostro verso il punto desiderato sul foglio di carta.

Energia potenziale elettrostatica

Nell'introdurre la forza di Coulomb abbiamo sottolineato il fatto che questa forza, come quella di Gravitazione Universale, è una forza centrale e come tale essa è anche una forza conservativa.
Ricordando l'espressione dell'energia potenziale di una massa m_2 nel campo gravitazionale generato dalla massa m_1,

$$U_G = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

in cui il segno meno deriva dal fatto che la forza di gravitazione universale è solo attrattiva, r è la distanza tra le due masse ed è stato scelto come punto di riferimento la configurazione con le due cariche a distanza infinita a cui è stata assegnata energia potenziale nulla, tendendo conto delle differenze tra la forza di gravitazione universale e quella di Coulomb, possiamo scrivere che la energia elettrostatica di una carica puntiforme q_2 nel campo elettrico generato dalla carica q_1 è dato da:

$$U_G = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r}$$

Anche in questo caso è stata assunta come configurazione di riferimento quella in cui le due cariche sono a distanza infinita e a tale configurazione è stata assegnata energia potenziale uguale a zero.

Val la pena di sottolineare che l'energia potenziale si riferisce al sistema composto dalle due cariche: una carica elettrica da sola non ha energia potenziale.
Dalla definizione di energia potenziale sappiamo anche che se la carica q_2 viene spostata da una posizione in cui l'energia potenziale è più elevata ad una posizione in cui l'energia potenziale è più bassa, la differenza tra l'energia potenziale iniziale e quella finale corrisponde al lavoro fatto dalla forza di Coulomb durante lo spostamento dalla caria q_2 dalla posizione finale a quella finale. Ci si deve attendere che questo lavoro provochi ad esempio un aumento dell'energia cinetica delle particelle.

$$U_i - U_f = W_{if} = K_f - K_i$$

L'energia potenziale elettrostatica deve essere intesa alla stessa stregua dell'energia potenziale dovuta alla forza peso. Nel caso della forza peso, noi sappiamo che l'energia potenziale è legata alla quota a cui si trova la particella: mgh. Se la quota della particella viene diminuita, come accade per esempio quando un corpo viene fatto cadere sotto l'azione della forza peso, anche la sua energia potenziale diminuisce. La forza peso compie un lavoro maggiore di zero ($W_{if}=U_i-U_f>0$), che ritroviamo sottoforma di energia cinetica della particella.
Se disponiamo di una configurazione di n cariche, denominate $q_1, q_2, \dots q_i, .. q_n$, all'interno di una zona finita di spazio, allora l'energia potenziale della carica q posta nel punto P potrà essere ottenuta con il principio di sovrapposizione:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q_i q}{r_i}$$

in cui r_i è la distanza della carica q dalla carica q_i.

Potenziale elettrico

Così come abbiamo fatto introducendo il campo elettrico, possiamo introdurre attribuire a ciascun punto dello spazio l'energia potenziale per unità di carica, o potenziale elettrico, come il rapporto tra l'energia potenziale posseduta dalla carica q quando si trova in quella posizione e la carica stessa:

$$V = \frac{U}{q}$$

Nel Sistema Internazionale il potenziale elettrico si misura in joule su coulomb (J/C). Questa unità di misura viene chiamata volt (V).
Per una carica puntiforme, posta nell'origine del sistema di riferimento, il potenziale elettrico è dato da:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1}{r}$$

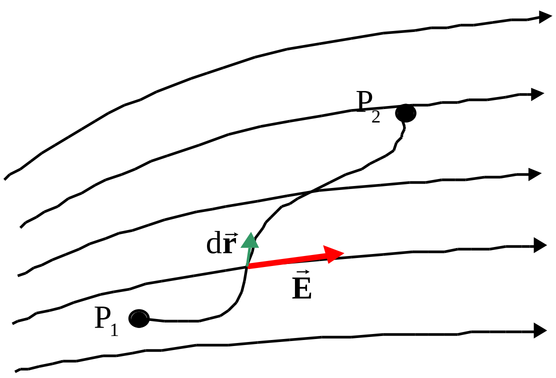
Naturalmente come l'energia potenziale elettrostatica, da cui deriva, anche il potenziale elettrico è definito a meno di una costante arbitraria: nel caso considerato della carica puntiforme è stato arbitrariamente assegnato potenziale nullo ai punti che si trovano a distanza infinita dalla carica q_1.
Se si ha a che fare con una configurazione di n cariche, denominate $q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots q_n$, poste all'interno di una zona delimitata di spazio, il potenziale nel generico punto p sarà dato da:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_i}{r_i}$$

Anche in questo caso, non essendoci cariche all'infinito, è stato arbitrariamente assegnato potenziale zero ai punti a distanza infinita dall'origine del sistema di riferimento.

Legame tra il campo elettrico e il potenziale.

Consideriamo un generico punto P_1 dello spazio e sia $V(P_1)$ il potenziale elettrico in quel punto. Se la carica puntiforme q viene posta nel punto P_1, essa possiederà un'energia potenziale $U(P_1)=qV(P_1)$.
Se successivamente la carica viene spostata nel punto P_2 in cui il potenziale vale $V(P_2)$, la sua energia potenziale diventerà $U(P_2)=qV(P_2)$.
In altri termini la carica q ha subito una variazione di potenziale $\Delta V = V(P_2) - V(P_1)$ a cui corrisponde una variazione di energia potenziale $\Delta U = q\Delta V$. Se ΔU è negativa, dato che per definizione $\Delta U = -W_{if}$, il lavoro fatto dalla forza elettrostatica è positivo e questo corrisponderà ad un aumento dell'energia cinetica della particella carica. Viceversa se ΔU è positiva, il lavoro fatto dalla forza elettrica è negativa e questo corrisponde ad una diminuzione di energia cinetica o richiede la presenza di una forza esterna che sposti la carica contro le forze elettrostatiche. Quindi una carica positiva si muoverà spontaneamente verso punti in



cui il potenziale è più basso mentre quelle negative si muoveranno spontaneamente verso zone in cui il potenziale è più alto.

Per trovare il legame tra il potenziale ed il campo elettrico riprendiamo la relazione $\Delta U = q\Delta V$. Da questa si ottiene:

$$\Delta V = \underbrace{\frac{\Delta U}{q} = \frac{-W_{if}}{q}}_{\text{dalla definizione di energia potenziale}} = \underbrace{-\frac{1}{q}\int_i^f \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}}_{\text{utilizzando la definizione del lavoro}} = \underbrace{-\frac{1}{q}\int_i^f q\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}}_{\text{utilizzando la definizione del campo eletrico}} = -\int_i^f \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

dove l'integrale viene effettuato lungo qualunque curva che connette il punto iniziale con quello finale. L'espressione precedente può essere riscritta nella forma:

$$V_i - V_f = \int_i^f \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

che ci dice che la differenza di potenziale tra il punto iniziale e quello finale è uguale all'integrale di $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ effettuato su qualunque curva che connette la posizione iniziale a quella finale.

Se il potenziale è determinato da una configurazione di cariche localizzate in una zona delimitata di spazio, possiamo assumere il punto iniziale all'infinito, il punto finale in un generico punto P dello spazio, assegnare potenziale nullo ai punti all'infinito, e quindi determinare il potenziale nel punto P con la relazione:

$$-V(P) = \int_\infty^P \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \qquad V(P) = -\int_\infty^P \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

Se non tutte le cariche sono localizzate in una regione delimitata di spazio, ma alcune della cariche sono a distanza infinita, come per esempio accade nel caso di una distribuzione rettilinea o di una distribuzione piana di cariche, allora non è possibile assegnare potenziale zero ai punti all'infinito. Per determinare il potenziale in un qualsiasi punto dello spazio occorre fissare un altro punto di riferimento, P_o, a cui assegnare il potenziale zero. In tal caso si avrà:

$$V(P_o) - V(P) = \int_{P_o}^{P} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \qquad \underbrace{V(P) = -\int_{P_o}^{P} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}}_{V(P_o)=0}$$

Superfici equipotenziali.

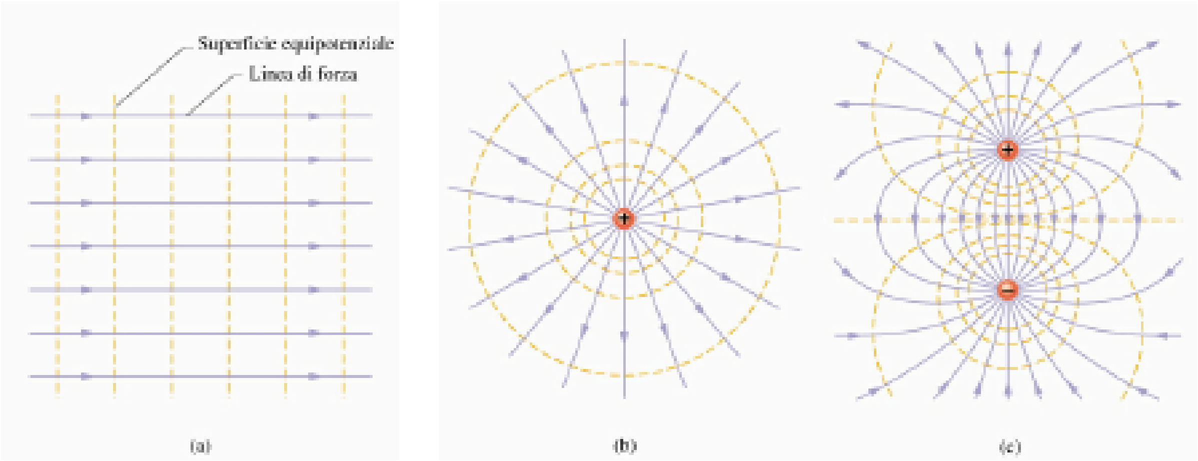
Con questo termine si intende il luogo dei punti aventi tutti lo stesso potenziale.
Per esempio nel caso di una carica puntiforme, in cui il potenziale è dato da

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q_1}{r}$$

si vedi che tutti i punti che si trovano su una superficie sferica di raggio r e centro nella posizione occupata dalla carica q_1 hanno tutti lo stesso potenziale. Risulta perciò che nel caso della carica puntiforme le superficie equipotenziali sono delle superfici sferiche aventi come centro la posizione occupata dalla carica.
Si può far vedere che il campo elettrico in una certa posizione è sempre perpendicolare alla superficie equipotenziale passante per quel punto. Consideriamo uno spostamento infinitesimo $d\vec{\mathbf{r}}$ effettuato sulla superficie equipotenziale. La corrispondente variazione di potenziale dV sarà nulla, perché ci siamo spostati sulla superficie equipotenziale e quindi il punto iniziale e quello finali di $d\vec{\mathbf{r}}$ hanno lo stesso potenziale. Ma

$$\begin{array}{l} dV = 0 \\ dV = -\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \end{array} \qquad \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \vec{\mathbf{E}} = 0 \\ \vec{\mathbf{E}} \text{ perpendicolare a } d\vec{\mathbf{r}} \end{array}$$

Quindi se il campo elettrico è diverso da zero esso è perpendicolare a qualunque spostamento infinitesimo effettuato sulla superficie equipotenziale. Il campo elettrico è dunque perpendicolare al piano tangente alla superficie equipotenziale e, di conseguenza, alla superficie equipotenziale.
Otteniamo dunque che le superficie equipotenziali nel caso di una distribuzione rettilinea di carica sono delle superfici cilindriche concentriche con la distribuzione di carica, mentre nel caso di una distribuzione piano sono dei piani paralleli alla distribuzione di carica.



Calcolo della differenza di potenziale tra due distribuzioni piane di carica $+\sigma$ e $-\sigma$ poste a distanza d.

Abbiamo già visto che per una distribuzione di cariche di questo tipo, il campo elettrico è diretto perpendicolarmente ai piani su cui è distribuita la carica, dal piano positivo a quello negativo e non dipende dalla posizione, $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$. Le linee di forza del campo elettrico sono segmenti perpendicolari ai piani carichi.

La relazione generale per il calcolo della differenza di potenziale ci dice che:

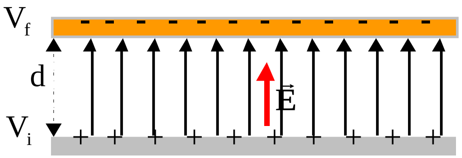
$$V_i - V_f = \int_i^f \vec{\mathbf{E}} \; d\vec{\mathbf{r}}$$

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che nel caso di una distribuzione piana di carica, le superfici equipotenziali sono dei piani paralleli alla distribuzione stessa. Ne segue che i piani su cui è distribuita la carica sono equipotenziali. Per calcolare la differenza di potenziale tra i due piani possiamo calcolare la differenza di potenziale tra due punti qualsiasi delle due distribuzioni.

Scegliamo come punto iniziale e finale del percorso su cui effettuare l'integrazione i due estremi di una linea di forza e come percorso proprio la linea di forza. Inoltre supponiamo che il punto iniziale sia sul piano carico positivamente e quello finale sull'altro piano, quello negativo. In questo modo per ogni spostamento infinitesimo $d\vec{\mathbf{r}}$ il campo elettrico risulta parallelo allo spostamento. Pertanto si avrà:

$$V_i - V_f = \int_{i,\text{lungo la linea di forza}}^{f} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{i,\text{lungo la linea di forza}}^{f} E dr = E \int_{i,\text{lungo la linea di forza}}^{f} dr = Ed$$

con il potenziale della distribuzione positiva più elevato di quella negativa.



L'ultima relazione trovata ci permette di ricavare il campo elettrico nel caso in cui esso sia uniforme:

$$E = \frac{V_i - V_f}{d}$$

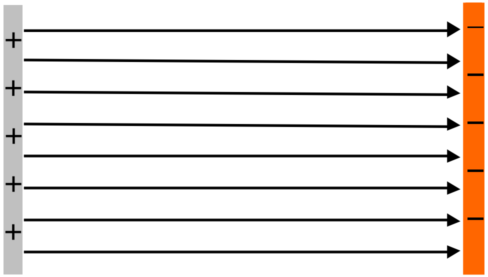
Da questa relazione ricaviamo che il campo elettrico può essere anche espresso in volt per metro (V/m).

Conduttori ed isolanti

Dal punto di vista elettrico i materiali si distinguono in conduttori e isolanti.
Si chiamano conduttori quei materiali in cui esistono delle cariche che sono libere di spostarsi in tutto il volume occupato dal corpo. I materiali che non soddisfano questa condizione si chiamano isolanti. Naturalmente in natura non troveremo mai un conduttore perfetto né un isolante perfetto, e le due categorie non saranno mai nettamente distinte, ci sarà tutta una gradazione di valori che vanno dai buoni conduttori ai buoni isolanti[2] passando attraverso una serie di sostanze che hanno caratteristiche intermedie (semiconduttori).
Sono buoni conduttori i metalli, quelle sostanze che hanno uno o pochi elettroni sull'ultimo livello, e che pertanto risulta poco legato al nucleo e di conseguenza può facilmente spostarsi da un atomo all'altro all'interno della struttura cristallina. Ma sono anche conduttori le soluzioni: si pensi ad esempio ad un sale, il cloruro di sodio, disciolto nell'acqua, esso si presenterà sottoforma di ioni Na^+, in cui gli atomi di sodio hanno perso l'elettrone dell'ultimo livello, e ioni Cl^- in cui gli atomi di cloro hanno attaccato un elettrone e completato così il loro ultimo livello. Questi ioni sono liberi di muoversi all'interno di tutto il volume occupato dall'acqua.
Ma i conduttori possono essere anche in forma gassosa allorquando si riesce a ionizzare gli atomi di gas, per

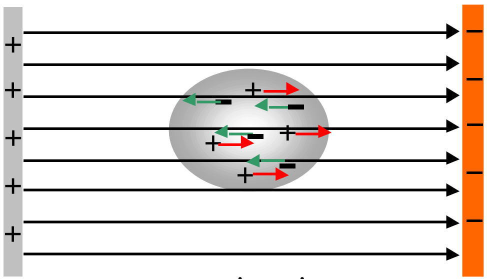
[2] A seconda delle situazioni, riferendoci allo stesso materiale, lo potremo descrivere come un buon isolante o un cattivo conduttore (e viceversa).

esempio mediante una scarica elettrica come avviene all’interno di una lampada fluorescente.
Sono buoni isolanti i gas non ionizzati, l’acqua distillata, i materiali solidi amorfi, non aventi cioè una struttura cristallina, come il vetro, le ceramiche, le plastiche etc.
Materiali come il carbone, il germanio, il silicio (hanno quattro atomi sull’ultimo livello) si comportano a seconda dei casi come isolanti o come conduttori(per esempio il diamante è isolante, la grafite è conduttrice. Si noti che il diamante e la grafite sono due modi esistere del carbonio. Questi materiali fanno parte della categoria denominata semiconduttori.
In particolari condizioni, a temperature vicine allo zero assoluto, alcuni conduttori si trasformano in superconduttori. Al contrario dei conduttori normali in cui il moto delle cariche è comunque contrastato dalle presenza della struttura cristallina, nei superconduttori la carica si sposta al loro interno senza più incontrare alcuna opposizione.



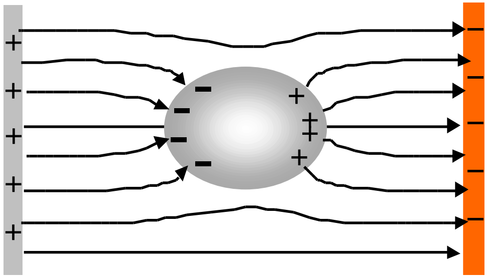
Conduttori in un campo elettrico

Quando immergiamo un conduttore in una regione in cui esiste il campo elettrico, inizialmente il campo elettrico agirà anche all’interno del conduttore. L’azione del campo elettrico farà spostare le cariche libere presenti all’interno del conduttore fino a che non viene raggiunta una condizione stazionaria. Il tempo impiegato per raggiungere la condizione stazionaria dipendere dal fatto se il materiale è un buono o un cattivo conduttore. I buoni conduttori impiegheranno un tempo molto breve, che aumenta notevolmente per i cattivi conduttori.



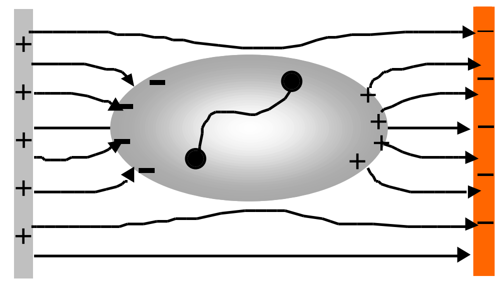
appena inserito

Vogliamo mostrare che quando la condizione stazionaria viene raggiunta, il campo elettrico all’interno del conduttore è nullo.
Se, in condizioni stazionarie, il campo elettrico all’interno del conduttore non fosse nullo, esso farebbe muovere le cariche libere presenti nel conduttore, e questo è contrario all’ipotesi che il conduttore ha già raggiunto la condizione stazionaria.
Immediata conseguenza di questo fatto è che un conduttore è

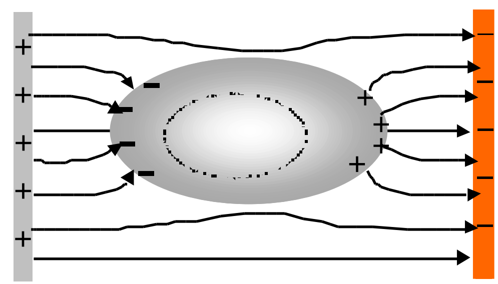


una volta raggiunta la condizione stazionaria equipotenziale. Infatti se prendiamo due punti qualsiasi del conduttore e consideriamo un percorso tra di essi tutto interno al conduttore, la differenza di potenziale tra di essi sarà data da:

$$V_i - V_f = \underbrace{\int_i^f \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}}_{\vec{\mathbf{E}}=0 \text{ in ogni punto del percorso}} = 0$$



Da questo possiamo derivare che il campo elettrico immediatamente all'esterno del conduttore è perpendicolare alla superficie del conduttore. Infatti poiché tutto il conduttore è equipotenziale,anche il contorno del conduttore sarà equipotenziale: esso è una superficie equipotenziale. Ma abbiamo visto qualche paragrafo indietro che il campo elettrico è sempre perpendicolare alle superfici equipotenziali. D'altra parte se il campo elettrico sulla superficie del conduttore avesse una componente parallela alla superficie del conduttore, metterebbe in movimento le cariche superficiali del conduttore conto l'ipotesi che si sia ormai in condizioni stazionarie.

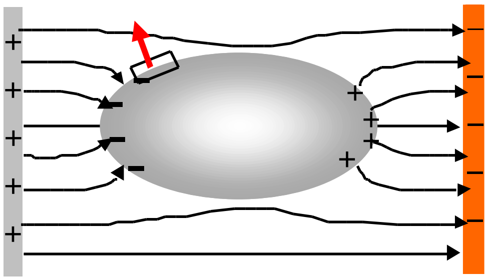


L'osservazione che, in condizioni stazionarie, il campo elettrico all'interno del conduttore sia nullo porta come conseguenza che le eventuali cariche presenti sul conduttore siano localizzate sulla sua superficie.
Infatti se consideriamo una qualsiasi superficie di Gauss interna al conduttore, applicando il teorema di Gauss a questa superficie, osservando che il campo elettrico nei punti interni al conduttore è nullo e di conseguenza lo è anche il flusso attraverso la superficie di Gauss, si ottiene che la carica interna alla superficie di Gauss è nulla. Siccome a questo risultato si arriva per qualunque superficie chiusa purché essa sia interna al conduttore, vuol dire che eventuali eccessi di carica saranno distribuiti sulla superficie del conduttore. Nel caso di un conduttore scarico immerso in un campo elettrico la situazione finale è quella illustrata in figura a).
Se invece carichiamo un conduttore con una carica q, questa si localizzerà sulla superficie del conduttore come mostrato in figura b). Si può dimostrare che per un conduttore isolato la densità superficiale con cui la carica si distribuisce sulla superficie del conduttore dipenderà solo dalla forma della superficie. In particolare se essa è sferica allora la densità di carica sarà uniforme, negli altri casi la densità di carica è inversamente proporzionale al

raggio di curvatura del contorno del conduttore in quella posizione. La carica si addenserà laddove il raggio di curvatura è più piccolo e sarà più rada laddove il raggio di curvatura è più grande.
Naturalmente se il conduttore non è isolato allora la distribuzione di carica dipenderà anche dalla presenza di altre cariche o di altri conduttori.

Campo elettrico sulla superficie dei conduttori

Calcoliamo il campo elettrico nelle immediate vicinanze della superficie di un conduttore utilizzando il teorema di Gauss.



Sappiamo già che il campo elettrico esterno a un conduttore è perpendicolare alla sua.
Scegliamo come superficie di Gauss un cilindretto di altezza molto piccola, infinitesima, avente l'asse perpendicolare alla superficie del conduttore, una delle basi all'interno e l'altra all'esterno.
Inoltre fissiamo l'area di base sufficientemente piccola in modo da poter considerare uniforme sia il campo elettrico in tutti i punti della superficie di base, sia la densità di carica sulla superficie del conduttore che cade all'interno del cilindretto così selezionato. In questa ipotesi la carica interna alla superficie di gauss risulta uguale a σA dove A è l'area di base del cilindro di Gauss fissato.
L'aver scelto il cilindro con l'asse perpendicolare alla superficie del conduttore e di dimensioni così piccole da poter considerare uniforme il campo elettrico, ci porta alla conclusione che il flusso del campo elettrico attraverso la superficie laterale del cilindro è nullo (infatti il campo elettrico è perpendicolare a $d\vec{\mathbf{S}}$). D'altra parte l'unica superficie che contribuisce al flusso del campo elettrico è la base esterna del cilindro, in quanto sulla base interna il campo elettrico è nullo. Sui punti della base esterna, il campo elettrico è parallelo a $d\vec{\mathbf{S}}$, pertanto il flusso attraverso questa superficie sarà dato dal valore del campo elettrico, supposto uniforme su tutta la base, per l'area della base. Per il teorema di Gauss avremo:

$$EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_o} \qquad\qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

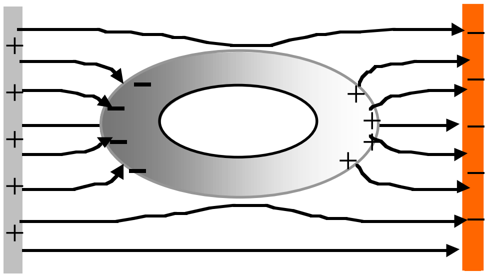
da cui si vede che il campo elettrico nei punti esterni al conduttore è proporzionale alla densità di carica distribuita sulla sua superficie.

Schermo elettrostatico

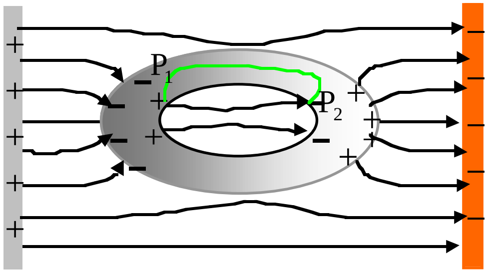
Lo schermo elettrostatico è costituito da un conduttore con una cavità al suo interno. L'effetto di schermo consiste nel fatto che variando la configurazione di cariche presenti all'esterno del conduttore, non è possibile rilevare alcun effetto all'interno della cavità e, allo stesso modo, variando la configurazione di cariche all'interno della cavità, non è possibile rilevare alcun effetto all'esterno del conduttore.

<u>Conduttore scarico cavo</u>

Consideriamo inizialmente un conduttore scarico con una cavità. Supponiamo inoltre che non ci siano cariche all'interno della cavità. Immergiamo questo conduttore cavo in una regione in è presente un campo elettrico. Possiamo mostrare che, in condizioni stazionarie, il campo elettrico all'interno della cavità è nullo.



Se applichiamo il teorema di Gauss ad una qualsiasi superficie chiusa interna la conduttore, sapendo che il campo elettrico all'interno di un conduttore in condizioni stazionarie è nullo, ricaviamo che anche la carica interna alla superficie di gauss è nulla. Poiché questo vale per qualunque superficie di Gauss purché sia all'interno del conduttore ci porta a concludere che la carica complessiva presente sulla superficie della cavità è complessivamente nulla. Ma possiamo fare anche di più, possiamo dimostrare che anche la densità superficiale di carica sulla superficie della cavità è nulla, in altri termini non ci sono accumuli di carica positiva e negativa in zone distinte della superficie interna del conduttore cavo.



Se per caso questi accumuli di carica ci fossero, come ipotizzato nella figura, allora all'interno della cavità il campo elettrico non è nullo, abbiamo mostrato nel paragrafo precedente che il campo elettrico nelle immediate vicinanze della superficie del conduttore è dato da σ/ε_o. Quindi ci saranno all'interno della cavità delle linee di forza del campo elettrico che nasceranno nella zona in cui è addensata la carica positiva e moriranno nella zona in cui è addensata la carica negativa. Consideriamo una di queste linee di forza e consideriamo i sui due punti estremi P_1 e P_2 sulla superficie della cavità. La differenza di potenziale tra questi due punti sarà data dalla relazione:

$$V_{P_1} - V_{P_2} = \int_{P_1}^{P_1} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{r}}$$

In cui l'integrale viene effettuato su qualunque percorso che connette i punti P_1 e P_2.
Possiamo scegliere come percorso un percorso tutto interno al conduttore, oppure un percorso coincidente con la linea di forza che connette i punti P_1 e P_2.

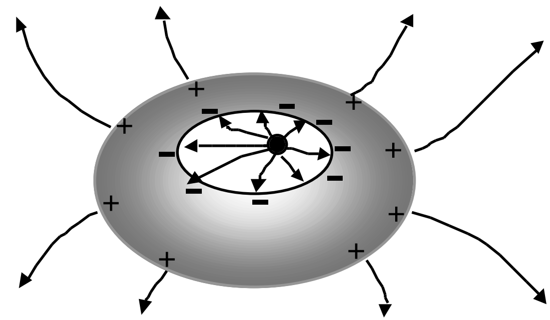
percorso tutto all'interno del conduttore	percorso coincidente con la linea di forza
$V_{P_1} - V_{P_2} = \underbrace{\int_{P_1}^{P_1} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{r}}}_{\vec{\mathbf{E}}=0} = 0$	$V_{P_1} - V_{P_2} = \underbrace{\int_{P_1}^{P_1} \vec{\mathbf{E}} \, d\vec{\mathbf{r}}}_{\vec{\mathbf{E}} \text{ parallelo a } d\mathbf{r}} = \int_{P_1}^{P_1} E \, ds > 0$

Come si vede dalla tabella precedente si ottengono due risultati in contraddizione a seconda del percorso scelto. La contraddizione nasce dall'aver supposto che ci possano essere degli accumuli di carica sulla superficie interna del conduttore cavo. Questo ipotesi dunque non è vera e resta così dimostrato che la densità di carica è nulla in tutti i punti della superficie della cavità. Questo ovviamente ha come conseguenza che non ci possono essere linee di forza del campo elettrico all'interno della cavità e pertanto il campo elettrico all'interno della cavità è nullo. Qualunque cosa succede all'esterno del conduttore non produce alcun effetto, in condizioni stazionarie, all'interno della cavità.

<u>Conduttore carico cavo</u>
Quando ad un conduttore cavo forniamo una certa carica q, tutte le argomentazioni del paragrafo precedente possono essere ripetute pari pari. Quindi anche in questo caso il campo elettrico all'interno della cavità è nullo, la densità superficiale di carica e, conseguentemente, la carica complessiva sulla parete della cavità è nulla, mentre la carica q si localizzerà sulla superficie esterna del conduttore e si distribuirà su di essa sulla base delle caratteristiche della superficie stessa (raggio di curvatura) e sulla base della presenza di altre cariche o altri conduttori nelle sue vicinanze.

<u>Carica q all'interno della cavità</u>
Se all'interno della cavità viene posta la carica q, applicando il teorema di gauss ad una superficie tutta interna al

conduttore, attraverso cui sappiamo che il flusso del campo elettrico è nullo, arriviamo alla conclusione che una carica –q è localizzata sulla parete della cavità in maniera tale che la carica complessiva all'interno della superficie di gauss sia nulla. Se il conduttore era inizialmente scarico, per la conservazione della carica, troveremo una carica +q distribuita sulla superficie esterna del conduttore, in modo che la sua carica complessiva sia nulla. Si può vedere che la distribuzione della carica dipende soltanto dalla forma della superficie esterna del conduttore e dalla presenza di altre cariche e/o conduttori nelle immediate vicinanze. Quindi se noi variamo la posizione della carica all'interno della cavità, varierà la distribuzione della carica sulla parete interna della cavità ma non quella sulla superficie esterna del conduttore. In conclusione, in condizioni stazionarie, all'esterno del conduttore non ci sarà alcun effetto che segnali che qualcosa sia avvenuto all'interno della cavità.



Se il conduttore cavo non era inizialmente scarico, ma possedeva la carica Q, allora vuol dire che sulla sua superficie esterna ritroveremo sia la sua carica Q sia la carica indotta q.

Capacità

Consideriamo due piastre piane conduttrici di area A poste a distanza d. Supponiamo di rimuovere alcuni elettroni ad una delle due piastre e di cederli all'altra. Avremo così caricato una delle due lastre con la carica +q e l'altra con la carica –q. Queste cariche si distribuiranno sulla superficie delle due piastre. In condizioni stazionarie la situazione raggiunta sarà quella mostrata in figura con la carica distribuita solo sulle superfici affacciate delle due piastre mentre sulle superfici esterne non è presente alcuna carica. Che questa debba essere la situazione lo si può intuire dal fatto che cariche di segno opposto si attraggono e quindi tendono a disporsi in maniera tale che tra esse ci sia la minima distanza possibile. Se le piastre avessero una dimensione infinita, questioni di simmetria ci porterebbero a concludere che la carica si distribuisce uniformemente sulle superfici delle due piastre. Nel caso reale in cui le piastre hanno una dimensione finita possiamo affermare che per i punti verso il centro delle piastre la situazione sarà quasi la stessa che si ha supponendo le piastre infinite. Quindi le dimensioni finite delle piastre sul bordo delle piastre stesse, effetti di bordo. Questi effetti si estendono verso l'interno delle piastre per una distanza dell'ordine della distanza tra le piastre. Se questa distanza è piccola rispetto alle dimensioni delle piastre non si commette un grande errore nel considerare la densità di carica e quindi il campo elettrico uniforme su tutta l'area delle piastre.
Per una configurazione di cariche del tipo mostrato in figura noi abbiamo già calcolato la differenza di potenziale

tra le due distribuzioni e quindi tra le due piastre (i conduttori sono equipotenziali).
Quindi il sistema raffigurato in figura costituisce un dispositivo sulle cui armature è immagazzinata una carica q e tra le armature esiste una differenza di potenziale (ddp). Un dispositivo di questo tipo si chiama condensatore.
Si definisce capacità del condensatore il rapporto tra la carica immagazzinata sulle armature diviso per la differenza di potenziale:

$$C = \frac{q}{ddp} = \frac{q}{|\Delta V|}$$

Nel sistema Internazionale la capacità si misura in coulomb per volt (C/V), unità che viene indicata con il nome farad. Una capacità di un farad è una capacità molto grande, le capacità che si incontrano più frequentemente vanno dai pochi picofarad (10^{-12} farad) ad alcuni microfard (10^{-6} farad).
La capacità dipende dalla forma del dispositivo. Il condensatore raffigurato in figura si chiama condensatore piano. Per esso valgono le seguenti relazioni:

$$q = \sigma A$$
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \qquad C = \frac{q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{d}\frac{\varepsilon_o}{\sigma} = \varepsilon_o \frac{A}{d}$$
$$|\Delta V| = Ed$$

Che ci dà l'espressione dalla capacità in funzione delle sue dimensioni geometriche e della costante dielettrica del vuoto ε_o. La capacità è tanto più grande quanto più grande è l'area delle piastre e quanto più piccola è la distanza tra esse.
Un condensatore piano costituito da due piastre quadrate di lato 1 m poste ad una distanza di 1 mm ha una capacità data da:

$$C = \varepsilon_o \frac{A}{d} = 8.85x10^{-12} \frac{C}{mV} \frac{1m^2}{10^{-3} m} = 8.85x10^{-9} F$$

Naturalmente i condensatori possono avere anche altre forme: nella figura sono mostrati un condensatore cilindrico ed uno sferico.

Energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore.

Un condensatore, oltre ad immagazzinare una carica, immagazzina anche una certa quantità di energia elettrostatica.
Se per esempio scegliamo come punto di riferimento del potenziale l'armatura carica negativamente a cui assegniamo potenziale zero, la carica presente sull'altra armatura (positiva) si troverà a un potenziale diverso da zero, positivo nel caso che stiamo considerando e, quindi, possiederà un'energia potenziale maggiore di zero.
Se si consente a questa carica di spostarsi da un'armatura all'altra, portandola dal potenziale positivo al potenziale zero, si può recuperare l'energia potenziale elettrostatica immagazzinata nel condensatore e trasformarla per esempio in energia cinetica di parti del dispositivo (si tenga presente che le due armature si attraggono a vicenda, quindi, se lasciate libere di muoversi, acquisteranno energia cinetica), oppure in energia interna dei varie parti che costituiscono il dispositivo (riscaldamento), ecc.
Quanta energia è immagazzinata all'interno di una capacità?
Possiamo facilmente rispondere a questa domanda se interpretiamo l'energia immagazzinata nel condensatore come il lavoro effettuato per spostare la carica q da un'armatura all'altra. È come del caso della forza peso in cui noi effettuiamo del lavoro per sollevare il corpo che poi ci viene restituito quando il corpo cade dall'altezza a cui l'abbiamo portato.
Dalla definizione di potenziale noi sappiamo che se portiamo la carica q dal potenziale zero al potenziale V , dobbiamo effettuare un lavoro pari a qV.
Nel caso del condensatore questo lavoro è sovrastimato. Infatti, la carica q non viene spostata da un'armatura all'altra tutta insieme ma gradatamente. D'altra parte all'inizio, quando le armature del condensatore sono scariche, nello spostare la prima carica si veramente poca fatica. Il lavoro necessario per spostare una certa quantità di carica da un'armatura all'altra, aumenta man mano che il condensatore si carica.
Supponiamo quindi di aver caricato il condensatore con una carica q, la differenza di potenziale tra le due armature sarà allora: $V = \frac{q}{C}$. Se, in queste condizioni, noi spostiamo un'ulteriore carica dq, effettueremo un lavoro pari a:

$$dW = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

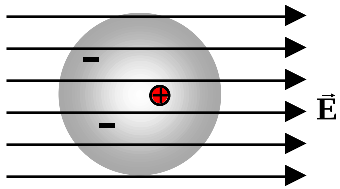
Il lavoro complessivo effettuato si otterrà sommando tutti i contributi tra la situazione iniziale, q=0, e quella finale $q=q_f$.

$$W = \int_o^{q_f} Vdq = \int_o^{q_f} \frac{q}{C}dq = \frac{1}{C}\int_o^{q_f} qdq = \frac{1}{C}\left[\frac{1}{2}q^2\right]_o^{q_f} = \frac{1}{2}\frac{q_f^2}{C}$$

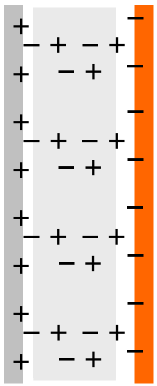
Il flash luminoso, utilizzato per scattare fotografie in condizioni di bassa luminosità, viene realizzato lasciando scaricare molto rapidamente la carica, e naturalmente anche l'energia elettrostatica, immagazzinata all'interno di un condensatore.

Materiale dielettrico tra le armature di un condensatore.

Supponiamo ora di interporre del materiale dielettrico tra le armature del condensatore piano come mostrato in figura, e supponiamo che il condensatore sia stato caricato con una carica q.



Il campo elettrico presente tra le armature agirà sugli elettroni e sui nuclei degli atomi. L'effetto di questa azione è che il baricentro della carica negativa non coinciderà più con il nucleo, si produrrà cioè una piccola deformazione degli atomi con le cariche positive da un lato e quelle negative dall'altro. Se suddividiamo il dielettrico in strati paralleli alle piastre, l'effetto della deformazione su ciascuno strato sarà quello far affiorare una carica positiva su una delle facce dello strato e negativa sull'altra. Per gli strati intermedi, l'effetto della carica positiva che si affaccia su una delle facce sarà compensata dalla carica di segno opposto dello strato adiacente. Questa avviene per tutti li strati intermedi. L'effetto cumulativo di questo meccanismo è quindi di far apparire una carica positiva sulla prima faccia del dielettrico, quella vicina all'armatura negativa del condensatore, ed una carica di segno opposto sull'altra faccia quella vicina all'armatura negativa. In questo modo è come se avessimo ridotto la densità di carica sulle armature del condensatore e, di conseguenza, il campo elettrico all'interno del condensatore. Questo comporta una riduzione a parità di carica trasferita tra le due armature ad una riduzione della differenza di potenziale e quindi ad un aumento di



capacità:

Nel caso di un condensatore piano con un dielettrico interposto tra le armature la capacità diventa:

$$C = k\varepsilon_o \frac{A}{d} = \varepsilon \frac{A}{d}$$

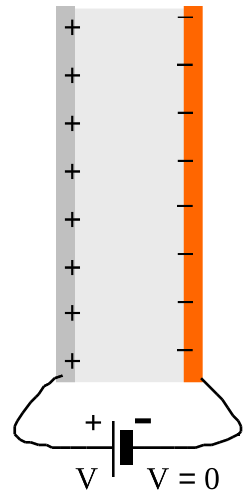
dove k è la costante dielettrica relativa mentre $\varepsilon = k\varepsilon_o$ è la costante dielettrica del materiale dielettrico utilizzato.

k, la costante dielettrica relativa, vale poco più dell'unità per l'aria, 3.5 per la carta, 4.7 per il vetro, 80 per

l'acqua[3], e valori ancora più elevati per alcuni materiali ceramici.
Una maniera per realizzare una capacità è quella di prendere due strisce di stagnola (o di alluminio molto sottile) in maniera che l'area delle strisce sia piuttosto grande; separare le due strisce con un materiale dielettrico di piccolo spessore ma tale da resistere alla differenza di potenziale di lavoro, per esempio la carta, in modo da realizzare un condensatore piano. Poi l'insieme delle tre striscioline viene avvolto per formare un rotolo in maniera rendere più compatto tutto il dispositivo (si osservi che per evitare il contatto tra le due armature del condensatore è necessario utilizzare una seconda strisciolina di materiale isolante).

Materiale conduttore tra le armature di un condensatore.

Se ora proviamo a mettere un materiale conduttore tra le armature del condensatore piano, per esempio una soluzione di un sale, avremo che rapidamente la carica presente su una delle due armature sarà trasferita utilizzando le cariche mobili presenti nel conduttore sull'altra armatura, neutralizzando la carica presente su questa seconda armatura. In breve dunque la carica presente sulle armature del condensatore si riduce a zero, e così fa la differenza di potenziale tra le due armature e di conseguenza anche il campo elettrico all'interno del conduttore. Infatti abbiamo già detto che in condizioni stazionarie il campo elettrico all'interno dei conduttori è nullo.

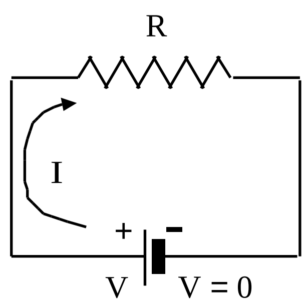


Supponiamo ora di disporre di un dispositivo che man mano che le cariche elettriche vengono rimosse dalle armature del condensatore a causa dello spostamento delle cariche mobili presenti nel materiale conduttore interposto tra le armature, rimpiazzi le cariche rimosse con nuove cariche. Si raggiunge una condizione stazionaria in cui la differenza di potenziale tra le due armature del condensatore è costante, proprio perché le cariche presenti sulle armature sono mantenute costanti, e si stabilisce un flusso di cariche tra un'armatura e l'altra.
Il dispositivo che consente di rimpiazzare la cariche rimosse dalle armature con nuove cariche è la ***batteria elettrica*** o ***pila elettrica*** (inventata da Volta), il flusso di cariche che si stabilisce tra le due armature del condensatore costituisce la corrente elettrica.

---

[3] Il valore così elevato per l'acqua dipende da un meccanismo leggermente diverso di quello già descritto. Le molecole dell'acqua sono polari, le cariche negative sono da un lato, quello dell'atomo di ossigeno che ha catturato gli elettroni degli atomi di idrogeno, mentre quelle positive dall'altro, dal lato degli atomi di idrogeno che hanno perso i loro elettroni. Quando le molecole dell'acqua sono immerse in un campo elettrico tendono ad orientarsi nella direzione del campo. Anche se con un meccanismo diverso si verifica un affioramento di cariche positive su una delle facce del dielettrico e negative sull'altra.

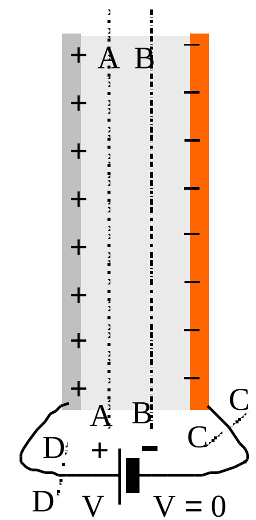
L'insieme della batteria e dei conduttori ideali utilizzati per connettere i morsetti della batteria alle armature del condensatore e il conduttore interposto tra le armature del condensatore costituiscono quello che si chiama circuito elettrico. Esso può essere schematizzato come in figura.
Si può facilmente vedere che, in condizioni stazionarie, il flusso di cariche è lo stesso in qualsiasi parte del circuito. Consideriamo uno strato di materiale conduttore compreso tra due sezioni parallele alle piastre del condensatore. In condizioni stazionarie non ci può essere né accumulo né rimozione di cariche dallo strato, quindi tutta la carica che in un certo intervallo di tempo entra attraverso una delle due sezioni esce nello stesso intervallo di tempo attraverso l'altra.



Si definisce allora corrente elettrica, I, la carica che attraversa una qualunque sezione del circuito elettrico nell'unità di tempo.

$$I = \frac{Q}{\Delta t} \qquad\qquad I = \frac{dq}{dt}$$

media istan tanea

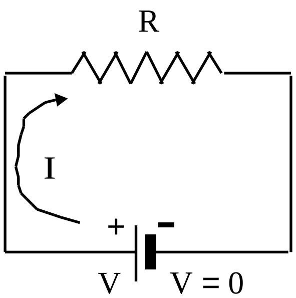


Nel Sistema Internazionale la corrente elettrica si misura in coulomb al secondo (C/s) unità che viene chiamata ampere (A). Ricordiamo che l'ampere è una grandezza fondamentale del Sistema Internazionale.
La corrente elettrica fluisce nel verso che è, per convenzione, quello in cui si muovono le cariche positive, ossia dall'armatura positiva a quella negativa del condensatore nel nostro caso (o della pila in generale)
Se tra il capo positivo della batteria e quello negativo fluisce la corrente I costante, nell'intervallo di tempo Δt la carica Q=IΔt si sarà spostata dall'armatura a potenziale più alta a quella a potenziale più basso. Avrà subito una perdita di energia elettrostatica pari a VIΔt.
Ovviamente questa energia la possiamo ritrovare nello stato finale sotto un'altra forma, o come energia cinetica di parti che si muovono, cosa che accade per esempio quando connettiamo ai capi della batteria un motore elettrico oppure semplicemente come energia interna degli elementi del circuito e dell'ambiente circostante.
In termini di potenza, il lavoro per unità di tempo, il passaggio della corrente I tra il capo positivo e quello negativo della batteria corrisponde a

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{|\Delta U|}{\Delta t} = \frac{VI\Delta t}{\Delta t} = VI$$

Quindi se noi facciamo passare tra il terminale a 220 volt della presa elettrica e quello a zero volt (il neutro) una corrente di un ampere avremo una diminuzione dell’energia potenziale elettrostatica a cui corrisponde la esecuzione di lavoro meccanico o la trasformazione in energia interna dei corpi interessati (riscaldamento) una potenza di 220 W (220 joule al secondo).

Legge di Ohm



Un circuito elettrico può essere dunque schematizzato come in figura. In esso si riconosce la batteria, l’elemento in grado di fornire una differenza di potenziale costante ai sui capi, che viene rappresentata con due barrette di lunghezza e spessore diverso. La barretta più lunga e più sottile rappresenta il morsetto a potenziale più elevato, quella più corta e più spessa rappresenta il morsetto a potenziale più basso.
Nel circuito poi è riconoscibile l’elemento in cui l’energia elettrostatica viene convertita in altre forme di energia, nel caso da noi discusso, questo elemento corrisponde al conduttore interposto tra le armature del condensatore. Questi elementi sono connessi tra loro con tratti continui che rappresentano tratti di conduttore ideale equipotenziale. Essendo il potenziale definito a meno di una costante arbitraria, noi possiamo scegliere un qualsiasi tratto di conduttore ideale a cui attribuire il potenziale zero, per esempio quello connesso al morsetto negativo della batteria e riferire a questo i potenziali degli altri conduttori ideali equipotenziale.
Nel caso da noi discusso, del conduttore interposto tra le armature del condensatore, si può scrivere una relazione tra la differenza di potenziale applicata ai capi del conduttore e la corrente che fluisce in esso. Questa relazione va sotto il nome di legge di Ohm e si scrive:

$$V = RI$$

R è la resistenza elettrica del conduttore, nel sistema internazionale si misura in volt su ampere. L’unità di misura della resistenza si chiama ohm (Ω).
La resistenza elettrica di un conduttore dipende dal tipo di materiale dalla lunghezza del conduttore e dalla sua sezione trasversale. Per una situazione come quella da noi utilizzata con il conduttore interposto tra le armature di un condensatore di area A e distanza d, la resistenza elettrica si può esprimere come:

$$R = \rho \frac{d}{A} = \rho \frac{\ell}{S}$$

dove r è la resistività del materiale e vale 1.69×10^{-8} Ωm per il rame, 5.25×10^{-8} Ωm per il tungsteno, 2.5×10^{3} Ωm per il silicio puro, $10^{10} \div 10^{14}$ per il vetro.

Calcolare la resistenza di un filo di rame di lunghezza pari a 10 m e sezione 2 mm^2:

$$R = 1.69 \times 10^{-8} \frac{10}{2 \times 10^{-6}} = 0.84 \times 10^{-1} = 0.084\ \Omega$$

Calcolare infine la differenza di potenziale ai capi del filo se in esso scorre una corrente di 15 A:

$$V = RI = 0.084 \times 15 = 1.26\ V$$

Potenza dissipata in una resistenza

Abbiamo osservato pocanzi che la potenza corrispondente al passaggio di una corrente I attraverso una differenza di potenziale V è data da P=VI.
Nel caso di una resistenza, dalla legge di ohm noi sappiamo che V=RI per cui la potenza dissipata su una resistenza è data da:

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

Si parla di potenza dissipata sulla resistenza perché la diminuzione di energia elettrostatica causata dal passaggio di corrente la si ritrova sotto forma di energia interna della resistenza o dell'ambiente che circonda la resistenza.

Calcolare la potenza dissipata nel filo di lunghezza pari a 10 m e sezione 2 mm^2 percorso da una corrente di 15 A.

Abbiamo già calcolato il valore della resistenza R=0.084 Ω. La potenza dissipata sarà data da:

$$P = RI^2 = 0.084 \times 15^2 = 18.9\ W$$

Una corrente di 15 A è la corrente tipicamente assorbita da una lavatrice (3kW) che funziona a 220 V. Se per far funzionare la lavatrice si utilizza un filo di rame avente una sezione di 2 mm^2 e una lunghezza complessiva, andata e ritorno di 10 m, circa 20 W di potenza vengono dissipati sul filo e non al'interno della lavatrice.