UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Fondamenti di Informatica B

Lezione n.2

Alberto Broggi – Gianni Conte

A.A. 2005-2006

Fondamenti di Informatica B

Lezione n.2

- Algebra booleana
- Circuiti logici
- Elementi primitivi
- Esercizi con elementi logici

In questa lezione vengono ripresi i concetti principali di base dell'algebra booleana e introdotta la relazione tra quest'ultima e i circuiti logici

Algebra di Boole - Storia

- La logica greca: le formule logiche sono espresse nel linguaggio comune e soddisfano le normali regole sintattiche
- La logica matematica: si usa un linguaggio artificiale in cui parole e simboli hanno funzioni semantiche rigidamente definite
- G.Boole: Mathematical Analysis of Logic (1847)
  – Si costruisce un sistema formale e solo successivamente si assegna ad esso una interpretazione nel linguaggio comune

Algebra Booleana

- La teoria dei circuiti logici considera come modello matematico di supporto l'Algebra Booleana
  - (George Boole, matematico inglese, 1815-1864)
- L'algebra Booleana consiste di:
  - un insieme di elementi K
  - due funzioni {+, •} che fanno corrispondere a una qualsiasi coppia di elementi di K un elemento di K
  - una funzione {¯}

  tali per cui valgono un insieme di assiomi

Assiomi dell'Algebra Booleana

1. K contiene al minimo due elementi a e b, tali che $a \neq b$
2. *Chiusura:* Per ogni a e b in K: $a+b \subset$ K e $a \bullet b \subset$ K
3. *Proprietà commutativa:* $a+b = b+a$ e $a \bullet b = b \bullet a$
4. *Proprietà associativa:* $(a + b) + c = a + (b+c) = a+b+c$ e $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c = a \bullet b \bullet c$
5. *Indentità:*
   - Esiste un elemento identità rispetto a {+}, tale che $a + 0 = a$, per ogni $a \subset$ K
   - Esiste un elemento identità rispetto a {$\bullet$}, tale che $a \bullet 1 = a$, per ogni $a \subset$ K

Assiomi dell'Algebra Booleana

6. *Proprietà distributiva:*

   $a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$

   $a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$

7. *Complemento:* per ogni $a \subset$ K esiste un elemento

   $\overline{a} \subset$ K tale che:

   $(a + \overline{a}) = 1$

   $(a \bullet \overline{a}) = 0$

Assiomi dell’Algebra Booleana

- E’ possibile verificare che:
  - l’insieme K={0, 1}
  - Le operazioni logiche OR, AND, NOT come definite dalle tabelle sottostanti

soddisfano tutti gli assiomi dell’algebra booleana

A	$f(A)=\overline{A}$
1	0
0	1

Inversione

A	B	f(A,B)=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR
somma logica

A	B	f(A,B)=A• B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND
prodotto logico

Altri Operatori Elementari

- E' possibile definire altre funzioni od operatori elementari

A	B	$f(A,B)=A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

EX-OR

A	B	$f(A,B)=\overline{A \bullet B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND

A	B	$f(A,B)=\overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOR

Funzioni Booleane

- Oltre alle funzioni OR e AND esistono altre funzioni a due variabili
- Le funzioni a due variabili sono complessivamente 16

X	Y	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

AND

X

somma aritm. o XOR

OR

NOR

NAND

Algebra Booleana

- L'algebra booleana opera su variabili che possono solo assumere valore 0 o 1
- Una funzione logica

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

è una legge che fa corrispondere a ogni combinazione di valori delle variabili indipendenti

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

uno e un solo valore binario della variabile *z*

Proprietà (1)

N.	PROPRIETA’	NOME
1	Esistono gli elementi $0,1 \in K$ tali che : $A + 0 = A$ $A \bullet 1 = A$	Esistenza elementi identità
2	$A + B = B + A$ $A \bullet B = B \bullet A$	Proprietà commutativa
3	$A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$ $A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$	Proprietà distributiva
4	Per ogni $A \in K$, esiste $\overline{A}$ tale che: $A \bullet \overline{A} = 0$ e $A + \overline{A} = 1$	Esistenza dell’inverso

Proprietà (2)

N.	PROPRIETA’	NOME
5	$A + (B + C) = (A + B) + C$ $A (BC) = (AB) C$	Proprietà associativa
6	$A + A = A$ $A \bullet A = A$	Proprietà dell’idempotenza
7	$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$ $\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$	Legge di DeMorgan
8	$\overline{\overline{A}} = A$	Involuzione

Proprietà (3)

- Le tabelle precedenti riportano le proprietà principali dell'algebra booleana
- La verifica di tali proprietà può avvenire in tutti i casi mediante:
  – analisi esaustiva
  – utilizzando le proprietà riportate in precedenza

Principio di dualità

- Tutte le proprietà precedenti sono espresse a coppie

- Una proprietà è derivabile dall'altra con lo scambio di:

$$0 \leftrightarrow 1$$

$$+ \leftrightarrow \bullet$$

Teorema di De Morgan

[*]DeMorgan (1806 - 1871)

E' possibile dimostrare il seguente teorema:

$$\overline{X_1 + X_2 + \dots X_n} = \overline{X}_1 \bullet \overline{X}_2 \bullet \dots \bullet \overline{X}_n$$

Dimostrazione per induzione:

$$\overline{X_1 + X_2} = \overline{X}_1 \bullet \overline{X}_2 \quad \Rightarrow \quad \text{verifica tabellare}$$

$$\overline{(X_1 + X_2 + \dots X_n) + X_{n+1}} = \overline{(X_1 + X_2 + \dots X_n)} \bullet \overline{X}_{n+1}$$

$$\Downarrow$$

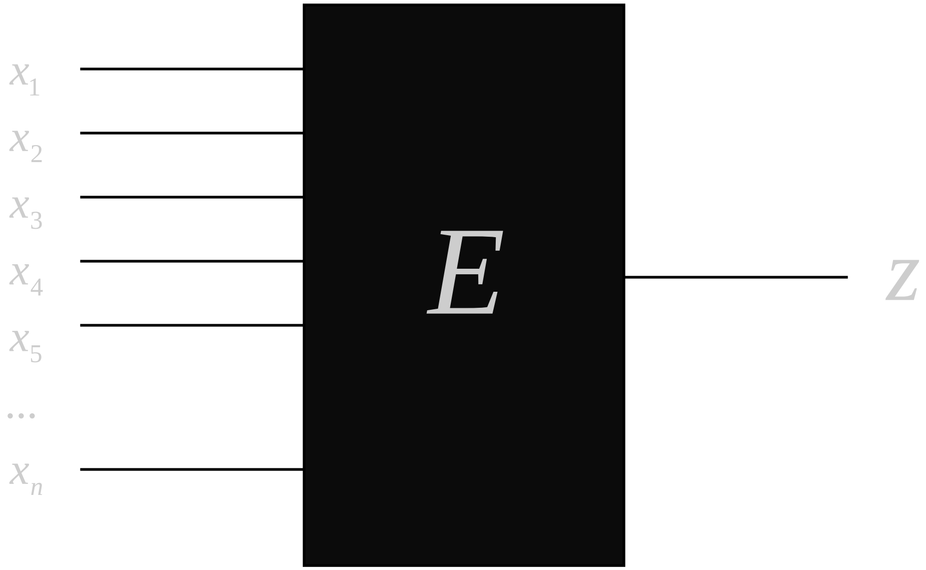
$$= (\overline{X}_1 \bullet \overline{X}_2 \bullet \dots \overline{X}_n) \bullet \overline{X}_{n+1}$$

Versione duale: $\overline{X_1 \bullet X_2 \bullet \dots \bullet X_n} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \dots \overline{X}_n$

Porte Logiche

- Espressione logica generale:

$$z = E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$



Porte Logiche

- Una porta logica è un blocco elementare in cui la relazione fra variabili di ingresso e variabili di uscita è descritta da una funzione booleana

$U = \overline{A}$ $\qquad$ $U = A \bullet B$ $\qquad$ $U = A + B$

$U = \overline{A \bullet B}$ $\qquad$ $U = \overline{A + B}$

Elementi Primitivi

- Una qualunque funzione logica può essere realizzata utilizzando un numero limitato di funzioni elementari (<u>insieme completo</u>)
  - Sono insiemi completi:
    NAND, NOR, (AND,NOT), (OR,NOT)

- Questa proprietà garantisce che l'uso di un limitato numero di <u>funzioni</u> consente di rappresentare una <u>qualunque funzione logica</u>
- Utilizzando un numero limitato di tipi di <u>porte</u> logiche è possibile realizzare un <u>circuito</u> che realizza una qualsiasi funzione logica

Esercizio 1

La polizza n. 22 può essere stipulata se l'assicurando:

1. Ha stipulato la polizza n. 19 ed è un maschio sposato

oppure 2. Ha stipulato la polizza n. 19 ed è sposato e ha meno di 25 anni

oppure 3. Non ha stipulato la polizza n. 19 ed è una donna sposata

oppure 4. E' un maschio con meno di 25 anni

oppure 5. È sposato con 25 o più anni

E' possibile semplificare questa sequenza di regole ?

Esercizio 1

Le frasi precedenti possono essere trasformate:

La polizza n. 22 può essere stipulata se l'assicurando:

1. Ha stipulato la polizza n. 19 AND è un maschio AND è sposato

OR 2. Ha stipulato la polizza n. 19 AND è sposato AND ha meno di 25 anni

OR 3. Non ha stipulato la polizza n. 19 AND è una donna AND è sposata

OR 4. E' un maschio AND ha meno di 25 anni

OR 5. È sposato AND ha 25 o più anni

Esercizio 1: soluzione

A = l'assicurando è coperto dalla polizza n. 19

B = l'assicurando è sposato

C = l'assicurando è maschio

D = l'assicurando ha meno di 25 anni.

1. $A \bullet B \bullet C$
2. $A \bullet B \bullet D$
3. $\overline{A} \bullet B \bullet \overline{C}$
4. $C \bullet D$
5. $B \bullet \overline{D}$

Esercizio 1: soluzione

$$A \bullet B \bullet C + A \bullet B \bullet D + \overline{A} \bullet B \bullet \overline{C} + C \bullet D + B \bullet \overline{D} =$$

$$A \bullet B \bullet C + A \bullet B \bullet D + B \bullet \overline{D} + \overline{A} \bullet B \bullet \overline{C} + C \bullet D = \qquad \bullet(A+1)$$

$$\cancel{A \bullet B \bullet C} + A \bullet B + B \bullet \overline{D} + \overline{A} \bullet B \bullet \overline{C} + C \bullet D =$$

$$A \bullet B + B \bullet \overline{D} + \overline{A} \bullet B \bullet \overline{C} + C \bullet D = \qquad \bullet(\overline{C}+1)$$

$$A \bullet B + B \bullet \overline{C} + B \bullet \overline{D} + C \bullet D =$$

$$A \bullet B + B \bullet \overline{C} + B \bullet \overline{D} + B \bullet C \bullet D + C \bullet D =$$

$$A \bullet B + B \bullet (\cancel{\overline{C} + \overline{D} + C} \bullet D) + C \bullet D =$$

$$A \bullet B + B + C \bullet D = B + C \bullet D$$

Esercizio 1: soluzione

A = l’assicurando ha stipulato la polizza n. 19

B = l’assicurando è sposato

C = l’assicurando è maschio

D = l’assicurando ha meno di 25 anni.

Soluzione $\Rightarrow$ $B + C \bullet D$

La polizza n. 22 può essere stipulata se l’assicurando:

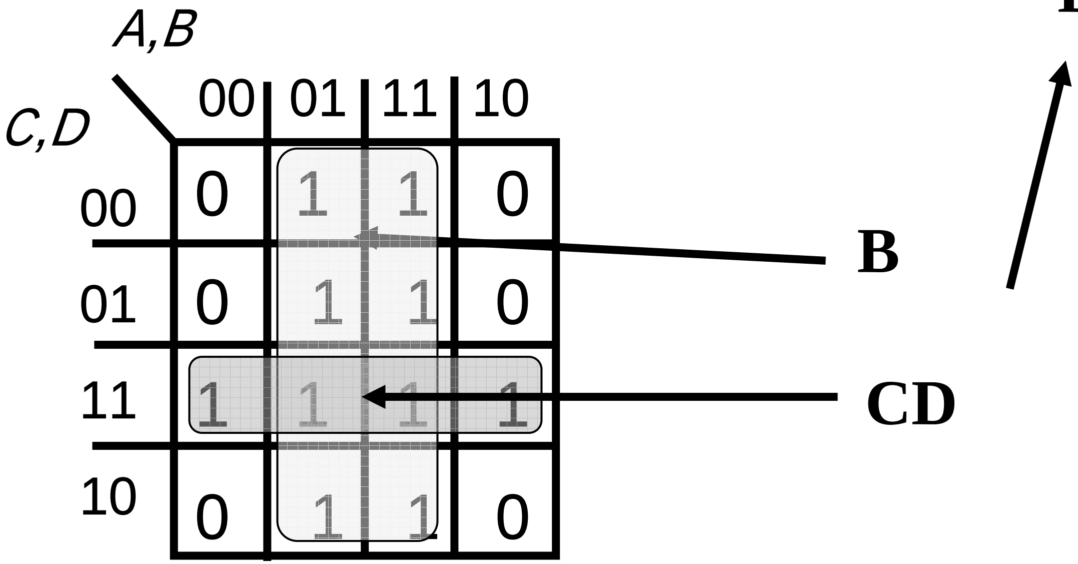
1. E’ sposato

oppure 2. E’ un maschio con meno di 25 anni.

Esercizio 1: soluzione

$$A \bullet B \bullet C + A \bullet B \bullet D + \overline{A} \bullet B \bullet \overline{C} + C \bullet D + B \bullet \overline{D} =$$

$$= \mathbf{B + CD}$$



L'uso delle mappe consente di trovare facilmente la soluzione ottima

Esercizio 2

- Cinque astronauti A,B,C,D,E sono pronti per una missione. Per definire la lista di coloro che partiranno è necessario soddisfare tutte le seguenti relazioni:
  a) A o B devono necessariamente essere inclusi nella lista, ma non contemporaneamente;
  b) C o E devono essere inclusi nella lista, anche contemporaneamente;
  c) qualora D sia incluso nella lista anche B deve essere incluso nella lista;
  d) A e C possono essere entrambi inclusi o entrambi esclusi dalla lista;
  e) qualora E sia incluso anche C e D lo devono essere.

Esercizio 2: soluzione

A, B, C, D, E sono variabili indipendenti che assumono valore 1 se l'astronauta corrispondente viene prescelto e valore 0 in caso opposto.

Ognuna delle 5 condizioni a, b, c, d, e deve essere verificata indipendentemente e assume valore 1 se i valori assegnati alle variabili indipendenti soddisfano ai vincoli imposti e valore 0 se non soddisfano.

a) A o B devono necessariamente essere inclusi nella lista, ma non contemporaneamente;

$a = a(A,B) = \overline{A}B + A\overline{B}$ (a=1 se A=1 e B=0 oppure A=0 e B=1)

b) C o E devono essere inclusi nella lista, anche contemporaneamente;

$b = b(C,E) = C + E$ (b=1 se C=1 oppure E =1)

Esercizio 2: soluzione

c) qualora D sia incluso nella lista anche B deve essere incluso nella lista;

$c = c(D,B) = DB + \overline{D}$ (c=1 se D=0 oppure D=1 e B=1)

d) A e C possono essere entrambi inclusi o entrambi esclusi dalla lista;

$d = (A,C) = AC + \overline{A}\,\overline{C}$ (d=1 se A=1 e C=1 oppure A=0 e C=0)

e) qualora E sia incluso anche C e D lo devono essere.

$e = (E,C,D) = ECD + \overline{E}$ (e=1 se E=0 oppure E=1,C=1,D=1)

Esercizio 2: soluzione

$Z = (A'B + AB')(C+E)(DB+D')(AC+A'C')(ECD+E') =$

$(A'BC' + AB'C)(C+E)(DB+D')(ECD+E') =$

$(A'BC' + AB'C)(CDE+CE')(DB+D') =$

$(A'BC'D + A'BC'D' + AB'CD')\ (CDE+CE') =$

$AB'CD'E'$

Esercizio 3

Progettare un circuito logico a 3 ingressi *(A,B,C)* e una uscita *U* che assuma valore 1 quando, all'ingresso, il numero degli 1 supera il numero degli 0. (Circuito di rilevazione di maggioranza)

$$U = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

A	B	C	U	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{A}BC$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A\overline{B}C$
1	1	0	1	$AB\overline{C}$
1	1	1	1	ABC

Esercizio 3: soluzione

$$U = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Esercizio 3: soluzione

Soluzione alternativa:

A	B	C	U
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$A + B + C$

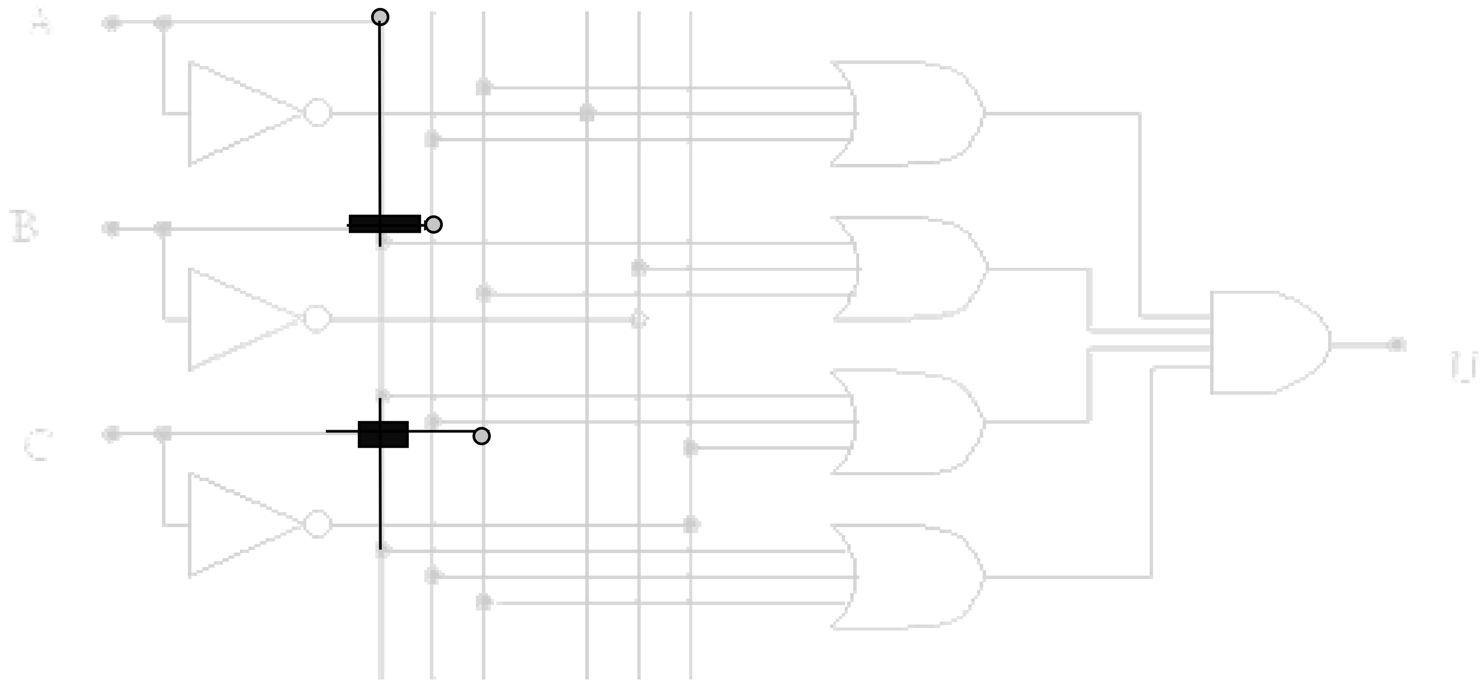
$\longrightarrow A + B + \overline{C}$

$\longrightarrow A + \overline{B} + C$

$\overline{A} + B + C$

$$U = (\overline{A} + B + C) \bullet (A + \overline{B + C}) \bullet (A + B + \overline{C}) \bullet (A + B + C)$$

Esercizio 3: soluzione



$$U = (\overline{A} + B + C) \bullet (A + \overline{B + C}) \bullet (A + B + \overline{C}) \bullet (A + B + C)$$

Esercizio 4

Progettare un circuito che accetti in ingresso numeri da 0 a 15.

L'uscita deve assumere valore 1 quando il numero è primo.

Soluzione:

- Rappresentare i numeri secondo una codifica binaria (4 bit)
- Scrivere la tabella della funzione
- Inserire tante porte AND quanti sono gli 1 della funzione
- Inserire una porta OR per generare l'uscita