UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Fondamenti di Informatica B

Esercitazione n.1

Fondamenti di Informatica B

Esercitazione n.1

- Algebra booleana
- Tabelle della verità
- Diagrammi di Venn
- Elementi logici

Riepilogo teorico

- $A + 0 = A \quad A + 1 = 1$
- $A \bullet 1 = A \quad A \bullet 0 = 0$
- $A + B = B + A$
- $A \bullet B = B \bullet A$
- $A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$
- $A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$
- $A \bullet \overline{A} = 0 \quad A + \overline{A} = 1$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A (BC) = (AB) C$
- $A + A = A$
- $A \bullet A = A$
- $\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$
- $\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$
- $\overline{\overline{A}} = A$

Esercizio 1

- Verificare con diverse metodologie la seguente equivalenza:

$$\overline{A}\,B + \overline{A}\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{C}\,D + A\,B\,D + B\,C\,D + \overline{B}\,C\,D =$$

$$A\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B + D$$

- Soluzione con algebra di Boole (semplifico la parte sinistra):

$$\overline{A}\,B + \overline{A}\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{C}\,D + A\,B\,D + B\,C\,D + \overline{B}\,C\,D =$$

$$\overline{A}\,B\,(\overline{C} + 1) \qquad \overline{C}\,D\,(A + \overline{A}) \qquad C\,D\,(B + \overline{B})$$

$$\overline{A}\,B + \qquad \overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \qquad + A\,B\,D + C\,D =$$

$$\overline{A}\,B\,(D + 1) + \overline{C}\,D\,(A\,\overline{B} + 1) + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,B\,D + C\,D =$$

Esercizio 1

$$\overline{A}\,B + \overline{A}\,B\,D + A\,B\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{C}\,D + C\,D =$$

$$B\,D(A + \overline{A}) \qquad A\,\overline{B}\,\overline{C}(D + \overline{D}) \qquad D(C + \overline{C})$$

$$\overline{A}\,B + B\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C} + D =$$

$$D(B + 1)$$

$$A\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B + D$$ uguaglianza verificata

Esercizio 1

- Soluzione con tabella di verità:

A	B	C	D	$\overline{A}\,B$	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{C}\,D$	$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\,\overline{C}\,D$	$A\,B\,D$	$B\,C\,D$	$\overline{B}\,C\,D$	**I**	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,B$	D	**I I**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	**0**
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	**1**	0	0	1	**1**
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	**0**
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	**1**	0	0	1	**1**
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	**1**	0	1	0	**1**
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	**1**	0	1	1	**1**
0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	1	0	**1**
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	**1**	0	1	1	**1**
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	**1**	1	0	0	**1**
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	**1**	1	0	1	**1**
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	**0**
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	**1**	0	0	1	**1**
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	**0**
1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	**1**	0	0	1	**1**
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	**0**
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	**1**	0	0	1	**1**

Esercizio 1

- Soluzione con diagrammi di Venn:

  impossibile perché i diagrammi di Venn si possono utilizzare per verificare equivalenze con un massimo di 3 variabili.

Esercizio 2

- Dato che A + B = 1 e AB = 0, verificare utilizzando delle trasformazioni algebriche che:

$$AC + \overline{A}B + BC = B + C$$

- Soluzione:

$AC + \overline{A}B + BC = B + C$	raccolgo C
$C(A + B) + \overline{A}B = B + C$	essendo $A + B = 1$
$C + \overline{A}B = B + C$	essendo $AB = 0$ posso sommarlo
$C + \overline{A}B + AB = B + C$	raccolgo B
$C + B(A + \overline{A}) = B + C$	essendo $A + \overline{A} = 1$
$C + B = B + C$	uguaglianza verificata

Esercizio 3

- Semplificare la seguente espressione ed implementarla con sole porte NOR:

  $A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,C + \overline{A}\,C\,\overline{D}$

- Soluzione:

$$A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,C + \overline{A}\,C\,\overline{D} =$$
$$A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,C\,(\overline{B} + 1) + \overline{A}\,C\,\overline{D} =$$
$$A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C + A\,C + \overline{A}\,C\,\overline{D} =$$
$$A\,\overline{B}\,(C + \overline{C})$$
$$A\,\overline{B} + A\,C + \overline{A}\,C\,\overline{D} =$$
$$A\,\overline{B} + A\,C\,(\overline{D} + 1) + \overline{A}\,C\,\overline{D} =$$
$$A\,\overline{B} + A\,C + A\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,C\,\overline{D} =$$
$$C\,\overline{D}\,(A + \overline{A})$$
$$A\,\overline{B} + A\,C + C\,\overline{D}$$

Esercizio 3

Trasformiamo in un’espressione con sole porte NOR

$$A\overline{B} + AC + C\overline{D} =$$

$$\overline{\overline{A}}\,\overline{B} + \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{C}} + \overline{\overline{C}}\,\overline{D} =$$ doppia negazione

$$\overline{\overline{A} + B} + \overline{\overline{A} + \overline{C}} + \overline{\overline{C} + D} =$$ DeMorgan

$$\overline{(\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{C})(\overline{C} + D)} =$$ DeMorgan

$$\overline{(\overline{A}\,\overline{A} + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}B + B\overline{C})(\overline{C} + D)} =$$

$$\overline{(\overline{A} + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}B + B\overline{C})(\overline{C} + D)} =$$

$$\overline{A}(1 + \overline{C} + B)$$

$$\overline{(\overline{A} + B\overline{C})(\overline{C} + D)} =$$

Esercizio 3

Trasformiamo in un'espressione con sole porte NOR

$$\overline{\bar{A}\,\bar{C} + \bar{A}\,D + B\,\bar{C}\,\bar{C} + B\,\bar{C}\,D} =$$

$$\overline{\bar{A}\,\bar{C} + \bar{A}\,D + B\,\bar{C} + B\,\bar{C}\,D} =$$

$$B\,\bar{C}\,(1 + D)$$

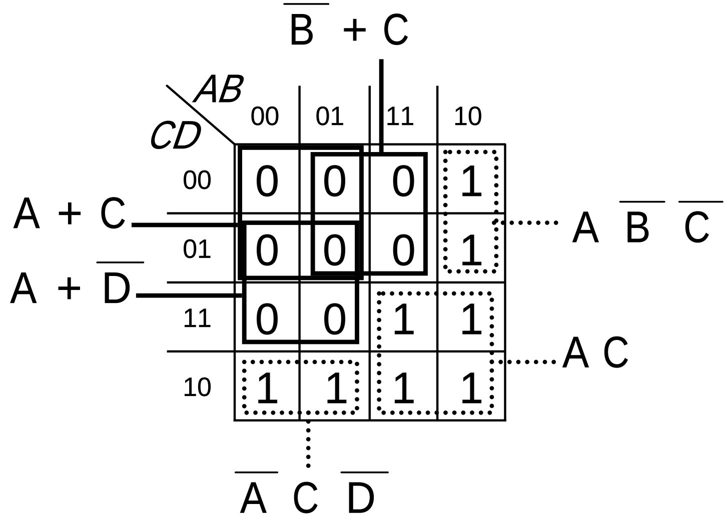
$$\overline{\bar{A}\,\bar{C} + \bar{A}\,D + B\,\bar{C}} =$$

$$\overline{\bar{A}\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{\bar{D}} + \bar{\bar{B}}\,\bar{C}} =$$ doppia negazione

$$\overline{\overline{(A + C)} + \overline{(A + \bar{D})} + \overline{(\bar{B} + C)}}$$ DeMorgan

Esercizio 3

Oppure con il metodo delle mappe di Karnaugh

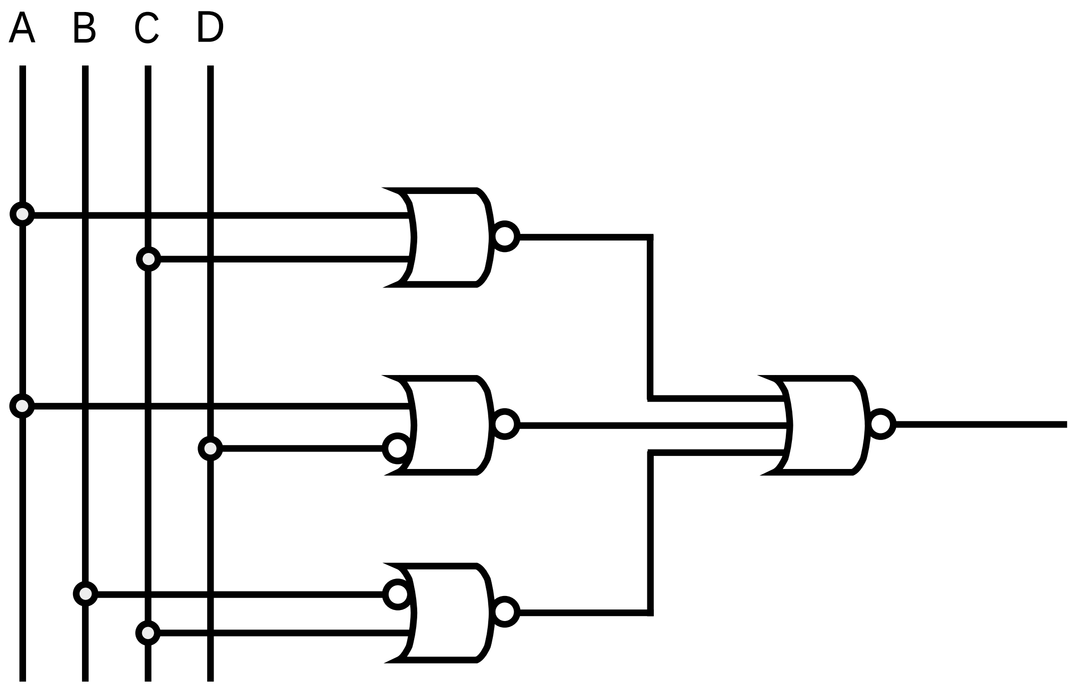


$$(A + C)(A + \overline{D})(\overline{B} + C) = \overline{\overline{(A + C)(A + \overline{D})(\overline{B} + C)}} =$$

$$\overline{\overline{(A + C)} + \overline{(A + \overline{D})} + \overline{(\overline{B} + C)}}$$

Esercizio 3

Da cui si ricava il seguente circuito



Esercizio 4

- Scrivere la funzione F(A, B, C, M, N) sotto una forma in cui la variabile A compaia solo una volta affermata e negata e semplificare l'espressione ottenuta.

  $$F = A\,B\,C + \overline{D}\,(\overline{A} + M + N) + A\,(\overline{B} + \overline{M}) + A\,N$$

  N.B. La funzione deve assumere la forma $A(\;) + \overline{A}(\;)$
- Soluzione:

$$A\,B\,C + \overline{D}\,(\overline{A} + M + N) + A\,(\overline{B} + \overline{M}) + A\,N$$

$$A\,B\,C + \overline{A}\,\overline{D} + \overline{D}\,M + \overline{D}\,N + A\,\overline{B} + A\,\overline{M} + A\,N$$

$$A\,B\,C + \overline{A}\,\overline{D} + \overline{D}\,M\,(A + \overline{A}) + \overline{D}\,N\,(A + \overline{A}) + A\,\overline{B} + A\,\overline{M} + A\,N$$

$$A\,B\,C + \overline{A}\,\overline{D} + A\,\overline{D}\,M + \overline{A}\,\overline{D}\,M + A\,\overline{D}\,N + \overline{A}\,\overline{D}\,N + A\,\overline{B} + A\,\overline{M} + A\,N$$

$$A\,(B\,C + \overline{D}\,M + \overline{D}\,N + \overline{B} + \overline{M} + N) + \overline{A}\,(\overline{D} + \overline{D}\,M + \overline{D}\,N)$$

Esercizio 4

$$A\,(B\,C + \overline{D}\,M + \overline{D}\,N + \overline{B} + \overline{M} + N) + \overline{A}\,(\overline{D} + \overline{D}\,M + \overline{D}\,N)$$

$$N\,(\overline{D} + 1) \qquad \overline{D}\,(1 + M + N)$$

$$A\,(B\,C + \overline{B} + \overline{D}\,M + \overline{M} + N) + \overline{A}\,(\overline{D})$$

$$A\,(B\,C + \overline{B}\,(C + 1) + \overline{D}\,M + \overline{M}\,(\overline{D} + 1) + N) + \overline{A}\,\overline{D}$$

$$A\,(B\,C + \overline{B}\,C + \overline{B} + \overline{D}\,M + \overline{M}\,\overline{D} + \overline{M} + N) + \overline{A}\,\overline{D}$$

$$C\,(B + \overline{B}) \qquad \overline{D}\,(M + \overline{M})$$

$$A\,(C + \overline{B} + \overline{D} + \overline{M} + N) + \overline{A}\,\overline{D}$$

Esercizio 5

- Verificare con diverse metodologie la seguente equivalenza:

$$A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C + A\,C + \overline{C} = A + \overline{C} + A\,C$$

- Soluzione con algebra di Boole (semplifico la parte sinistra):

$$A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C + A\,C + \overline{C} = A + \overline{C} + A\,C$$

$$A\,B\,(\overline{C} + C) \qquad\qquad A\,(1 + C)$$

$$A\,B + A\,C + \overline{C} = A + \overline{C}$$

$$A\,B + A\,C + \overline{C}\,(A + 1) = A + \overline{C}$$

$$A\,B + A\,C + A\,\overline{C} + \overline{C} = A + \overline{C}$$

$$A\,(B + C + \overline{C})$$

$$A\,(B + 1)$$

$$A + \overline{C} = A + \overline{C}$$

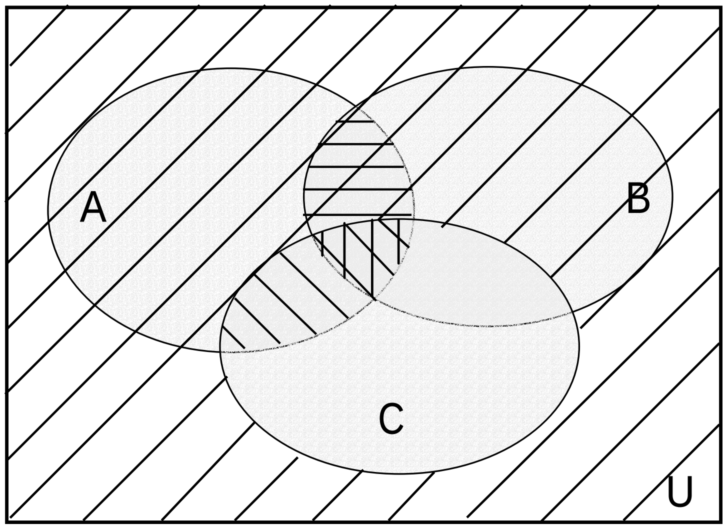
Esercizio 5

- Soluzione con tabella di verità:

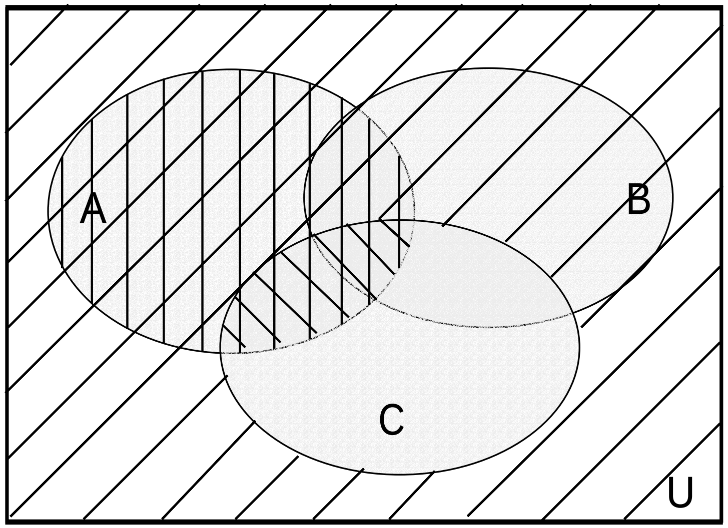
A	B	C	$A B \bar{C}$	A B C	A C	$\bar{C}$	**I**	A	$\bar{C}$	A C	**II**
0	0	0	0	0	0	1	**1**	0	1	0	**1**
0	0	1	0	0	0	0	**0**	0	0	0	**0**
0	1	0	0	0	0	1	**1**	0	1	0	**1**
0	1	1	0	0	0	0	**0**	0	0	0	**0**
1	0	0	0	0	0	1	**1**	1	1	0	**1**
1	0	1	0	0	1	0	**1**	1	0	1	**1**
1	1	0	1	0	0	1	**1**	1	1	0	**1**
1	1	1	0	1	1	0	**1**	1	0	1	**1**

Esercizio 5

- Soluzione con diagrammi di Venn:



$A B \overline{C}$ $\quad$ $A B C$ $\quad$ $A C$ $\quad$ $\overline{C}$

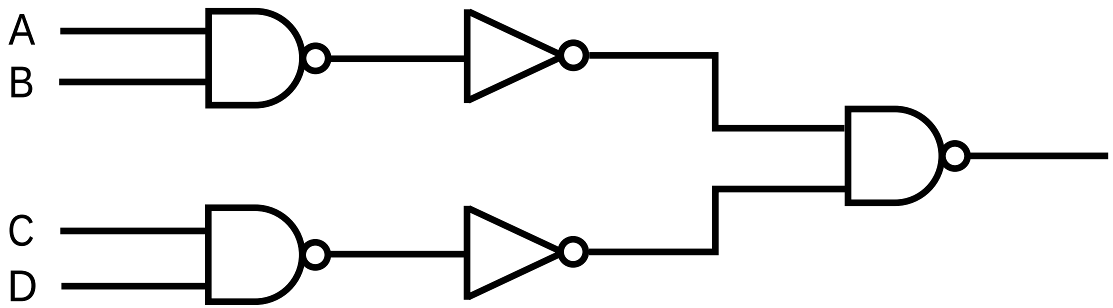


A $\quad$ $A C$ $\quad$ $\overline{C}$

Esercizio 6

- Disponendo unicamente di porte NAND a due ingressi e di porte NOT:
  a. Progettare un circuito che realizzi la funzione NAND a 4 ingressi
  b. Generalizzare la soluzione nel caso di una funzione NAND a più di 4 ingressi
- Soluzione a

$$\overline{A\ B\ C\ D} = \overline{A\ B} + \overline{C\ D} = \overline{\overline{\overline{A\ B}}} + \overline{\overline{\overline{C\ D}}} = \overline{\overline{\overline{A\ B}}\ \ \overline{\overline{C\ D}}}$$



Esercizio 6

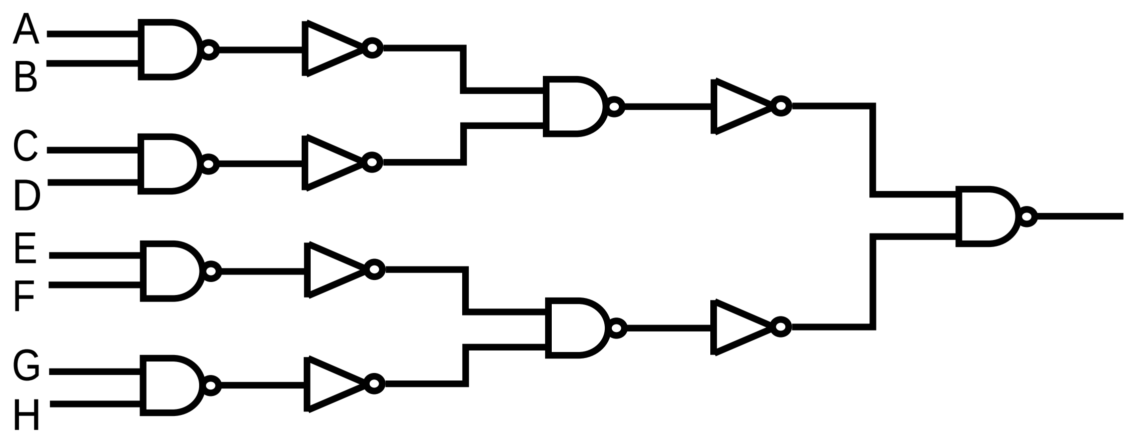
- Soluzione b

Con 8 ingressi:

$$\overline{A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H} = \overline{A\,B} + \overline{C\,D} + \overline{E\,F} + \overline{G\,H} =$$

$$\overline{\overline{\overline{A\,B}}} + \overline{\overline{\overline{C\,D}}} + \overline{\overline{\overline{E\,F}}} + \overline{\overline{\overline{G\,H}}} = \overline{\overline{\overline{A\,B}}\;\overline{\overline{C\,D}}} + \overline{\overline{\overline{E\,F}}\;\overline{\overline{G\,H}}} =$$

$$\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A\,B}}\;\overline{\overline{C\,D}}}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{E\,F}}\;\overline{\overline{G\,H}}}}} = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A\,B}}\;\overline{\overline{C\,D}}}}\;\overline{\overline{\overline{\overline{E\,F}}\;\overline{\overline{G\,H}}}}}$$

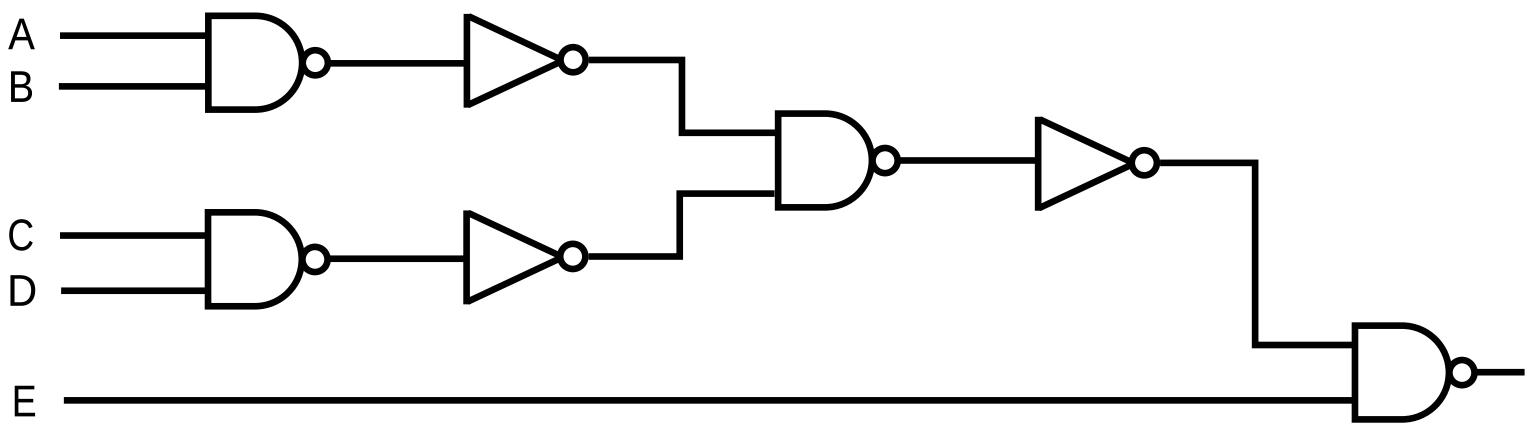


Esercizio 6

Con 5 ingressi:

$$\overline{ABCDE} = \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{E} = \overline{\overline{\overline{AB}}} + \overline{\overline{\overline{CD}}} + \overline{E} =$$

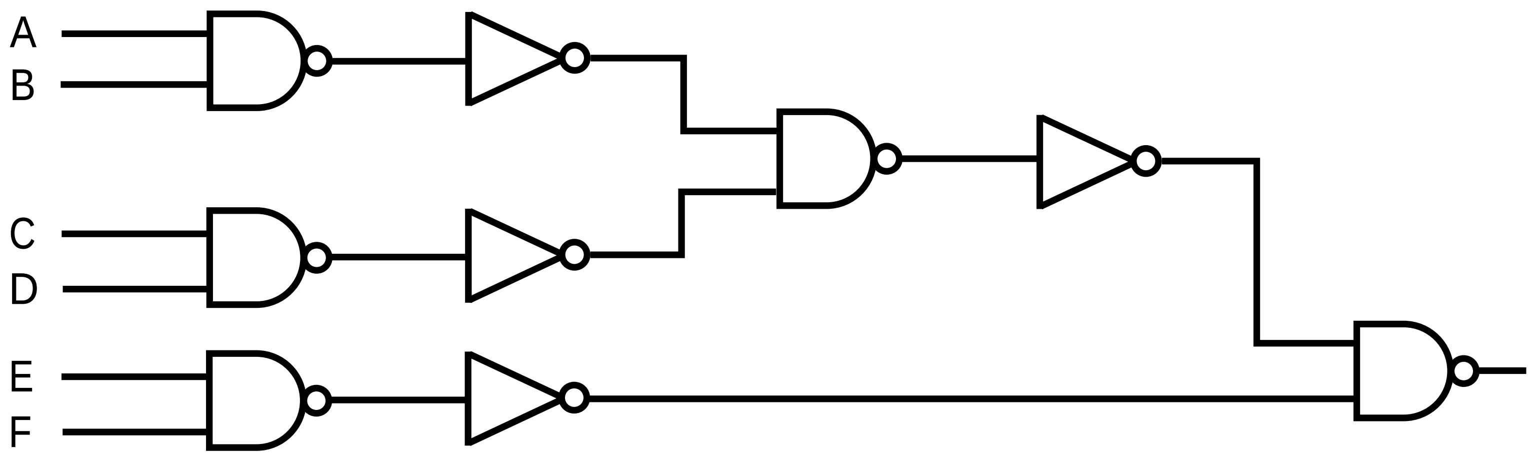
$$\overline{\overline{\overline{AB}}\;\overline{\overline{CD}}} + \overline{E} = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{AB}}\;\overline{\overline{CD}}}}} + \overline{E} = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{AB}}\;\overline{\overline{CD}}}}\;E}$$



Ogni NAND può avere in ingresso un circuito NAND-NOT o un ingresso del circuito

Esercizio 6

Con 6 ingressi



Esercizio 7

Si scriva la tavola della verità della seguente funzione logica, e se ne trovi l'espressione minima con una tecnica a scelta:

$$F = (A \oplus B) + (\overline{A + B\ C})$$

Si verifichi l'equivalenza tra l'espressione della funzione F e la sua espressione minima utilizzando le regole dell'algebra booleana.

Esercizio 7

A	B	C	$A \oplus B$	$B\ C$	$\overline{A + B\ C}$	$(A \oplus B) + (\overline{A + B\ C})$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0

Esercizio 7

BC \ A	0	1
00	1	1
01	1	1
11	1	0
10	1	0

$$F = \overline{A} + \overline{B}$$

$$(A \oplus B) + (\overline{A + B\ C}) =$$

$$A\ \overline{B} + \overline{A}\ B + (\overline{A + B\ C}) =$$

$$A\ \overline{B} + \overline{A}\ B + (\overline{A}\ \ \overline{B\ C}) =$$

$$A\ \overline{B} + \overline{A}\ B + \overline{A}\ (\overline{B} + \overline{C}) =$$

$$A\ \overline{B} + \overline{A}\ B + \overline{A}\ \overline{B} + \overline{A}\ \overline{C} =$$

$$A\ \overline{B} + \overline{A}\ B + \overline{A}\ \overline{B} + \overline{A}\ \overline{B} + \overline{A}\ \overline{C} =$$

$$\overline{A}\ (B + \overline{B} + \overline{C}) + \overline{B}\ (A + \overline{A}) =$$

$$\overline{A} + \overline{B}$$

Esercizio 8

- La seguente uguaglianza è verificata? Giustificare la risposta.

$$A\,B\,D + C\,D\,A + E\,D\,A + \overline{C}\,\overline{D}\,A = D\,A + \overline{C}\,A$$

- Soluzione con algebra di Boole (e considerazioni):

$$A\,B\,D + C\,D\,A + E\,D\,A + \overline{C}\,\overline{D}\,A = D\,A + \overline{C}\,A$$

$$A\,(B\,D + C\,D + E\,D + \overline{C}\,\overline{D}) = A\,(D + \overline{C})$$

Se A=0 l'uguaglianza è verificata.
Se A=1 otteniamo:

$$B\,D + C\,D + E\,D + \overline{C}\,\overline{D} = D + \overline{C}$$

$$D\,(B + C + E) + \overline{C}\,\overline{D} = D + \overline{C}$$

Esercizio 8

$$D\ (B + C + E) + \overline{C}\ \overline{D} = D + \overline{C}$$

Se D = 0 l'uguaglianza è sempre verificata

(infatti $\overline{D} = 1$, perciò otteniamo $\overline{C} = \overline{C}$)

Se D = 1 (perciò $\overline{D} = 0$) otteniamo

$$B + C + E = 1$$

Che NON è verificata se B = 0, C = 0, E = 0.

L'uguaglianza non è verificata per A=1, B=0, C=0, D=1, E=0.

Lo stesso si ottiene con la tabella delle verità:

Esercizio 8

A	B	C	D	E	ABD	CDA	EDA	$\overline{C}\,\overline{D}A$	**I**	DA	$\overline{C}A$	**II**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Esercizio 8

A	B	C	D	E	ABD	CDA	EDA	$\overline{C}\,\overline{D}A$	**I**	DA	$\overline{C}A$	**II**
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	**0**	1	1	**1**
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1