



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

# **Fondamenti di Informatica B**

---

Esercitazione n.2

# Fondamenti di Informatica B

---

## Esercitazione n.2

- Circuiti combinatori
- Sintesi mediante mappe di Karnaugh
- Mappe di Karnaugh con 5 variabili

# Riepilogo teorico

---

## ■ CIRCUITI COMBINATORI:

- la relazione ingresso/uscita non dipende dal tempo
- privi di stato interno

⇒ Vedremo *reti combinatorie ad 1 uscita*:  
reti a più uscite possono essere scomposte nel parallelo di più reti ad 1 uscita

# Riepilogo teorico

---

- Obiettivi della minimizzazione logica:
  - minimizzare il numero di porte
  - a pari numero di porte, minimizz. il numero di ingressi

⇒ Minori costi
- Non più forme canoniche in senso stretto, minterm e maxterm, ma *SdP* e *PdS* minime, *implicanti* (*implicati*) *principali* ed *essenziali*

# Riepilogo teorico

---

- Un *minterm* è una espressione prodotto che contiene in modo affermato o negato tutte le variabili della funzione.

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

$$f = \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + \overline{A} \overline{B} C D + \overline{A} B \overline{C} D + \overline{A} B C D + A B C D$$

- Il numero di porte è elevato (6) ed anche il numero di letterali (25)

# Riepilogo teorico

---

- Sfruttando le regole dell'algebra Booleana possiamo ridurre il numero di porte e letterali necessari

<i>AB</i> \ <i>CD</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

$$f = \overline{A} D + B C D$$

- Abbiamo minimizzato la funzione: numero di porte = 3, numero di letterali = 7: passiamo da minterm ad implicant

# Riepilogo teorico

---

- Un implicante deve ricoprire un numero di celle che sia potenza di 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32.

<i>AB</i> \ <i>CD</i>	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

The table shows a 4x4 grid of cells. The columns are labeled 00, 01, 11, 10 and the rows are labeled 00, 01, 11, 10. The cells at (00, 11), (01, 11), and (11, 11) contain the value 1, while all other cells contain 0. A large 'X' is drawn over the three 1s in the 11 column, indicating that this group of three cells does not form a valid prime implicant because its size (3) is not a power of 2.

<i>AB</i> \ <i>CD</i>	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

The table shows a 4x4 grid of cells. The columns are labeled 00, 01, 11, 10 and the rows are labeled 00, 01, 11, 10. The cells at (00, 11), (01, 11), and (11, 11) contain the value 1, while all other cells contain 0. Three separate boxes are drawn around each of the 1s in the 11 column, indicating that each 1 is a prime implicant of size 1, which is a power of 2.

# Riepilogo teorico

---

- Un implicante si dice principale se non può essere espanso ulteriormente.

<i>AB</i> \ <i>CD</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

Implicante non principale

<i>AB</i> \ <i>CD</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

Implicante principale

# Riepilogo teorico

---

- Un implicante principale si dice essenziale se copre 1 che non sono già coperti da nessun altro implicante.

<i>CD</i> <i>AB</i>	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

Implicanti principali essenziali

Implicante principale non essenziale

# Riepilogo teorico

---

- Stesse considerazioni valgono per:
  - *maxterm*
  - *PdS minima*
  - *implicati*
  - *implicati principali*
  - *implicati principali ed essenziali*

# Riepilogo teorico

---

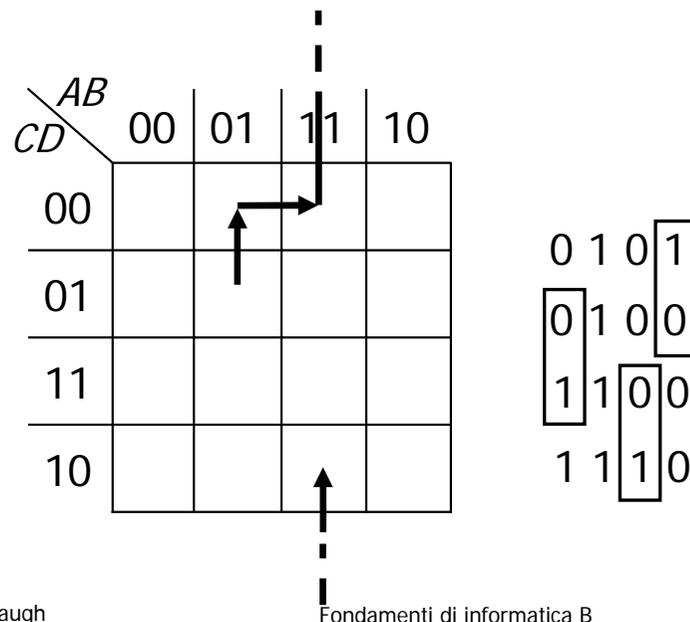
## METODO DELLE MAPPE DI KARNAUGH

1. Trovare tutti gli implicant (implicati) principali essenziali
2. Scegliere un insieme irridondante di ulteriori implicant (implicati) principali, la cui somma (prodotto) copra la funzione ed il cui costo sia minimo
3. Formalizzare l'espressione minima
4. Rappresentare con una RLC a 2 livelli

# Riepilogo teorico

---

Attenzione all'ordine delle righe e delle colonne: muovendosi da una cella a quella vicina orizzontalmente o verticalmente cambia il valore di 1 sola variabile (anche sui bordi).



# Riepilogo teorico

---

Attenzione ai bordi delle mappe:

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

# Esercizio 1

---

$$f(A, B, C, D) = \sum(1, 3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$$

<i>AB</i> \ <i>CD</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

- Minimizzare la funzione sia come somme di prodotti che come prodotti di somme

# Esercizio 1

---

## Soluzione con Somme di Prodotti (copertura degli 1)

1. Trovare tutti gli implicant principali della funzione e, tra questi, identificare quelli essenziali:

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

gli implicant principali essenziali devono comparire nella forma minima della funzione

# Esercizio 1

2. Trovare un set irridondante di implicanti principali tali che tutti gli 1 siano coperti e, togliendo uno qualsiasi di questi implicanti gli 1 non siano più tutti coperti. Questa funzione ha almeno 2 coperture irridondanti:

<i>CD</i> <i>AB</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

<i>CD</i> <i>AB</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

**ottima perché contiene il minor numero di prodotti (quindi, di porte)**

# Esercizio 1

---

3. Formalizzare l'espressione minima:

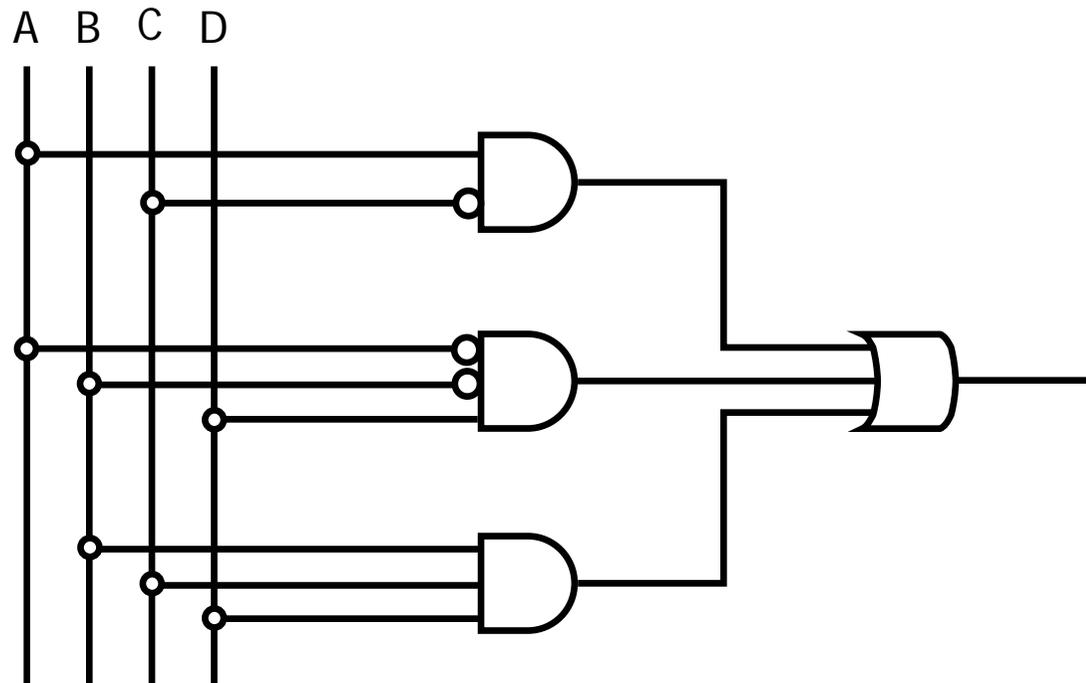
<i>AB</i> \ <i>CD</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

$$f = A \overline{C} + \overline{A} \overline{B} D + B C D$$

# Esercizio 1

---

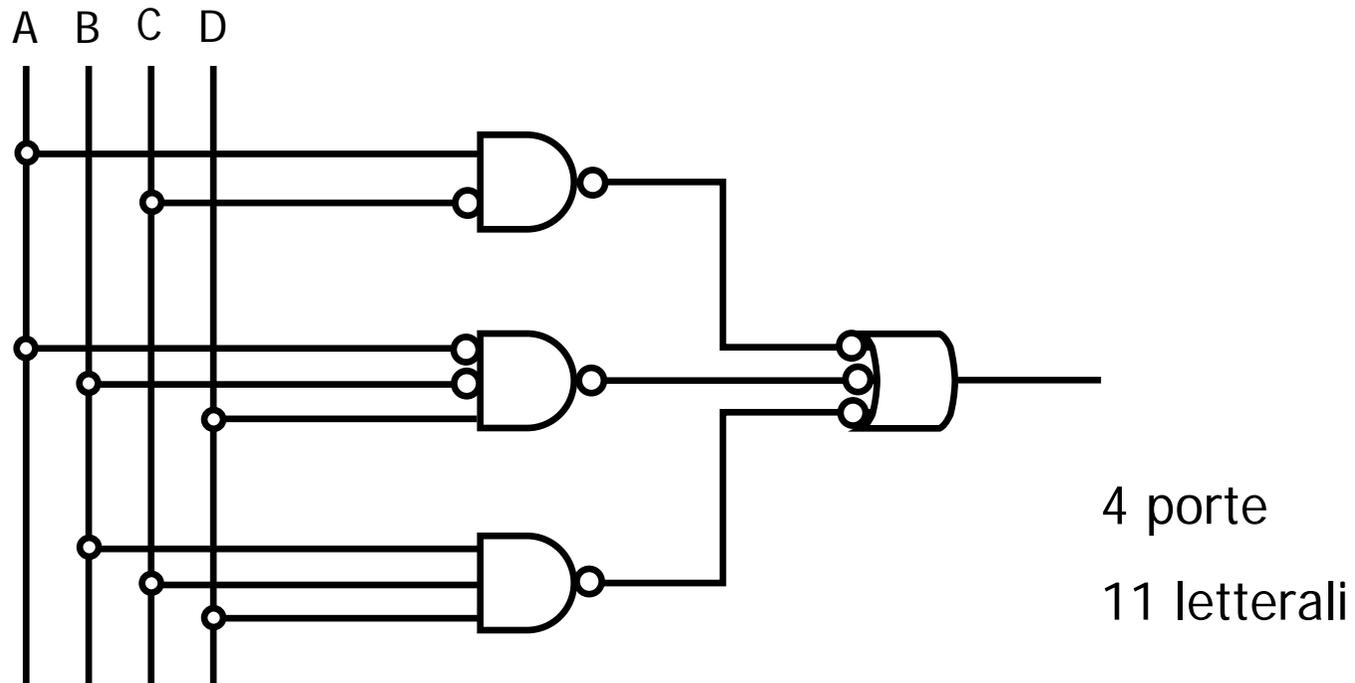
4. Rappresentare l'espressione minima con una RLC a 2 livelli con AND e OR



# Esercizio 1

---

Mettendo 2 NOT lungo le linee



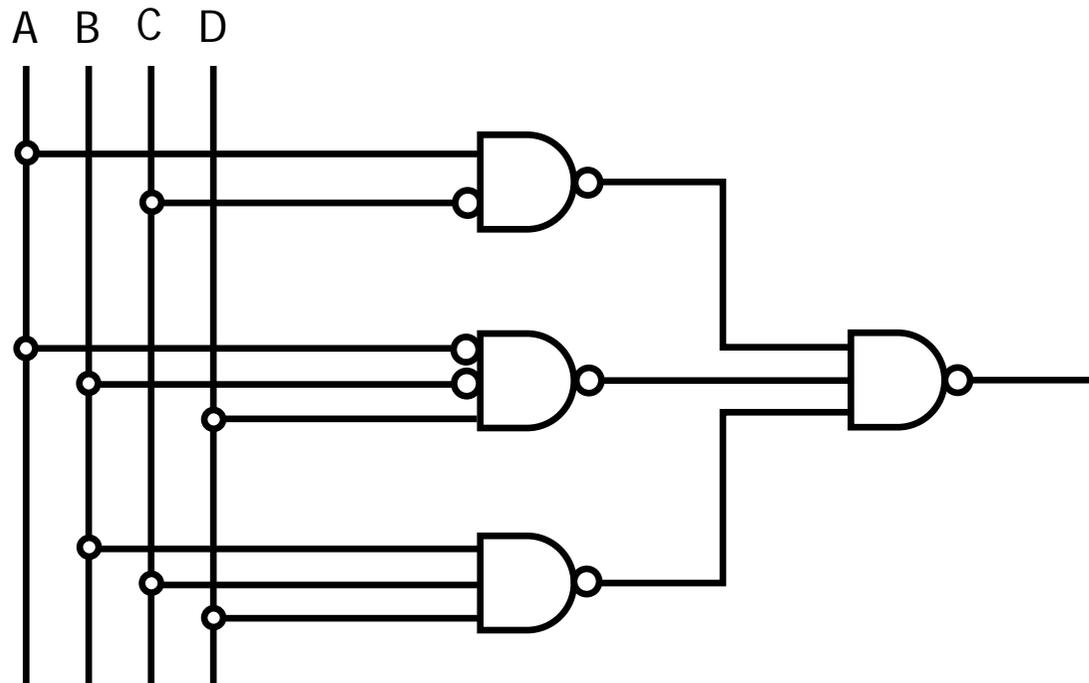
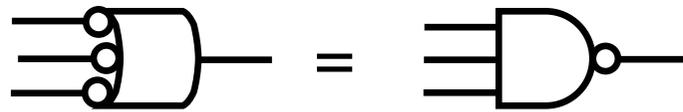
4 porte

11 letterali

# Esercizio 1

---

Grazie ad una delle leggi di De Morgan



4 porte

11 letterali

# Esercizio 1

---

## Soluzione con Prodotti di Somme (copertura degli 0)

1. Trovare tutti gli implicati principali della funzione  $e$ , tra questi, identificare quelli essenziali:

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

siccome tutti gli implicati principali trovati sono anche essenziali abbiamo trovato il Prodotto di Somme minimo

# Esercizio 1

3. Formalizzare l'espressione minima:

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

$$\overline{f} = \overline{A} \overline{D} + C \overline{D} + \overline{A} B \overline{C} + A \overline{B} \overline{C}$$

$$f = \overline{A} \overline{D} + C \overline{D} + \overline{A} B \overline{C} + A \overline{B} \overline{C}$$

$$f = (\overline{A} \overline{D}) (C \overline{D}) (\overline{A} B \overline{C}) (A \overline{B} \overline{C})$$

$$f = (\overline{A} + \overline{D}) (\overline{C} + \overline{D}) (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

$$f = (A + D) (\overline{C} + D) (A + \overline{B} + C) (\overline{A} + B + \overline{C})$$

# Riepilogo teorico

---

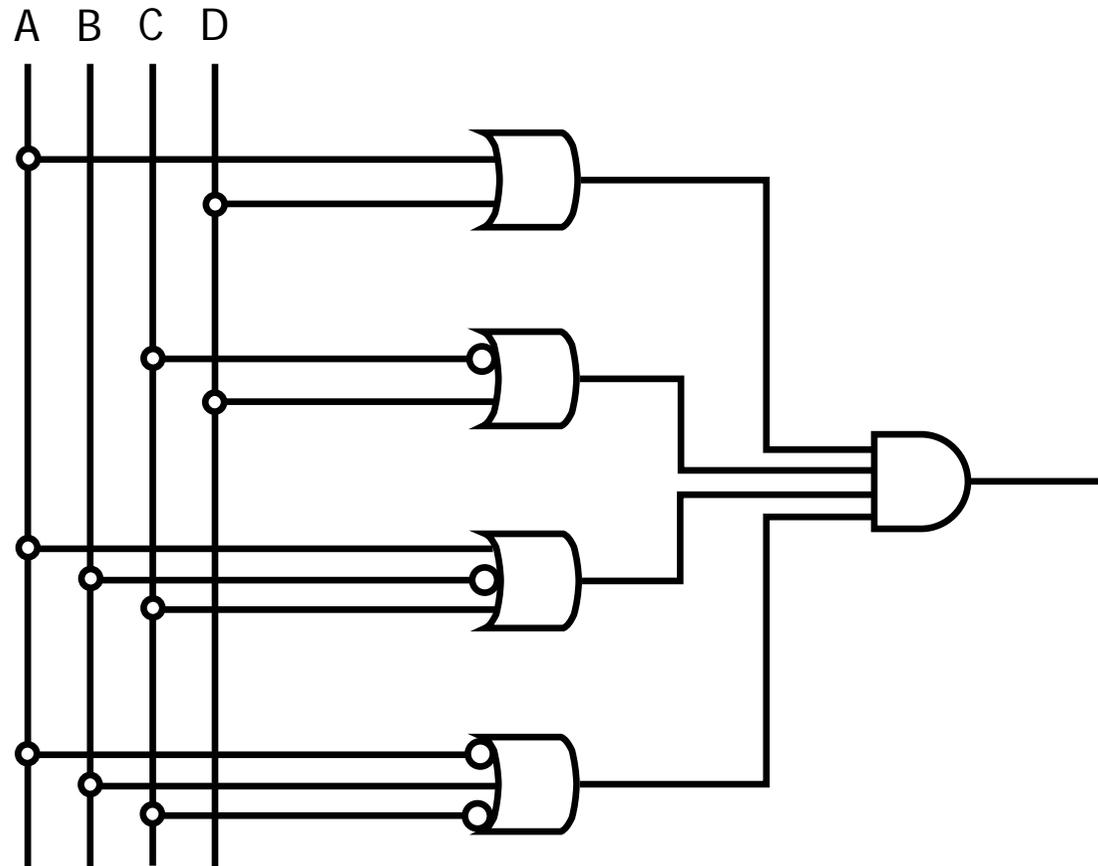
- Da notare come sia sufficiente negare le variabili degli implicati per ottenere il Prodotto di Somme corretto:

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \bar{A} \bar{D} + \bar{C} \bar{D} + \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \bar{A} \bar{B} C \\ f &= (A + D) (\bar{C} + D) (A + \bar{B} + C) (\bar{A} + B + \bar{C})\end{aligned}$$

Di seguito negheremo subito le variabili degli implicati e passeremo direttamente al Prodotto di Somme.

# Esercizio 1

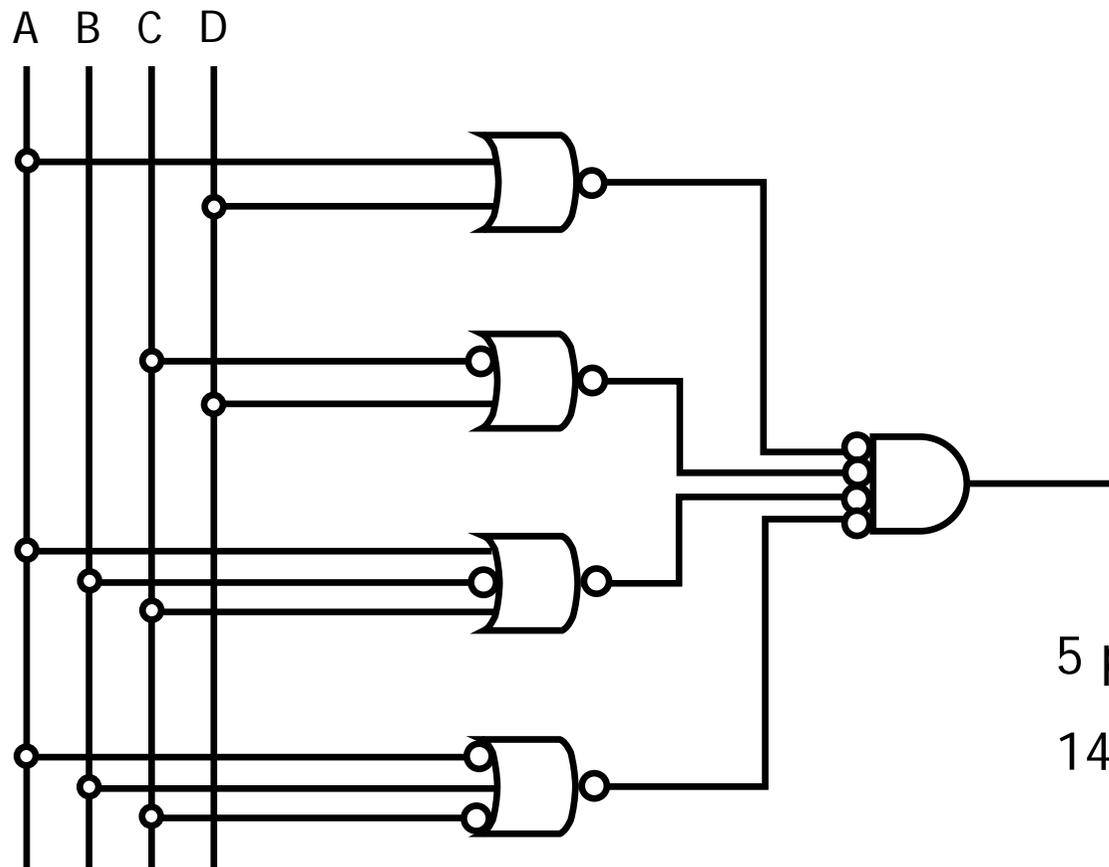
4. Rappresentare l'espressione minima con una RLC a 2 livelli con OR e AND



# Esercizio 1

---

Mettendo 2 NOT lungo le linee



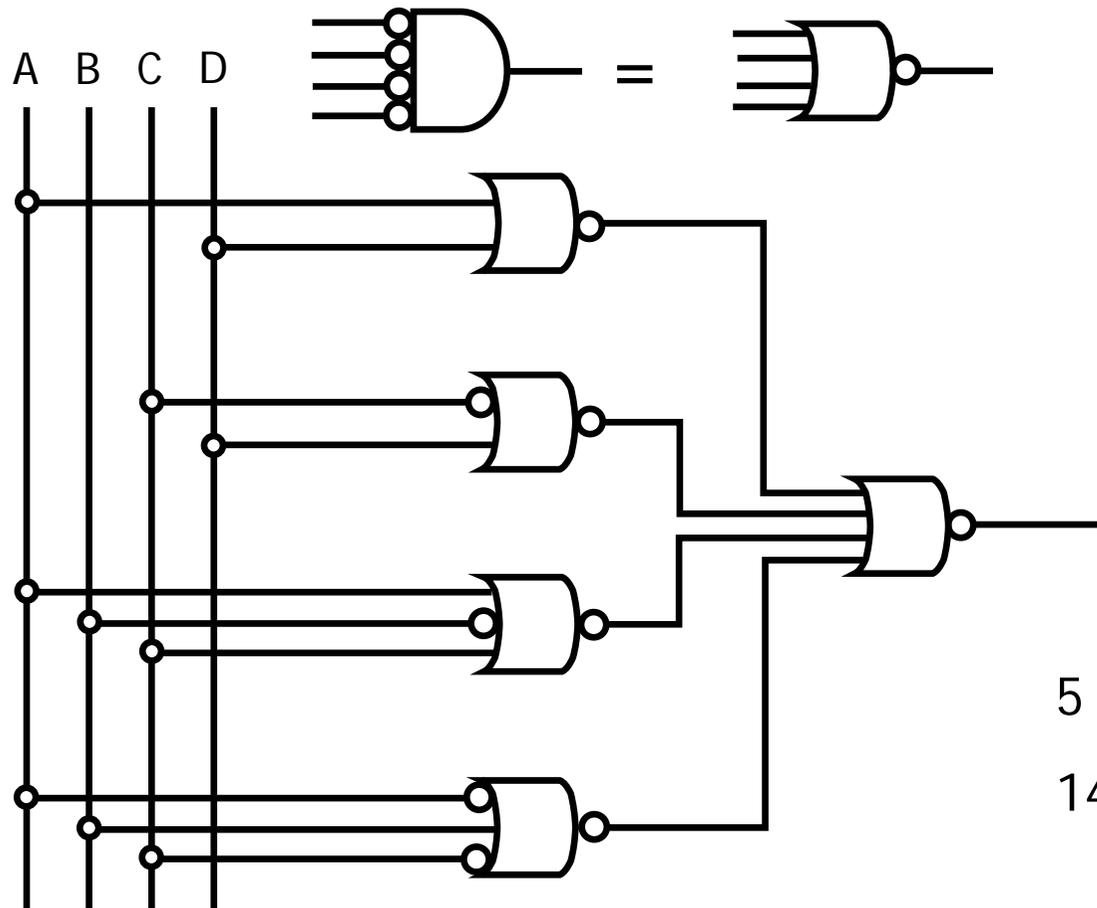
5 porte

14 letterali

# Esercizio 1

---

Grazie ad una delle leggi di De Morgan



5 porte

14 letterali

# Esercizio 2a

---

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

- Minimizzare la funzione come somme di prodotti, considerando le condizioni di indifferenza come 0

# Esercizio 2a

---

<i>CD</i> <i>AB</i>	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

$$f = \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} C D + \overline{A} B C + A \overline{B} D$$

Costo del circuito:

- # porte = 5
- # letterali = 17

# Esercizio 2b

---

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

- Minimizzare la funzione come somme di prodotti, sfruttando le condizioni di indifferenza in modo adeguato

# Esercizio 2b

Differenze nel procedimento:

- Attribuire un 1 (0) potenziale a tutte le indifferenze
- Trovare tutti gli implicant (implicati) principali che non coprano solo indifferenze

<i>AB</i> \ <i>CD</i>	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

$$f = \overline{A} \overline{B} + \overline{A} C + \overline{B} D$$

Costo del circuito:

- # porte = 4
- # letterali = 9

# Riepilogo teorico

---

In assenza di condizioni di indifferenza è sempre possibile passare dalla funzione espressa in Somme di Prodotti alla funzione espressa in Prodotti di Somme sfruttando le regole dell'algebra booleana.

Tale procedimento è in generale impossibile in presenza di condizioni di indifferenza ed è errore **grave**.

# Riepilogo teorico

---

Adiacenza delle celle omologhe delle 2 tabelle

		<i>CD</i>			
<i>AB</i>		00	01	11	10
00		1	-	1	-
01		0	0	1	1
11		0	-	0	0
10		0	1	1	0

$E=0$

		<i>CD</i>			
<i>AB</i>		00	01	11	10
00		-	1	1	1
01		0	-	0	-
11		0	0	1	1
10		-	1	-	0

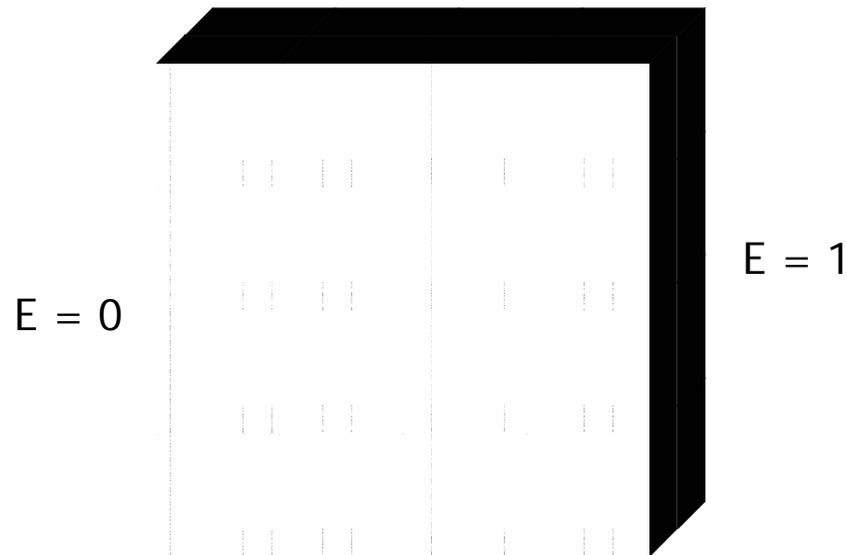
$E=1$

$$\begin{array}{cccc|c} A & \overline{B} & C & D & \overline{E} \\ A & \overline{B} & C & D & E \end{array}$$

# Riepilogo teorico

---

Si può considerare tridimensionalmente la tabella



## Riepilogo teorico

---

Le coperture degli 1, o degli 0, va eseguita contemporaneamente su entrambe le tabelle utilizzando le stesse regole utilizzate per funzioni con meno di 5 variabili, tenendo conto dell'adiacenza delle celle omologhe delle due tabelle.

Considerare separatamente le due tabelle e successivamente unire i risultati è un errore **grave**.

# Esercizio 3

---

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	-	1	-
01	0	0	1	1
11	0	-	0	0
10	0	1	1	0

$E=0$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	-	1	1	1
01	0	-	0	-
11	0	0	1	1
10	-	1	-	0

$E=1$

- Minimizzare la funzione di 5 variabili come somme di prodotti, sfruttando le condizioni di indifferenza

# Esercizio 3

		<i>CD</i>			
<i>AB</i>		00	01	11	10
00		1	-	1	-
01		0	0	1	1
11		0	-	0	0
10		0	1	1	0

$E=0$

		<i>CD</i>			
<i>AB</i>		00	01	11	10
00		-	1	1	1
01		0	-	0	-
11		0	0	1	1
10		-	1	-	0

$E=1$

$$f = \overline{A} \overline{B} + \overline{B} D + \overline{A} C \overline{E} + A B C E$$

Costo del circuito:

- # porte = 5
- # letterali = 15

# Esercizio 4

---

Si abbia un numero binario di 5 bit, A, B, C, D, E, essendo A il più significativo ed E il meno significativo.

Si determini:

1. la funzione booleana che valga 1 solo quando il numero in questione è primo, tenendo presente che lo zero non è un numero primo;
2. l'espressione minima della funzione booleana come somma di prodotti e come prodotto di somme.

# Esercizio 4

---

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31  
 x

		<i>DE</i>			
<i>BC</i>		00	01	11	10
	00	0	1	1	1
	01	0	1	1	0
	11	0	1	0	0
	10	0	0	1	0

*A=0*

		<i>DE</i>			
<i>BC</i>		00	01	11	10
	00	0	1	1	0
	01	0	0	1	0
	11	0	1	1	0
	10	0	0	0	0

*A=1*

# Esercizio 4

<i>DE</i> \ <i>BC</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	0
10	0	0	1	0

$A=0$

<i>DE</i> \ <i>BC</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$A=1$

$$f = \overline{B} \overline{C} E + \overline{B} D E + \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + \overline{A} C \overline{D} E + \overline{A} \overline{C} D E + A B C E$$

Costo del circuito:

- # porte = 7
- # letterali = 28

# Esercizio 4 (soluzione alternativa)

		<i>DE</i>			
<i>BC</i>		00	01	11	10
00	0	1	1	1	
01	0	1	1	0	
11	0	1	0	0	
10	0	0	1	0	

$A=0$

		<i>DE</i>			
<i>BC</i>		00	01	11	10
00	0	1	1	0	
01	0	0	1	0	
11	0	1	1	0	
10	0	0	0	0	

$A=1$

$$f = \overline{B} \overline{C} E + \overline{A} \overline{B} E + \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + B C \overline{D} E + \overline{A} \overline{C} D E + A C D E$$

Costo del circuito:

- # porte = 7
- # letterali = 28

# Una mappa può dare 2 coperture diverse?

<i>DE</i>		00	01	11	10
<i>BC</i>		00	01	11	10
00		1	1	0	1
01		0	1	1	1
11		0	0	0	0
10		0	0	0	0

<i>DE</i>		00	01	11	10
<i>BC</i>		00	01	11	10
00		1	1	0	1
01		0	1	1	1
11		0	0	0	0
10		0	0	0	0

$$\begin{aligned} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{B} C E + \overline{B} D \overline{E} &= \overline{B} \overline{C} \overline{E} + \overline{B} \overline{D} E + \overline{B} C D \\ \overline{B} \overline{C} \overline{D} (E + \overline{E}) + \overline{B} C E (D + \overline{D}) + \overline{B} D \overline{E} (C + \overline{C}) &= \dots \\ \overline{B} \overline{C} \overline{D} E + \overline{B} \overline{C} \overline{D} \overline{E} + \overline{B} C D E + \overline{B} C \overline{D} E + \overline{B} C D \overline{E} + \overline{B} \overline{C} D \overline{E} &= \dots \\ \overline{B} \overline{D} E (C + \overline{C}) \quad \overline{B} \overline{C} \overline{E} (D + \overline{D}) \quad \overline{B} C D (E + \overline{E}) & \\ \overline{B} \overline{D} E + \overline{B} \overline{C} \overline{E} + \overline{B} C D &= \overline{B} \overline{C} \overline{E} + \overline{B} \overline{D} E + \overline{B} C D \end{aligned}$$

# Esercizio 4

	<i>DE</i>			
<i>BC</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	0
10	0	0	1	0

$A=0$

	<i>DE</i>			
<i>BC</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$A=1$

$$f = (D + E) (\overline{C} + E) (\overline{B} + E) (\overline{B} + C + D) (A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}) (\overline{A} + E) (\overline{A} + \overline{B} + C) (\overline{A} + B + \overline{C} + D)$$

Costo del circuito:

- # porte = 9
- # letterali = 30