

# ROBOTICA INDUSTRIALE

## LEZIONE 1 - I PRIMI CONCETTI DI ROBOTICA

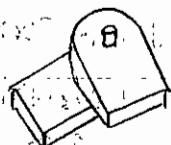
### Robot industriale:

Scopo: muovere oggetto e compiere操作 (operazioni)

peculiarità: programmabile

costituzione: sequenze di bracci, in buone approssimazioni supposte rigidi, connessi da giunti. Il braccio è costituito da punti, in movimento circolare tra loro.

► GIUNTI ROTATORI: permettono il movimento rotatorio circolare tra due bracci. Si definisce la posizione circolare tra i due bracci attraverso l'angolo di girento (Joint angle), considerata un termine di vocabolo di girento.



► GIUNTI PRISMATICI: permettono ad un braccio di scorrere rispetto all'altro. Non sono ammesse rotazioni. La vocabolario di girento è detto off-set di girento.

I robot industriali si classificano a seconda del tipo di catena cinematografica che caratterizzano.

Esistono due classificazioni: robot a catena cinematografica aperta e a catena cinematografica chiusa.

Se definisce grado di libertà di un manipolatore il numero di movimenti indipendenti che le componenti hanno ad effettuare. È tipicamente pari al numero di punti.

Si definisce organo terminale di un manipolatore quello che effettivamente compie le操作 (operazioni). Le sue orientazioni e le sue posizioni definiscono il punto nello spazio operativo.

È possibile definire la posizione dell'organo terminale definendo la disposizione di tutti i girenti attraverso i vocaboli del girento. Si definisce così il punto nello spazio dei girenti.

problema di cinematografia diretta del robot: dato il punto nello spazio dei girenti si definisce il punto nello spazio operativo.

problema di cinematografia inversa del robot: dato il punto nello spazio operativo si definisce il corrispondente punto nello spazio dei girenti.

dinamica del robot. studio delle dinamiche del robot attraverso lo studio delle coppie da motore sui giretti. Problemi di dinamica diretta ed inversa non ammettono soluzioni uniche.

plannificazione delle traiettorie: dato un robot si pianifica la traiettoria che il robot deve seguire.

PERCORSO: insieme di punti nello spazio da dove esiste seguito del maneggiatore.

TRAETTORIA: percorso su cui è definita onde la legge di moto, definendo, oltre ai punti di transito, onde l'andamento del percorso.

controllo del robot: sistemi di controllo dei maneggiatori.

IN SPAZIO APERTO: tipico di un maneggiatore che si muove nello spazio libero.

CONTROLLO IBRIDO POSIZIONE-FORZA: tipico di tutti quei robot che devono compiere trasformazioni su oggetti. Le traiettorie vengono automaticamente modificate a seconda degli dati letti da sensori posizionati sull'oggetto terminale.

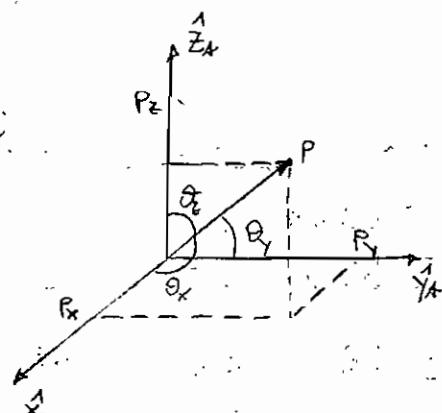
## DESCRIZIONE DELLA POSIZIONE

Dato un punto  $P$  nello spazio, si definiscono una serie di versori di riferimento. Ogni terna di riferimento è identificata

da un nome, come gli versori di tale terne hanno un riferimento alle terne di appartenenza, inoltre in pedice.

Tutte le terne di riferimento sono largate:

Un qualsiasi punto  $P$  è descritto da un vettore che lo congiunge all'origine delle terne di riferimento. La posizione su tutte le terne identificate nello spazio è punto  $P$ .



$$P_z = \|P\| \cos \theta_z = P \cdot \hat{z}_A^1$$

$$P_x = \|P\| \cos \theta_x = P \cdot \hat{x}_A^1$$

$$P_y = \|P\| \cos \theta_y = P \cdot \hat{y}_A^1$$

Tutte tre componenti sono salutamente contenute in un vettore

$$\vec{AP} := \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

Le stesse terne di riferimento possono essere descritte attraverso le tre componenti

$$\hat{x}^A := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y}^A := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{z}^A := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

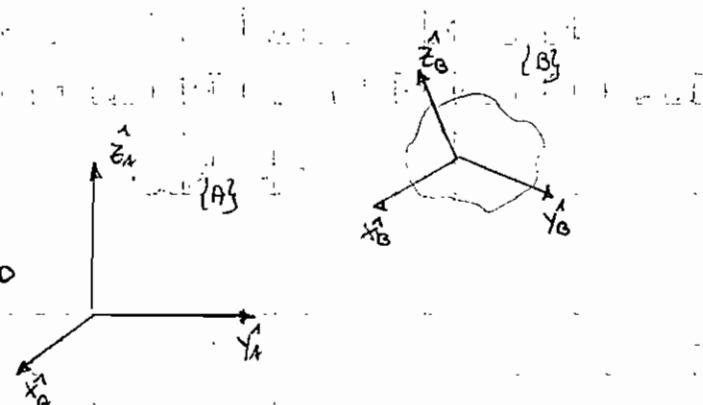
Aggiunta un'altra terna di riferimento  $\{B\}$ , allora per il vettore  $p$  è vero che

$${}^A p \cdot {}^A x_4 = {}^B p \cdot {}^B x_4$$

cioè nel caso in cui siano coinvolti solo prodotti scalari, è possibile omettere il riferimento alle terne di riferimento.

#### • ORIENTAMENTO DI UN CORPO RIGIDO

dato un corpo rigido ed une terna di riferimento, per poter descrivere l'orientamento di un corpo rigido nello spazio è necessario esprimere a questo punto le tre terne di riferimento.



L'orientamento del corpo è quindi pari all'orientamento delle terne solide a questo rispetto alla terna di riferimento.

Per questo si definiscono i versori delle terne  $\{B\}$  rispetto alle terne  $\{A\}$  e si definisce quindi la matrice di rotazione delle terne  $\{B\}$  rispetto alle terne  $\{A\}$ .

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A x_B^1 & {}^A y_B^1 & {}^A z_B^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A x_A^1 \cdot {}^A x_B^1 & {}^A x_A^1 \cdot {}^A y_B^1 & {}^A x_A^1 \cdot {}^A z_B^1 \\ {}^A y_A^1 \cdot {}^A x_B^1 & {}^A y_A^1 \cdot {}^A y_B^1 & {}^A y_A^1 \cdot {}^A z_B^1 \\ {}^A z_A^1 \cdot {}^A x_B^1 & {}^A z_A^1 \cdot {}^A y_B^1 & {}^A z_A^1 \cdot {}^A z_B^1 \end{bmatrix}$$

Ogni elemento della matrice di rotazione è pari al coseno dell'angolo compreso tra due versori. Per tale ragione si definisce tale matrice quale matrice dei coseni direttori.

#### • PROPRIETÀ DELLA MATRICE DI ROTAZIONE

$${}^B_A R = \begin{bmatrix} {}^B x_A^1 & {}^B y_A^1 & {}^B z_A^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A x_A^1 \cdot {}^B x_A^1 & {}^A x_A^1 \cdot {}^B y_A^1 & {}^A x_A^1 \cdot {}^B z_A^1 \\ {}^A y_A^1 \cdot {}^B x_A^1 & {}^A y_A^1 \cdot {}^B y_A^1 & {}^A y_A^1 \cdot {}^B z_A^1 \\ {}^A z_A^1 \cdot {}^B x_A^1 & {}^A z_A^1 \cdot {}^B y_A^1 & {}^A z_A^1 \cdot {}^B z_A^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A x_A^1 & {}^A y_A^1 & {}^A z_A^1 \end{bmatrix}^T = {}^A_B R^T$$

La matrice inversa di una matrice di rotazione è la sua transpose.

$${}^B_A R^T {}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^B x_A^1 \\ {}^B y_A^1 \\ {}^B z_A^1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} {}^B x_A^1 & {}^B y_A^1 & {}^B z_A^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

poiché il prodotto tra due vettori uguali è unitario mentre quello tra due vettori opposti è nullo. Quindi se metrice di rotazione è ortogonale siccome tutte le colonne della metrice  $R$  hanno modulo unitario.

Se determinante di qualsiasi metrice di rotazione è unitario e quindi la metrice di rotazione risulta avere ortogonali proprie

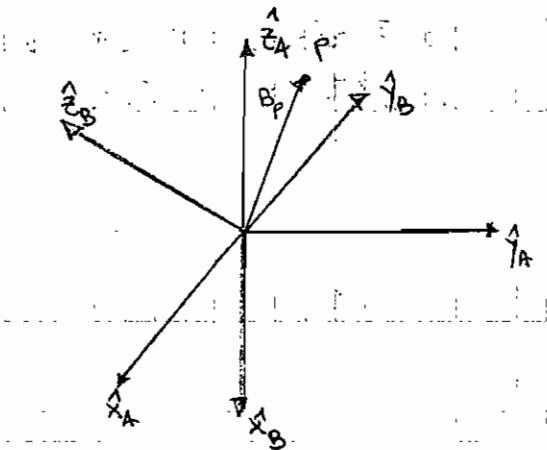
Dato un corpo si definiscono quindi le sue posizione ed il suo orientamento definendo le opposte metriice di rotazione e rettore di posizione:

$$\left\{ \begin{matrix} {}^A_R \\ {}^P_R \end{matrix} \right\}$$

## TRASFORMAZIONI TRA RIFERIMENTI.

Abbiamo un punto descritto rispetto ad una certa terna e vogliamo descriverlo secondo un'altra terna.

- Caso 1: consideriamo due terne entrate nello stesso punto



Vogliamo calcolare punto vole  $A_P^A$  col  $B$  desiderare  
del punto rispetto alla terna  $A$ . Allora:

Conosco:  $B_P^B$ ,  $B_x^A$ ,  $B_y^A$ ,  $B_z^A$

$B_P^B$

$B_P^B$

$B_P^B$

$$\text{Voglio scrivere: } {}^A P_x = {}^A x_A \cdot {}^A P = {}^B x_A \cdot {}^B P \quad \text{①}$$

$${}^A P_y = {}^A y_A \cdot {}^A P = {}^B y_A \cdot {}^B P$$

$${}^A P_z = {}^A z_A \cdot {}^A P = {}^B z_A \cdot {}^B P$$

①: il pedottero scelto è in motoone rispetto alla terna scelta

Ripetiamo i pedottri scelti:

$${}^A P_x = [{}^B x_A]^T [{}^B P]$$

$${}^A P_y = [{}^B y_A]^T [{}^B P]$$

$${}^A P_z = [{}^B z_A]^T [{}^B P]$$

Possiamo se far le telefonate da ottenuto le 6 combinazioni in modo di scrivere ad una terna  
in forme rettangolari.

$${}^A P = \begin{bmatrix} {}^A P_x \\ {}^A P_y \\ {}^A P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [{}^B x_A]^T \\ [{}^B y_A]^T \\ [{}^B z_A]^T \end{bmatrix} [{}^B P]$$

Ma devo ottenere

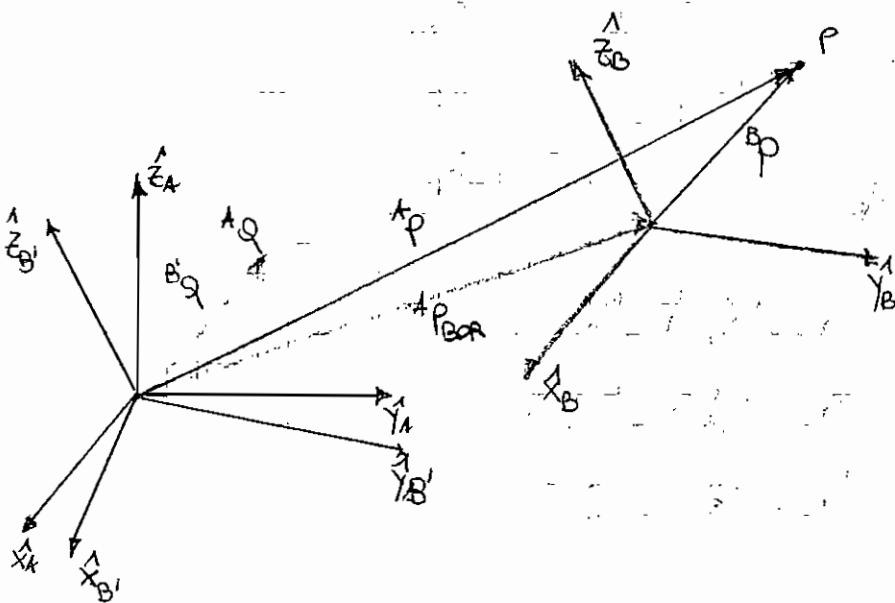
${}^B R^T$  e dunque:  
MATRICE DI ROTAZIONE

$${}^A P = {}^B R^T {}^B P \quad ; \quad {}^A P = {}^A R {}^B P$$

dobbiamo ottenere quello del sistema secondo

Note che nelle reti di pedette rettangoli si pedire che un elemento deve coincidere con l'angolo della rete successiva. Inoltre la rete deve avere le coordinate rispetto all'oggetto del sistema secondo. (perfino infatti l'oggetto può avere le sue coordinate).

CASO 2:



Come fare conoscendo  ${}^B P$  e voglio arrivare alla direzione del punto (not: del punto e non del vettore) rispetto alla Terra e.

- 1) trovo il vettore dunque questo è il vettore  ${}^A P_{B0}$
- 2) posso usare le regole del parallelogramma per ottenere  ${}^A P$ .
- 3) trovo parallela a se stessa anche la Terra B coincidendo con la Terra B!

Imponendolo si ottiene che:  ${}^A P = {}^A Q + {}^A P_{B0}$

Sappiamo che  ${}^A Q$  lo dobbiamo ottenere per trasformare parallelamente il vettore  ${}^B P$ .  
Questo ormai la Terra B è stata ottenuta per trasformare, ne abbiamo:

$${}^B Q = {}^B P \quad (\text{not: non è una equivalenza né una identità!!})$$

Allora posso spostare punto rispetto anche  ${}^A Q$ . Infatti:

$$\frac{{}^A Q}{B} = \frac{{}^A R}{{}^B} \frac{{}^B Q}{{}^B} = \frac{{}^A R}{{}^B} {}^B P \rightarrow \text{INFATTI LE TERRE B e B' SONO TRA DI LORO LO STESSO MODO}$$

Allora vediamo di estrarre il vettore su te de:

$$\boxed{A_P = A_R B_P + A_{P_{BOP}}}$$

Un operatore di questo tipo è detto non omogeneo perché oltre a dare esprimere un pedotto obbliga eseguire anche una somma.

Se vogliamo arrivare ad avere un operatore di tipo omogenee in modo tale da avere de:

$$\text{Esempio: } A_P = \frac{A}{B} B_P$$

per fare questo trasformiamo i vettori da destri verso i primi.

Ri definiamo

$$A\tilde{P} := \begin{bmatrix} A_P \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

che prendono il vecchio vettore e gli aggiungono un  
ultimo elemento di vettore unitario.

$$B\tilde{P} := \begin{bmatrix} B_P \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Allora per definizione su te de:

$$A_T := \underbrace{\begin{bmatrix} A & | & A_P \\ B & | & B_P \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}}_{3 \times 3}$$

quindi complessivamente otteniamo una  
matrice di tipo  $4 \times 4$ .

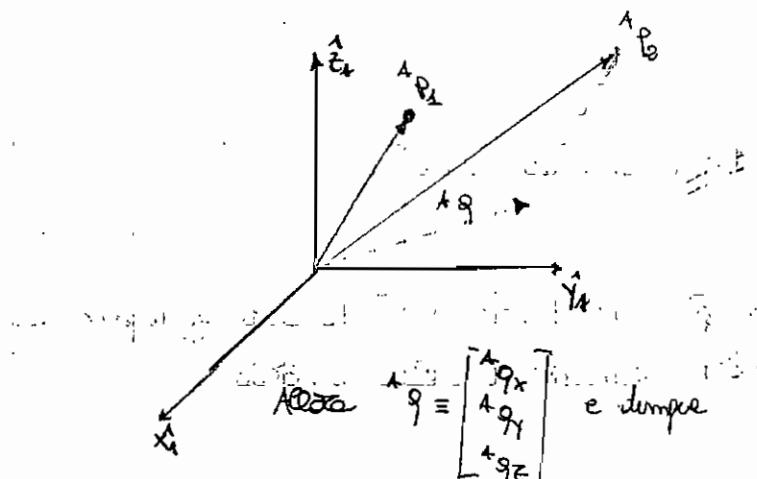
Vediamo se tutto torna per verificare le definizioni appena date:

$$\begin{bmatrix} A_R & | & A_P \\ B_R & | & B_P \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_P \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_R B_P + A_{P_{BOP}} \\ \dots \\ 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_P \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = A\tilde{P}$$

Habbiamo ottenuto la trasformazione cercata spostando quattro volte un operatore assolutamente  
omogeneo - la matrice  $T$  è detta matrice di Transformazione omogenea.  
Queste matrice ha 3 diverse significati:

- 1) contiene le informazioni di una terza diretta rispetto ad un'altra: c'è la retta di riferimento e puoi decidere l'origine di una terza diretta all'altra;
- 2) permette di passare dalla direzione in un sistema di riferimento alla direzione rispetto ad un altro sistema di riferimento;
- 3) è un operatore capace di trasferire nel spazio punto e direzione rette.

### ► TRASLAZIONE DI PUNTI



Che possono esprimere le traslazione del punto  $P_1$  al punto  $P_2$ ?

C'è bisogno ancora sulla regola del parallelogramma.

$$\text{Allora } {}^Aq = \begin{bmatrix} {}^Aq_x \\ {}^Aq_y \\ {}^Aq_z \end{bmatrix} \text{ e dunque } {}^AP_2 = {}^AP_1 + {}^Aq$$

Allora anche questo un operatore di tipo non omogeneo. Vorremo una di tipo omogeneo tale che

$$T_Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & {}^Aq_x \\ 0 & 1 & 0 & {}^Aq_y \\ 0 & 0 & 1 & {}^Aq_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{HA LA STRUTTURA DI UNA} \\ \text{MATRICE DI TRASFORMAZIONE} \\ \text{OMOGENEA} \end{array}$$

Vediamo se effettivamente questa matrice a permette di riportare allo stato precedente precedute

$$\left[ \begin{array}{c|cc} I & {}^Aq \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} {}^AP_1 \\ \hline 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} I{}^AP_1 + {}^Aq \\ \hline 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} {}^AP_1 + {}^Aq \\ \hline 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} {}^AP_2 \\ \hline 1 \end{array} \right]$$

Allora sono riuscite ad esprimere la traslazione di un punto attraverso uno spazio rette di trasformazione omogenee:

$$\boxed{{}^AP_2 = T_Q(q) {}^AP_1}$$

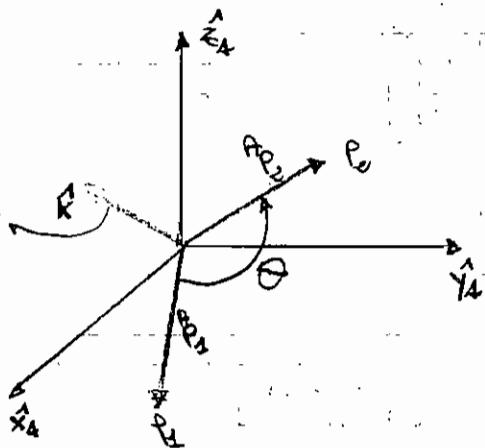
Indice l'ampiezza della traslazione dunque

$$q = \| {}^Aq \|$$

Indica la direzione e il verso  
dello spostamento

## ROTAZIONE DI VETTORI

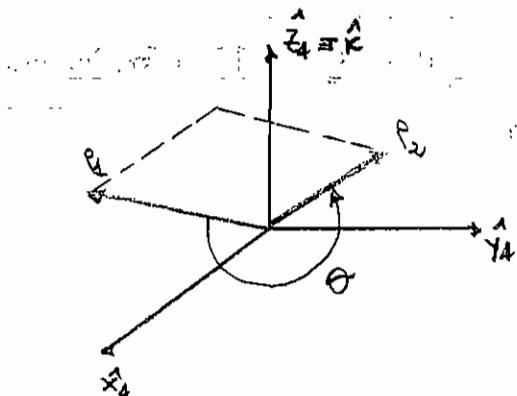
ANGOLI DI ROTAZIONE



Voglio ottenere:  $A_{P_0} = T_k(\theta) A_{P_1}$  cioè voglio sapere come è fatta la rotazione di trasformazione

CONVENZIONE: gli angoli sono scelti punti sulla base delle regole delle nostre dita: l'angolo scorso deve seguire la direzione delle dita che si piegano con indice avvolto verso l'asse di rotazione

Studiate per semplicità le rotazioni attorno agli assi coordinate: ottieno per esempio a 3.

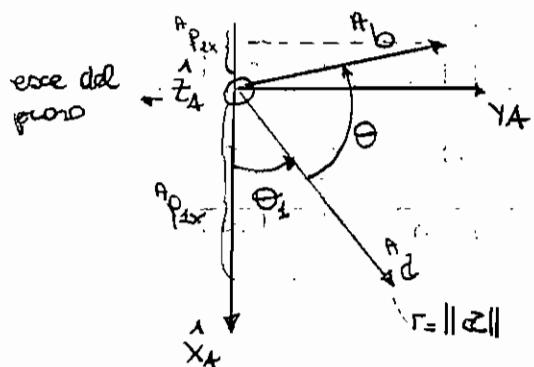


$$A_{P_0} = \begin{bmatrix} A_{P_{0x}} \\ A_{P_{0y}} \\ A_{P_{0z}} \end{bmatrix} \quad A_{P_1} = \begin{bmatrix} A_{P_{1x}} \\ A_{P_{1y}} \\ A_{P_{1z}} \end{bmatrix}$$

Successiva rotazione rispetto all'asse z, secundamente su te de

$$A_{P_{0z}} = A_{P_{1z}}$$

Proiettiamo i due vettori coinvolti sul piano



$$\begin{cases} A_{P_{0x}} = r \cdot \cos \theta_1 \\ A_{P_{0y}} = r \cdot \sin \theta_1 \end{cases}$$

IN QUESTO CASO I SEGNI VERRANNO BESSE SE FACENDO UNA VERIFICA NON VA BENE, AGGIUNGO UN MINUS

$$A_{P_{1x}} = r \cdot \cos(\theta + \theta_1)$$

$$A_{P_{1y}} = r \cdot \sin(\theta + \theta_1)$$

Espandendo le coseni:

$$A_{P_{0x}} = r [\cos \theta \cos \theta_1 - \sin \theta \sin \theta_1] = \cos \theta (r \cos \theta_1) - \sin \theta (r \sin \theta_1)$$

$$A_{P_{1x}} = r [\sin \theta \cos \theta_1 + \cos \theta \sin \theta_1] = \sin \theta (r \cos \theta_1) + \cos \theta (r \sin \theta_1)$$

Sarà comoda un po' di matematica:

$$\begin{bmatrix} {}^A P_{ex} \\ {}^A P_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^T P_{ex} \\ {}^T P_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A P_{px} \\ {}^A P_{py} \end{bmatrix}$$

Allora sommamente si ha che

$$\begin{bmatrix} {}^A P_{ex} \\ {}^A P_{ey} \\ {}^A P_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A P_{1x} \\ {}^A P_{1y} \\ {}^A P_{1z} \end{bmatrix} \quad {}^A P_2 = T_k(\theta) {}^A P_1$$

$R_z(\theta)$

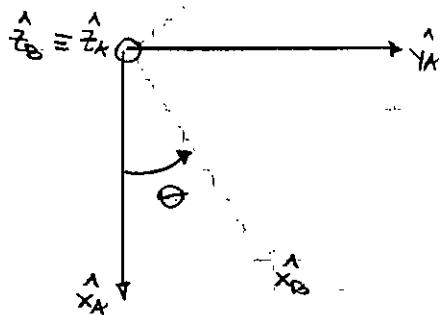
Allora sono riusciti a mettere in relazione il vettore  ${}^A P_1$  con il vettore  ${}^A P_2$  ruotato attraverso una matrice di trasformazione composta ottenuta dalla  $R_z(\theta)$  come:

$$T_z(\theta) = \left[ \begin{array}{ccc|c} R_z(\theta) & & & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Analoghe matrici permettono di esprimere relazioni rispetto agli altri altri assi coordinate.

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Potete anche scrivere le tesse cose costituite da vettori, passo spettatore è matrice di trasformazione composta per la loro relazione.



Quanto vale la descrizione delle nuove tasse di rotta = fissa  
di perturbazione?

vedremo che:

$$B_R = R_z(\theta)$$

Infatti faccio ruotare un vettore alla rotta e dunque:

$${}^A x_B^1 = R_z(\theta) {}^A x_A^1$$

$${}^A y_B^1 = R_z(\theta) {}^A y_A^1$$

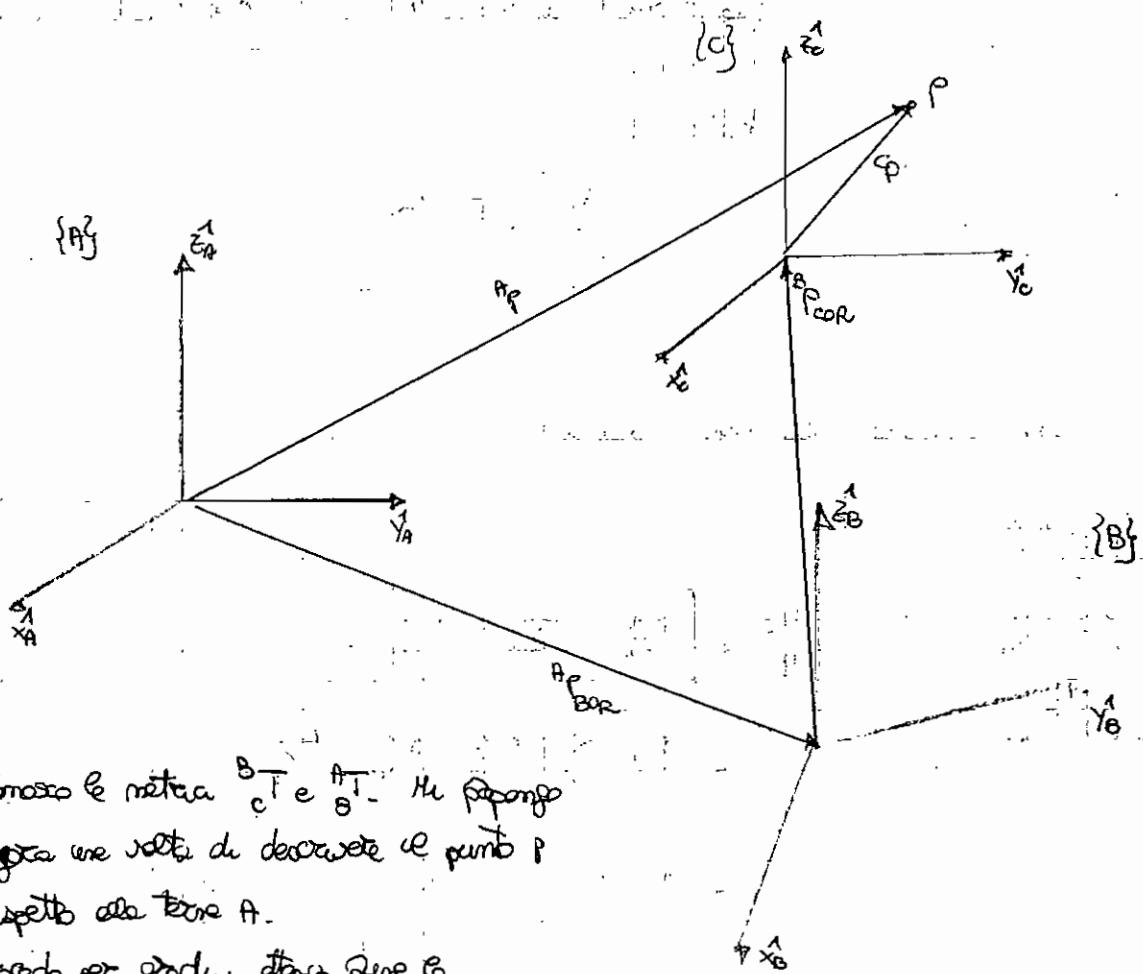
$${}^A z_B^1 = R_z(\theta) {}^A z_A^1$$

$${}^B R_A^1 = \begin{bmatrix} {}^A x_B^1 & {}^A y_B^1 & {}^A z_B^1 \\ {}^A x_A^1 & {}^A y_A^1 & {}^A z_A^1 \end{bmatrix} =$$

$$= R_z(\theta) \begin{bmatrix} {}^A x_A^1 & {}^A y_A^1 & {}^A z_A^1 \\ {}^A x_A^1 & {}^A y_A^1 & {}^A z_A^1 \end{bmatrix}$$

$$= R_z(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_z(\theta)$$

## COMPOSIZIONE DI TRASFORMAZIONI



Conosci le metri  $B^T_C$  e  $A^T_B$ . Mi propone

ogni una volta di descrivere il punto P

rispetto alle Terre A.

Riscola per gradi: dopo averlo

descritto rispetto alle Terre B.

$$B_P = B^T_C c_P$$

A questo punto il passaggio seguente è banale. Infatti:

$$A_P = B^T_B B_P = B^T_B B^T_C c_P$$

quella parte evidenziate un atomo, è una metria che mi permette di descrivere la Terra e

rispetto alle Terre A. Allora passano insieme con  $C^T_A$ .

Dunque ottengo che:

$$C^T_A = A^T_B B^T_C$$

In generale per ottenere la composizione di metri di trasformazione otieni  $C^T_E$ :

$$E^T = B^T C^T D^T E^T \quad \text{come sempre si è generate le catene per molla e pedale.}$$

Verifichiamo se effettivamente la  $E^T$  è una metria di trasformazione

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_R & A_P \\ \hline B & B_{BOR} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} B_R & B_P \\ \hline C & C_{COR} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \overset{\text{grado}}{\overbrace{A_R B_R}} & \overset{\text{grado}}{\overbrace{A_P C_{COR}}} \\ \hline \overset{\text{grado}}{\overbrace{B_R C_{COR}}} & \overset{\text{grado}}{\overbrace{A_R B_P + A_P B_{BOR}}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Abbiamo ottenuto ancora la struttura di una matrice di trasformazione omogenea.

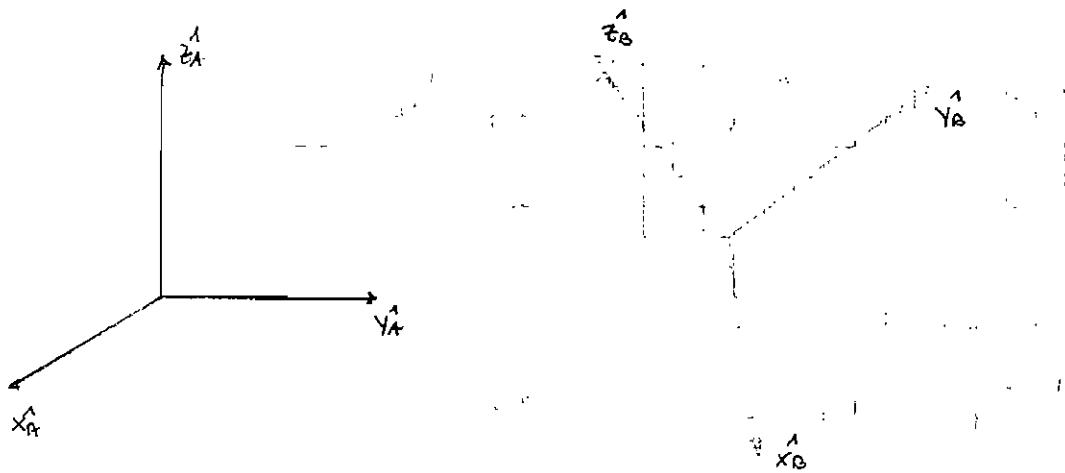
Non solo:

- abbiamo scoperto che anche la matrice di rotazione si possono comporre, ottenendo ancora una matrice di rotazione. (Termino ④)
- il termine ② deve essere pari a  ${}^A P_{QR}$  cioè deve fornire la direzione dell'asse delle ferme e rispetto ad  $A$ .

Effettivamente sommando i due vettori evidenziati in rosso otengo la definizione.

In somma di questi vettori è stata possibile in punto le vettore  ${}^B P_{QR}$  è stato riconosciuto nella matrice ricevuta rispetto alle Terme  $A$ .

#### ► PROBLEMA DELL'INVERSIONE DELLA TRASFORMAZIONE



Supponiamo di conoscere la matrice  $\begin{matrix} {}^A T \\ {}^B T \end{matrix} = \begin{bmatrix} {}^A R & {}^A P_{QR} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e supponiamo di voler

calcolare la matrice  $\begin{matrix} {}^B T \\ {}^A T \end{matrix}$

Per definizione questo sarebbe del tipo  $\begin{matrix} {}^B T \\ {}^A T \end{matrix} = \begin{bmatrix} {}^B R & {}^B P_{QR} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} {}^B T \\ {}^A T \end{matrix} = \begin{bmatrix} {}^B R & {}^B P_{QR} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo di eseguire il prodotto

$$\begin{matrix} {}^A T \\ {}^B T \end{matrix} \cdot \begin{matrix} {}^B T \\ {}^A T \end{matrix} = \begin{matrix} {}^A T \\ {}^A T \end{matrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

Moltiplico a destra e a sinistra per  $(\begin{matrix} {}^A T \\ {}^B T \end{matrix})^{-1}$  ottenendo:

$$\begin{matrix} {}^B T \\ {}^A T \end{matrix} = (\begin{matrix} {}^A T \\ {}^B T \end{matrix})^{-1} I_4 = (\begin{matrix} {}^A T \\ {}^B T \end{matrix})^{-1}$$

Allora questo significa che la metrice dei record è l'inverso di quella delle funzionalità. Le metriche di trasformazione non sono automatiche proprie (come invece le metriche di rotazione) e quindi l'inverso non è formalmente la trasposta.

Tuttavia la metrice di trasformazione hanno all'interno una struttura di me realtà e compito del calcolo dell'inverso.

$$\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_R^T & | & 1 \\ B_P & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Infatti:  $\frac{B}{A}^T \frac{A}{P}_{BOR} = \frac{B}{P}_{BOR} = 0$ . Eppure lo telefono:

$$\begin{bmatrix} B_R & B_P \\ A_R & A_P \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_P \\ P_{BOR} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_R A_P_{BOR} + B_P_{AOP} \\ A_R A_P_{BOR} + B_P_{AOP} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Allora abbiamo ottenuto che:

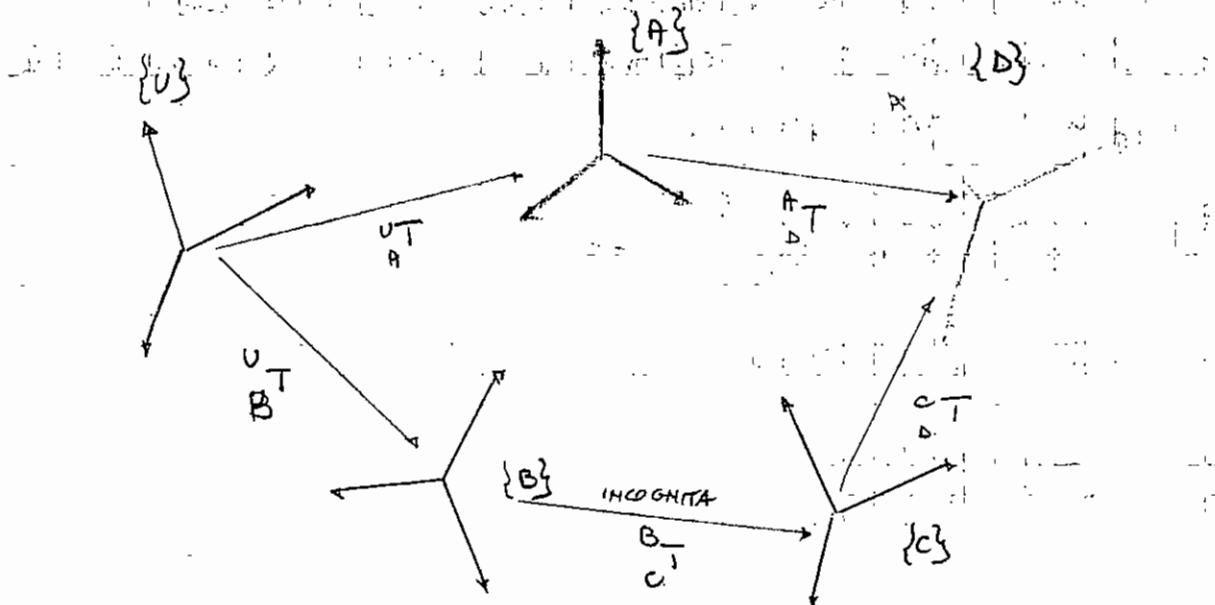
$$\frac{B}{A} R A_P_{BOR} + B_P_{AOP} = 0 \text{ da cui ottieniamo che}$$

$$\boxed{\frac{B}{A} P_{AOP} = -\frac{B}{A} R A_P_{BOR} = -\frac{A_R^T A_P}{B} P_{BOR}} \quad (1)$$

Tutto quello che compare nella nuova metrice sono elementi ricavabili dalla metrice nota.

Notiamo che nel momento in cui vi è una trasportazione la catena degli indici si interrompe. Tali indici abbiano l'interruzione della catena in presenza di inverse.

## EQUAZIONI DI TRASFORMAZIONE



Si voglie determinare la matrice  $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^T$  essendo note le matrici di trasformazione indicate.  
Altre scuole e due sistemi possibili otteriamo da:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u \\ A \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A \\ d \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u \\ B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}^T$$

Allora dove vedere l'ugualanza

$$\boxed{\begin{pmatrix} u \\ A \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A \\ d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u \\ B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}^T}$$

Una equazione di trasformazione è utile nel momento in cui sono note tutte le trasformazioni  
tranne una - Ad esempio:

$$\left(\begin{pmatrix} u \\ B \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} u \\ B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}^T = \left(\begin{pmatrix} u \\ B \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} u \\ A \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A \\ d \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} u \\ B \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} u \\ A \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A \\ d \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}\right)^{-1} \quad \text{di cui}$$

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}^T = \left(\begin{pmatrix} u \\ B \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} u \\ A \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A \\ d \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

Esiste un modo più semplice per ottenere le matrici di Trasformazione Compattate incognite

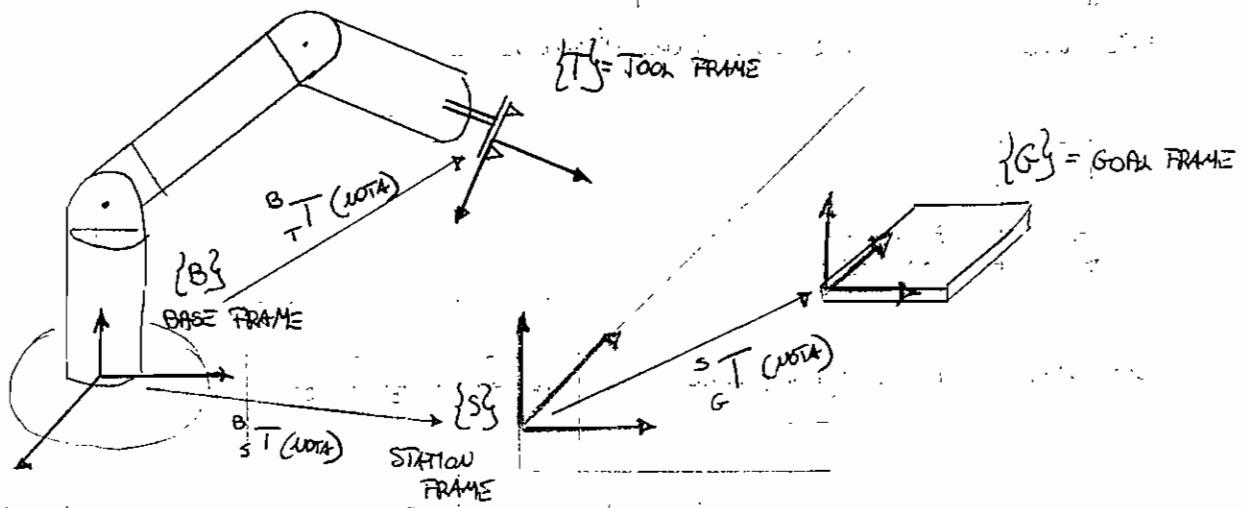
Porto delle code delle frecce delle trasformazioni incognite e percorro tutte le trasformazioni fino alle punte. Se una trasformazione è percorsa in senso inverso alle frecce, se prendo l'inverso. Quindi:

$$\underline{\underline{C}} = \left( \underline{\underline{B}} \right)^{-1} \underline{\underline{U}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}} \left( \underline{\underline{C}} \right)^{-1} \quad \text{q.e.d.}$$

È solitamente volutamente  $\underline{\underline{A}}$  determinato:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{\underline{\underline{U}}}{\underline{\underline{B}}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}} \left( \underline{\underline{A}} \right)^{-1}$$

► Esempio di applicazione:



Tipicamente l'incognita è detta delle trasformazioni  $\underline{\underline{T}}^G$ . Questa trasformazione è importante allo scopo di ordinare a prendere l'oggetto. Allora:

$$\boxed{\underline{\underline{T}}^G = \left( \underline{\underline{T}}^S \right)^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{G}}}$$

## RAPPRESENTAZIONI MINIME DELL'ORIENTAMENTO.

Se preferire è ovviamente alla descrizione di un'intera traiettoria ad un'elica dove darebbe ottimo risultato una metrice di traiettoria.

$$R_B = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

di un traliccio, degli strumenti più semplici che servono utili nel momento in cui determinano la traiettoria del robot.

Queste semplificazioni sono possibili in quanto all'interno delle metriche di traiettoria abbiano delle informazioni a volte superflue.

Sappiamo infatti che:

$$a) \|{}^A X_B\| = 1 \quad ; \quad d) {}^A Y_B \cdot {}^A Z_B = 0$$

$$b) \|{}^A Y_B\| = 1 \quad ; \quad e) {}^A X_B \cdot {}^A Z_B = 0$$

$$c) \|{}^A Z_B\| = 1 \quad ; \quad f) {}^A Y_B \cdot {}^A X_B = 0$$

La modifica di classe di:  
colonna è unitario

I VETTORI SONO  
ORTOGONALI

Per descrivere la metrice di traiettoria bastano tre equazioni.

Questo fatto dipende dal fatto che le metriche di traiettoria sono ortonormali, proprie e come tali esistono le formule di Cayley.

Tutte le metriche ortonormali possono essere scomposte come:

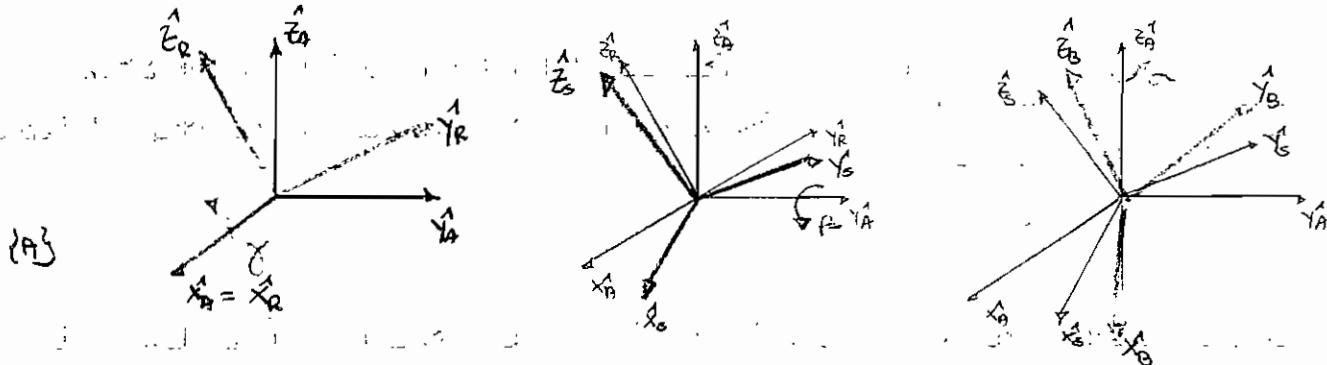
$$R_B = (I_3 - S)^{-1} (I_3 + S) \quad \text{dove } S \text{ è una matrice antisimmetrica cioè:}$$

$$S = S^T = \begin{bmatrix} 0 & -S_Z & S_Y \\ S_Z & 0 & -S_X \\ -S_Y & S_X & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiate epote conoscenze di un tracciato per scrivere qualsiasi metrice ortonormale con solo tre coefficienti cioè  $S_x, S_y, S_z$ .

► ROTAZIONI PER ANGOLI FISSI (o detta anche per assi fissi)

E' onde indicate come rotazione RPY : Roll - pitch - yaw



Facciamo compiere tre finte rotazioni alle teore  $\{A\}$  attorno all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha$ .

Abbiamo eseguito un'ulteriore rotazione attorno all'asse  $x$ .

Eseguiamo una seconda rotazione attorno all'asse  $y_A$  di un angolo pari a  $\beta$ . Eseguiamo un terzetto di lungo l'asse  $y$ .

Eseguiamo una ultima rotazione attorno all'asse  $z_A$  di un angolo pari ad  $\gamma$ . Eseguiamo una matrice lungo a-  
d qua dimostrare che le teore  $x_A, y_A, z_A$  scelti arbitrariamente mi permette di trovare un  $\alpha, \beta, \gamma$   
tale da portare le teore  $\{A\}$  e coincidere con le teore  $\{B\}$ .

Se poche di rotazioni per esse fatti puoi fare tutte le rotazioni de lo eseguito se lo riferiti sempre  
alle teore di pertinenza  $\{A\}$ .

Questo stessa risultato e' ottenibile con rotazioni attorno ad assi non consecutivi. Cioe' puoi  
potuto eseguire rotazioni attorno a  $x, y, z$ .

Il problema adattabile dato  $\alpha, \beta, \gamma$  trovare la metrice di rotazione corrispondente esce le  $R_A^B$  (Y,  $\beta, \gamma$ )

Possiamo per fare

$$\xrightarrow{R} R = R_x(\alpha)$$

$$\xrightarrow{R} R_s = \xrightarrow{R} R \xrightarrow{R} R_s = R_x(\alpha) \xrightarrow{R} R_s$$

Worltoff  
SER DI PIZZ

APPRIETTE DELL  
ROTATIONI

Ci concentriamo sulle rotazioni dei singoli vettori

$$\xrightarrow{R} R_s = [ \xrightarrow{R} x_s; \xrightarrow{R} y_s; \xrightarrow{R} z_s ] \quad \text{Applichiamo la definizione:}$$

$$\xrightarrow{R} z_A^1 = R_x(\alpha) \xrightarrow{R} z_A^1 \quad ; \quad \xrightarrow{R} z_s^1 = R_y(\beta) \xrightarrow{R} z_R^1 = R_y(\beta) R_x(\alpha) \xrightarrow{R} z_A^1$$

Allora si procede in modo analogo anche per gli altri vettori:

$${}^A X_S = R_Y(\beta) R_X(\gamma) {}^A X_A$$

$${}^A Y_S = R_Y(\beta) R_X(\gamma) {}^A Y_A$$

Allora abbiamo quelli che ci occorre per scrivere la matrice di rotazione:

$${}^S R = \begin{bmatrix} {}^A X_S & {}^A Y_S & {}^A Z_S \end{bmatrix} = R_Y(\beta) R_X(\gamma) \begin{bmatrix} {}^A X_A & {}^A Y_A & {}^A Z_A \end{bmatrix} = R_Y(\beta) R_X(\gamma)$$

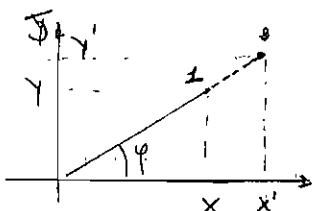
Allora alle forese ottiene da:

$${}^S R_{X,Y,C}(\gamma, \beta, \alpha) = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma)$$

Se si è soprattutto una matrice di rotazioni però si voglia ricavare quelle menzio-

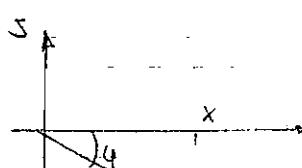
ne bisogna si usi la funzione etàni perché questi punti dovranno ricavare i segmenti di un segmento composto.

$$\text{et}\vartheta_2(y, x) = \arg(x + jy) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x \in \text{positivo} \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x \in \text{negativo} \end{cases}$$

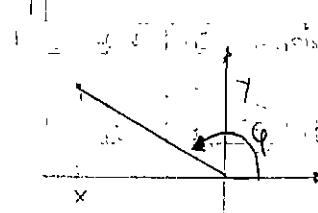


$$\text{In questo caso } \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

DEFINITA SEMPRE TRAMONTE CHE  
PER LA CONFIGURAZIONE  $(0,0), (0,0)$



$$\text{In questo caso } \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$



$$\text{In questo caso } \varphi = \arctg \frac{y}{x} + \pi$$

Ecco dunque le perette della duplice definizione delle funzione etàni.

Notiamo inoltre che:

$$\text{et}\vartheta_2(y, x) = \text{et}\vartheta_2(y, x')$$

Questo significa che due numeri complessi scelti per la rotazione danno lo stesso risultato. Notiamo in ogni caso l'operazione di scelta deve essere eseguita dei tre rotazioni. Sono delle quantità da cui scorrano.

Torniamo al nostro problema.

Ieri abbiamo ricavato che

$${}^A_B R_{XYZ}(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma) R_y(\beta) R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha - s\gamma & 0 & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\beta \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

Ora facciamo pure questo per trovare le matrici di rotazione numeriche:

$${}^A_B R_{XYZ}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Procediamo per confronto fra le due matrici.

dalle prime colonne si ottiene che:

$$\textcircled{1} \quad T_{11} = c\alpha c\beta$$

Faccio le somme  $\textcircled{4}$  e  $\textcircled{6}$  e li sommo

$$\textcircled{2} \quad T_{21} = -s\alpha c\beta$$

ottenendo:

$$T_{31} = -s\beta$$

$$T_{11}^2 + T_{21}^2 = c^2 \alpha^2 c^2 \beta^2 + s^2 \alpha^2 c^2 \beta^2 = c^2 \beta (c^2 \alpha^2 + s^2 \alpha^2) = c^2 \beta$$

$$T_{31} = -s\beta$$

Allora si ha che:

$$\begin{cases} \cos \beta = \pm \sqrt{T_{11}^2 + T_{21}^2} \\ \sin \beta = -T_{31} \end{cases}$$

a questo punto posso trovare  $\beta$  scegliendo  $\operatorname{atm}$ . Infatti si ha che

$$\beta = \operatorname{atm}(\sin \beta, \cos \beta) = \operatorname{atm}\left(-T_{31}, \pm \sqrt{T_{11}^2 + T_{21}^2}\right)$$

Notiamo immediatamente che la matrice inversa non deve mai essere la matrice semplicemente elementi due diverse possibilità di scelta: entro e tra le tre di volte di scelta di  $\alpha$  e  $\beta$  è condizione.

• consideriamo prima il caso in cui  $\begin{cases} \sin\beta = -\tau_{31} \\ \cos\beta = \sqrt{\tau_{11}^2 + \tau_{21}^2} \end{cases} \rightarrow$  allora  $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Allora esistono due  $\cos\beta > 0$  (strettamente positivo).

Andiamo in queste condizioni a ricavare il seno delle tre colonne:

$$\begin{cases} \tau_{11} = c\beta s\beta \\ \tau_{21} = s\beta c\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin 1 = \frac{\tau_{21}}{c\beta} \\ \cos 1 = \frac{\tau_{11}}{c\beta} \end{cases} \rightarrow d = \operatorname{atm}^2\left(\frac{\tau_{21}}{c\beta}, \frac{\tau_{11}}{c\beta}\right) = \operatorname{atm}^2(\tau_{21}, \tau_{11})$$

↓  
casellino è tutto di una quantità positiva non nulla.

Infine andiamo a ricavare l'angolo  $\gamma$ , l'ultimo che abbiamo determinato.

Presto volte effettuano il confronto con l'ultima riga:

$$\begin{cases} \tau_{32} = c\beta s\gamma \\ \tau_{33} = c\beta c\gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin \gamma = \frac{\tau_{32}}{c\beta} \\ \cos \gamma = \frac{\tau_{33}}{c\beta} \end{cases} \rightarrow \gamma = \operatorname{atm}^2\left(\frac{\tau_{32}}{c\beta}, \frac{\tau_{33}}{c\beta}\right) = \operatorname{atm}^2(\tau_{32}, \tau_{33})$$

• consideriamo ora il caso in cui  $\begin{cases} \sin\beta = -\tau_{31} \\ \cos\beta = -\sqrt{\tau_{11}^2 + \tau_{21}^2} \end{cases} \rightarrow$  allora  $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

Allora esistono due  $\cos\beta < 0$  (strettamente negativo).

Come prima calcoliamo gli angoli:

$$\begin{cases} \tau_{11} = c\beta c\beta \\ \tau_{21} = s\beta c\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin 1 = \frac{\tau_{21}}{c\beta} \\ \cos 1 = \frac{\tau_{11}}{c\beta} \end{cases} \rightarrow d = \operatorname{atm}^2\left(\frac{\tau_{21}}{c\beta}, \frac{\tau_{11}}{c\beta}\right) = \operatorname{atm}^2(-\tau_{21}, -\tau_{11})$$

$$\begin{cases} \tau_{32} = c\beta s\gamma \\ \tau_{33} = c\beta c\gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin \gamma = \frac{\tau_{32}}{c\beta} \\ \cos \gamma = \frac{\tau_{33}}{c\beta} \end{cases} \rightarrow \gamma = \operatorname{atm}^2\left(\frac{\tau_{32}}{c\beta}, \frac{\tau_{33}}{c\beta}\right) = \operatorname{atm}^2(-\tau_{32}, -\tau_{33})$$

• investighiamo i casi particolari: quando il seno dell'angolo  $\beta$  va a zero.

Torniamo alle definizioni. Qui vediamo cose accade alle reti di rettore nel caso degenero:

$$R_{xyz}(d, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\tau_{12}}{c\beta} - \frac{\tau_{21}}{s\beta} & \frac{\tau_{13}}{c\beta} + \frac{\tau_{21}}{s\beta} \\ 0 & \frac{\tau_{22}}{s\beta} + \frac{\tau_{12}}{c\beta} & \frac{\tau_{32}}{s\beta} - \frac{\tau_{23}}{c\beta} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \tau_{12} = -\tau_{23} \\ \tau_{22} = \tau_{13} \end{cases}$$

STRUTTURA DEGENERO

Ricaviamo gli angoli mancanti sottraendo le due colonne:

$$\begin{cases} T_{12} = \cos\alpha - \sin\beta \cos\gamma \\ T_{22} = \sin\alpha + \cos\beta \cos\gamma \end{cases} \rightarrow (\alpha, \beta) = \text{atome}(T_{12}, T_{22})$$

Non posso ricavare informazioni su  $\gamma$  perché liberasente  $\gamma$  è grande attorno:

$\left\{ \begin{array}{l} d = \text{libero} \\ \beta = \frac{\pi}{2} \\ \gamma = \text{atome}(T_{12}, T_{22}) + d \end{array} \right.$
--

L'ultimo caso che non ottengo ormai considerato è  $\beta = -\frac{\pi}{2}$ . Allora

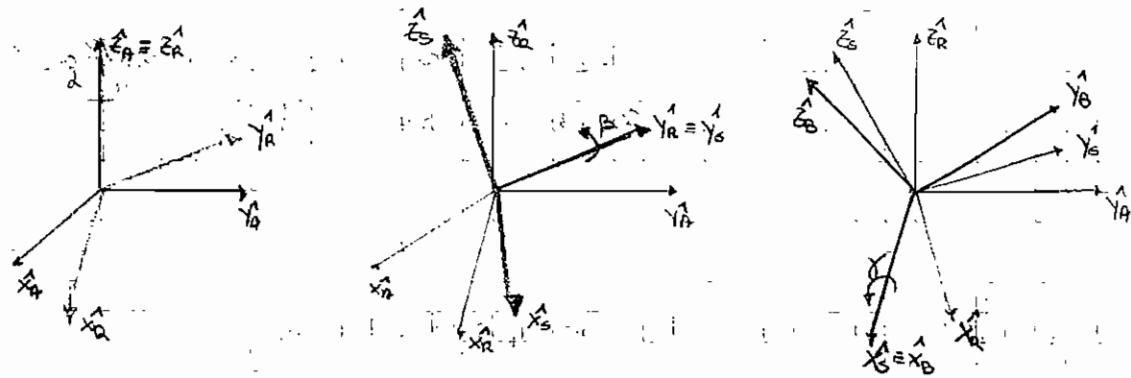
$$B^T R_{XYZ}(\alpha, \beta, d) = \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora come prima ho ricavato che

$\left\{ \begin{array}{l} d = \text{libero} \\ \beta = -\frac{\pi}{2} \\ \alpha = -\alpha + \text{atome}(-T_{12}, T_{22}) \end{array} \right.$
--

## ► NOTAZIONE MINIMA DEGLI ASSI MOBILI

A titolo di esempio consideriamo le rotazioni  $\bar{z}, \bar{y}, \bar{x}$  - (sono ordinate come nell'altra notazione delle rotazioni consecutive attorno ad assi fissi)



Vogliano ricordare  ${}^A_R {}^B zyx (\alpha, \beta, \gamma)$  cioè la matrice di rotazione minima da destra del teore B rispetto alla teore A. Per ricordarne le regole delle rotazioni rispetto ad assi mobili, mettiamo un po' di sequenze delle rotazioni:

$${}^A_R {}^B zyx (\alpha, \beta, \gamma) = {}^A_R {}^R_S {}^S_R {}^B R = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_x(\gamma)$$

In questo caso le prodotti delle matrici seguono l'ordine delle rotazioni eseguite.

Note che vale questo teorema:

TEOREMA: Le rotazioni vede si fanno ad ogni passo partendo allo stesso orientamento fisso delle stesse tre rotazioni, cioè in ordine inverso rispetto ad ogni mobile.

Quando questo tipo di tecniche per le notazioni minime sono possibili?

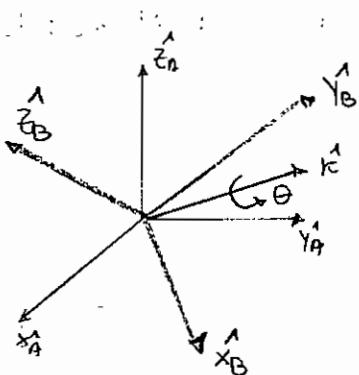
$$\begin{array}{ccccccc} \cdot xy\bar{z} & \cdot x\bar{z}y & \cdot \bar{y}xy & \cdot x\bar{z}x & \cdot y\bar{x}\bar{z} & \cdot \bar{y}zx & \cdot \bar{y}\bar{x}y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot \bar{y}\bar{z}y & \cdot \bar{z}xy & \cdot \bar{z}\bar{y}x & \cdot \bar{z}\bar{x}z & \cdot \bar{z}yz & \cdot \bar{z}\bar{y}\bar{z} & \end{array}$$

Hanno se possibile 3 rotazioni e quindi esistono 12 notazioni minime per tecniche.

In tutte ogni matrice di rotazione di una tecnica sarà essa doppia e quindi dovranno in totale 12 matrici di rotazione necessarie esposte in questo finale.

## ► NOTAZIONE MINIMA A RAPPRESENTAZIONE FISSE ANGOLI



Sia  $\vec{K}$  un opportuno vettore identificato da un vertice,  $\vec{B}$  è  
punto ruotato attorno a questo vettore le tesse  $\{A\}$  di un angolo  $\theta$ .

Affatto le informazioni da cui servono per identificare l'orientamento delle  
tessse  $\{B\}$  sono i valori  $(\vec{K}, \theta)$   
INTOLO CON SEGNO

$${}^A\vec{k} = \begin{bmatrix} {}^A k_x \\ {}^A k_y \\ {}^A k_z \end{bmatrix} \quad \text{essere se ne de deriva la tessa rispetto alle tesse A.}$$

Note che  $\sqrt{{}^A k_x^2 + {}^A k_y^2 + {}^A k_z^2} = 1$  poiché  ${}^A\vec{k}$  è un vettore.

$${}^A_B R_k(\theta) = \begin{bmatrix} k_x^2 \sigma\theta + c\theta & k_x k_y \sigma\theta - k_z s\theta & k_x k_z \sigma\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y \sigma\theta + k_z s\theta & k_y^2 \sigma\theta + c\theta & k_y k_z \sigma\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z \sigma\theta - k_y s\theta & k_y k_z \sigma\theta + k_x s\theta & k_z^2 \sigma\theta + c\theta \end{bmatrix} \quad \text{dove } \sigma\theta = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$

Affatto vediamo se posso apprezzare cosa dà le matrice di rotazione ricavata la forza minore.

mi consentono solo elementi delle diagonale principale per ricavare come puoi elementi l'angolo  $\theta$ .

$$\begin{cases} T_{11} = k_x^2 \sigma\theta + c\theta \\ T_{22} = k_y^2 \sigma\theta + c\theta \\ T_{33} = k_z^2 \sigma\theta + c\theta \end{cases}$$

$$T_{11} + T_{22} + T_{33} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \sigma\theta + 3c\theta = \sigma\theta + 3c\theta = 1 - \cos\theta + 3\cos\theta = 1 + 2\cos\theta$$

$\Rightarrow 1$  poiché  $\vec{k}$  è un vettore

$$\text{da cui si ricava che } \cos\theta = \frac{T_{11} + T_{22} + T_{33} - 1}{2} \rightarrow \boxed{\theta = \pm \arccos \frac{T_{11} + T_{22} + T_{33} - 1}{2}}$$

Ancora puoi notare minore ommette due distinte soluzioni dell'inverzio-

Per ricevere le  $k$  risorse:

$$\begin{cases} T_{12} = K_X K_Y \theta + K_Z S \theta \\ T_{12} = K_X K_Y \theta - K_Z S \theta \end{cases}$$

$$T_{12} = T_{12} = 2 K_Z S \theta \quad \text{da cui}$$

$$K_Z = \frac{T_{12} - T_{12}}{2 S \theta}$$

Analogamente ricevo a ricevere con quantità costante da:

$$K_X = \frac{T_{23} - T_{13}}{2 S \theta}$$

$$K_Y = \frac{T_{13} - T_{21}}{2 S \theta}$$

di cui soluziose sarà  $(\theta, k)$ , l'altra possibile sarà  $(-\theta, -k)$  quindi le due soluzioni sono tra loro invertite.

osserviamo cosa accade nel caso singolare cioè con  $\theta = K_Z$  con  $K \in [0, 1]$

a)  $\theta = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 \\ \cos \theta = 1 \end{cases}$  dunque la matrice di distorsione si modifica nel seguente modo

$$A_Ric(\theta) = I$$

è ovvio perché non c'è una distorsione e quindi le tasse  $\{B\}$  in realtà coincide con le tasse  $\{A\}$ .

b)  $\theta = \pi \rightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 \\ \cos \theta = -1 \end{cases}$

$$A_Ric(\theta) = \begin{bmatrix} 2K_X^2 - 1 & 2K_X K_Y & 2K_X K_Z \\ 2K_X K_Y & 2K_Y^2 - 1 & 2K_Y K_Z \\ 2K_X K_Z & 2K_Y K_Z & 2K_Z^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$K_X = \pm \sqrt{\frac{1+K_Z}{2}}$$

$$K_Y = \pm \sqrt{\frac{1-K_Z}{2}}$$

$$K_Z = \pm \sqrt{\frac{1+K_X}{2}}$$

Abbiamo problema di condizionamento numerico non solo quando  $\theta = 0$  ma anche quando  $\theta$  è presso al di sopra nullo.

## RAPPRESENTAZIONE MINIMA PARAMETRI DI EULERO

Dato che delle rotazioni ass-angolo ci serve ad ottenere la matrice di rotazione.

I parametri di Euler sono definiti come:

$$\epsilon_1 = k_x \sin \frac{\theta}{2}; \quad \epsilon_2 = k_y \sin \frac{\theta}{2}; \quad \epsilon_3 = k_z \sin \frac{\theta}{2}; \quad \epsilon_q = \cos \frac{\theta}{2}$$

Tipicamente queste quantità sono inserite in un unico vettore detto

QUATERNIONE UNITARIO (unitario in quanto il modulo del vettore è unitario)

$$\widehat{E} := [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_q]^T$$

dalla matrice di rotazione ass-angolo si ricava ad ottenere la matrice di rotazione.

$$R_E = \begin{bmatrix} 1 - 2\epsilon_2^2 - 2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon_3\epsilon_q) & 2(\epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_q) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_3\epsilon_q) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_2\epsilon_3 - \epsilon_1\epsilon_q) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_q) & 2(\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_q) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_2^2 \end{bmatrix}$$

La soluzione del problema inverso è esattamente le stesse rule per la rappresentazione ass-angolo.

• RICAVARE  $\epsilon_q$ :

Sommiamo i termini lungo l'asse principale:

$$I_{11} + I_{22} + I_{33} = 3 - \zeta \epsilon_1^2 - \zeta \epsilon_2^2 - \zeta \epsilon_3^2 = 4(1 - \underbrace{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 - \epsilon_3^2}_{\epsilon_q^2}) - 1 = 4\epsilon_q^2 - 1$$

$\epsilon_q^2 \rightarrow$  POICHÉ IL QUATERNIONE È UNITARIO

$$\text{Allora si ha che: } \epsilon_q^2 = \frac{1 + I_{11} + I_{22} + I_{33}}{4}$$

$$\epsilon_q = \pm \sqrt{\frac{1 + I_{11} + I_{22} + I_{33}}{4}}$$

Pertanto se  $\theta$  della rotazione appartiene all'intervalllo  $[-\theta, \theta]$ . Se vogliamo che  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . In questo caso di fatto  $\epsilon_q$  è sempre positivo. Allora la soluzione reale di  $\epsilon_q$  deve essere scelta.

La soluzione del problema inverso sarà che allora quale viene?

- RICAVARE  $\epsilon_1$ :

$$T_{32} - T_{23} = 4 \epsilon_1 E_q \quad \text{da cui} \quad \epsilon_1 = \frac{(T_{32} - T_{23})}{4 E_q}$$

Analogamente riesce a ricavare gli altri parametri cioè:

$$\epsilon_2 = \frac{T_{13} - T_{31}}{4 E_q}$$

$$\epsilon_3 = \frac{T_{21} - T_{12}}{4 E_q}$$

Anche in questo caso si può verificare una situazione degenera, cioè quando  $E_q$  va a zero.

Questo avviene per  $\Theta = \pm 45^\circ$

Se è soddisfatto un sistema di soluzioni del sen presenta momentaneamente questo problema.

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \text{sgn}(T_{32} - T_{23}) \sqrt{T_{14} - T_{22} - T_{33} + 1} \cdot \frac{1}{2} \\ \epsilon_2 = \text{sgn}(T_{13} - T_{31}) \sqrt{T_{22} - T_{33} - T_{11} + 1} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{dove } \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \\ \epsilon_3 = \text{sgn}(T_{21} - T_{12}) \sqrt{T_{33} - T_{11} - T_{22} + 1} \cdot \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

## CINEMATICA:

Vogliamo calcolare posizione e orientamento dell'end-effector nello spazio e vocabolo di gergo.

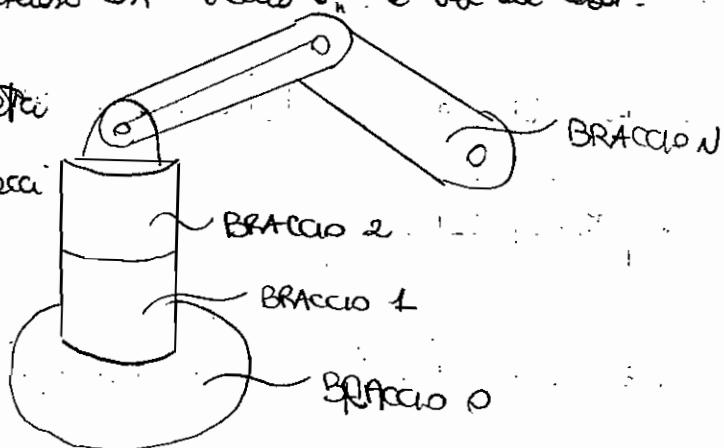
Dobbiamo fissare apposite tecniche al nostro maneggiatore.

Le tecniche che utilizziamo è quella di DENAVIT-HARTMANN. (vediamo le note su come modifichiamo)

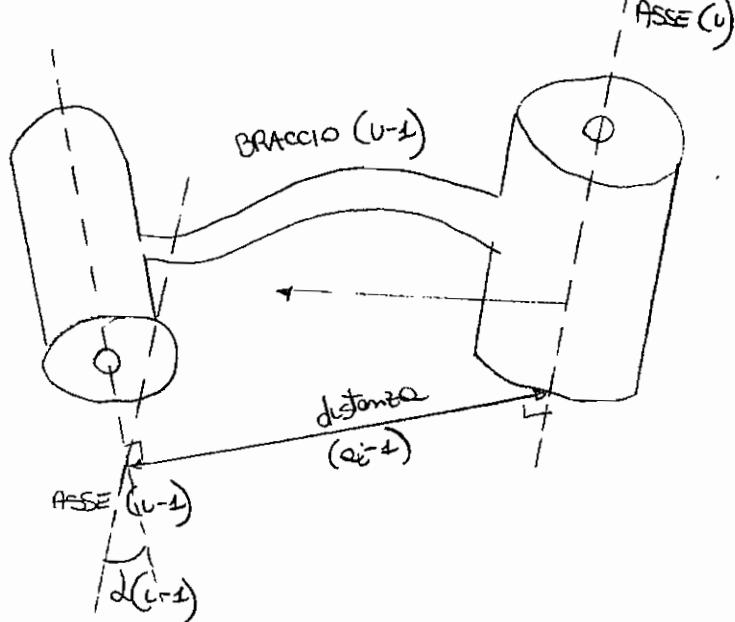
Le tecniche che vediamo riguardano i punti base studiati ma non è difficile trattare anche figure più complesse come composizioni di più base.

Convenzionalmente indicheremo con "Braccio 0" la base del robot.

Dobbiamo dare dei parametri che permettano di definire i singoli bracci (geometrici) e cose presti che accoppiati gli altri



### ► PARAMETRI DI BRACCIO



Def: un braccio è un corpo capace di definire le relazioni fra due estremità del maneggiatore.

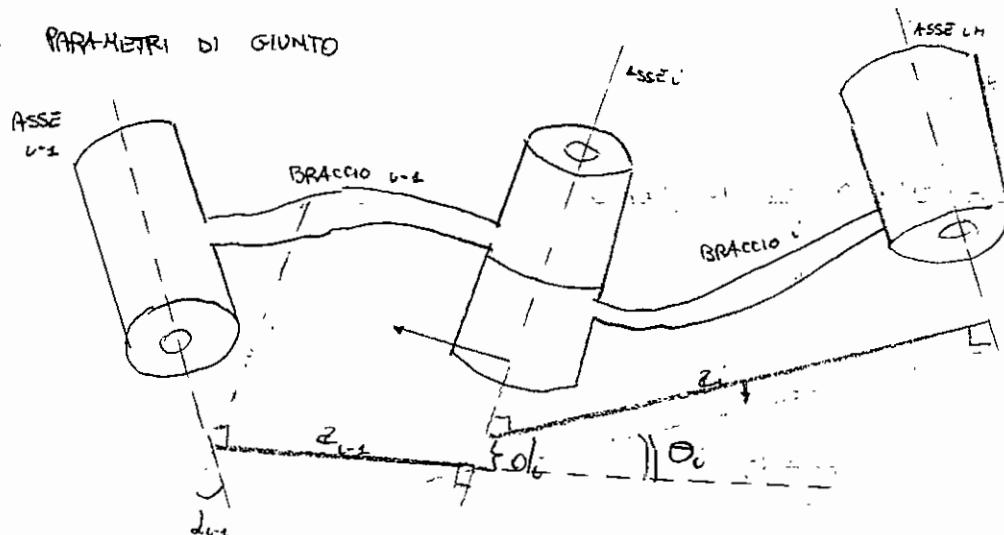
Il braccio che è geometrico fra due estremità.

Supponiamo che il braccio sia rigido fisso e indeformabile. Tracciamo gli assi di punto. Anche gli assi di giunto dovranno essere numerati come mostrato in figura.

con due giri permette verso a destra e l'accompagno:

- 1) distanza fra i due assi (il segmento perpendicolare ad entrambi gli assi di deflessione fra gli assi). Le chiamo (c<sub>1</sub>-1). [LUNGHEZZA DI BRACCIO]
- 2) indicazione l'angolo che esiste fra i due assi. Trovo l'asse i parallelo a se stesso - l'angolo formato da chiamo d<sub>1</sub>-1. [TORSIONE DI BRACCIO]

#### ► PARAMETRI DI GIUNTO



- 1) ricavano tutte le distanze fra gli assi

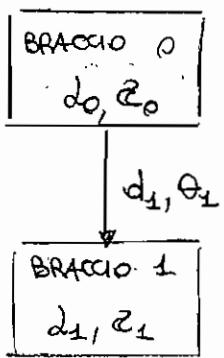
I parametri di giro volevate dire:

- 2) la distanza che esiste lungo l'asse fra le due distanze [OFFSET DI GIUNTO]
- 3) l'angolo che c'è fra le due distanze [ANGOLI DI GIUNTO]

I parametri di bilancio, perché puoi e fissa, sono dei parametri statici per il maneggiamento.

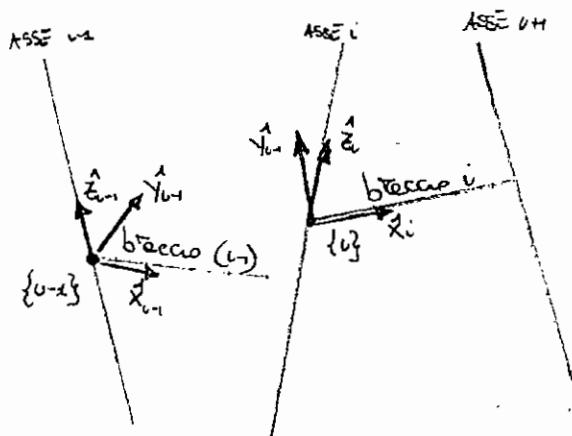
I parametri di giunto non è vero che sono sempre fissi. Ad esempio considerando da punto a punto il parametri "angoli di giunto", puoi cambiare perché se bilancio i c'è in grado di ruotare. Nel punto geometrico c'è costante l'angolo di giunto, mentre puoi rotolare il parametri "offset di giunto".

Alle fine si struttura sotto del tipo:

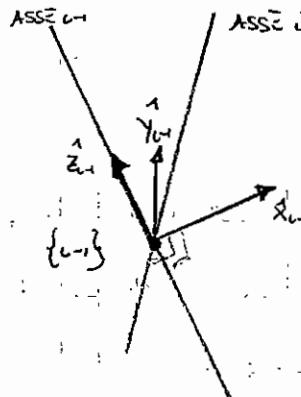


► METODO DI FISSAGGIO DELLE TERNE

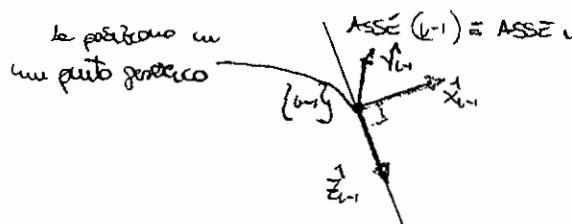
- 3) Segnare un modo esplicito tutte gli assi di punto



Ci sono situazioni in cui gli assi di due grunite si intersecano in un punto. In questo caso



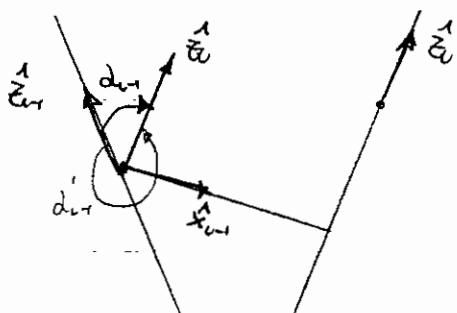
oppure - due assi coincidono perfettamente



- 2) tracciano tutte le distanze (colore blu)
- 3) metto una linea per ogni borsa. L'origine delle linee del borsa è il punto nell'intersezione fra le distanze  $\hat{x}_m$  e  $\hat{z}_m$  (colore rosso)
- 4) il verso è irruce disposto:
- lungo la distanza fra gli assi nel caso teorico. (colore blu)
  - estendendo ad entrambi gli assi nel caso eccezionale 1. (colore blu)
- Se verso non è scelto un modo arbitrario.
- è preciso: nell'ultimo caso ne sempre estende l'ipotesi all'asse.
- 5) il verso è irruce disposto:
- lungo l'asse  $m$  con verso scelto arbitrariamente
  - oncare lungo l'asse opposto.
  - Il giro l'asse verso fronte
- 6) il verso  $m$  è fissato usando le regole della mano destra.

ai punti punto possono avere distanze i segni di tutti i parametri di borsa e di punto:

- $d_{mz} = \text{distanza fra } \hat{z}_m \text{ e } \hat{z}_i \text{ misurata su } \hat{x}_m$ . Visto che scelte fette rispetto al punto parametro è sempre positivo.
- $d_{mi} = \text{angolo fra } \hat{z}_m \text{ e } \hat{z}_i \text{ misurato su } \hat{x}_m$ . Il segno dell'angolo è determinato ancora con le regole della mano destra.



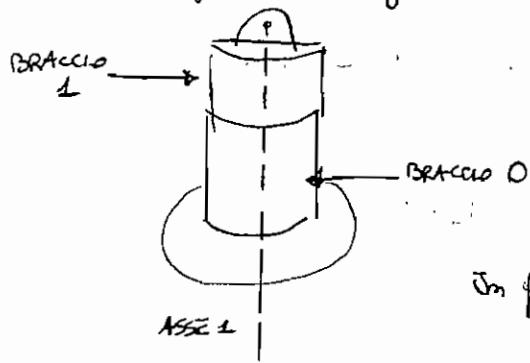
È ugualmente possibile  $d_{mi}$  come l'angolo determinato da  $d_{mi}$

- $d_i = \text{distanza fra } \hat{x}_m \text{ e } \hat{x}_i \text{ misurata su } \hat{z}_i$ . Il segno è determinato se verso determinato da  $\hat{z}_i$ . Se lo spostamento è concorde con il verso di  $\hat{z}_i$  perciò si ottiene positivo.
- $d_i = \text{angolo fra } \hat{x}_m \text{ e } \hat{x}_i \text{ misurato su } \hat{z}_i$ . Il segno è determinato oncare  $\hat{z}_i$  con le regole della mano destra e considerando l'angolo con l'asse su  $\hat{x}_m$  e stessa su  $\hat{x}_i$ .

I parametri fissi per una bilancia devono essere riportate con il segno corretto. Viceversa il parametro rotabile che fissa per ogni bilancia un solo valore indicato con solo un singolo, ma variabile.

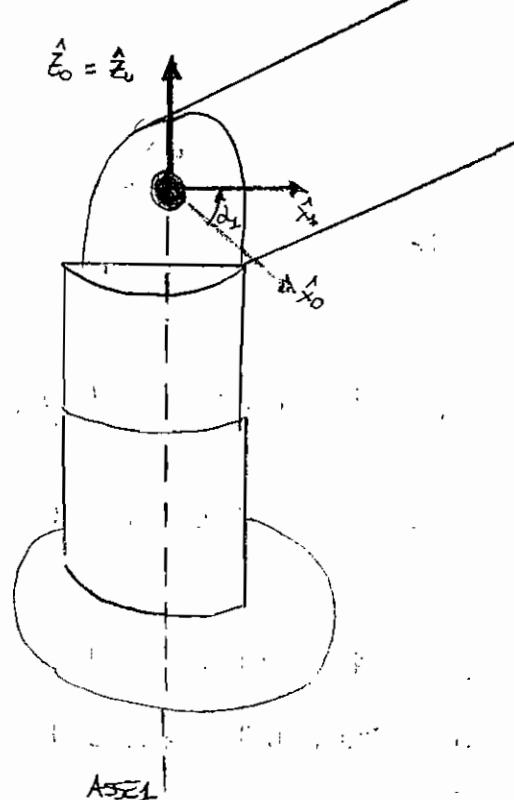
### La TERRA ZERO

Dobbiamo definire come scegliere le terre opposte al Terra 0 cioè quelle alle quali non appartiene.



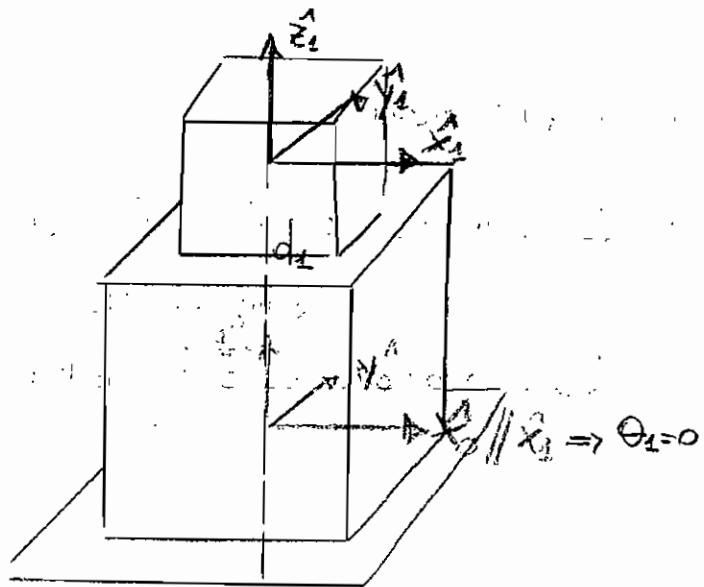
Il Terra 0 dovrebbe definire le due terre per l'asse 1 e l'asse 0. Possiamo scegliere quest'ultimo in modo arbitrario. Per convenzione prendiamo  $\Theta_0 = \Theta_1 = 0$ .

$$\text{In questo modo} \quad \begin{cases} \Theta_0 = 0 \\ \Theta_1 = 0 \end{cases}$$



Le scelte più fonda è quella di fissare l'origine delle terre 0 nell'origine delle terre 1.

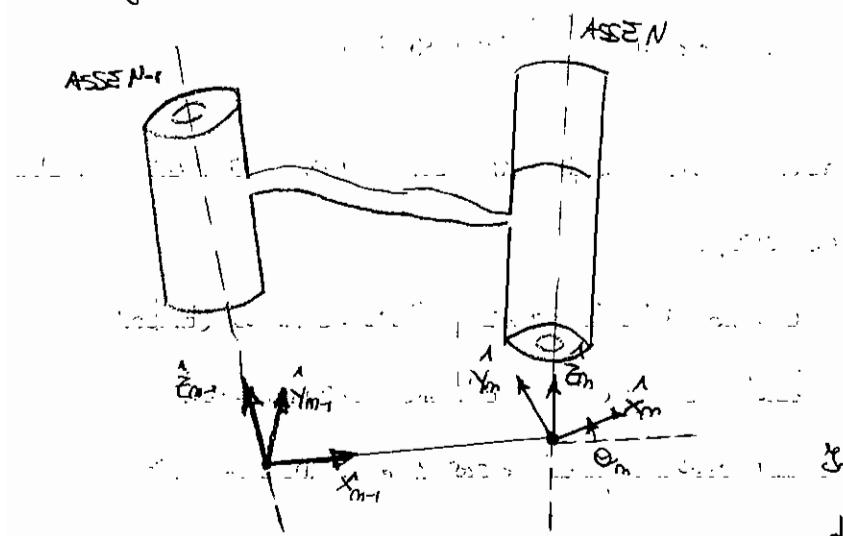
$$\text{In questo modo} \quad \begin{cases} d_1 = 0 \\ \Theta_1 = \text{variabile} \end{cases}$$



$$\text{ASSE } 1 \equiv \text{ASSE } 0$$

## ► L'ULTIMA TERRA

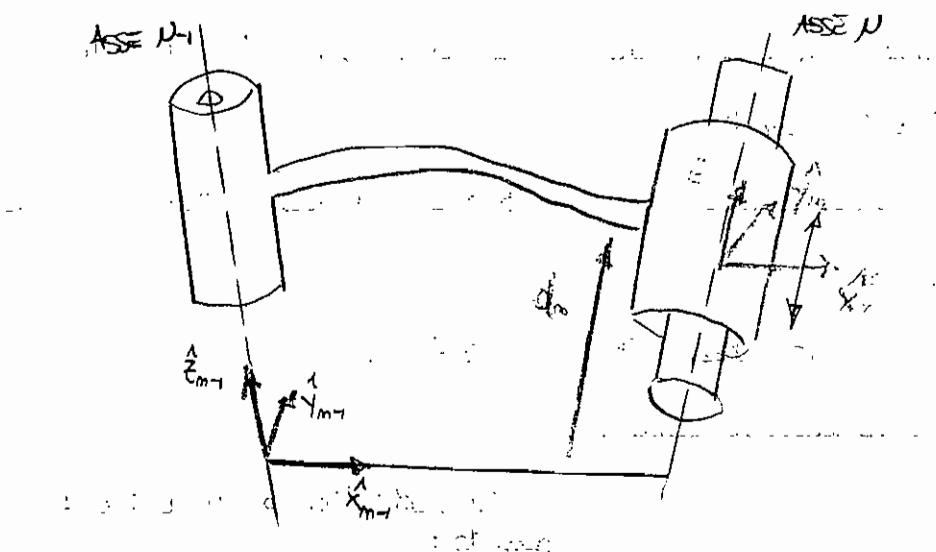
### c) giunto rotoidale



L'origine delle teoreme merse può essere posta in modo arbitrario sull'asse. Si potrebbe fissare quella del beccu oppure, scelta convenientemente, è fissa l'origine nel punto in tot.

In questo modo mettiamo a zero la distanza  $d_m = 0$

### b) giunto giretico

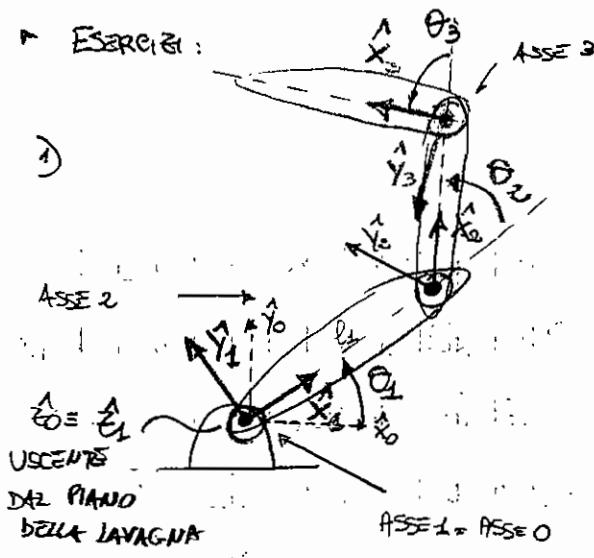


In questo caso possiamo rendere a zero l'angolo di giretto.

Impossibile è la rotazione di giretto sulla guia non posso fare nulla.

$$\theta_m = 0 \Rightarrow x_{m-1} \parallel x_m$$

Esercizi:



Robot planante con tre gradi di libertà determinate da tre giretti rotazionali (sotto RRR o 3R)  
INDICA LA SEQUENZA DEI GRADI DI LIBERTÀ

Identifichiamo tutte le axe. Sono tutte e tre perpendicolari  
alla lavagna.

Inseriamo tutte le terne perpendicolari alle tre axe.  
Inserendo le prime e l'ultima successivamente.

L'origine delle Terne 1 possono rettificare dove vogliono perché l'axe 1 e l'axe 2 sono fra loro  
paralleli.

Lo stesso discorso può essere fatto per l'origine delle Terne 2. Mantengono ancora uscente il verso  
di  $\theta_3$  perché in questo modo non è vero il perimetro orologio.

Mettiamo ora a posto le Terne finali: rimanendo sul passo con cui avevamo preceduto. Come sarebbe caso  
verso di  $x_3$  quello delle terne del braccio considerato

Per la definizione delle Terne  $\theta_3$  si tratta di stare sempre delle Terne 1 e 2 rispetto al verso lungo la  
direzione di rotazione del manipolatore.

Segniamo ora tutte le rotazioni di giretti: secondo le angle  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ .

Inseriamo in un tabella tutte le rotazioni di giretti:

i	$d_{i-1}$	$\alpha_m$	$\phi_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	0	$+l_2$	0	$\theta_2$
3	0	$+l_3$	0	$\theta_3$

oltre  
oltre  
oltre o con  
l'asse 1

Le 3 sono  
tutte oltre  
edrette nello  
stesso verso

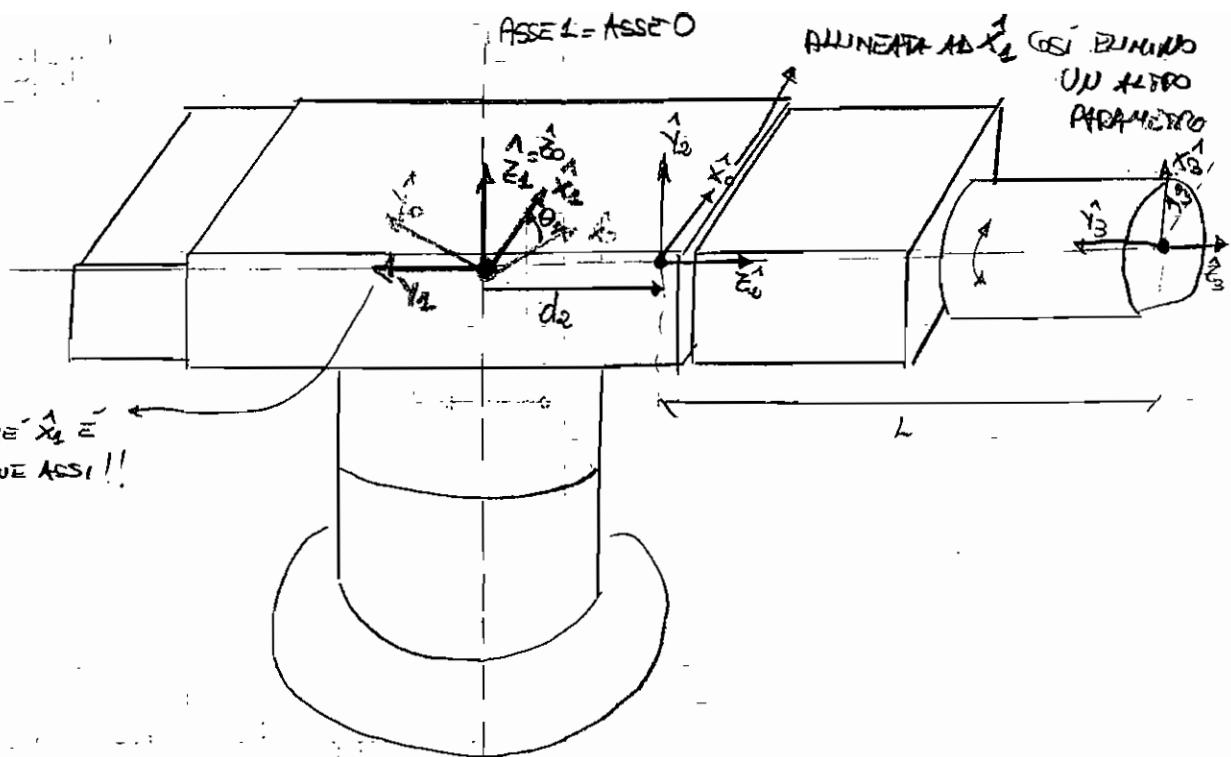
Le origini delle Terne 0 e delle Terne 1  
corrispondono.

escludo rotazioni di giretti  
non specificati ma se segno

Le distanze fra le + montate sulle 3  
sono nulle perché fanno parte del piano.

2) Robot RPR

ASSE 3 = ASSE 2

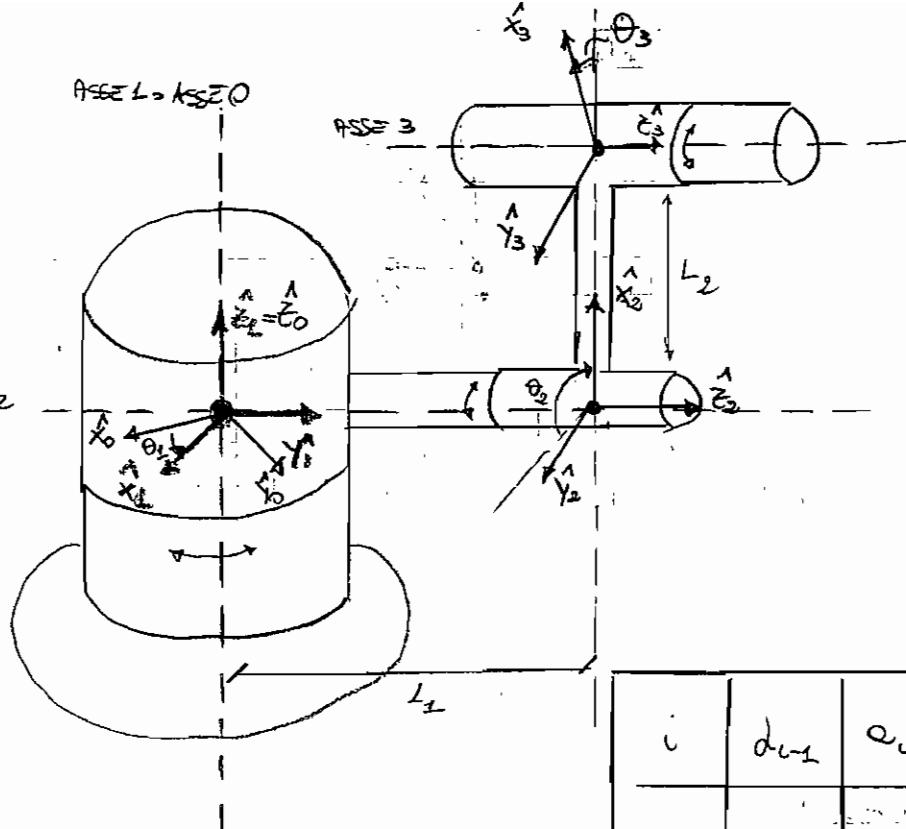


Costanze e tabelle corrispondenze:

$i$	$d_{in}$	$\alpha_{in}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$\frac{\pi}{2}$	0	$d_2$	0
3	0	0	1	$\theta_3$

I vertici  
e le  
di intersezione

3)

Non plante. R.R. non  
plante.

i	$d_{i-1}$	$a_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$-\frac{L_1}{2}$	0	$L_1$	$\theta_2$
3	0	$L_2$	0	$\theta_3$

le informazioni relative a tutte le rotazioni di punto e informano dell'interno di un vettore effetto:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \text{dove } q_i \Rightarrow \theta_i \text{ se il punto è stazionario} \\ q_i \Rightarrow d_i \text{ se il punto è permutato}$$

Sappiamo che  $\bar{q} \in \mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^n$ . È un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  perché in generale le rotazioni di punto sono vincolate a tenere d'intorno di un certo vettore

$$\mathcal{H} = [q_1^-, q_1^+] \times [q_2^-, q_2^+] \times [-] \times \dots \times [q_n^-, q_n^+]$$

$\mathcal{H}$  prende il nome di spazio dei GRUNI ed è lo spazio d'intorno del quale si muoverà il punto  $q$ .

Per descrivere un manipolatore potremo definire solamente elementi base e il posizionamento dell'oggetto tenente.

descrizione delle posizioni delle teste n rispetto a quelle di base

$$\vec{x} \in \begin{bmatrix} \vec{p} \\ \vec{\phi} \end{bmatrix} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^6$$

descrizione dell'orientamento espresso in notazione messina.

Il sottospazio  $\mathcal{X}$  è detto SPAZIO OPERATIVO DEL MANIPOLATORE

Nel caso di un robot planare la dimensione dello spazio si riduce a 5. In genere dunque si può avere a de' fatti con dimensione inferiore al limite massimo di 6.

Se possedere di conoscenze dirette significa ricavare il vettore  $\vec{x}$  a partire dal vettore  $\vec{q}$ :

$$\vec{x} = k(\vec{q})$$

Nelle cinematiche inverse, assegnato il punto nello spazio operativo vogliamo determinare lequivalente nello spazio dei gradi:

$$\vec{q} = k^{-1}(\vec{x})$$

### CINEMATICA INVERSA

Dovendo ricavare le matrici di trasformazione da descrivere le teste n rispetto alle teste o.

$${}^0T(\vec{q}) = \begin{bmatrix} {}^0R(\vec{q}) & {}^0P_{NORIS} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ricavate queste matrice ottenendo percorrendo il tracciato le soluzioni. Basterà ripetere in notazione messina la matrice di rotazione.

Per ottenere queste matrice sfruttiamo le proprietà di componevolezza delle matrici di trasformazione.

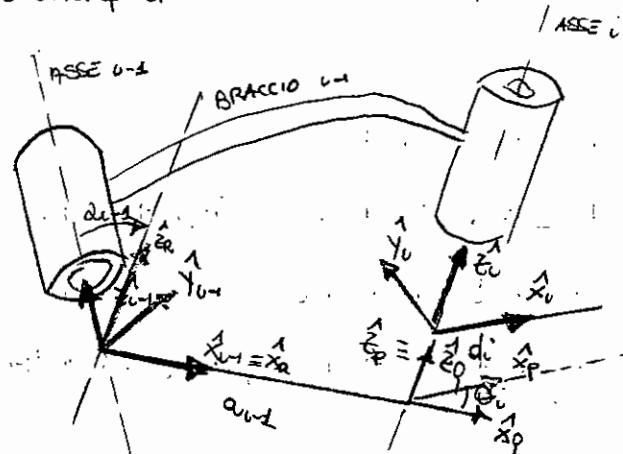
$${}^A_T = {}^A_T {}^B_T {}^B_T$$

$$\text{In rettine: } {}^N_T(\vec{q}) = {}^0_T(\vec{q}_1) {}^1_T(\vec{q}_2) \dots {}^n_T(\vec{q}_n)$$

$$\underline{\tau}^T = \left( \frac{\underline{s}}{\underline{\tau}} \right)^{-1} \underline{Q}^T \underline{N}^{-1} (\underline{\tilde{q}}) \underline{T}^T$$

NOTA,      NOTA  
DA RICHIARE IN FUNZIONE DELLO SPAZIO DEI GIUNTI

Le metrice incognita le ricaveremo come composizione delle metri di trasformazione associate alle singole Terze fissate sul manopolo da:



Si compone ulteriormente la trasformazione, fissando una serie di Terze ausiliarie:

- 1) Traccia un parallelo dell'asse  $\hat{x}_1$  passante per l'origine delle Terze  $\hat{x}_1$ .
- 2) Giro una nuova Terza per rotazione delle Terze  $\hat{x}_1$  attorno all'asse  $\hat{x}_1$ .
- 3) Facciamo scorrere la Terza su lungo la distanza fino a portare l'origine sull'asse  $\hat{x}_1$ .
- 4) Terza composta delle Terze  $\hat{x}$  e una rotazione attorno all'asse  $\hat{x}_1$  fino ad allineare il versore  $\hat{x}_1$  con un asse parallelo ad  $\hat{x}_1$ .
- 5) considera una ultima trasformazione delle Terze  $\hat{x}$  lungo l'asse  $\hat{x}_1$ . Identifica l'ultimo parametro di giunto: d.

Se possiamo scrivere la  $T^T$  si tratta invece la regola di composizione:

$$T^T = \frac{R^T Q^T P^T}{R^T Q^T P^T U^T} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IMPARARE + MEMORIZZARE

A questo punto basta sostituire all'interno delle reti, per ogni braccio, i parametri elettrici ricavati. In questo modo otterremo le reti di trasformazione intermedie. Moltiplichiamole tutte per ottenere quella completa.

RIPREPAREMO L'ESERCITO 2

i	$d_{1i}$	$e_{1i}$	$d_i$	$e_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$\frac{d_2}{2}$	0	$d_2$	0
3	0	0	1	$\theta_3$

$$\text{Costituente } \vec{\Theta} \quad \vec{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Io posso indicare

Anche con  $C_1$

$$\vec{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 - s_3 & 0 & 1 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & s_1 d_2 \\ s_1 & 0 & -c_1 & -c_1 d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_3 & -c_1 s_3 & s_1 & s_1 (L+d_2) \\ s_1 c_3 & -s_1 s_3 & -c_1 & -c_1 (L+d_2) \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T(\vec{\Theta})$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix} \quad \text{per } \rho \text{ sceso a partire da punto}$$

$$\begin{cases} x = \rho_1 (L+d_2) \\ y = -c_1 (L+d_2) \\ z = 0 \rightarrow \text{mette il colpo è ferito} \end{cases}$$

Rediamo di esprimere la resistenza minore dell'orientamento.

$\cos\theta$	$\cos\beta - \sin\alpha$	$\cos\beta + \sin\alpha$
$\sin\theta$	$\sin\beta + \cos\alpha$	$\sin\beta - \cos\alpha$
$-\sin\theta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$

Terminale:

- 1) Ricordiamo per confronto fra le matrice  $T(\bar{\theta})$  e le precedenti dopo essere passate per il calcolo numerico di  $T(\theta)$
- 2) ricordare completamente per via simbolica.

$$\cos\theta = 0 \rightarrow \text{fissiamo } \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \text{fissiamo } \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\theta = 1. \quad \text{la matrice diventa}$$

$\cos\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\sin\beta$	$\sin\alpha$
$\sin\alpha\cos\beta$	$\sin\alpha\sin\beta$	$-\cos\alpha$
$-\sin\beta$	$\cos\beta$	$0$

A questo punto ricordiamo ancora per confronto.

$$\begin{cases} \sin\alpha = \sin\theta_1 \\ \cos\alpha = \cos\theta_1 \end{cases} \rightarrow \alpha = \arctan^2(\theta_1, \theta_2) = \theta_1$$

$$\begin{cases} \sin\alpha = -\sin\theta_2 \\ \cos\alpha = -\cos\theta_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \theta_2 + \pi$$

$$\begin{cases} \sin\beta = -\sin\theta_3 \\ \cos\beta = \cos\theta_3 \end{cases} \rightarrow \beta = -\theta_3$$

$$\begin{cases} \sin\beta = \sin\theta_3 \\ \cos\beta = -\cos\theta_3 \end{cases} \rightarrow \beta = \theta_3 + \pi$$

Allora il punto nello spazio generato dalle

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \beta = -\theta_3 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cup \begin{cases} x = S_1(1+d_1) \\ y = -e_1(1+d_2) \\ z = 0 \end{cases}$$

L'altra soluzione è:

$$\begin{cases} \alpha = \theta_2 + \pi \\ \beta = \theta_3 + \pi \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

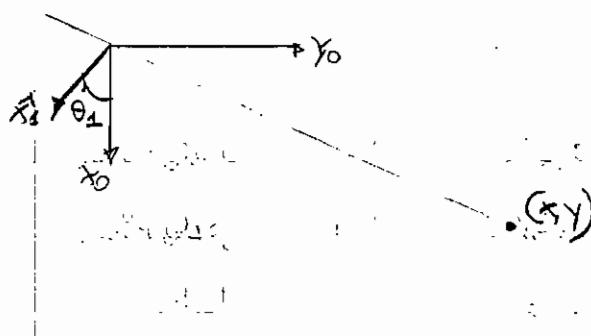
Possiamo il vettore  $\bar{x}$  complesso:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} s_1(1+de) \\ -c_1(1+de) \\ 0 \\ \theta_1 \\ -\theta_3 \\ -\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = f(\bar{q})$$

Avevamo fatto che la dimensione dello spazio generativo è sempre minore o uguale a 6. Questo è un caso in cui possiamo calcolare la dimensione dello spazio generativo. I detti esponenti sono matrici di fronte perché sono costi imposti dalla struttura del manipolatore.

Inoltre teniamo conto informazioni redundanti. Infatti la dimensione dello spazio generativo è sempre minore o uguale al numero dei gradi.

L'informazione superflua è l'angolo  $\theta_1$ . Se vediamo il manipolatore dall'alto la situazione è la seguente



Avere esterminate le coordinate  $x, y$  significa avere automaticamente fissato entro l'angolo  $\theta_2$ .

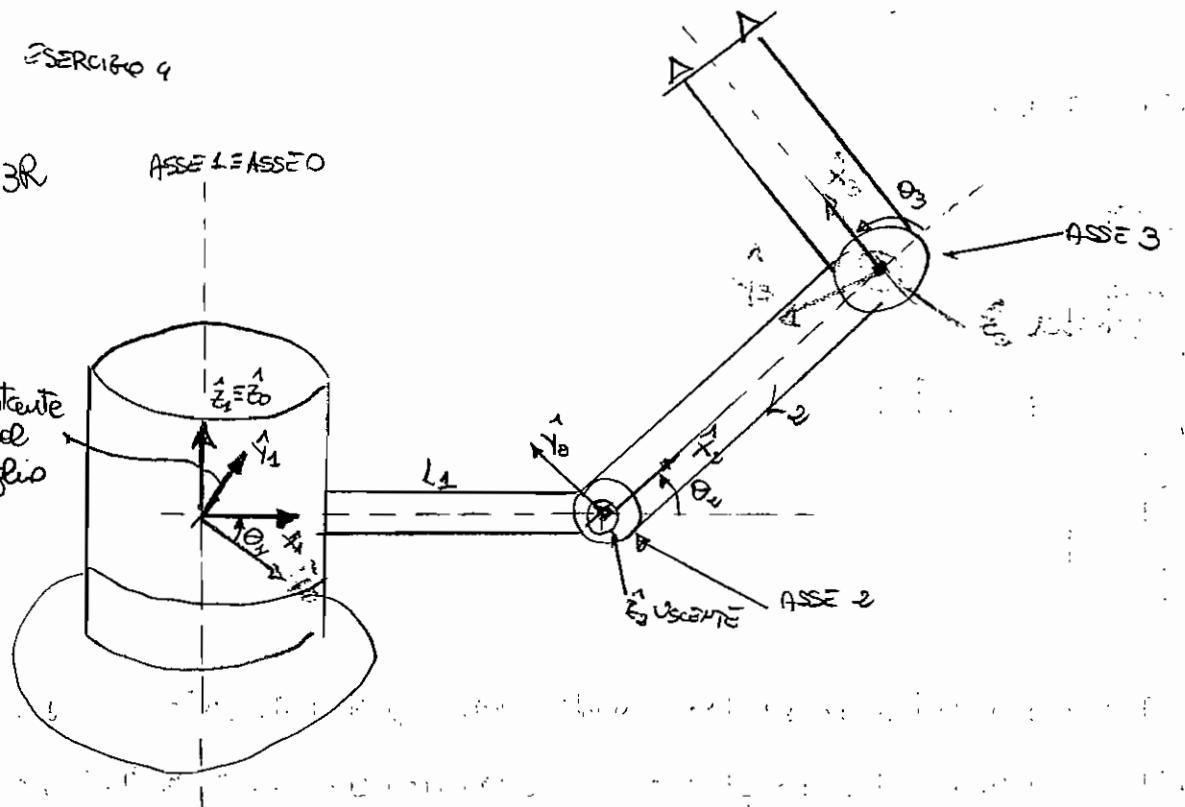
Sono cioè sufficienti due valori di posizione e l'orientamento per definire completamente il braccio flessibile del manipolatore.

ESEMPIO 4

3R

ASSE 1 = ASSE 0

Entro  
nel  
filo



i	d <sub>ii</sub>	e <sub>ii</sub>	d <sub>i</sub>	θ <sub>i</sub>
1	0	0	0	θ <sub>1</sub>
2	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	0	θ <sub>2</sub>
3	0	L <sub>2</sub>	0	θ <sub>3</sub>

$${}^0 \mathcal{T} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & -c_1 c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3 & s_1 & l_2 c_2 c_3 + l_1 c_1 \\ s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 & -c_1 & l_2 s_2 c_3 + l_1 s_1 \\ s_2 c_3 + c_2 s_3 & -s_2 s_3 + c_2 c_3 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Semplifichiamo quanto è più possibile nella matrice di trasformazione

$$c_1(c_2 c_3 - s_2 s_3) = c_1 c_{23} \quad e \cos \theta_2 per gli altri termini$$

$${}^0 \mathcal{T} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(l_2 c_2 + l_1) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(l_2 c_2 + l_1) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## CINEMATICA INVERSA

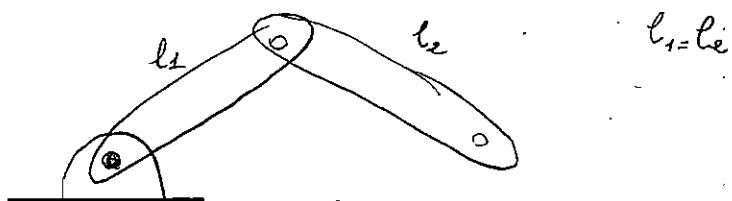
Introduciamo il concetto di spazio di lavoro del manipolatore. Esistono due diversi concetti:

a) SPAZIO DI LAVORO RAGGIUNGIBILE

b) SPAZIO DI LAVORO DESTRO O DI DESTREZZA

Se ① è l'infine dei punti dello spazio cartesiano da il manipolatore tocca con l'oggetto termale.

Se ② è lo spazio di lavoro da il manipolatore riesce anche a "toccare" posizionando ad orbita l'oggetto termale. Tipicamente è più ridotto rispetto all'①. Lo spazio ② dipende dal tipo di gestione da dare al manipolatore.



In questo caso ① è il semicerchio di raggio pari ad  $l_1 + l_2$ . In questo caso ② cioè lo spazio di destrezza è il solo punto collocato in blu. Se nella gestione di un interruttore si esegue l'azionamento dell'oggetto termale non è importante se si trova da spazio di lavoro o spazio di destrezza.

Nel caso in cui  $l_1 \neq l_2$  lo spazio di lavoro assai più grande è dato dalla catena circolare di raggio minore pari a  $|l_1 - l_2|$  e di raggio maggiore pari ad  $|l_1 + l_2|$ . In queste condizioni spazio ② è lo spazio di destrezza.

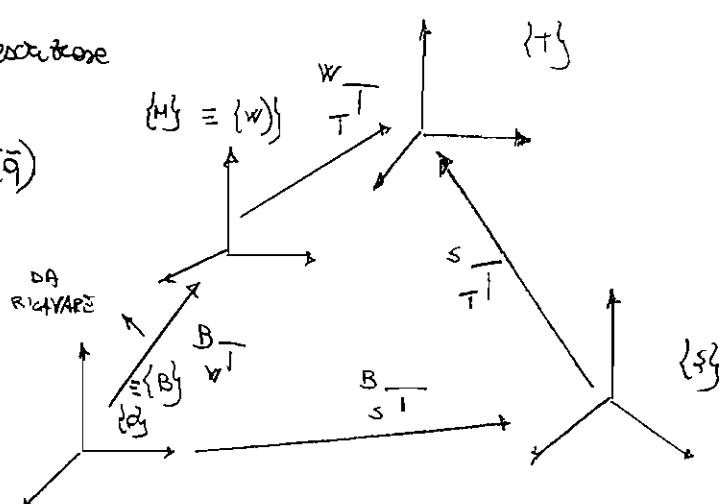
A causa dei limiti imposti dalla meccanica di giunto lo spazio di lavoro tende ad essere sempre inferiore rispetto a quello ideale teorico.

In questo caso notate la posizione e l'azionamento dell'end-effector rispetto le coordinate di giunto.

Vogliamo ottenere la derazione

$$W^T(\bar{q}) = \frac{\partial}{\partial \bar{q}} T(\bar{q})$$

Punto del  
MANIPOLATORE



$B_{\bar{W}T} = \frac{B}{S} T S^{-1} T^T$  Ma questa metrare sepolso come è fatta la metrare di Doppio trascorre  
generale rispetto alle variazioni di punto

$B_{\bar{W}T} = B_{\bar{W}T}(\vec{q})$  da puoi riconoscere verso una serie di equazioni di risolvente nello spazio delle  
frequenze

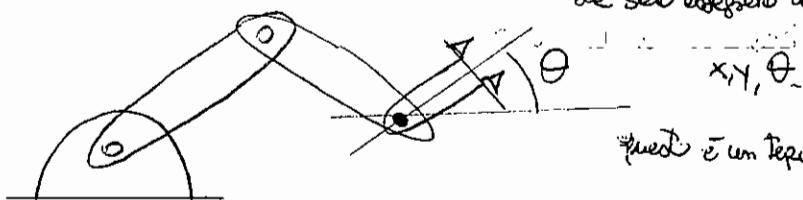
Queste equazioni abbiano di risolvente:

$$B_{\bar{W}T}(\vec{q}) \Rightarrow \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & x \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & y \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}(\vec{q}) & T_{12}(\vec{q}) & T_{13}(\vec{q}) & x(\vec{q}) \\ T_{21}(\vec{q}) & T_{22}(\vec{q}) & T_{23}(\vec{q}) & y(\vec{q}) \\ T_{31}(\vec{q}) & T_{32}(\vec{q}) & T_{33}(\vec{q}) & z(\vec{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In realtà devi risolvere 12 equazioni: basta in pratica un insieme tutte le 6 frequenze. Se vuoi  
a dover risolvere un insieme di 12 equazioni in 6 incognite. In realtà c'è una redundanza di  
informazione all'interno delle metrare di soluzioni. Se puoi è possibile estrarre al più 3 equazioni  
indipendenti. Allora ben abbia abbiano 6 equazioni in 6 incognite. Badi il sistema non è lineare  
non è detto che soluzioni esiste o sia unica.

- Problemi:
- 1) esistenza soluzioni;
  - 2) possibilità di esistere soluzioni multiple;
  - 3) metodi usati per le soluzioni.

- **ESISTENZA DELLA SOLUZIONE:** La curvilinea inversa è insubile a parte di le forme esterne che all'interno dello spazio di lavoro di doppio -
- **ESISTENZA DI SOLUZIONI MULTIPLE:** ...



Questo è un tipico caso di esistenza di soluzioni multiple -

poiché il punto dello spazio operativo assegnato  $\mathbf{G}$  possa raggiungere anche con un'altra configurazione dei bracci. Tutte le soluzioni possibili devono essere ricavate con gli

disegni delle curvilinee inverse. Non esiste un criterio per decidere il numero di soluzioni. In generale più punti si hanno e più facilmente si determinano soluzioni multiple. Inoltre spesso dipende dai parametri geometrici dei jointi: gli  $a_i$ , gli  $\alpha_i$ . Quanto più permette a  $\mathbf{G}$  di muoversi di più, tanto più soluzioni possiede -

In un rompicatello entropomorfo a 6 gradi di libertà con:  $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$  le soluzioni delle curvilinee inverse sono  $\leq 4$ . Se  $\alpha_3 = \alpha_5 = 0$  il numero di soluzioni deve diventare  $\leq 8$ . Se solo  $\alpha_3 = 0$  le soluzioni possibili diventano  $\leq 16$ .

Il numero di soluzioni dipende molto dal grado di escurzione delle rotoli dei punti -

#### ► METODI RISOLUTIVI:

Ne esistono sostanzialmente due: forme numeriche, forme analitiche.

Tutti i maneggiabili con giunto geometrico o rotabile con 6 gradi di libertà sono regolabili.

Affindè un maneggiabile con 6 gradi di libertà ha 6 assi in forme diverse e necessario che molti assi di giunto si intersecano fra loro e molte volte al di fuori multiple di  $\frac{\pi}{2}$  (torsioni di blocco).

Condizione sufficiente perché un maneggiabile con 6 gradi di libertà abbia una giuntura in forme diverse è che 3 assi di giunto contigui si intersecano in un punto.

• Modo 1

$${}^B_W T = {}^B_W T(\vec{q}) \quad \text{sono le questioni e le risposte}$$

• Modo 2

${}^B_W T(\vec{x})$  cioè descrivono il passo rispetto alla base in funzione delle spese generali

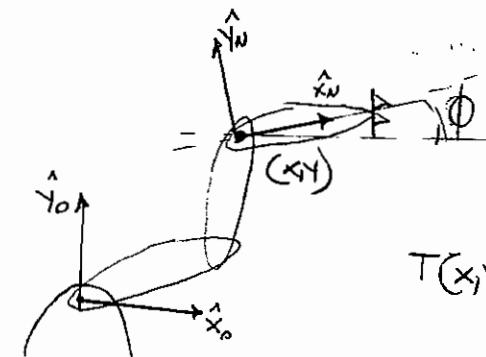
$${}^B_W T(\vec{x}) = {}^B_W T(\vec{q}) \quad \text{si} \underline{\text{equivalgono}} \text{ le questioni - Risposte a trovare in base alle } q = A^T(\vec{x})$$

Tipicamente si procede con il modo 2. Si pone il problema di trovare  ${}^B_W T(\vec{x})$ .

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ d \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{sono le forme menzionate}$$

$${}^B_W T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} {}^B_W R_{XYZ}(Q, B, \vec{x}) & {}^B_W P_{WORLD} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } {}^B_W P_{WORLD} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

In generale i punti nello spazio generativo non sono definiti in funzione di un solo forma menziona-

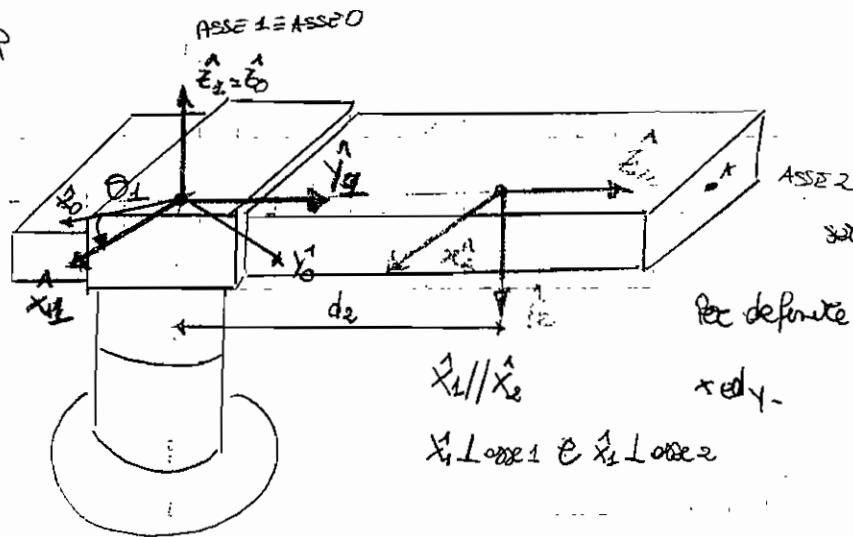


Ad esempio può essere definita l'angolo all'ultima torre e l'angolo theta per l'asse dell'ultima torre e l'azimutale.

$$T(x, y, \phi) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & x \\ s\theta & c\theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{POICHÉ È PLANARE}$$

Questo è riferito alla matrice verde  ${}^B_W T(\vec{x})$

RP



→ spazio di rotazione = vise

confronto - b spazio generico

size di dimensione minore o uguale a 2 -

Per definire il punto A è sufficiente dare le coordinate

x ed y.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

 $\hat{x}_1 // \hat{x}_2$  $x_1 \perp x_2 \in x_1 \perp x_2$ 

Assegniamo le forme del rompalete.

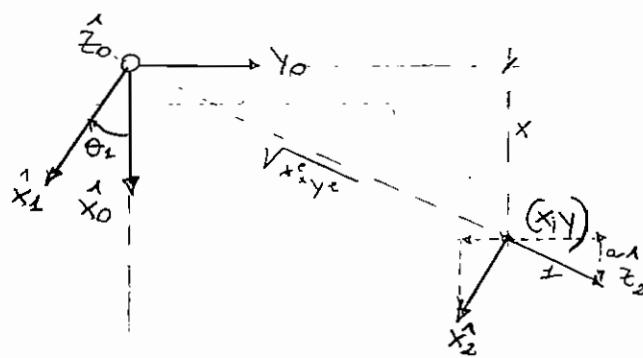
Dobbiamo ricavare le metà

$$B^T T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo esprimere questa matrice di

deltore in funzione delle sole x ed y.

Redisegniamo il rompalete dell'elio.



$${}^0 R = \begin{bmatrix} {}^0 x_2^1 & {}^0 y_2^1 & {}^0 z_2^1 \end{bmatrix}$$

$${}^0 z_2^1 = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

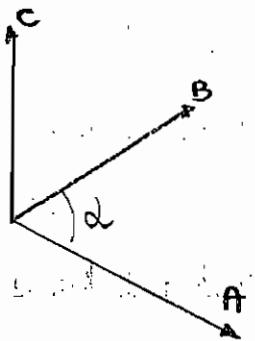
$$Q: x = l: \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow a = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$b: y = 1: \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow b = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Procediamo determinando le rette

$${}^0 y_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ Infine le rette } {}^0 x_2^1 :$$

$${}^0 x_2^1 = \begin{bmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$



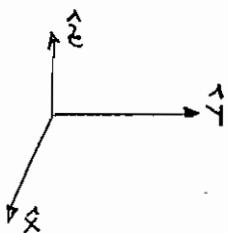
$C = A + B$

$|C| = |A| \cdot |B| \cdot \sin \alpha$  quindi il vettore è ottenuto al prodotto dei due vettori con verso determinato dalle regole delle regole delle regole dette con rotazione da  $A$  ad  $B$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} = A \times B$$

quindi:  $A \times B = \det \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{x} - (a_z b_x - a_x b_z) \hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{z}$

lo abbiamo visto finora:



$$\begin{aligned} \hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{z} &= \hat{x} \\ \hat{z} \times \hat{x} &= \hat{y} \end{aligned}$$

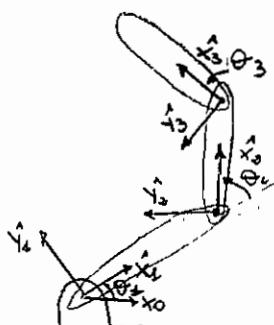
Sceglieremo queste conclusioni per semplificare i calcoli dell'ultimo esercizio.

$${}^o R = \begin{bmatrix} {}^o \hat{x}_1 & {}^o \hat{y}_1 & {}^o \hat{z}_1 \\ {}^o \hat{x}_2 & {}^o \hat{y}_2 & {}^o \hat{z}_2 \end{bmatrix} \quad \text{semplifichiamo il procedimento.}$$

Possiamo anche ricavare  $R$  e  ${}^o \hat{x}_1$  e  ${}^o \hat{z}_1$ . Per ricavare  $R$  e  ${}^o \hat{x}_1$  possiamo sfruttare le relazioni precedenti semplificando notevolmente alcuni calcoli.

► ESEMPIO DI CINEMATICA INVERSA

Consideriamo un manipolatore 3R planare.



Le extremità già calcolate e metà dei parametri cinematici.

Soltanto:

$$\overset{\circ}{ST} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1c_1 + l_2e_2 \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{dove } c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) = \cos\theta_1 \left[ \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \sin\theta_2 \sin\theta_3 \right] + \\ - \sin\theta_1 \left[ \sin\theta_2 \cos\theta_3 + \cos\theta_2 \sin\theta_3 \right] = \\ = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$$

► APPROCCIO ALGEBRICO

Se trova le metà di Trasformazione omogenee nello spazio operativo. Si è trovato che:

$$\overset{\circ}{ST}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & x \\ s\phi & c\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \phi \end{bmatrix} \quad \text{ne } x = l_1c_1 + l_2e_2 \\ y = l_1s_1 + l_2s_{12} \\ \phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

La soluzione della cinematica diretta è stata buona. Meno semplice è la cinematica inversa.

Notate che le due metà di Trasformazione devono avere le stesse strutture. Se in una ci sono degli zero o degli uno strutturali, a destra esiste anche delle seconde.

Trovano però tutte le possibili questioni.

$$\begin{cases} x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ \cos \phi = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \sin \phi = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{cases}$$

Nel caso di struttura di questo tipo  
si cerca a risolvere le relazioni per cui il  
punto A delle due fibre queste sono e sembrano.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= l_1^2 c_1^2 + l_2^2 c_{12}^2 + 2l_1 l_2 c_1 c_{12} + l_1^2 s_1^2 + l_2^2 s_{12}^2 + 2l_1 l_2 s_1 s_{12} = \\ &= l_1^2 (c_1^2 + s_1^2) + l_2^2 (c_{12}^2 + s_{12}^2) + 2l_1 l_2 (c_1 c_{12} + s_1 s_{12}) = \\ &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - (\theta_2 + \theta_3)) = \underline{\underline{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2)}} \end{aligned}$$

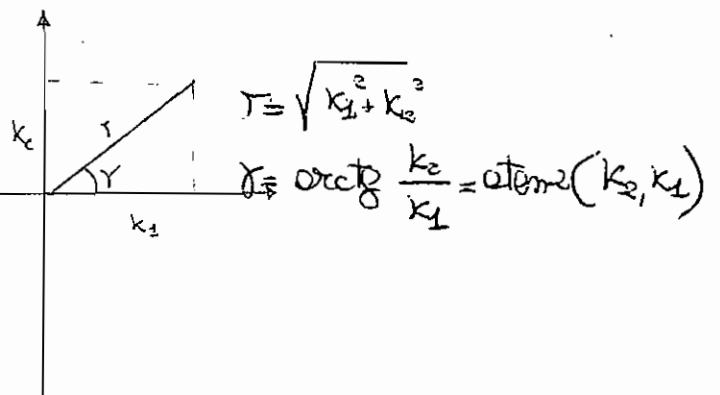
Allora  $\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \Rightarrow \theta_2 = \pm \arccos \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$

È corretta la doppia soluzione perché dipende direttamente dalla posizione delle fibre fissa, le possiamo raggiungere con due strade differenti.

Se l'argomento della funzione diventano è in modulo maggiore di 1 significa che il punto assegnato è fuori dello spazio di controllo del manipolatore.

Dovendo ricercare  $\theta_1$  - usi le due equazioni:

$$\begin{cases} \cos \phi = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \sin \phi = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ x = l_1 c_1 + l_2 c_1 c_2 - l_2 s_1 s_2 = (\underbrace{l_1 + l_2 c_2}_{k_1 \text{ TERMINI NOTI}}) c_1 - (\underbrace{l_2 s_2}_{k_2}) s_1 = k_1 c_1 - k_2 s_1 \\ y = l_1 s_1 + l_2 s_1 c_2 + l_2 c_2 c_1 = (\underbrace{l_2 c_2}_{k_2}) c_1 + (\underbrace{l_1 + l_2 c_2}_{k_1}) s_1 = k_2 c_1 + k_1 s_1 \end{cases}$$



Allora:  $k_1 = r \cos \gamma$

$k_2 = r \sin \gamma$

Rappresentando il sistema di coordinate sostituendo a  $k_1$  e  $k_2$  le relazioni ottenute

$$\begin{cases} x = r \cos \theta_1 - r \sin \theta_1 \cos \gamma \\ y = r \sin \theta_1 \cos \gamma + r \cos \theta_1 \sin \gamma \end{cases} \quad \text{allora:}$$

$$\begin{cases} \sin(\gamma + \theta_1) = \frac{y}{r} \\ \cos(\gamma + \theta_1) = \frac{x}{r} \end{cases} \Rightarrow (\gamma + \theta_1) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(y, x)$$

Allora in definitiva:  $\theta_1 = \arctan(y, x) - \gamma$

Svolgendo ulteriormente si ha che:

$$\theta_1 = \arctan(y, x) - \arctan(k_1, k_2) = \arctan(y, x) - \arctan(l_2 s_2; l_1 + l_2 c_2)$$

Anche per l'angolo  $\theta_1$  dovrà ottenere due soluzioni possibili. In effetti perché per  $\theta_2$  le due differenti selezioni,  $k_2$ , vanno a seconda se l'angolo è positivo o negativo. Allora le due diverse soluzioni di  $\theta_1$ .

La selezione trovata è semplice? Se  $\theta_2$  non si pose problema perché è denominatore la delle costanti. Per  $\theta_1$  le soluzioni non lo significano.

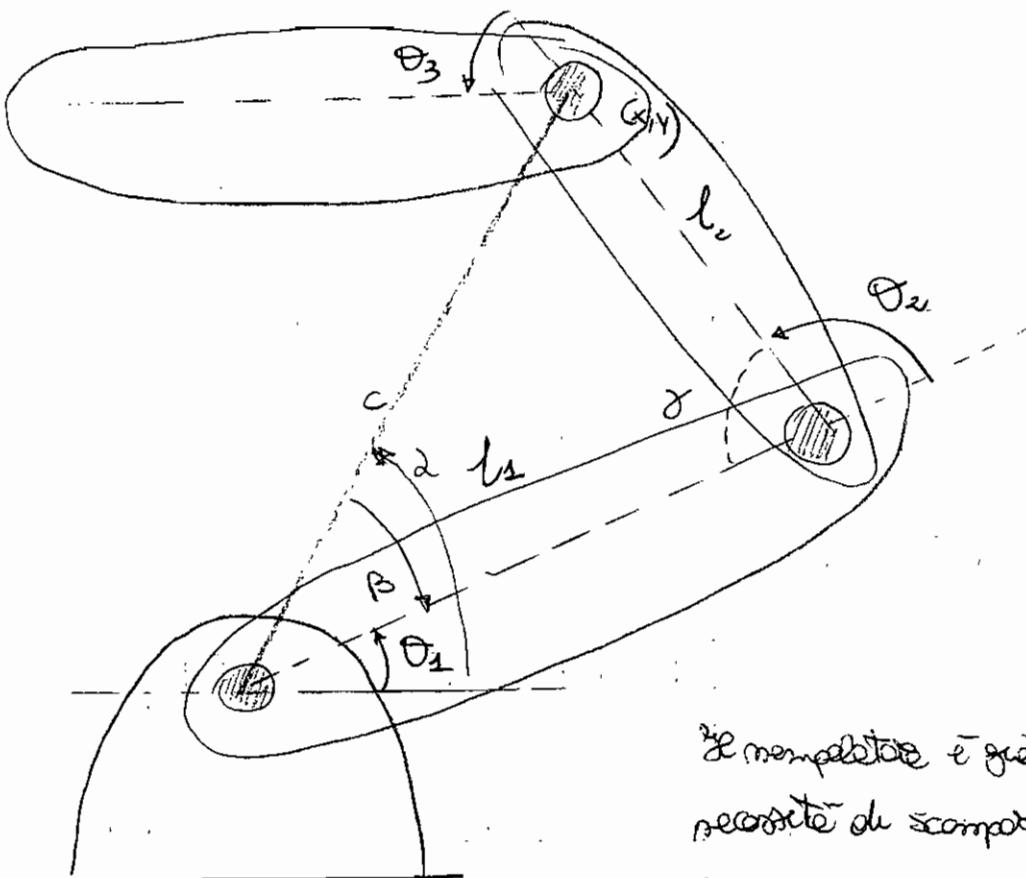
- |                |   |
|----------------|---|
| 1) $x=y=0$     | In tal caso non sarebbe mai diverso da zero ma stiamo trattando la stessa situazione: $x=y=0$                               |
| 2) $k_1=k_2=0$ | In questo caso la soluzione è immediata. Viene cioè che $l_1=l_2$ . Se $l_1 \neq l_2$ il caso degenero non si verifica più. |
| 3) $r=0$       |   |

Supponiamo di essere nel caso degenero. Allora  $\begin{cases} \theta_1 = \alpha \text{ piace} \\ \theta_2 = \pi \end{cases}$

A questo punto si vede che l'angolo  $\theta_3$  è nullo:

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

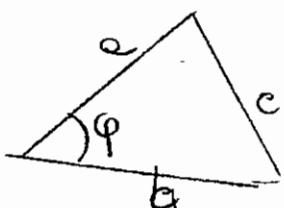
## METODO GEOMETRICO



Il manipolatore è già fissato e quindi non ha necessità di scomparire in tanti punti diversi.  
Scriviamo delle grandi telescopie sul piano.

Utilizziamo il Teorema di Cossin:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$$



nel nostro caso:

$$c = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{dunque } c^2 = x^2 + y^2$$

$$c^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \varphi \quad \text{ma } \varphi = \theta_2 - \pi \Rightarrow \cos(\theta_2 - \pi) = -\cos \theta_2$$

$$\text{Perciò } \cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \Rightarrow \theta_2 = \arccos \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

In questo caso va tutto bene perché  $\theta_2$  è inferiore a  $\pi$ . Se fosse stato maggiore di  $\pi$  quello che avremmo dovuto fare è  $\theta_2 = \arccos \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2 + 2\pi}{2l_1 l_2}$

oc è necessario trovare l'angolo  $\theta_1$ .

$$\alpha = \arctan(y/x)$$

$\beta$  lo ricavo usando con Carnot:

$$l_2^2 = l_1^2 + x^2 + y^2 - 2l_1\sqrt{x^2+y^2} \cos\beta \text{ da cui}$$

$$\cos\beta = \frac{-l_2^2 + l_1^2 + x^2 + y^2}{2l_1\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \beta = \arccos(\dots) \quad \begin{array}{l} \text{In questo caso non ci} \\ \text{sono soluzioni possibili} \end{array}$$

In definitiva si ha  $\theta_1 = \alpha + \beta$

Infine  $\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$ . (Ortico questo ricavato da sole considerazioni geometriche).

Cose prime occorre considerare le tensioni tirate per affrontare eventuali supercarghe.

Questo che abbiamo trovato è una delle due alternative possibili. Se posiziono il nempoleatore nell'altra posizione possibile e si ricominciano tutti i calcoli.

#### » Secondo metodo

Opere di otturazione ad ottura: una questione del tipo:

$$\cos\theta + b\sin\theta = 0$$

Si esige la comuta di rotazione  $u(\theta): (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  (insieme dei reali)

$$\theta \rightarrow u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

La funzione è biunivoca in punto è una funzione bidimensionale: infatti l'argomento delle tangenti varrà fra  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2}$  range dell'interno del gire. La funzione è invertibile.

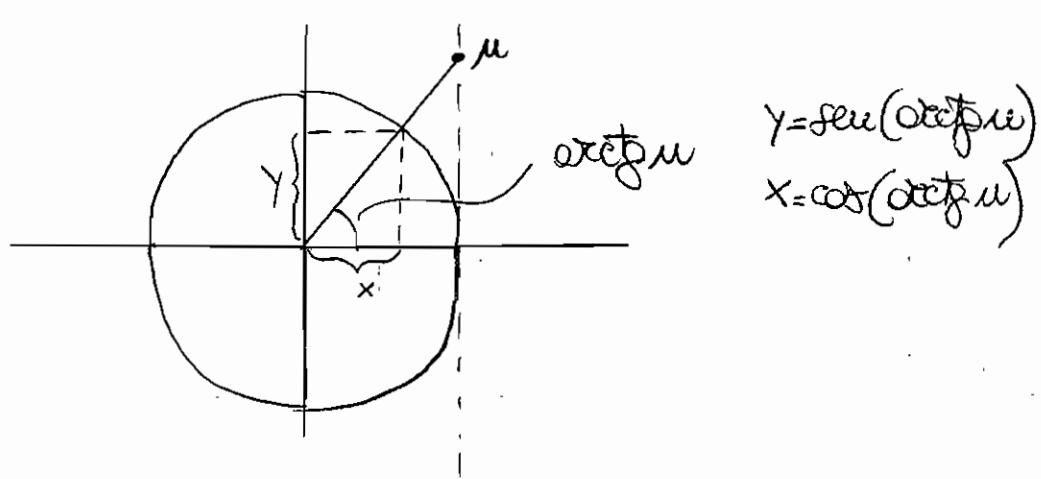
In particolare  $\theta = 2 \operatorname{arctg} u$

Vediamo come cambia la tensione iniziale:

$$\cos\theta = \cos(2 \operatorname{arctg} u) = \cos^2(\operatorname{arctg} u) - \sin^2(\operatorname{arctg} u)$$

$$\sin\theta = \sin(2 \operatorname{arctg} u) = 2 \cos(\operatorname{arctg} u) \sin(\operatorname{arctg} u)$$

Vediamo i singoli termini ottenuti:



Ritroviamo i valori di  $x$  e  $y$  con rapporto tra tangente:

$$x: 1 = u: \sqrt{1+u^2} \Rightarrow x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

Ritroviamo di  $y$ :

$$y: 1 = u: \sqrt{1+u^2} \Rightarrow y = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

Ora siamo in grado di scrivere le coordinate di tutti i punti del cerchio.

$$\cos \theta = \frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\sin \theta = 2 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

Troviamo da queste equazioni unica:

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c \Rightarrow a \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2} + b \cdot \frac{2u}{1+u^2} = c \quad \text{da cui}$$

$$a - au^2 + 2bu = c + cu^2 \quad \text{posto tutto a Peso niente}$$

$$(a+c)u^2 - 2bu + (c-a) = 0$$

Calcolo le soluzioni di questi plenomei di secondo grado:

$$u_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - (c^2 - a^2)}}{a+c} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2 - c^2}}{a+c}$$

Abbiamo due soluzioni in re. queste sono sempre:

Note che non sempre entrambe le soluzioni ottenute sono effettivamente valide per il manipolatore.

Attenzione ad usare queste tecniche quando effettivamente non ci sono dati di base percorribili.

Infine:

$$\Theta = \arccos \left( \frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2 - c^2}}{a+c} \right)$$

Se  $a+c=0$  la soluzione è  $\Theta = \pi$

#### ► DATI DI TARGA DI UN MANIPOLATORE

1) ACCURATEZZA: si posa il manipolatore nelle sue posizioni di riferimento. Si spieghi un punto nello spazio da punti e tranne le coordinate dirette si calcola la posizione dello stesso spazio operativo. A questo punto si osservano diversi punti  $\vec{q}$ . Il manipolatore si sposta. Si rileva lo spostamento  $\vec{x}$  e si ricavano le posizioni finali  $\vec{q}'$  del manipolatore e le posizioni  $\vec{x}'$  precedentemente calcolate. ( $\vec{q} \Rightarrow \vec{x}$ )

L'accuratezza è fortemente influenzata dalla correttezza esatta dei parametri di Denavit-Hartenberg. Esiste meccanica pura fissa base possono ripercorrere fortemente sulla dinamica termica.

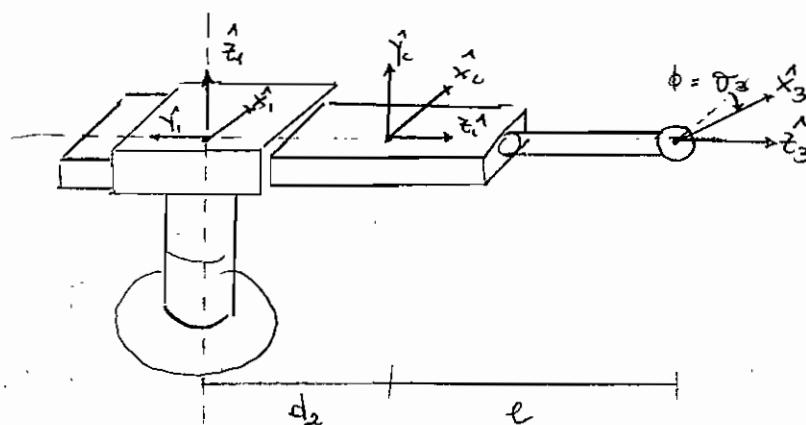
L'errore di accuratezza dipende dalle posizioni della base del manipolatore in un certo istante.

2) RIPETIBILITÀ: si sceglie un punto nello spazio da fissare. Si sogna che il manipolatore è fisso. Si determina il manipolatore nella posizione di appoggio e si ripete le misure con lo stesso punto.

Alla fine si ottiene una serie di punti fissi cogniti. Il fatto che queste serie apparterrà l'errore di ripetibilità del manipolatore. Solitamente è un ordine di grandezza inferiore rispetto all'errore di accuratezza. Questo errore dipende sostanzialmente dai giochi del manipolatore, dipende dal tipo di controllo del sistema con attuatori non sempre bene precisi.

Esercizio:

Determinare il seguente manipolatore:



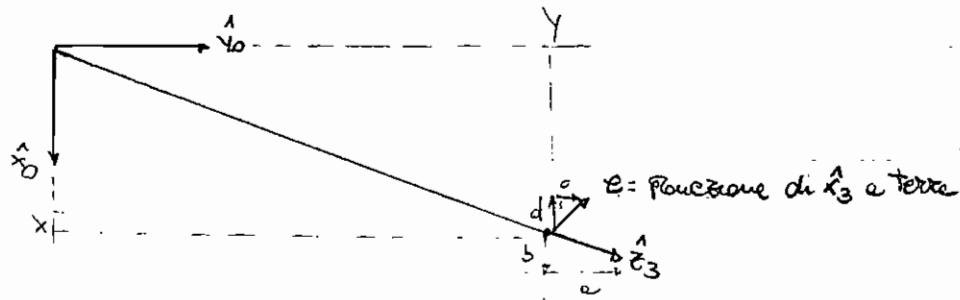
$${}^0_3 T = \begin{bmatrix} c_1 c_3 & c_1 s_3 & s_1 & L_1 s_1 + d_2 s_1 \\ s_1 c_3 & -c_1 s_3 & -s_1 & -L_1 c_1 - c_1 d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 = l$$

Dobbiamo determinare la matrice di trasformazione nello spazio operativo.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \Phi \end{bmatrix}$$

$$\text{dove generare } {}^0_3 R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}$$

→ Punto del vertice  $\overset{\circ}{e}_3$  -



$$Y:a = \sqrt{x^2+y^2} : \pm \Rightarrow a = \frac{Y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$X:b = \sqrt{x^2+y^2} : \pm \Rightarrow b = \frac{X}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\overset{\circ}{e}_3^1 = \begin{bmatrix} \frac{X}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{Y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ Rettore del vertice  $\overset{\circ}{x}_3$ . Scomponiamo le vertici lungo l'asse e.

$$\overset{\circ}{x}_3^1 = \begin{bmatrix} -e \frac{Y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ e \frac{X}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin \phi \end{bmatrix}$$

$$e = \cos \phi$$

Scomponiamo il rettore e (non unitario) lungo x ed y.

$$X:e = \sqrt{x^2+y^2} \cdot e \text{ da cui}$$

$$(e = e \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

$$Y:d = \sqrt{x^2+y^2} \cdot e \text{ da cui } d = e \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

→ Abbiamo voluto che il versore  $\vec{Y}_3$  passino spettore & tecniche:

$$\overset{o}{Y}_3 = \overset{o}{e}_3 \times \overset{o}{x}_3$$

Allora in definitiva si ottiene:

$$\overset{o}{\beta}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -c\phi \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & s\phi \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \\ c\phi \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -s\phi \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \\ s\phi & c\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo a trovare le coordinate inverse.

È immediato ottenere che  $\phi = \theta_3$  -

La soluzione singolare  
 $x=0, y=0$  corrisponde ad una  
 condizione meccanica irraggiungibile.

$$\begin{cases} \phi = \theta_3 \\ \sin \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos \theta_1 = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

$$x = e_{s_1} + d_2 s_1$$

$$y = -e_{c_1} - e_1 d_2 \quad ②$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_3 = \phi \\ \theta_1 = \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} / -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \arctan(x, y) \\ d_2 = \frac{x - e_{s_1}}{s_1} = \frac{x}{s_1} - e \end{cases}$$

Se la singolarità fuonda  $s_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0, \pi$ .

Allora spettro & bilancio 2:

$$d_2 = \frac{-y - e_{c_1}}{c_1} = \frac{-y - e}{c_1}$$

questa volta questa espressione è utilizzabile perché sicuramente  $c_1$  è definito.

Se soluções alternativas puderem existir:

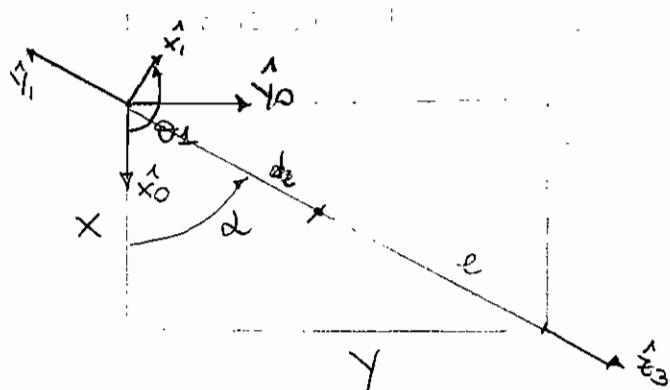
$$x = \ell s_2 + d_2 s_1 = \ell \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + d_2 \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x(\ell+d_2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{de cun}$$

$$d_2 = \left( \frac{x - \ell x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = \sqrt{x^2+y^2} - \ell \quad \text{fazendo seleção de } d_2 \text{ non} \\ \text{presente com simbolos.}$$

- Com APROXIMAÇÃO GEOMÉTRICO

Em que o caso non devo constante é  $\Omega_3(\vec{r})$ !!!

É então imediato verifico que  $\Theta_3 = \Phi$ .

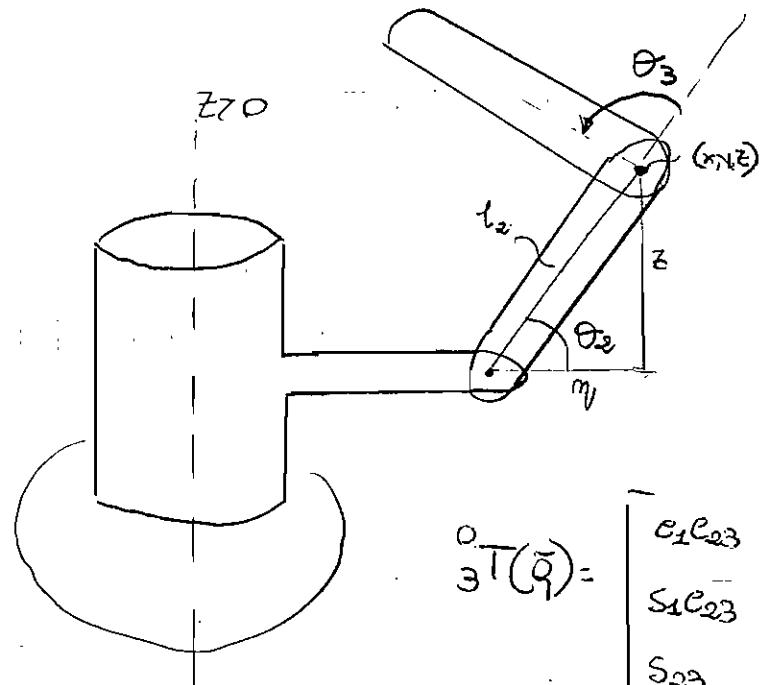


$$\Theta_2 = d + \frac{\pi}{2} = \underbrace{\arctan 2(\tilde{Y}, \tilde{X})}_{\text{restituição da } \theta} + \frac{\pi}{2} = \arctan 2(X, Y)$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = d_2 + l \Rightarrow d_2 = \sqrt{x^2+y^2} - l$$

Esercizio 2

Ripetendiamo ancora un progetto 2



$$T(0|2) = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(l_2 c_2 + l_3) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_2 & s_1(l_2 c_2 + l_3) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 s_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Confrontare con le seguenti matrice di trasformazione angolare:

$$T(0|2) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & X \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & Y \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}^0 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{NON FORNITA INIZIALMENTE}$$

Scopo di:

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = T_{13} \\ C_1 = -T_{23} \end{array} \right\} \rightarrow \theta_1 = \arctan^2(T_{13}, -T_{23}) \quad (\text{evidentemente non soddisfa} \\ \text{se non puoi essere } C_1 = 0)$$

$$X = c_1 c_{23} l_2 + c_1 l_3 \rightarrow c_2 = \frac{x - c_1 l_1}{c_1 c_{23}} = \frac{x + T_{33} l_1}{-T_{23} l_2} \quad \left. \begin{array}{l} \theta_2 = \arctan^2\left(\frac{z}{l_2}, \frac{x + T_{33} l_1}{-T_{23} l_2}\right) \\ \theta_3 = \arctan^2\left(\frac{z}{l_2}, \frac{c_2}{l_2}\right) \end{array} \right\}$$

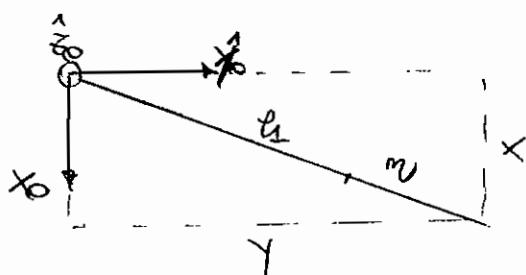
$$Z = l_2 s_{23} \rightarrow s_2 = \frac{z}{l_2}$$

Infine  $\theta_3 = -\theta_2 + \arctan^2(T_{31}, T_{32})$

A questo punto dobbiamo ricavare  $\theta_2$  ed escludere i casi singolari.

Osservando il disegno delle rette dobbiamo ricavare le seguenti tre relazioni:

$\ell_1$  è l'origine dell'ultima retta. Osservano le tre rette dell'alto



dove  $m$  è la pendenza del punto  $(x, y)$  su  $\ell_1$ .

$$\text{Allora: } \sqrt{x^2 + y^2} - \ell_1 = m(x, y)$$

Bastà cosa detto di foglio si vede che è vero dunque da:

$$d(x, y) = \sqrt{\ell_2^2 - m^2} = \sqrt{\ell_2^2 - x^2 - y^2 - \ell_1^2 + 2\ell_1\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Puerto è vero detto che mancano gli interi della matrice di trasformazione

### Vediamo le singolarità delle soluzioni

- $\theta_2$  non sarà mai singolare perché sono le corone delle rette non possono essere contemporaneamente nulli;
- $\theta_2$  sarà singolare per la stessa ragione del punto 1;
- $\theta_2$  dovrà singolare quando:

$$\begin{cases} x=0 \\ x+\ell_2 \cos \theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_2 \sin \theta_2 = 0 \\ x+\ell_2 \cos \theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_2 = 0 \text{ oppure } \theta_2 = \pi \\ x = -\ell_2 \cos \theta_2 = \ell_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

L'unico caso in cui il sistema di equazioni è perfetto è se prendo  $\cos(\theta_2) = 0$

Allora in questo caso per trovare le soluzioni delle cinematrici occorre entrambi i valori

di  $\theta_2$ , ovvero la seconda equazione

$$y = s_2(\ell_2 \cos \theta_2 + \ell_1) \Rightarrow \cos \theta_2 = \frac{y - \ell_2 s_2}{\ell_1}$$

Adore:  $\Theta_2 = \arctan\left(\frac{y - r_B l_2}{r_B}\right)$

► Approssimazione di soluzione alternativa che non porta a assi singolari

a)  $\Theta_2$  si ricava come prima.

Per ricavare  $\Theta_2$  faccio:

$$c_1^2(l_2 c_2 + l_1)^2 = x^2$$

$$s_1^2(l_2 c_2 + l_1)^2 = y^2$$

$$(s_1^2 + c_1^2)(l_2 c_2 + l_1)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (l_2 c_2 + l_1)^2 = x^2 + y^2$$

Sviluppando si ottiene di:

$$l_2 c_2 + l_1 = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \cos \Theta_2 = \frac{-l_1 \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{l_2}$$

In questo caso sembra di aver scosso due selezioni - In realtà quello con il segno (+) è da scartare in quanto identifica un punto al di fuori dello spazio operativo.

b) moltiplichiamo la prima riga per  $c_1$  e la seconda per  $s_1$ .

$$c_1^2(l_2 c_2 + l_1) = x \cdot c_1$$

$$s_1^2(l_2 c_2 + l_1) = y \cdot s_1$$

---


$$(c_1^2 + s_1^2)(l_2 c_2 + l_1) = x c_1 + y s_1 \Rightarrow l_2 c_2 + l_1 = x c_1 + y s_1$$

Adore:

$$\cos \Theta_2 = \frac{x c_1 + y s_1 - l_1}{l_2} = \frac{r_B x + r_B y - l_1}{l_2}$$

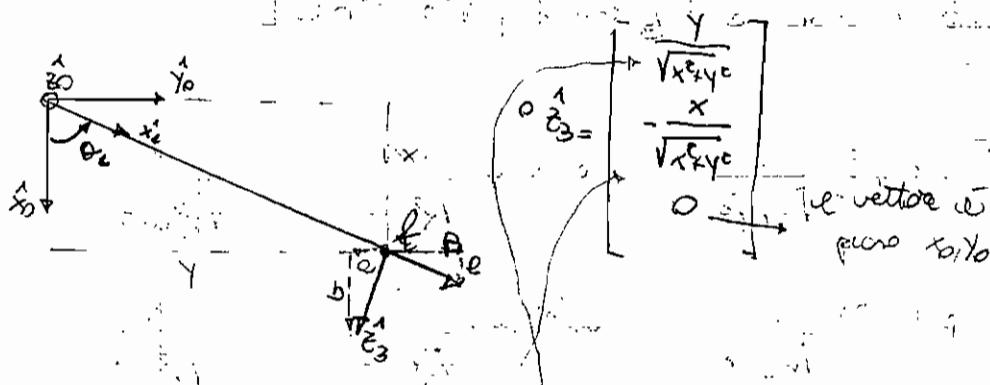
In questo caso la soluzione del coseno è facile e quindi non dovrà escludere con disegni.

Sia dunque il punto dello spazio generato nel seguente modo:  $\vec{x} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \Phi \end{bmatrix}$  con  $\Phi = \Theta_3$

Osservando queste informazioni siamo in grado di trasformare le coordinate.

$$\text{Per prima cosa si ha: } {}^0R = \begin{bmatrix} {}^0x_3 & {}^0y_3 & {}^0z_3 \end{bmatrix}.$$

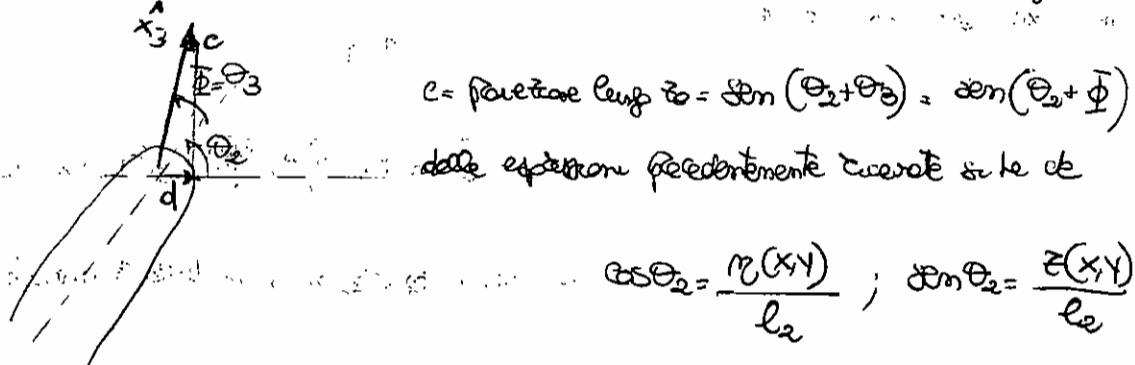
$\Rightarrow {}^0z_3$ : versore uscente dall'asse 3



$$X : \sqrt{x^2+y^2} = a : 1 \Rightarrow a = \frac{X}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$Y : \sqrt{x^2+y^2} = b : 1 \Rightarrow b = \frac{Y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\Rightarrow {}^0x_3$ : versore diretto lungo l'asse di simmetria del blocco 3. Proiettandolo lungo l'asse z è sul piano.



$$\cos \theta_2 = \frac{r(x,y)}{l_2}; \sin \theta_2 = \frac{z(x,y)}{l_2}$$

$$c = \sin \theta_2 \cos \phi + \cos \theta_2 \sin \phi = \frac{z(x,y) \cos \phi + \sin \phi \frac{r(x,y)}{l_2}}{l_2} = d(x,y, \phi)$$

$${}^0x_3^1 = \begin{bmatrix} \beta(x,y,\phi) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \beta(x,y,\phi) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ d(x,y,\phi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} d &= \cos(\theta_2 + \theta_3) = \cos(\theta_2 + \phi) = \cos \theta_2 \cos \phi - \sin \theta_2 \sin \phi = \\ &= \frac{r(x,y)}{l_2} \cos \phi - \frac{z(x,y)}{l_2} \sin \phi = \beta(x,y,\phi) \end{aligned}$$

Scomponiamo  $\beta$  rispetto ad x ed y come mostrato nella figura precedente.

$$e: \beta = x : \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow e = \beta(x,y,\phi) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f: \beta = y : \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow f = \beta(x,y,\phi) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

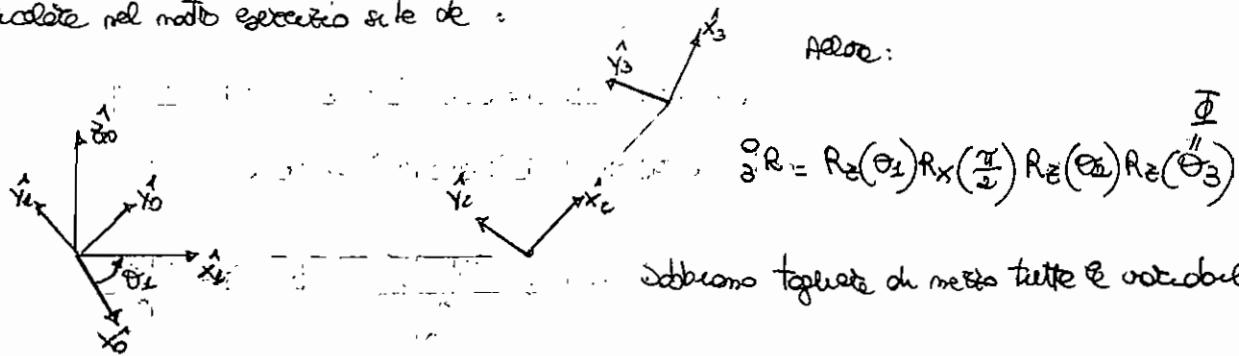
A questi punti riceviamo le  $\overset{\circ}{\gamma}_B$  con le quali si calcola il prodotto vettoriale:

$$\overset{\circ}{\gamma}_B^T = \begin{bmatrix} \beta(x,y,\phi) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \alpha(x,y,\phi) \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \\ \beta(x,y,\phi) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \alpha(x,y,\phi) \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \\ \alpha(x,y,\phi) & \beta(x,y,\phi) & 0 & z(x,y) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Riceviamo perciò metrice con un ulteriore metodo più immediato.

Le metrice di rotazione si può ottenere per una sequenza approssimata di rotazioni per ogni motore.

In particolare nel modo esercizio si ha che:



$$R_z(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin \theta_1 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_z(\theta_2) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{\eta(x,y)}{l_2} \\ \sin \theta_2 = \frac{z(x,y)}{l_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\eta(x,y)}{l_2} & \frac{z(x,y)}{l_2} & 0 \\ \frac{z(x,y)}{l_2} & \frac{\eta(x,y)}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A questo punto possiamo trovarci le geometrie inverse. Scuteremo un ulteriore metodo.

Però per confronto fra le metà di trasformazione saperebbero:

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ c_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right\} \rightarrow \theta_1 = \text{atome}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \text{atome}(y, x)$$

Se cosa significa  $x=y=0$  si verifica solo se  $l_1=l_2$ . In questo caso ci sono infinite soluzioni possibili per  $\theta_1$ .

$$\left. \begin{array}{l} c_1(l_2 c_2) + c_2 l_1 = x \\ s_1 l_2 = z(x,y) \end{array} \right\} \rightarrow c_2 = \frac{x - c_1 l_1}{c_1 l_2} = \frac{x - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} l_1}{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} l_2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - l_1}{l_2}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{z(x,y)}{l_2}$$

$$\theta_2 = \text{atome}\left(\frac{z(x,y)}{l_2}, \frac{\sqrt{x^2+y^2} - l_1}{l_2}\right) = \text{atome}\left(z(x,y), \sqrt{x^2+y^2} - l_1\right) = \text{atome}\left(z(x,y), \rho(x,y)\right)$$

In questo caso non avremo mai coordinate. Andremo da  $\theta_3$

$$\left. \begin{array}{l} s_{23} = \alpha(x,y, \Phi) \\ c_{23} = \beta(x,y, \Phi) \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_2 + \theta_3 = \text{atome}(\alpha(x,y, \Phi), \beta(x,y, \Phi)) \quad \text{ma } \theta_3 = \underline{\Phi} \quad \dots$$

- Se dato  $\vec{\Phi}$  coni ergo che  $x_3$  è il peso di elettrone (in setteza  $\vec{\Phi} = \vec{\Theta}_2 \vec{\Theta}_3$  del problema precedente). Il procedimento di risoluzione è esattamente analogo:

$${}^0 R_3 = R_z(\Theta_2) R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) R_z(\Phi)$$

Procediamo come fare per eliminare le variabili dello spazio dei punti.

$${}^0 T_3 = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \Phi & -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \Phi & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \Phi & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \Phi & \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \\ \sin \Phi & \cos \Phi & 0 & z(x,y) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

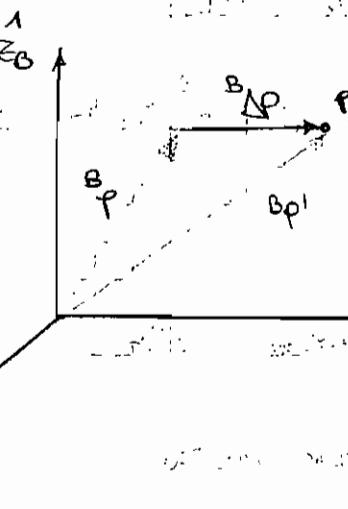
Per punto riguarda le variabili che  $\Theta_2$  è fatto come fissa. Infine si ha che

$$\begin{cases} \sin \Phi \\ \cos \Phi \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi = \Theta_2 + \Theta_3 \\ \Rightarrow \Theta_3 = \Phi - \Theta_2 \end{cases}$$

## VELOCITÀ DI UN NEMATOTORO

La velocità è data da  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$  (velocità scalare)

In realtà non ci occupiamo di velocità scalare ma di velocità vettoriale perché ci muovono nello spazio.



Velocità vettoriale del punto P desiderata

Rispetto a B è:

$${}^B v_{P,B} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B \Delta p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B p(t+\Delta t) - {}^B p(t)}{\Delta t}$$

Questo è che la velocità delle velocità sono un sette in punto differente di vettore.

Ora troviamo si le di  ${}^B v_{P,B} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t}$

ELEMENTI SCALARI

$$\begin{bmatrix} p_x(t+\Delta t) - p_x(t) \\ p_y(t+\Delta t) - p_y(t) \\ p_z(t+\Delta t) - p_z(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \\ \frac{\Delta p_z}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = {}^B \dot{p}$$

Avendo così le derivate delle componenti del vettore posizione.

La notazione che usiamo è giustificata dal fatto che la velocità di un punto è strettamente legata alle teorie di scienze per misurare le

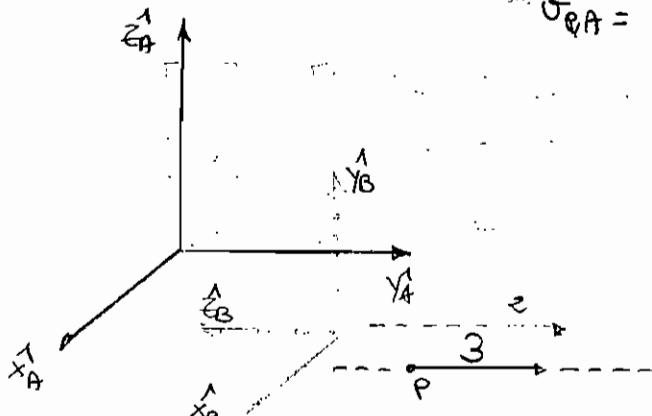
$${}^A v_{P,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ORIGINI VERSO B

Immaginiamo ora di B come B

Se un movimento nelle stesse direzioni di B con velocità 2.

$${}^A v_{B,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Ha forza sulle Terre B e verso di capire a de velocità si ordina al punto P:

$${}^A\mathbf{J}_{P,B} = {}^A\mathbf{J}_{P,A} - {}^A\mathbf{J}_{B,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il vettore di lo ottenuto è la differenza di velocità fra Terra B ed A rispetto ad A.

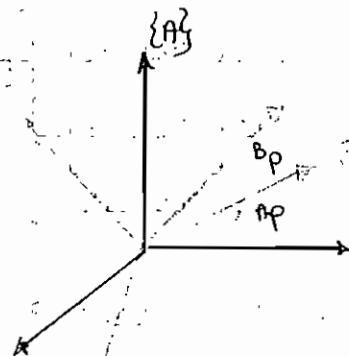
Un acceleratore può un B però vedo altre componenti. Infatti:

$${}^B\mathbf{J}_{P,B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Quindi è anche importante specificare rispetto a quale riferimento devo la velocità.

Le scienze più volte che nasce è passato da una descrizione all'altra.

Una situazione di questo tipo la dobbiamo già trattare nel caso:



$${}^A\mathbf{J} = {}^B\mathbf{R} {}^B\mathbf{J}$$

Potrei voler scrivere se parla di VETTORI LIBERI in quanto non è importante il punto di applicazione né per passare da un riferimento

all'altro devi conoscere esclusivamente una metàce di vettore e non come avviene

per il vettore di posizione con una metàce di trasformazione omogenee.

OBIETTIVO: ricavate in automatico  ${}^B\mathbf{J}_{P,B}$  dato  ${}^A\mathbf{J}_{P,B}$

SOLUZIONE:

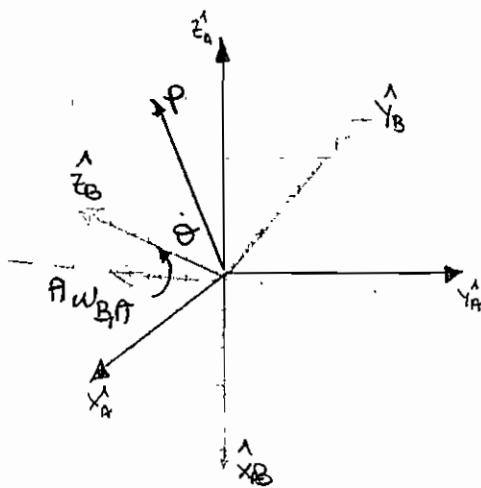
$${}^B\mathbf{J}_{P,B} = {}^B\mathbf{R} {}^A\mathbf{J}_{P,B} = {}^B\mathbf{R}^T {}^A\mathbf{J}_{P,B} = \mathbf{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right)^T {}^A\mathbf{J}_{P,B} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T {}^A\mathbf{J}_{P,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Spesso useremo una notazione ancora più compatta: indicheremo le velocità  $\vec{v}_P$ . In questo caso come terza di riferimento si usano le terne universale rispetto alle quali vengono eseguite tutte le misurazioni: tipicamente le terne base:

$$\vec{v}_P := \vec{v}_{P0}; \quad {}^A\vec{J}_P := {}^A\vec{J}_{P0} = {}^A\vec{R} \cdot \vec{v}_{P0}; \quad \vec{v}_{PA} := \vec{v}_{P0A} = {}^A\vec{R} \cdot \vec{v}_{PA}$$

#### ► VELOCITÀ ANGOLARE



Le terne  $\{\vec{v}\}$  sta rispetto alle terne  $\{A\}$   
ottenendo un'area di rotazione ( $\theta$ ).

Definisco un vettore  $w$  definito lungo l'asse di rotazione.  
dobbiamo anche dire rispetto a chi avviene la rotazione  
e rispetto a chi consideriamo la rotazione:  ${}^A\vec{w}_{B,A}$

$$|{}^A\vec{w}_{B,A}| = \theta \rightarrow \text{VELOCITÀ ANGOLARE}$$

$$\text{In generale } {}^A\vec{w}_{B,A} = \vec{\theta} \vec{k}$$

Tipicamente si indica  ${}^A\vec{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$  ed  ${}^A\vec{w}_{B,A} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$ . Allora si ottiene che:

$${}^A\vec{w}_{B,A} = \vec{\theta} \vec{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\theta} k_x \\ \vec{\theta} k_y \\ \vec{\theta} k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \text{ da cui} \begin{cases} w_x = \vec{\theta} k_x \\ w_y = \vec{\theta} k_y \\ w_z = \vec{\theta} k_z \end{cases}$$

Poiché  $\vec{\theta}$  è una velocità essa sarà anche un vettore: se  $\vec{k}$  è scelto nel senso delle dita essa sarà positivo.

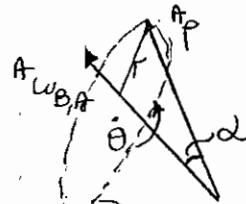
→ si formano le velocità lineare del punto in un sistema di riferimento rotante.

Nel diagramma precedente immaginiamo il punto P simile a  $\Omega$  per le  $\{B\}$ .

$${}^B \dot{\omega}_{P,B} = {}^B \dot{\rho} = 0 \rightarrow \text{il punto non si muove rispetto ad } B$$

$$|{}^A \dot{\omega}_{P,A}| = r \cdot \dot{\theta} = r |{}^A \omega_{B,A}| =$$

$$= |{}^A \rho| \text{ sema } |{}^A \omega_{B,A}|$$



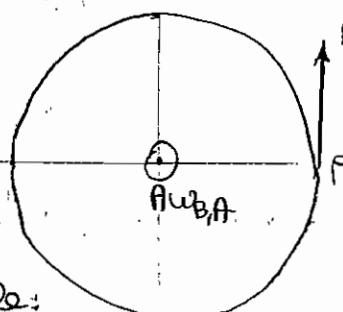
arcoferente rettore del punto e  
di raggio  $r$

Per scoprire durata e verso del vettore velocità

guardiamo il tutto dall'alto:

Ma allora semplicemente:

$$\underline{{}^A \dot{\omega}_{P,A} = {}^A \omega_{B,A} \times {}^A \rho}$$



(distingue si è  ${}^A \omega_{B,A}$  si è  
al vettore  $P$ )

Continua a valere la stessa regola:

non posso eseguire operazioni tra vettori se questi non sono riferiti allo stesso di riferim.

Allora puoi accadere di dover calcolare:

$$\underline{{}^A \dot{\omega}_{P,A} = {}^A \omega_{B,A} \times ({}^B R \cdot {}^B \rho)}$$

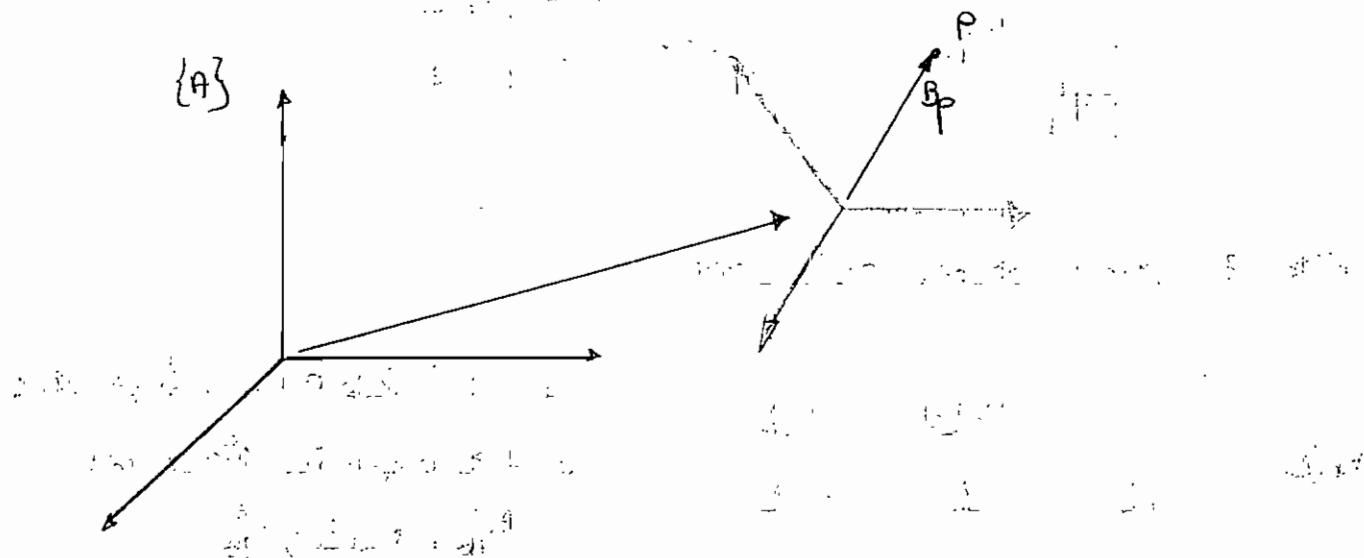
punto accade in punto si può potrebbe di obbligare l'indicazione  ${}^B \rho$  dato che  $P$  è simile a  $\{B\}$ .

Anche per le velocità angolari usiamo le stesse notazioni visto per le velocità lineari.

$$\omega_A := {}^0 \omega_{A,0}; \quad {}^B \omega_A = {}^B \omega_{A,0} = {}^0 R \cdot {}^0 \omega_{A,0}; \quad \omega_{A,B} := {}^0 \omega_{A,B}$$

Implicitamente stanno sempre efferendo da onde le velocità angolari sono vettori liberi

► COMPOSIZIONE DI VELOCITÀ LINEARI ED ANGOLARI



la base  $\{B\}$  è un'onda rotante rispetto ad  $\{A\}$  ed il punto  $P$  è in movimento rispetto alla base  $\{B\}$ . OBJETTIVO: determinare  ${}^A\dot{\gamma}_{PA} = ?$

PREREQUISITI:

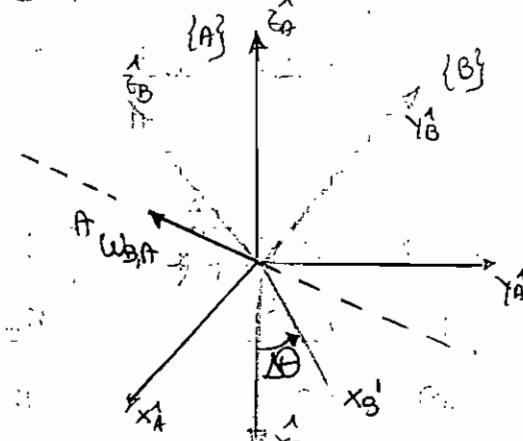
D) Derivate di metàce di rotazione

${}^A\dot{\gamma}_B$ . Perché può esser necessario che due torre siano in movimento rispetto

$x_B'$  è la posizione del vettore  $x_B$  dopo un tempo  $\Delta t$  di rotazione

delle torre  $\{B\}$  attorno all'asse  
di rotazione.

$$R(t) \triangleq {}^A_R; \quad R(t+\Delta t) \triangleq {}^A_R'$$



Allora:

$$\frac{{}^A_R - {}^A_R}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^A_R' - {}^A_R}{\Delta t}$$

Se possibile è calcolato  ${}^A\dot{\gamma}_B$ . Lo faccio attraverso le definizioni:

$${}^A_R = [{}^A x_B | {}^A y_B | {}^A z_B]$$

Concentrazione sul versore  $x$ .

$${}^A \dot{x}_B = R_k(\Delta\theta) {}^A \dot{x}_B \quad \text{con } \Delta\theta \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\Delta\theta = 1 \\ \sin\Delta\theta = \Delta\theta \end{array} \right.$$

AD ESEMPIO QUESTO DELL'  
ROTATORE ASS-ANGOLARE

$$R_k(\Delta\theta) = \begin{bmatrix} k_x^2\Delta\theta + c\theta & k_xk_y\Delta\theta - k_yS\theta & k_xk_z\Delta\theta + k_yS\theta \\ k_yk_x\Delta\theta + k_zS\theta & k_y^2\Delta\theta + c\theta & k_yk_z\Delta\theta - k_xS\theta \\ k_zk_x\Delta\theta - k_yS\theta & k_yk_z\Delta\theta + k_xS\theta & k_z^2\Delta\theta + c\theta \end{bmatrix} \quad \Delta\theta \ll 1 \quad \cos\theta \approx 1$$

Allora la matrice di rotazione si semplifica come:

$$R_k(\Delta\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -k_z\Delta\theta & k_y\Delta\theta \\ k_z\Delta\theta & 1 & -k_x\Delta\theta \\ -k_y\Delta\theta & k_x\Delta\theta & 1 \end{bmatrix}$$

Perciò per lo stesso ragionamento per ottenere  
gli ultimi componenti ottengono che:

$${}^A \dot{y}_B = R_k(\Delta\theta) {}^A \dot{y}_B$$

$${}^A \dot{z}_B = R_k(\Delta\theta) {}^A \dot{z}_B$$

$$\text{Allora in sostanza } {}^A_B R = R_k(\Delta\theta) \begin{bmatrix} {}^A \dot{x}_B & {}^A \dot{y}_B & {}^A \dot{z}_B \end{bmatrix} = R_k(\Delta\theta) {}^A_B R$$

$${}^A_B \dot{R} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_k(\Delta\theta) {}^A_B R - {}^A_B R}{\Delta t} = {}^A_B R \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{R_k(\Delta\theta) - I_3}{\Delta t} =$$

$$= {}^A_B R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{I_3}{\Delta t} \right) \begin{bmatrix} 0 & -k_z\Delta\theta & k_y\Delta\theta \\ k_z\Delta\theta & 0 & -k_x\Delta\theta \\ -k_y\Delta\theta & k_x\Delta\theta & 0 \end{bmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 0 & -k_z \frac{\Delta\theta}{\Delta t} & k_y \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ k_z \frac{\Delta\theta}{\Delta t} & 0 & -k_x \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ -k_y \frac{\Delta\theta}{\Delta t} & k_x \frac{\Delta\theta}{\Delta t} & 0 \end{bmatrix} {}^A_B R =$$

Punto  
Centro  
di  
Torsione  
LA  
MATRICE

$$= \begin{bmatrix} 0 & -k_z \dot{\theta} & k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} & 0 & -k_x \dot{\theta} \\ -k_y \dot{\theta} & k_x \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} {}^A_B R = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} {}^A_B R = S({}^A \omega_{BA}) {}^A_B R$$

VETTORE GENERICO

Consideriamo il prodotto

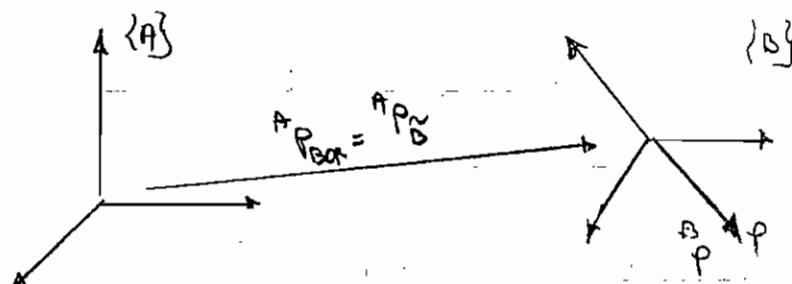
$$S({}^A \omega_{BA}) {}^A P = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_y p_z - w_z p_y \\ w_z p_x - w_x p_z \\ w_x p_y - w_y p_x \end{bmatrix} :$$

$$= \vec{e} \cdot \vec{v} \text{ prodotto vettoriale} = \underline{{}^A \omega_{BA} \times {}^A P}$$

$$B_A^R = S(Aw_{BA})_B^R$$

$$S(\overset{A}{w}_{B,A})^P = \overset{A}{w}_{B,A} \times \overset{A}{P} = \text{sezione} \text{ } \text{lineare} \text{ } \text{del} \text{ } \text{punto} \text{ } P, \text{ } \text{della} \text{ } \text{direzione} \text{ } \text{delle} \text{ } \text{Percorribilità}$$

Bonomo de a considera le problemi definitio



$\{B\}$  wette de Experiments  $\{A\}$

$${}^A\overline{J}_{PA} = {}^A\dot{P} \quad \text{ma seppiamo che} \quad {}^A\overline{P} = \frac{{}^A}{B} T {}^B\overline{P}$$

"Hilberts post to be deleted can settle a To Sentence case".

$$f_p = \frac{f}{B} R^{Bp} + f_{p_{BCR}}$$

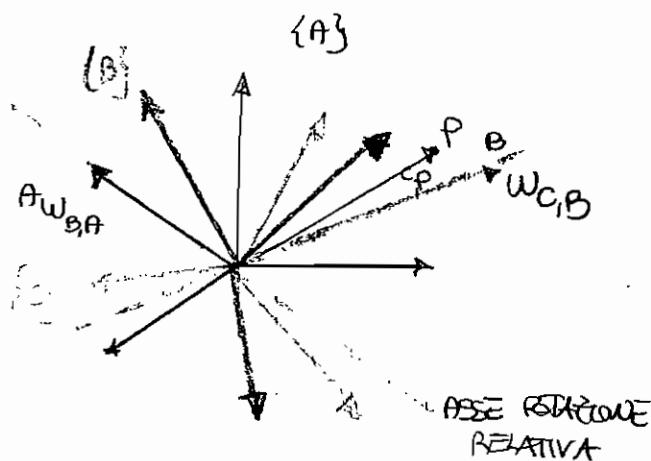
Succeso però esistono le celle che dettano  
per il resto del mondo per fare molto

Analizziamo il significato delle termini.

- ③: le relazioni del punto P con le rette delle Teoforee delle  $\{B\}$  rispetto ad  $\{A\}$
  - ④: le relazioni di P con le rette dei suoi movimenti rispetto alle rette  $\{B\}$
  - ⑤: questi componenti compate in virtù delle rette delle  $\{B\}$  rispetto ad  $\{A\}$ .

se uno de tè momenti non è finito, se Götterdämmerung supererà l'esperienza  
della saluté.

Vediamo che cosa in cui non combiniamo salvo che sia la somma delle velocità assolute.



In sostanza  $\{B\}$  dà l'aspetto ad  $\{A\}$   
e  $\{C\}$  dà l'aspetto ad  $\{B\}$

Vogliamo combinare queste informazioni per ottenere  $A^P$  se  $A$  è velocità assoluta complessiva.

Si suppone di avere un punto simile con le terre  $C$ .

$$A^P = \frac{A^R}{B} B^R C^P = C^R P$$

Calcoliamone le componenti:

$$A^P_{TA} = A^P = C^R C^P + C^R C^P = C^R C^P + 0 \rightarrow \text{il punto è simile con } \{C\} \text{ e quindi le sue velocità } C^P = 0$$

$$\textcircled{1} \quad A^P = S(A_w_{BA}) C^R P = A_w_{BA} \times C^R P$$

Ripetiamo i calcoli in modo leggermente diverso sfruttando le componenti della metà di rotazione. Allora:

$$\begin{aligned} A^P_{TA} &= A^P = \frac{A^R}{B} C^R C^P + \frac{A^R}{B} C^R C^P + \frac{A^R}{B} C^R C^P = S(A_w_{BA}) \underbrace{\frac{A^R}{B} C^R C^P}_{\text{VETTORE}} + B \cdot (B_w_{CB}) \frac{B^R C^P}{C} = \\ &= A_w_{BA} \times \left( \frac{A^R}{B} C^R C^P \right) + B \cdot \left( B_w_{CB} \times \frac{B^R C^P}{C} \right) \rightarrow \text{queste potranno però in questo caso} \\ &\quad \text{indipendibili per le condizioni!} \end{aligned}$$

Allora:

$$\textcircled{2} \quad A^P = A_w_{BA} \times C^R P + \frac{A^R}{B} B_w_{CB} \times \frac{A^R}{B} C^R P =$$

$$= A_w_{BA} \times C^R P + \frac{A^R}{B} B_w_{CB} \times \frac{A^R}{B} C^R P = (A_w_{BA} + \frac{A^R}{B} B_w_{CB}) \times C^R P$$

Il raggruppamento è sempre possibile anche se  $A$  non è ortogonale

In GENERALE:  $A(P,Q) \neq A_P \times A_Q$   
È VERO SOLO SE  $A$  È ORTOGONALE

Confronto B ① con B ②:

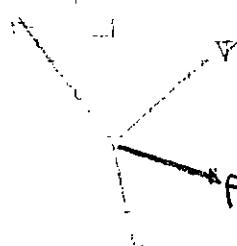
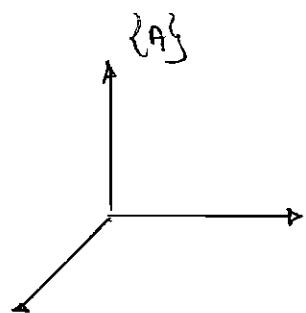
- compare in entrambe le forme  $\overset{A}{\omega}_C^P$ . Altre possi scritte de

$$\overset{A}{\omega}_{C,A} = \overset{A}{\omega}_{B,A} + \overset{B}{\omega}_C^B \overset{B}{\omega}_{C,B} = \overset{A}{\omega}_{B,A} + \overset{A}{\omega}_{C,B}$$

risultato è risultato uguale al sommarsi dopo aver decritto tutto rispetto allo stesso esperimento.

#### ► ACCELERAZIONE

Ci poniamo lo stesso problema. Che si combinano accelerazioni lineare e angolare?



{B} è ruota e trascina rispetto ad {A} di moto accelerato.  
Anche P se muove di moto accelerato.

$\overset{A}{\ddot{\omega}}_{P,A}$  = accelerazione del punto P rispetto ad A descritta rispetto ad A.

VETTORE  $\overset{A}{\ddot{\omega}}_{P,A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overset{A}{\omega}_{P,A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overset{A}{\omega}_{P,A}(t+\Delta t) - \overset{A}{\omega}_{P,A}(t)}{\Delta t}$

Anche l'accelerazione è un vettore libero. Per effettuare cambia di esperimento sono sempre sufficiente notizie di rotazione.

VETTORE LIBERO  $\overset{A}{\ddot{\omega}}_{B,A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overset{A}{\omega}_{B,A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overset{A}{\omega}_{B,A}(t+\Delta t) - \overset{A}{\omega}_{B,A}(t)}{\Delta t}$

Anche in questo contesto vettore B rettificatore compatta.

$$\dot{\omega}_B = \overset{C}{\dot{\omega}}_{B,C}$$

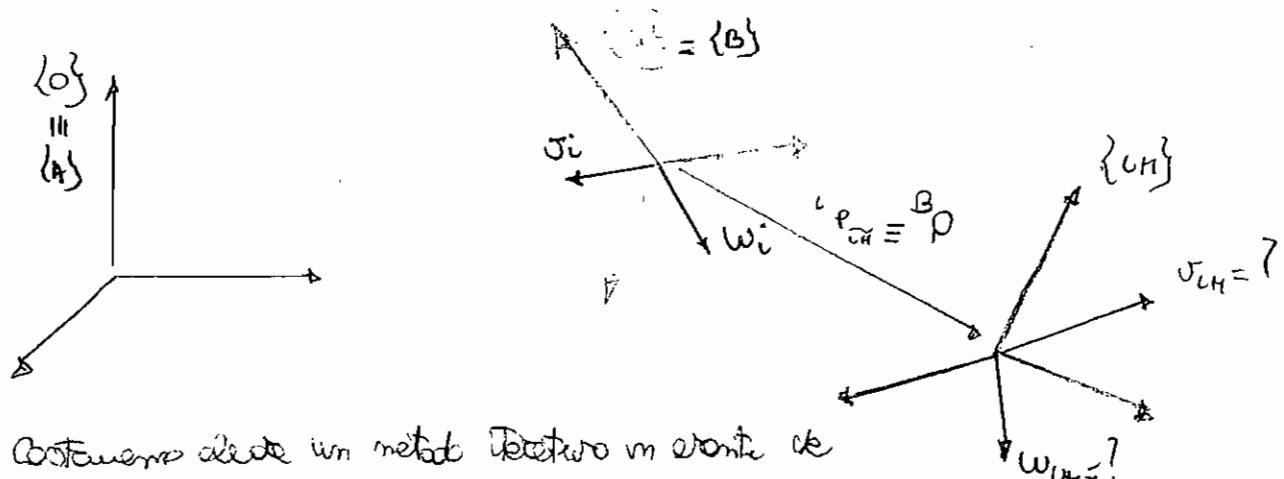
Determinare le velocità di avvio fissa per il rotolo.

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_{PA}^* &= \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_P + \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_B^P + \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_B^B {}_B^A J_{PB} + \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_B^B {}_B^A J_{PB} + \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_B^B {}_B^A J_{PB} = \\
 &= \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_P + \dot{\omega}_{BA}^* \times S(\dot{\omega}_{BA}) {}_B^A R_P + \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_B^B {}_B^A R_B^B + S(\dot{\omega}_{BA}) {}_B^A R_B^B {}_B^A R_B^B + \\
 &\quad {}_B^A R_B^B {}_B^A J_{PB} = \text{è pedotto vettoriale} \\
 &\quad \text{non è commutativo} \\
 &= \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_P + \dot{\omega}_{BA}^* \times (\dot{\omega}_{BA} \times {}_B^A R_P) + \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_B^B {}_B^A J_{PB} + \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_B^B {}_B^A J_{PB} + \\
 &\quad {}_B^A R_B^B {}_B^A J_{PB} + {}_B^A J_{BA}^* = \\
 &= \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_P + \dot{\omega}_{BA}^* \times (\dot{\omega}_{BA} \times {}_B^A R_P) + 2 \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_B^B {}_B^A J_{PB} + {}_B^A R_B^B {}_B^A J_{PB} + {}_B^A J_{BA}^*
 \end{aligned}$$

- Combinazione di accelerazioni angolari.

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_{CA}^* &= \dot{\omega}_{BA}^* + {}_B^A R_B \dot{\omega}_{CB} + {}_B^A R_B \dot{\omega}_{CB} = \dot{\omega}_{BA}^* + S(\dot{\omega}_{BA}) {}_B^A R_B \dot{\omega}_{CB} + {}_B^A R_B \dot{\omega}_{CB} = \\
 &= \dot{\omega}_{BA}^* + \dot{\omega}_{BA}^* \times {}_B^A R_B \dot{\omega}_{CB} + {}_B^A R_B \dot{\omega}_{CB}
 \end{aligned}$$

## ► CALCOLO DELLE VELOCITÀ DEI BRACCI



Costituendo allestire un metabo' fissa in avanti di rotoli - permette di un blocco che permette di calcolare le velocità dei blocchi successivi.

In generale non è vero  $\sigma_i = {}^0\sigma_{i,0}$  ma è vero la  $i\sigma_i$ . Analogamente per le altre esplichi.

Allora le incognite sono  ${}^{uH}\sigma_{iH}$  e  ${}^{uH}w_{iH}$ . Tutto separato da:

$i\sigma_i = iR {}^0\sigma_{i,0}$  e dunque ottenono delle forme più compatte.

Allora è immediato ricavare per sostituzione da:

$$\underline{{}^0\sigma_{CH_3O}} = \underline{{}^0w_{i,0} \times ({}^0R {}^iP_{iH}) + {}^0R {}^i\sigma_{iH,i} + {}^0\sigma_{i,0}}$$

$$\underline{{}^{uH}\sigma_{iH}} = \underline{{}^{uH}\sigma_{iH,0}} = \underline{{}^{uH}R {}^0\sigma_{iH,0}} = \underline{{}^{uH}R ({}^0w_{i,0} \times {}^0R {}^iP_{iH}) + {}^{uH}R {}^0R {}^i\sigma_{iH,i} + {}^{uH}R {}^0\sigma_{i,0}}$$

$$= \underline{{}^{uH}R ({}^0w_{i,0} \times {}^0P_{iH}) + {}^{uH}R {}^i\sigma_{iH,i} + \dots - {}^{uH}R {}^0R {}^0\sigma_{i,0}} =$$

$$= \underline{{}^{uH}R \left[ {}^0w_{i,0} \times {}^0P_{iH} + {}^i\sigma_{iH,i} + {}^i\sigma_{iH,0} \right]} =$$

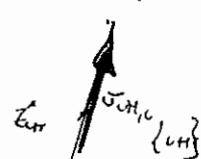
$$= \underline{{}^{uH}R \left( {}^0w_{i,0} \times {}^0P_{iH} \right) + {}^{uH}R {}^i\sigma_{iH,i} + {}^{uH}\sigma_{iH,0}} =$$

$$= \underline{{}^{uH}R \left( {}^0w_{i,0} + {}^iP_{iH} \right) + {}^{uH}R {}^i\sigma_{iH,i} + {}^{uH}\sigma_{iH,0}}$$

$$= \underline{{}^{uH}R \left( {}^0w_{i,0} \times {}^0P_{iH} + {}^0\sigma_{iH,0} \right) + {}^{uH}\sigma_{iH,i}} = \underline{{}^{uH}R \left( {}^0w_i \times {}^0P_{iH} + {}^i\sigma_i \right) + {}^{uH}\sigma_{iH,i}}$$

Ma:  $\Rightarrow$  se il punto è isometrico

$$\left| {}^{uH}\sigma_{iH,i} \right| = d_{iH}$$



Claramente non è possibile

è avere trasferire lungo l'asse  $Z_{iH}$   
e quindi si ottiene  $d$ .

Allora:

$$\underline{{}^{uH}\sigma_{iH,i}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{iH} \end{bmatrix} = \underline{\frac{d_{iH}}{d_{iH}} \underline{{}^{uH}\sigma_{iH}}}$$

2) Se il punto è fisso

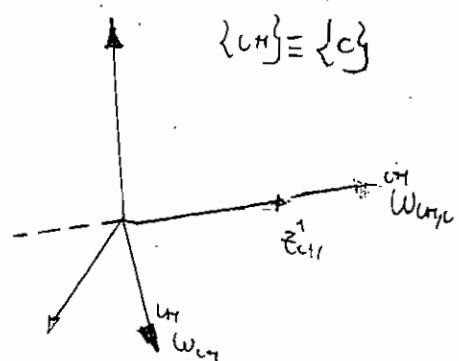
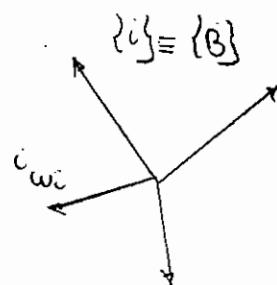
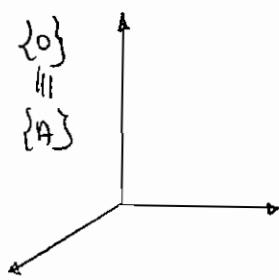
$${}^H \omega_H = 0$$

$\vec{J}$  termine  ${}^H R$  e per che cosa?

$${}^H T = \begin{bmatrix} {}^H R_{0H} & {}^H p_{0H} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{noti dalle geometrie diverse}$$

$${}^H R = {}^H T^T$$

► VELOCITÀ ANGOLARI



$$\text{Se è fisso} \quad {}^H w_{C,H} = {}^H w_{B,H} + {}^H R {}^B w_{C,B}$$



$${}^H w_{H,0} = {}^H w_{0,0} + {}^H R {}^i w_{H,i}$$

$${}^H w_H = {}^H w_{H,0} = {}^H R {}^H w_{H,0} = {}^H R {}^H w_{0,0} + {}^H R {}^H R {}^i w_{H,i}$$

$$= {}^H R {}^H R {}^H w_{0,0} + {}^H R {}^H w_{H,0} = {}^H R {}^H w_{0,0} + {}^H R {}^i w_{H,i} = {}^H R {}^i w_{i,0} + {}^H w_{H,i}$$

Alice

$${}^H w_H = {}^H R {}^i w_i + {}^H w_{H,i}$$

Analizziamo le fibre iterate in funzione del tipo di giunto che compone la trave e le forme  $\psi$ .

D) GIUNTO ROTATORIO:  $\left[ {}^{(H)}\dot{w}_{uH,i} \right] = \dot{\theta}_{uH}$ , dove  $\dot{\theta}$  è verso perpendicolare alla  $\vec{e}_{uH}$

In realtà è l'unica rotazione capace più comune solo attorno alle basi di trave.

Allora in definitiva si ha che:

$${}^{(H)}\dot{w}_{uH,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{uH} \end{bmatrix} = \dot{\theta}_{uH} \vec{e}_{uH}^{uH,1}$$

Quindi sostituendo allora di:

$$\boxed{{}^{(H)}\dot{w}_{uH} = {}^{(H)}R^i \dot{w}_i + \dot{\theta}_{uH} \vec{e}_{uH}^{uH,1}}$$

D) GIUNTO PRISMATICO:  ${}^{(H)}\dot{w}_{uH,i} = 0$  infatti non sono consentite rotazioni lungo ne solo traslazioni - Allora

$$\boxed{{}^{(H)}\dot{w}_{uH} = {}^{(H)}R^i \dot{w}_i}$$

Allora è abbastanza facile che  $\dot{w}_i$  sia il vettore tangente alla base del trapezio, a meno di una trasformazione.

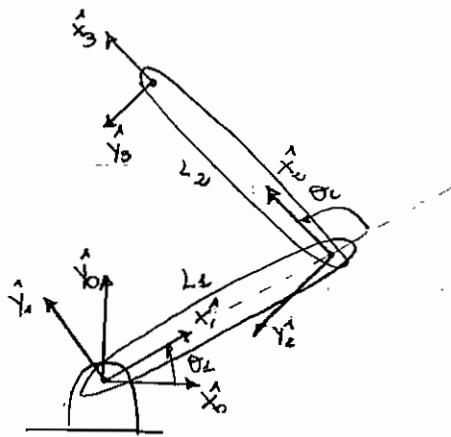
Così i due reticolati trascrivono a determinate  ${}^N\dot{\tau}_N$  ed  ${}^N\dot{w}_N$ . In genere però sono interposti alle travi desiderate rispetto alle forme di base.

$$\dot{\tau}_N = {}_N^O R {}^N \dot{\tau}_N$$

ed

$$\dot{w}_N = {}_N^O R {}^N \dot{w}_N$$

ESEMPIO DI APPLICAZIONE



i	d <sub>i</sub>	q <sub>ri</sub>	d <sub>i</sub>	θ <sub>i</sub>
1	0	0	0	θ <sub>1</sub>
2	0	L <sub>1</sub>	0	θ <sub>2</sub>
3	0	L <sub>2</sub>	0	0

- caratteristiche di tensione  
utensile

$${}^0 T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1 T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2 T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Geodinamica del sistema di testa

• forza, fissa - • forza giro rotabile  
esterna di

$${}^H w_H = {}^0 R {}^1 w_1 + {}^0 \dot{\theta}_H {}^1 \dot{r}_H$$

$${}^H \tau_H = {}^0 R ({}^0 \tau_0 + {}^0 w_0 \times {}^0 r_H)$$

$$\therefore {}^1 \dot{w}_1 = {}^0 R {}^0 \dot{w}_0 + {}^0 \dot{\theta}_1 {}^1 \dot{r}_1 = \emptyset + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1 \dot{\theta}_1 = {}^0 R ({}^0 \tau_0 + {}^0 w_0 \times {}^0 r_H) = \emptyset$$

$$\therefore {}^2 \dot{w}_1 = {}^1 R {}^1 \dot{w}_1 + {}^1 \dot{\theta}_2 {}^2 \dot{r}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = {}^2\omega_2$$

ORIGINE TERZA  
2 RISULTATO

$${}^2\ddot{\theta}_2 = {}^2R \left( {}^2\ddot{\theta}_1 + {}^1\omega_1 \times {}^1\dot{r}_2 \right) = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} L_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ L_1 c_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3\ddot{\theta}_3 = {}^3R {}^2\ddot{\theta}_2 + {}^3\ddot{\theta}_3 \frac{{}^3\dot{r}_3}{L_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^2\ddot{\theta}_2 = {}^2\ddot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^3\ddot{\theta}_3 = {}^3R \left( {}^2\ddot{\theta}_2 + {}^2\omega_2 \times {}^2\dot{r}_3 \right) = I_3 \left( \begin{bmatrix} L_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ L_1 c_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} L_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ L_1 c_2 \dot{\theta}_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) L_2 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Ottieni il settore complesso:

$${}^3\ddot{\theta}_3 = \begin{bmatrix} {}^3\ddot{\theta}_3 \\ {}^3\ddot{\theta}_3 \\ {}^3\omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 s_2 \\ L_1 c_2 + L_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

JACOBIANO

GEOMETRICO

$$\Rightarrow {}^3J_m = J(\bar{q}) \dot{q}$$

det E matrice di jacobiano  
trascurare soluzioni E  
relativa nelle spazio vettori  
delle var. Generali

$${}^3\overline{\omega}_3 \Rightarrow {}^0\overline{\omega}_3 = {}^0R {}^3\overline{\omega}_3$$

$${}^3\overline{w}_3 \Rightarrow {}^0\overline{w}_3 = {}^0R {}^3\overline{w}_3$$

$${}^0R = {}^0R {}^1R {}^2R {}^3R =$$

$$\overline{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} {}^0\overline{\omega}_3 \\ - \\ {}^0\overline{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 s_{12} - l_1 s_1 & -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} + l_1 c_1 & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

DIVERSA DA  
QUELLA TROVATA PER  
 $\overline{\sigma}_3$  INFATTI  
DIFENDE  
RISERETTO  
ALLA  
TERNA DI DESCRIZIONE

Per parametri di indice  $\overline{\sigma}_3 = \overline{\sigma}_g(q) \dot{q}$

Sopra le pochi che descrivono che non portano informazioni pedi composta da valori  
nella stessa omessa considerando grande B dimensione. Ad esempio nel nota  
caso B descrivono meno di:

$$\overline{\sigma}_g(q) = \begin{bmatrix} -l_2 s_{12} - l_1 s_1 & -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} + l_1 c_1 & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$${}^A\overline{\sigma}_m = {}^A\overline{\sigma}_g(q) \dot{q} \quad {}^B\overline{\sigma}_m = {}^B\overline{\sigma}_g(q) \dot{q} \quad \text{la relazione di }(k, \text{ due descrizioni})$$

$${}^B\overline{\sigma}_m = \begin{bmatrix} {}^B\overline{\omega}_m \\ - \\ {}^B\overline{w}_m \end{bmatrix} = {}^B\overline{\sigma}_g(q) \dot{q}$$

$$\begin{aligned} {}^B\overline{\omega}_m &= {}^BR {}^B\overline{\omega}_m \\ {}^B\overline{w}_m &= {}^BR {}^B\overline{w}_m \end{aligned} \quad \rightarrow {}^A\overline{\sigma}_m = \begin{bmatrix} {}^A\overline{\omega}_m \\ - \\ {}^A\overline{w}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A\overline{\omega}_m \\ {}^B\overline{\omega}_m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A\overline{\omega}_m \\ {}^B\overline{\omega}_m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A\overline{\sigma}_g(q) \\ {}^B\overline{\sigma}_g(q) \\ 0 \end{bmatrix} = {}^A\overline{\sigma}_g(q) \dot{q}$$

$$- {}^A\overline{\sigma}_g(q) \dot{q}$$

Questo dimostra che

$${}^A\overline{\sigma}_g(q) = \begin{bmatrix} {}^A\overline{\sigma}_g(q) \\ {}^B\overline{\sigma}_g(q) \\ 0 \end{bmatrix}$$

► VALUTAZIONE INVERSA DEI JACOBIANI GEOMETRICI

$J(q)$  cioè costante alle forme  $\dot{q}_i$ . In genere

$$\bar{J}_m = \begin{bmatrix} J_1(q) & J_2(q) & \cdots & J_n(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{w_1}(q) & J_{w_2}(q) & \cdots & J_{w_m}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} \quad \dot{q}_i = \begin{cases} \theta_i \\ d_i \end{cases}$$

matrice di m<sup>o</sup> jacobiano  
 $6 \times N$

$$J_{w_i}(q) = \begin{cases} \text{stabile} \Rightarrow \overset{\circ}{\Sigma}_i = \overset{\circ}{\Omega}_R \cup \overset{\circ}{\Sigma}_i \\ \text{instabile} \Rightarrow \emptyset \end{cases}$$

$$\bar{J}_{w_i}(q) = \begin{cases} \text{stabile} \Rightarrow \overset{\circ}{\Sigma}_i \times [\overset{\circ}{\Omega}_H - \overset{\circ}{\Omega}_i] \\ \text{instabile} \Rightarrow \overset{\circ}{\Sigma}_i \end{cases}$$

► LO JACOBIANO ANALITICO

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} p \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} \quad \text{dove } p, k \text{ identificano il punto nello spazio operatore del manipolatore}$$

ORIENTAMENTO IN FORMA MINIMA

Surfex

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f_x = P_x(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ f_y = P_y(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ f_z = P_z(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ \alpha = \alpha(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ \beta = \beta(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ \gamma = \gamma(q_1, q_2, \dots, q_m) \end{cases}$$

Consideriamo le componenti in movimento. Allora è utile scrivere prendendo il punto di tempo cioè  $\dot{q}_x = p_x(q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t))$  e così via. Dovremo trovare tutte le componenti del vettore:

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= \frac{\partial p_x}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial p_x}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial p_x}{\partial q_m} \frac{dq_m}{dt} = \\ &= \frac{\partial p_x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial p_x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial p_x}{\partial q_m} \dot{q}_m\end{aligned}$$

Definiamo allora il nostro vettore:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial q_1} & \frac{\partial p_x}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial p_x}{\partial q_m} \\ \frac{\partial p_y}{\partial q_1} & \frac{\partial p_y}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial p_y}{\partial q_m} \\ \frac{\partial p_z}{\partial q_1} & \frac{\partial p_z}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial p_z}{\partial q_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix}$$

JACOBIANO ANALITICO  
 $\frac{t}{\partial q_i(q)} \dot{q}$   
 SERVE PER CALCOLARE  
 LE DERIVATE PRIME  
 DELLE COMPONENTI DEL  
 PUNTO NELLO SPazio  
 ORETICO

Che relazione esiste fra le Jacobiano analitico e geometrico?

Immediatamente non possono essere le stesse cose altrimenti si ottiene dalla relazione precedente che:

$$\overline{J} = \dot{\overline{x}}$$

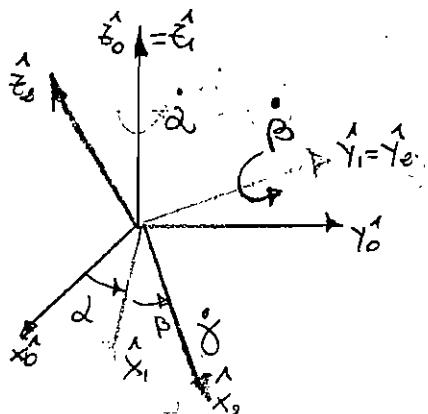
Immedio-  $\overline{J} = \begin{bmatrix} \dot{J} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}$  ;  $\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \ddot{k} \end{bmatrix}$

Sotto UGUALI

Quando in generale la non uguaglianza fra i due Jacobiani è determinata dagli ultimi tre termini del vettore  $\overline{J}$  ed  $\dot{\overline{x}}$ : infatti  $w \neq k \rightarrow$  (determinante del vettore generico)

#### ► RELAZIONE TRA $w$ E $k$

Sceglimo una notazione menome: estraziono quelle per coordinate di Euler del tipo  $\tilde{x}'y'z'$ :



L'ultima istante ottenuta dall'angolo  $\gamma$  non viene riportata per non sovraccaricare le cose.

Ricordiamo che le tasse  $\{3\}$  non è fisso ma ruota con velocità angolare  $w$  e quindi gli  $\alpha$  e  $\beta$  cambiano istantaneamente. Volevamo cioè quanto vale la velocità angolare complessiva notata parametri  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$

$$\begin{aligned} w_3 = {}^0\omega_{30} &= {}^0\omega_{1,0} + {}^0\omega_{2,1} + {}^0\omega_{3,2} = \dot{\alpha} \tilde{z}_0 + {}^1_R {}^0 \omega_{2,1} + {}^2_R {}^0 \omega_{3,2} = \\ &= \dot{\alpha} \tilde{z}_0 + R_z(\alpha) \dot{\beta} \tilde{y}_1 + R_z(\alpha) R_y(\beta) \dot{\gamma} \tilde{x}_2 = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cd & -sd & 0 \\ sd & cd & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cd & -sd & 0 \\ sd & cd & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cb & 0 & sb \\ 0 & 1 & 0 \\ -sb & 0 & cb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta sd \\ \beta cd \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cd cb & -sd & cd sb \\ sd cb & cd & sd sb \\ -sb & 0 & cb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta sd \\ \beta cd \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\gamma} cd cb & \dot{\gamma} cd sb \\ \dot{\gamma} sd cb & \dot{\gamma} sd sb \\ -\dot{\gamma} sb & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} cd cb - \beta sd \\ \dot{\gamma} sd cb + \beta cd \\ \dot{\alpha} - \dot{\gamma} sb \end{bmatrix}$$

Riviamo la relazione precedente in forma matricale.

$$\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & \omega_2 \beta \\ 0 & \omega_1 & -\omega_2 \beta \\ 1 & -\omega_2 & -\omega_1 \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \tilde{T}(k) \dot{\mathbf{c}}$$

$\tilde{T}(k) \rightarrow$  matrice penrose delle rotazioni menute

Allora trovando alle relazioni per Jacobiano si ha che:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{J}_g(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = T(k) \dot{\mathbf{x}} = T(k) \tilde{J}_g(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

Inoltre seppiamo che  $\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \omega \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & T(k) \end{bmatrix}}_{T(k)} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = T(k) \dot{\mathbf{x}}$

Allora abbiamo ottenuto che

$$\boxed{\tilde{J}_g(\mathbf{q}) = T(k) J_g(\mathbf{q})}$$

La struttura della matrice  $T(k)$  dipende dalla natura menuta dell'orientamento scelto.

#### ➤ USI DELLO SPACIO BIANCO GEOMETRICO

1)  $\tilde{\sigma} = \tilde{J}_g(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$

2) per introdurre un vettore uscito dallo spazio di SO(3) quindi di un MANIFOLD:

"La configurazione del manifoldo per le pule il corpo allo Jacobiano geometrico se ebbesse gara completezza generetica".

Im corrispondente delle singolarità può accadere che:

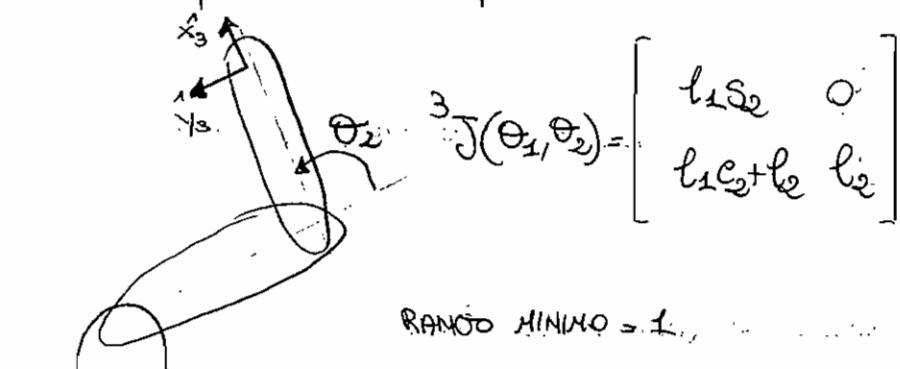
- 1) il mancato perde di mobilità: non è possibile sempre effettuare sbavamento articolario dell'ultima testa. (però già di ebbete)
- 2) se posso avere infinite soluzioni delle cernetiche inverse;
- 3) a grande velocità dello spazio spaziale corrispondono velocità infinitamente piccole nello spazio dei punti.

+  
→ IMPORTE

Le singolarità cernetiche sono classificate in:

- 1) Singolarità sulla frontiera dello spazio raggiungibile - (il mancato è tutto dritto e il tetto è regolare ma le teste)
- 2) Singolarità interne allo spazio di moto raggiungibile - (in generale si trova quando si raggiunge un perfetto allineamento fra due teste).

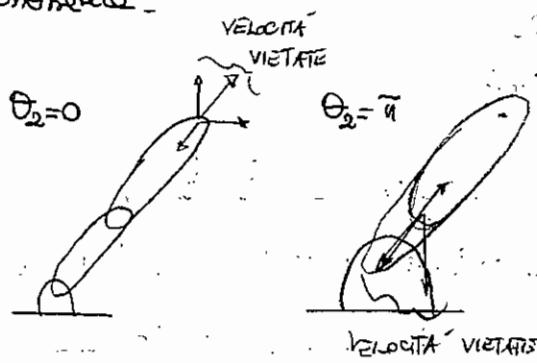
► ESEMPIO: prendiamo un mancato 2R.



$$\text{RANGO MINIMO} = 1$$

$$\Delta = l_1 l_2 S_2 \neq 0 \text{ se } \sin \theta_2 \neq 0 \rightarrow \text{In questo caso il tetto} = 2$$

Se  $\theta_2 = 0$  oppure  $\theta_2 = \pi$  il corpo si allinea ad  $\mathbf{z}$  e prende forma in condizione di singolarità cernetica.



Quelle forme sono singolarità sulla frontiera dello spazio di moto raggiungibile.

Nel caso in cui  $l_1 = l_2$  e  $\theta_2 = \pi$  la singolarità cernetica porta anche ad avere infinite soluzioni delle cernetiche inverse.

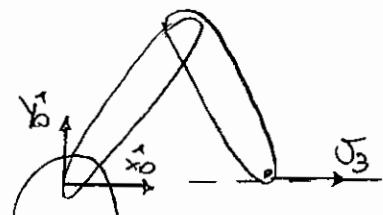
le singolarità essenziali non dipendono dal Jacobiano Soltanto se solo ed esclusivamente delle singolarità del meccanismo.

$$\mathcal{J}(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_2 & -l_2 s_2 \\ l_1 c_1 + l_2 c_2 & l_2 c_2 \end{bmatrix}$$

Calcolando il determinante di questo Jacobiano si ottiene:

$$J = l_1 l_2 s_1 s_2 \quad \text{con il risultato ottenuto considerando il Jacobiano rispetto alle coordinate cartesiane, 3}$$

Vediamo se si soddisfano le ipotesi ③.



$$V_3 = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{La velocità è finita ma estremamente piccola}$$

$$\dot{V}_3 = \begin{bmatrix} \dot{V}_{3x} \\ \dot{V}_{3y} \end{bmatrix} = \mathcal{J}_g(\theta_1, \theta_2) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \text{Calcolando la velocità sui punti orari } \theta_1, \theta_2$$

Dobbiamo calcolare la matrice inversa dello Jacobiano geometrico:

$$\dot{q} = \mathcal{J}(q) \ddot{V} \quad \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 s_1 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_2 s_{12} & l_1 c_{12} + l_2 s_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{3x} \\ \dot{V}_{3y} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{l_2 c_{12} \dot{V}_{3x}}{l_1 l_2 s_2} = \frac{c_{12} E}{l_1 s_2} \quad \dot{\theta}_2 = -\frac{c_{12} E}{l_1 s_2}$$

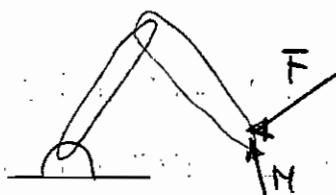
In coincidenza con le singolarità essenziali sentenza il che implica  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \rightarrow \infty$

Allora per evitare che le velocità diventino infinite occorre impostare velocità di punto estremamente piccole.

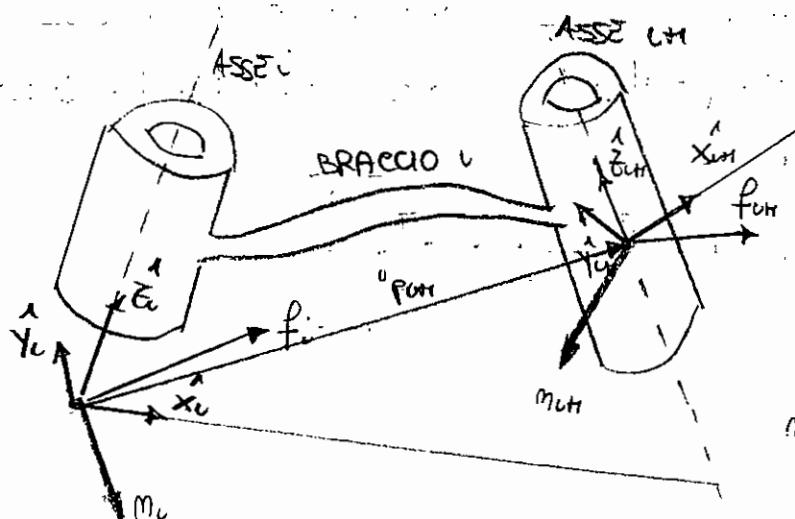
Questo vale anche quando siamo nella vicinanza delle singolarità perché finita e comunque sempre molto piccola.

Quando progettiamo le traiettorie dobbiamo evitare i punti di singolarità casistica.

## ► STATICA DEI MANIPOLATORI



Forza  $F$  e coppia  $M$  agiscono sull'ultima tenuta di rotazione volutamente. Le forze e le coppie che vengono esercitate su tutti i punti del manipolatore, insieme con le considerate, si oppongono fermamente.



Ora sono un'algebraia matematica dell'indotto per ricavare le forze e le coppie.

$f_i$  = forza del braccio  $i$  esercitata sul braccio  $i$ .

$m_i$  = coppia del braccio  $i$  esercitata sul braccio  $i$ .

Affinché vi sia statica è necessario il bilancio di forze e coppie all'interno di ogni singolo braccio. Dunque:

$$\begin{cases} \sum f_i = 0 \\ \sum m_i = 0 \end{cases}$$

DESCRIVI LA RETTA  
DI ROTAZIONE  
CORRENTE

RETTRA  
DI ROTAZIONE  
CORRENTE

$f_i = f_{ui} = 0 \Rightarrow f_i = f_{ui} = 0$

$f_i = f_{ui} = R^{ui} f_{ui}$

NOTA  $f_{ui}$  VALUTO ALL'INDIETRO LA FORZA  $f_i$

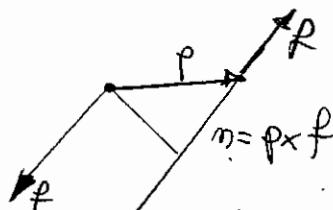
Quando  $f_{ui}$  ed  $f_i$  dovranno essere orientate allo stesso modo (dovranno essere parallele)

$$m_i - m_{ui} + p_{ui} \times (-f_{ui}) = 0$$

↓

$$m_i - m_{ui} - p_{ui} \times f_{ui} = 0 \Rightarrow$$

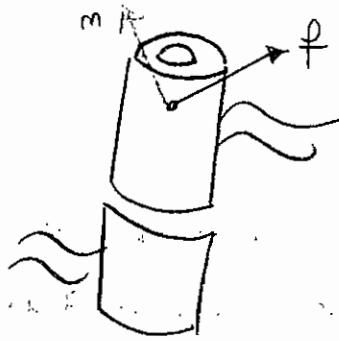
$$m_i = R^{ui} m_{ui} + p_{ui} \times f_i$$



DERIVATA DA (1)

Le forze di cui parlo sono ordinate e calcolate intorno al punto in modo parallele.

## 1) punto stabile



- le forze  $f$  agisce in corrispondenza con il punto e quindi ha un effetto nullo sulle forze reali (il più è forse più importante il punto)
- le corpi  $m$  influenzano il centro di punto. In realtà le forze lungo l'asse  $x$  non è conoscibile del tutto perché a tempo le brecce oppure è controllabile delle risorse lo stesso vale per l'asse  $y$ . Viceversa può essere utile dare esempi controllabili del centro di punto.

$$z_i = \mathbf{m}_i^T \mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

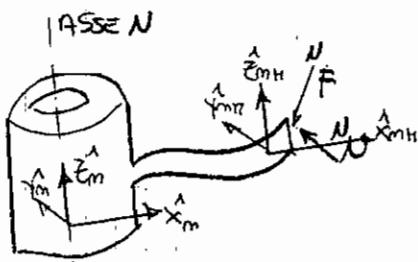
## 2) punto dinamico:

- l'effetto delle corpi deve bilanciare in modo autoetatico delle risorse
- le componenti delle forze lungo  $x$  ed  $y$  sono pure bilanciate l'unica componente significativa è quella lungo  $z$ :

$$z_i = \mathbf{q}_i^T \mathbf{z}_i$$

$q_i < \theta_i$   
di

$z_i <$   
forza se punto dinamico  
corpi se punto stabile



Per applicare le formule precedenti occorre trasportare forze e couple sulla terza N.

Tipicamente se forze sono terze fattorie nello stesso senso terziale orientato per semplicità come la terza V.

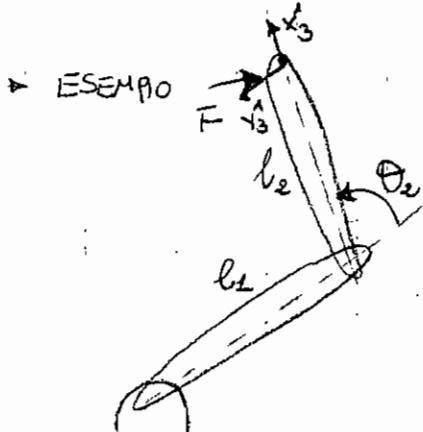
$$\left\{ \begin{array}{l} f_m^N = \mu_H R^{mH} f_{mH} \\ f_m^H = -f_m^N \end{array} \right.$$

$$m_m^N = \mu_H R^{mn} m_{mH} + p_{mH} \times f_m^N$$

Punto passo da compiere per trasportare le forze e le couple dell'organo terziale alla base N.

- $\frac{mH}{f_{mH}} = -\frac{N}{F}$  (è semplicemente la forza di cerniere da cui oppone alle forze esterne in punto non d'ancoraggio eccetto se con le forze esterne  $F$  riduce effetto)

$$\rightarrow \frac{N}{f_{mH}} = -\frac{N}{F}$$



$${}^3F = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e sia } {}^3N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dunque non si oppone couple}$$

$${}^3P_3 = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^3m_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto effettuiamo l'algoritmo ricorsivo per il calcolo delle altre componenti.

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} {}^2f_2 = {}^2R {}^3P_3 \\ {}^2m_2 = {}^2R {}^3m_3 + {}^2P_3 \times {}^2f_2 \end{array} \right.$$

ma  ${}^2R = I_3$  in quanto terza 3 è terzo e terzo è terzo  
orientamento. Allora:

$$(1) {}^2f_2 = {}^3P_3 = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) {}^2m_2 = 0 + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 f_y \end{bmatrix}$$

Passiamo all'ultimo punto:

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} {}^1f_1 = {}^1R {}^2f_2 \\ {}^1m_1 = {}^1R {}^2m_2 + {}^1P_e \times {}^1r_1 \end{cases} \quad \text{me} \quad {}^1R = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi se la de:

$$\textcircled{1} \quad {}^1f_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2 f_x + s_2 f_y \\ -s_2 f_x - c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^1m_1 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 f_y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -c_2 f_x + s_2 f_y \\ -s_2 f_x - c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix}}_{\textcircled{*}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 f_y \end{bmatrix} + \textcircled{*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_2 f_y - l_1 s_2 f_x - l_1 c_2 f_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

se questa relazione vero estende le componenti di verso bilanciate del mobile. Ma due punti rotabili e quindi il mobile deve compiere solo le componenti delle coppe:

$$\begin{cases} c_1 = -l_2 f_y - l_1 s_2 f_x - l_1 c_2 f_y \\ c_2 = -l_2 f_y \\ c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Jg(\theta_1, \theta_2)^T \cdot f_3}}$$

Questo risultato di dobbiamo trarre per questo memplate e valido sempre. Quindi:

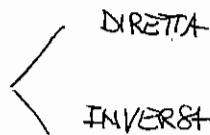
$$\boxed{\bar{c} = Jg(q)^T \cdot f_{mH}}$$

Nel cap in cui non nota le forze esterne opposte alle terze legge cioè  $f_{mH}$ , allora si dice che:

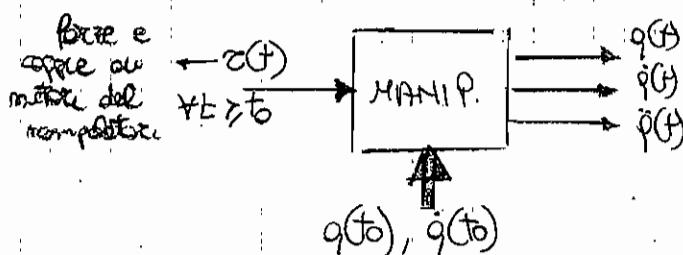
$$\boxed{\bar{c} = Jg(q)^T \cdot f_{mH}}$$

## DINAMICA DEL MANIPOLATORE

DINAMICA DEL MANIPOLATORE



Nelle dirette si fa un manipolatore di cui è nota la legge motrice attraverso il quale si prevede



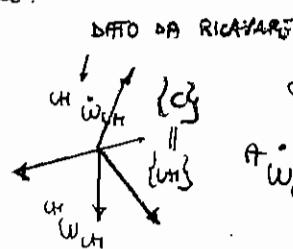
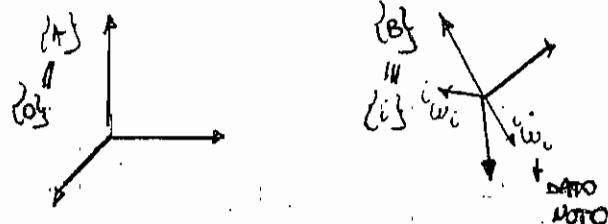
il moto è solitare l'andamento temporale delle  
variazioni di posizione delle coordinate piane  
e delle derivate seconde

La risoluzione di questo problema avviene per via  
numerica.

Nelle inverse si suppongono noti gli andamenti  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$ ,  $\ddot{q}(t)$  e in cerca di solitare l'andamento  
di  $\ddot{q}(t)$  sempre per  $t \geq t_0$ .

Possendo di apprezzare maggiori dei problemi legati al moto. Abbiamo allora introdotto il concetto di accelerazioni  
lineari ed angolari di un manipolatore.

Abbiamo già introdotto i concetti nel caso di corpi rigidi.



Si ha quindi che:

$$\begin{aligned} \ddot{w}_{C,A} &= \ddot{w}_{B,A} + R_B^A \ddot{w}_{C,B} + \\ &+ R_{B,A} \times R_B^A \ddot{w}_{C,B} \end{aligned}$$

Ricerciamo quindi in questo caso delle espressioni iterative:

$$\overset{CH}{\dot{w}}_{0,H,0} = \overset{CH}{\dot{w}}_{0,0} + \overset{CH}{R} \overset{CH}{\dot{w}}_{H,i} + \overset{CH}{w}_{0,0} \times \overset{CH}{R} \overset{CH}{\dot{w}}_{H,i} \quad \text{dunque:}$$

$$\begin{aligned} \overset{CH}{\dot{w}}_{H,i} &= \overset{CH}{R} \overset{CH}{\dot{w}}_{0,0} = \overset{CH}{R} \overset{CH}{R} \overset{CH}{\dot{w}}_{0,0} + \overset{CH}{R} \overset{CH}{R} \overset{CH}{\dot{w}}_{H,i} + \overset{CH}{R} \overset{CH}{R} (\overset{CH}{\dot{w}}_{0,0} \times \overset{CH}{R} \overset{CH}{\dot{w}}_{H,i}) = \\ &= \overset{CH}{R} \overset{CH}{\dot{w}}_i + \overset{CH}{\dot{w}}_{H,i} + \overset{CH}{R} \overset{CH}{R} \overset{CH}{\dot{w}}_{0,0} \times \overset{CH}{R} \overset{CH}{R} \overset{CH}{\dot{w}}_{H,i} = \\ &= \overset{CH}{R} \overset{CH}{\dot{w}}_i + \overset{CH}{\dot{w}}_{H,i} + \overset{CH}{R} \overset{CH}{\dot{w}}_0 \times \overset{CH}{w}_{H,i} \end{aligned}$$

Per:

i) punto rotativo: se te de:

$$\begin{aligned}\overset{CH}{\omega}_{CH,i} &= \dot{\theta}_{CH} \overset{CH}{\epsilon}_{CH} \\ \overset{CH}{\dot{\omega}}_{CH,i} &= \ddot{\theta}_{CH} \overset{CH}{\epsilon}_{CH}\end{aligned}$$

Siempre el eje de rotación es constante durante el movimiento:

$$\overset{CH}{\ddot{\omega}}_{CH} = \overset{CH}{i} R^C \overset{CH}{\dot{\omega}}_i + (\overset{CH}{i} R^C \overset{CH}{\omega}_i) \times (\dot{\theta}_{CH} \overset{CH}{\epsilon}_{CH}) + \ddot{\theta}_{CH} \overset{CH}{\epsilon}_{CH}$$

ii) punto fijo:

$$\left. \begin{aligned}\overset{CH}{\omega}_{CH,i} &= 0 \\ \overset{CH}{\dot{\omega}}_{CH,i} &= 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow \overset{CH}{\dot{\omega}}_{CH} = \overset{CH}{i} R^C \overset{CH}{\dot{\omega}}_i$$

Lo mismo se aplica para el punto B en el sistema local (invierte el procedimiento)

$${}^A \dot{\omega}_{P,A} = {}^A \dot{\omega}_{B,A} + {}^A \omega_{B,A} \times {}^A R^B \dot{\omega}_{P,B} + {}^A R^B \dot{\omega}_{P,B} + {}^A \dot{\omega}_{B,A} + {}^A R^B p + {}^A \omega_{B,A} \times ({}^A \omega_{B,A} \times {}^A R^B p)$$

Posteriormente se obtiene el resultado:

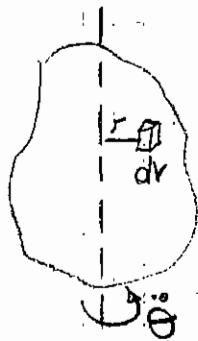
iii) punto fijo:

$$\begin{aligned}\overset{CH}{\dot{\omega}}_{CH} &= \overset{CH}{i} R \left( \overset{CH}{\dot{\omega}}_i + \overset{CH}{\dot{\omega}}_i \times \overset{CH}{p}_{CH} + \overset{CH}{\omega}_i \times (\overset{CH}{\omega}_i \times \overset{CH}{p}_{CH}) \right) + \overset{CH}{\omega}_{CH} \times \overset{CH}{d}_{CH} \overset{CH}{\epsilon}_{CH} + \\ &+ \overset{CH}{d}_{CH} \overset{CH}{\epsilon}_{CH}\end{aligned}$$

iv) punto rotativo:

$$\overset{CH}{\dot{\omega}}_{CH} = \overset{CH}{i} R \left[ \overset{CH}{\dot{\omega}}_i + \overset{CH}{\dot{\omega}}_i \times \overset{CH}{p}_{CH} + \overset{CH}{\omega}_i \times (\overset{CH}{\omega}_i \times \overset{CH}{p}_{CH}) \right]$$

Al punto punto possiamo introdurre nell'ordine del momento d'inerzia tutte le componenti individuali delle forze.



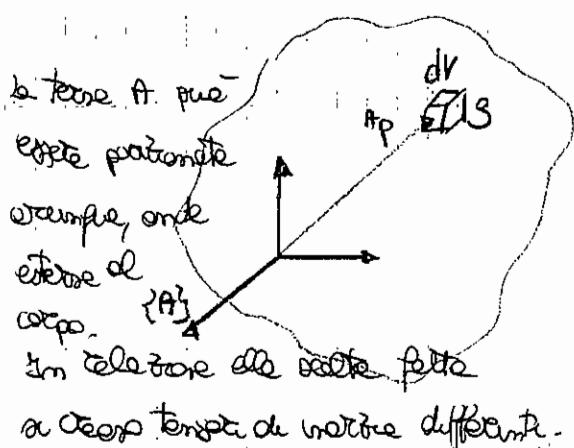
Se corpo rigido ruota attorno ad un asse fisso con velocità  $\vec{\theta}$

$$J\vec{\theta} = E_i \text{ ci } \leftarrow \text{ somma delle possibili opere agenti sul}\newline \text{momento di rotazione}\newline \text{del corpo}$$

$$J = \int_V r^2 g dV \text{ metà inferiore di}\newline \text{un volumetto del corpo rigido}$$

MASSETTO DEL VOLUMETTO

Nel nostro caso gli asse di rotazione non sono fatti. Dobbiamo estrarre passo passo incrementando la metà delle TEUSCE DI INERZIA



$$\vec{r}_P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\text{In perpendicolare all'asse di} \quad I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) g dV \Rightarrow \text{momento di rotazione del corpo rispetto}\newline \text{all'asse x delle forze reali}$$

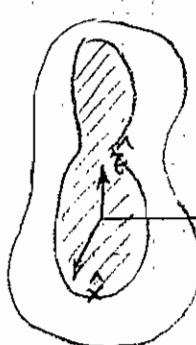
$$I_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) g dV \Rightarrow \text{momento di rotazione rispetto all'asse y}$$

$$I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) g dV \Rightarrow \text{momento di rotazione rispetto all'asse z.}$$

$$\text{Gli altri termini: } I_{xy} = I_{yx} = \int_V xy g dV \Rightarrow \text{picchetto di rotazione}$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int_V xz g dV \text{ e così via}$$

④ Esiste sempre una terza specie {<sup>o</sup>A} rispetto alle due il tensore di inerzia risulta una struttura diagonale: in pratica si annullano tutti i prodotti di inerzia. Gli assi di questa terza serie sono detti ASSI PRINCIPALI DI INERZIA mentre i momenti di inerzia che compaiono nel tensore sono detti MOMENTI PRINCIPALI DI INERZIA.



→ i prodotti di inerzia da cancellare sono  $I_{xy}$  e  $I_{xz}$ :

$$I_{xy} = I_{xz} = 0$$

Corpo con simmetria elementare.

Stanchiamo un piano e ve leggono una terza con 2 assi nel piano di simmetria del corpo col loro perpendicolare.

"Se due assi di una terza di riferimento formano un piano di simmetria per le masse del corpo, allora i prodotti di inerzia aventi un indice nelle coordinate perpendicolari al piano di simmetria sono nulli."

③ I momenti di inerzia sono sempre positivi.

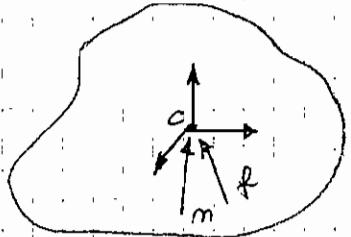
I prodotti di inerzia possono essere sia positivi che negativi.

④ La somma dei tre momenti di inerzia è invariante per modifiche dell'orientamento delle terze di riferimento. (Questo solo è dunque di riferimento a un triplo assi delle terze di riferimento.)

Potrei dimostrarlo se fermassi gli elementi della diagonale del tensore. Si ottiene qualcosa che non dipende dall'orientamento delle terze.

⑤ gli autovettori di un tensore di inerzia sono i momenti principali di inerzia. Gli associati autovettori sono gli assi principali di inerzia.

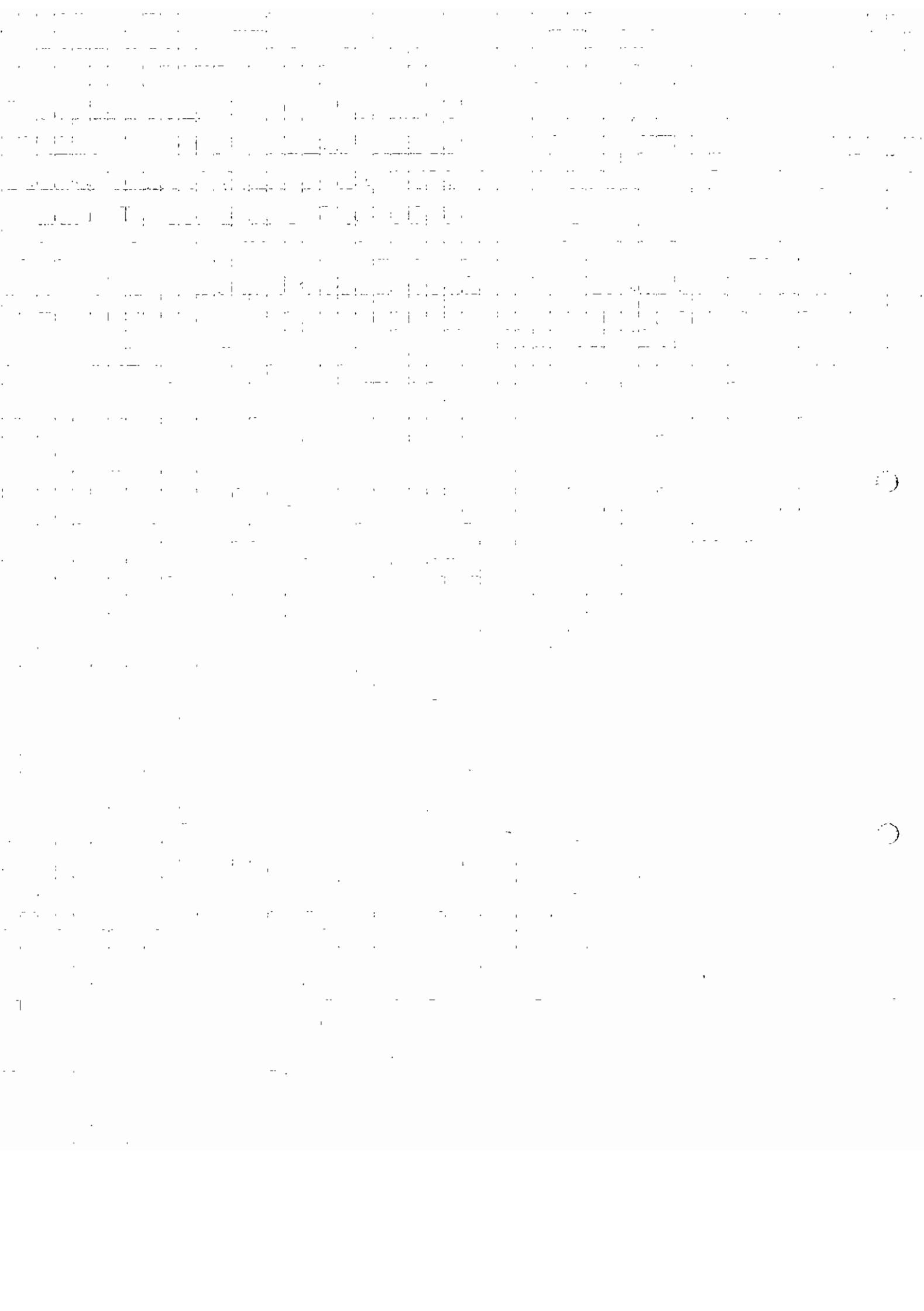
Le equazioni di gyration, notate da cui la riga delle formule di NERZIA e di EULER.



Possiamo dire che sulle particelle del corpo svolte al centro del corpo stesso. Quindi la risultante di tutte le forze agenti sul corpo e le considero applicate sul barycentro. Nello stesso modo faccio con le forze agenti sul corpo.

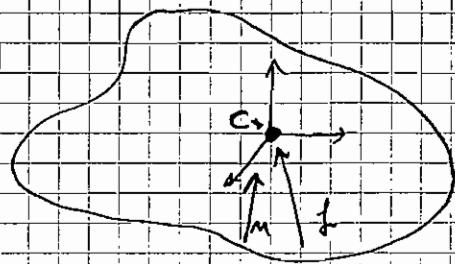
Newton:  $f = m \ddot{r}_c$  caratterizza il movimento lineare

Euler:  $m = I \dot{\omega}_c + \omega_c \times I \omega_c$   
VELOCITÀ ANGOLARE DEL BARYCENTRO RISPETTO AL BARYCENTRO



Equazioni che governano il moto dei corpi rigidi (equazioni di Euler e Newton)

Prendiamo un corpo rigido



Mettiamo un verso pendente del bivento e una  
tela e le componenti relativi col  
corpo.

Calcolo la risultante di tutte le forze che agiscono sul corpo e un momento  
che agisce nel bivento.

Lo stesso faccio con le risultanti di tutte le coppie nel corpo e  
le immagino applicate al bivento.

Formule di Newton

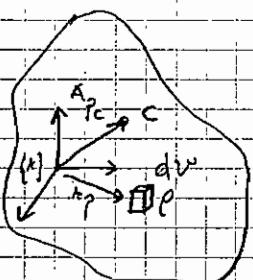
$$F = m \cdot \ddot{v}_c \quad (\text{accelerazione bivento})$$

Formule di Euler

$$M = I \cdot \ddot{\omega}_c \times I_{\text{ext}}$$

tensori di  
inertie  
bivento

Bivento del corpo rigido



$$\rho = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\rho_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}$$

$$\frac{\rho_c}{\rho} = \frac{\int_V \rho \cdot g \, dv}{\int_V \rho \, dv} \Rightarrow \frac{x_c}{x} = \frac{\int_V x \rho \, dv}{\int_V \rho \, dv}$$

E l'integrale di volume  
su tutta la densità. E la massa complessiva del corpo ed è una costante.



Questo esperimento viene svolto in tre parti:

$$x_c = \frac{\int_V x \rho dv}{\int_V \rho dv}, \quad y_c = \frac{\int_V y \rho dv}{\int_V \rho dv}, \quad z_c = \frac{\int_V z \rho dv}{\int_V \rho dv}$$

In molti casi si fa finta che le manopolezioni siano omogenee cioè  $\rho$  è costante  
in tutto il corpo e si lo poniamo partire fuori!

$$x_c = \frac{\cancel{\rho} \cdot \int_V x dv}{\cancel{\rho} \int_V dv} = \frac{1}{V} \cdot \int_V x dv \quad y_c = \frac{1}{V} \int_V y dv \quad z_c = \frac{1}{V} \int_V z dv$$

volume

Il barycentro è una proprietà indipendente dalle scelte delle forme di riferimento; è una proprietà del corpo.

### VEDIAMO COME SI RISOLVE LA DINAMICA INVERSA DI UN MANIPOLATORE

$$F = m \ddot{v}_c \quad (\text{NEWTON})$$

$$N = I \cdot \dot{w}_c + w_c \times I - \dot{w}_c \quad (\text{EULER})$$

accelerazioni e velocità angolari  
del barycentro del corpo

Risolviamo la dinamica inversa mediante una formulazione ricorsiva.

Supponiamo di conoscere  $q(t)$ ;  $\dot{q}(t)$ ;  $\ddot{q}(t) \rightarrow \underline{Y(q, \dot{q}, \ddot{q})}$

Procediamo per passi:

dobbiamo calcolare quattro coppie  
e le posizioni tutti i punti

I) Per prima cosa dobbiamo calcolare tutte le velocità lineari e angolari dei bracci.

$$\begin{aligned} \dot{w}_{i+1} &= iR \cdot \dot{w}_i + \omega_{i+1} \tau_{i+1} \\ v_{i+1} &= iR (i \dot{w}_i + \dot{w}_i \times p_{i+1}) + d_{i+1} \tau_{i+1} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{nel caso generale. A seconda del} \\ \text{giunto specificano gli termini.} \end{array} \right\}$$

II) Inoltre ci occorrono le accelerazioni lineari e angolari.

$$\ddot{w}_{i+1} = iR \ddot{w}_i + i \dot{R} \dot{w}_i \times \omega_{i+1} \tau_{i+1} + \ddot{\omega}_{i+1} \tau_{i+1}$$

$$\ddot{v}_{i+1} = iR (i \ddot{w}_i + \dot{w}_i \times \ddot{p}_{i+1} + \dot{w}_i \times (i \dot{w}_i \times p_{i+1}) + \ddot{v}_i) + 2 \dot{w}_{i+1} \times d_{i+1} \tau_{i+1} + \ddot{d}_{i+1} \tau_{i+1}$$

linee  
zero  
più  
gradi

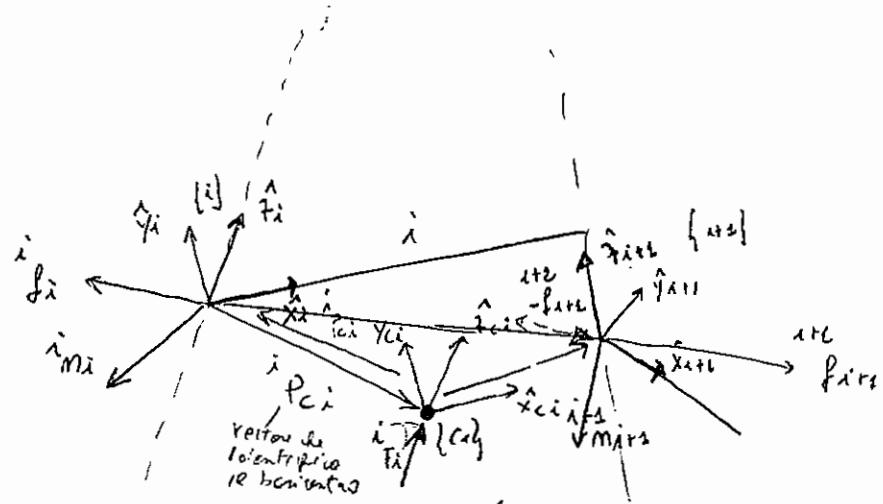


Ipoterremo un  $(\bar{v}_0, \bar{w}_0)$  del primo modo. Conoscendo gli altri due valori ( $v_i$ ,

$$(v_0, w_0) \xrightarrow{q_1, d_1} (v_1, w_1) \xrightarrow{d_2, q_2} (v_2, w_2) = N$$

$$(\dot{v}_0, \dot{u}_0) \xrightarrow{q_1, q_2, \dot{q}_2} (\dot{v}_1, \dot{u}_1) \rightarrow \dots N$$

③ Dobbiamo calcolare velocità lineare e velocità angolare del bocciotto,



In così spodesta del  
barattro primario una tempe orientata come le tempe i

Supponiamo che  
le benzene siano  
qui.

Pertanto  $c_1 R = I_3$  per lo stesso orientamento.

Ora calcoliamo la  $w_c$  (velocità angolare del baricentro) e riprendo l'esperienza di prima e le riedotto.

$$m_{ci} = \frac{c_i}{iR} \cdot m_{ci} + 0$$

È una identità

Il termine con  $\dot{m}$  è nullo perché le due  
tasse restano uguali

=  $m_{ci}$  È ovvio tutti i punti del corpo  
restano con la stessa velocità angolare.

È lo stesso caso perché orientato  
dello stesso modo,

$\vec{u}_i = \vec{u}_i$ . Bisogna rifare i calcoli di prima nell'altra espressione

Perche' non e' l'accelerazione lineare?

$$V_{ci} = \frac{c_i}{R} \left( u_i \times p_{ci} + u_i \times (u_i \times p_{ci}) + v_i \right) + 0$$

$$\text{Conclusion: } \bar{u}_s, \bar{w}_s, \bar{v}_s \text{ are } \xrightarrow{\text{def}} \bar{v}_{CL} \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} N$$

Avendo tutto questo poniamo al punto 4 i falci del forse e la coppia risultante dei vari macci.



$$4) \begin{cases} \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_{ci} \\ \vec{N}_i = c_i \cdot \vec{u}_{ci} + \vec{u}_{ci} \times I_{ci} \cdot \vec{u}_{ci} = (c_i \cdot I_{ci} + \vec{u}_{ci} \times I_{ci} \cdot \vec{u}_{ci}) \end{cases}$$

3

Che troviamo le formule ricorrere per scopre tutte le coppie e le forze di tutti i macini (Ricorsive in avanti).

5) Questo sono i dati indietro: calcoliamo tutte le forze e le coppie su tutti i giunti poiché vogliamo vedere lo sforzo dei motori del manipolatore.

$$\vec{F}_i = \vec{f}_i - \vec{f}_{i+1} = \vec{f}_i - R_{i+1} \cdot \vec{f}_{i+1}$$

$$\boxed{\vec{f}_i = \vec{F}_i + R_{i+1} \cdot \vec{f}_{i+1}}$$

(Dipende dalla forza del giunto precedente e dai contributi inerti)

Ricorsiva retrograda.

$$\vec{N}_i = \vec{m}_i - \vec{m}_{i+1} + (-\vec{P}_{ci}) \times \vec{f}_i + (\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_{ci}) \times (-\vec{f}_{i+1}) =$$

$$\begin{aligned} &= \vec{m}_i - R_{i+1} \cdot \vec{m}_{i+1} - \underbrace{\vec{P}_{ci} \times \vec{f}_i}_{\vec{P}_{i+1} \times \vec{f}_{i+1}} + \underbrace{\vec{P}_{ci} \times \vec{f}_{i+1}}_{\vec{P}_{i+1} \times \vec{f}_{i+1}} = \\ &= \vec{m}_i - R_{i+1} \cdot \vec{m}_{i+1} - \vec{P}_{ci} \times (\vec{f}_i - \vec{f}_{i+1}) - \vec{P}_{i+1} \times \vec{f}_{i+1} \end{aligned}$$

$$\vec{N}_i = \vec{m}_i - R_{i+1} \cdot \vec{m}_{i+1} - \vec{P}_{ci} \times \vec{F}_i - \vec{P}_{i+1} \times \vec{f}_{i+1} - R_{i+1} \cdot \vec{f}_{i+1}$$

$$\boxed{\vec{m}_i = \vec{N}_i + R_{i+1} \cdot \vec{m}_{i+1} + \vec{P}_{ci} \times \vec{F}_i + \vec{P}_{i+1} \times R_{i+1} \cdot \vec{f}_{i+1}}$$

### 6) GIUNTO ROTOIDALE

$$\vec{T}_i = \vec{m}_i \cdot \vec{f}_i$$

In questo caso il motore deve fornire una coppia

### GIUNTO PRISMATICO

$$\vec{T}_i = \vec{f}_i \cdot \vec{f}_i$$

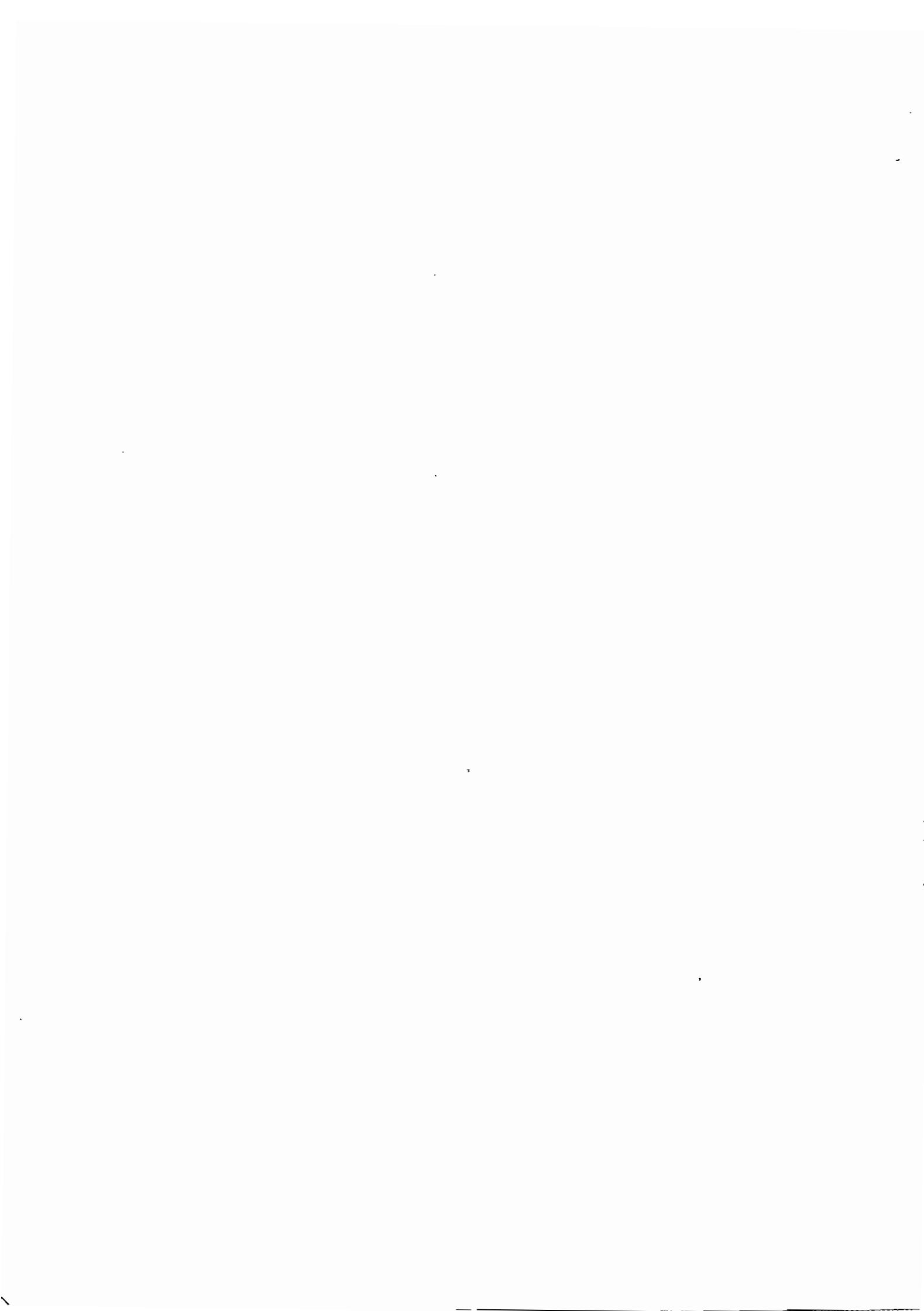
In questo caso il motore deve fornire una forza.

Abbiamo calcolato tutte le coppie e le forze senza considerare  $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$  cioè le forze di gravità.

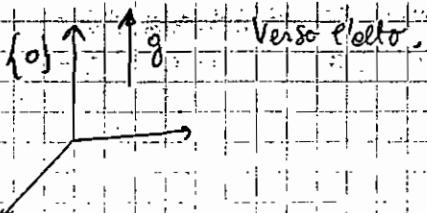
Otelle formule trovate valgono più bene nel vuoto.

Per far sentire al manipolatore la gravità è quello che accelerarlo, in particolare considero una accelerazione di base lineare di  $9,8 \text{ m/sec}^2$ .

$$\vec{v}_0 = \vec{x} \Rightarrow g$$

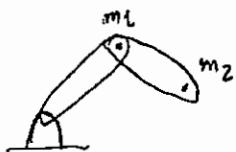


Da che parte è l'accelerazione?



Queste formule iterative ponono anche se non numericamente come si può trovare una espressione simbolica in forma chiusa per le coppie del manipolatore. Però basta un manipolatore con pochi giunti per avere espressioni lunghissime.

Così semplice: mani pedata con 2 bracci.



$$T_2 = m_2 e_2 c_2 \dot{c}_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 e_1 e_2 s_2 \ddot{\theta}_1^2 + m_2 e_2 g c_{12} + m_2 e_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

$$\begin{aligned} T_1 = & m_2 e_1^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 e_1 e_2 c_2 (2 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) e_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 e_1 e_2 s_2 \ddot{\theta}_2^2 - 2 m_2 e_1 e_2 s_2 \dot{e}_1 \dot{\theta}_2 + \\ & + m_2 e_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) e_3 g c_1 \end{aligned}$$

Riusciamo sempre avere queste forme:

$$T = \underbrace{M(q) \ddot{q}}_{\text{Sono forze ed coppie legate ai termini inerti del sistema.}} + \underbrace{V(q, \dot{q})}_{\text{Componenti di forze e coppie dovuti a effetti centrifughi o forze di Coriolis.}} + \underbrace{G(q)}_{\text{Tutti i termini dovuti all'accelerazione di gravità.}} + \underbrace{F(q, \dot{q})}_{\text{Tutte le forze e le coppie dovute agli effetti del manipolatore.}}$$

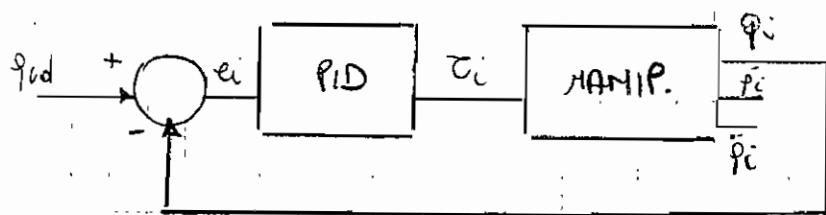
La matrice  $M(q)$  è la matrice di massa. È una matrice simmetrica e definita positiva e quindi è anche invertibile.

N.B.

Per le soluzioni dirette non c'è nemmeno modo di trovare formule per risolverle bisogna solo fare delle simulazioni.



## CONTROLLO A BRACCI INDIPENDENTI:



$$e_i = q_{id} - q_d$$

$$T_i = K_{p,i} e_i + K_{i,i} \frac{e_i}{s} + K_{d,i} \frac{\dot{e}_i}{s}$$

Stiamo lavorando in s.

Per le componenti derivate se uso cose derivate di terz'ordine  $\frac{s}{1+s}$  perché strettamente il controllore diventerebbe di tipo impiegato quando non ho uso un (integrande) derivate tipo s.

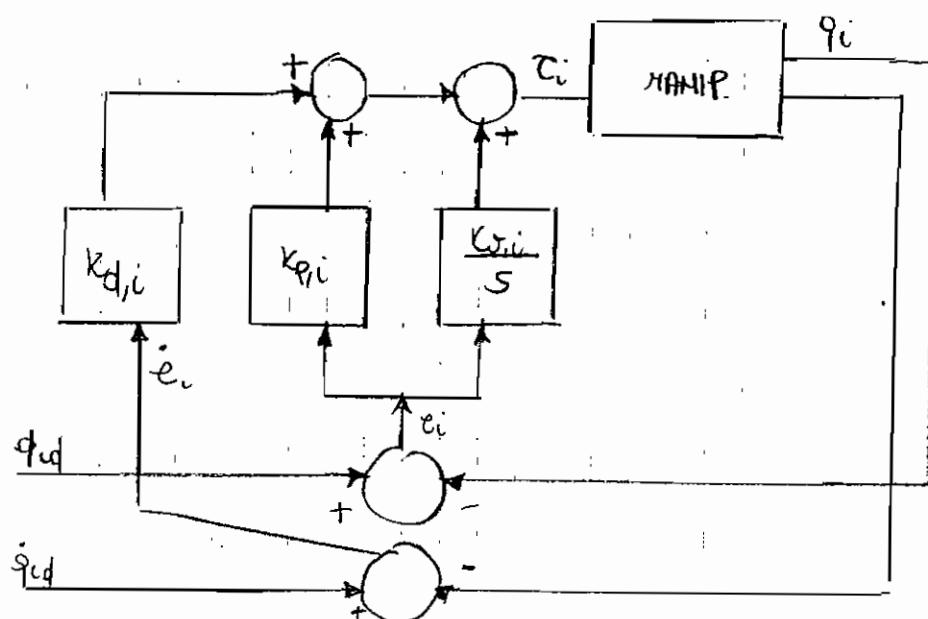
Tipicamente cose usate del tutto incomplete vengono anche le derivate prima delle posizioni derivate da dire esplicativi. Inoltre tipicamente si noti che le derivate prima di le derivate secundarie all'impiego.

Spettiamo qualche informazione aggiuntiva:

- ①  $\dot{e} = q_{id} - q_d$ . Il quale possiamo implementare con un PID escluso la componente dell'errore derivate.

$$T_i(t) = K_{p,i} e(t) + K_{i,i} \int e_i(s) ds + K_{d,i} \dot{e}_i(t) \rightarrow \text{stretta del controllo ①}$$

Lo sistema di controllo diventa tale:



Questo sistema è già tale per fare questo. Tipicamente la terza parte del PID avremo due tipi

Esprimono  $e$  e  $\dot{e}$  con un'una vettore:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{p1} & 0 \\ 0 & K_{pe} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & K_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\dot{e}1} & 0 \\ 0 & K_{\dot{e}2} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & K_{\dot{e}m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{e_1}{s} \\ \frac{e_2}{s} \\ \vdots \\ \frac{e_m}{s} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} K_d1 & K_p \\ 0 & K_{de} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & K_{dm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_2 \\ \vdots \\ \ddot{e}_m \end{bmatrix}$$

Allora scriviamo che:  $C = k_{pe} + K_e \frac{\dot{e}}{s} + K_d \ddot{e}$

Eliminiamo sostanzialmente gli indirizzi, onde nelle struttura generale di controllo, si escludono il controllo del semipalatore nel suo complesso.

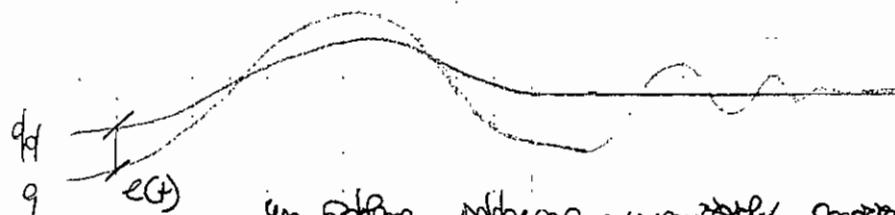
VANTAGGI: 1) è facile da togliere - basta togliere e fare andare se non si conosce il funzionamento del semipalatore.

Per le tracce si prende un blocco alla volta in modo da avere buone prestazioni in tensione.

- SVANTAGGI:
- 1) togliendo con un controllo lineare qualcosa di un blocco lineare non è  
combinando il movimento fatto dire ad un blocco un tensione, si prenderà  
combinando notevolmente.  
Le tracce del più si faranno per volte nudi: accettabile per tensione  
più comuni.
  - 2) il semipalatore fa al suo interno delle tensioni che sono tutte i guanti  
in questo caso di regolazione non è possibile una guante indipendente!!

Per ottenere momenti più precisi si introducono nuove forme di regolazione.

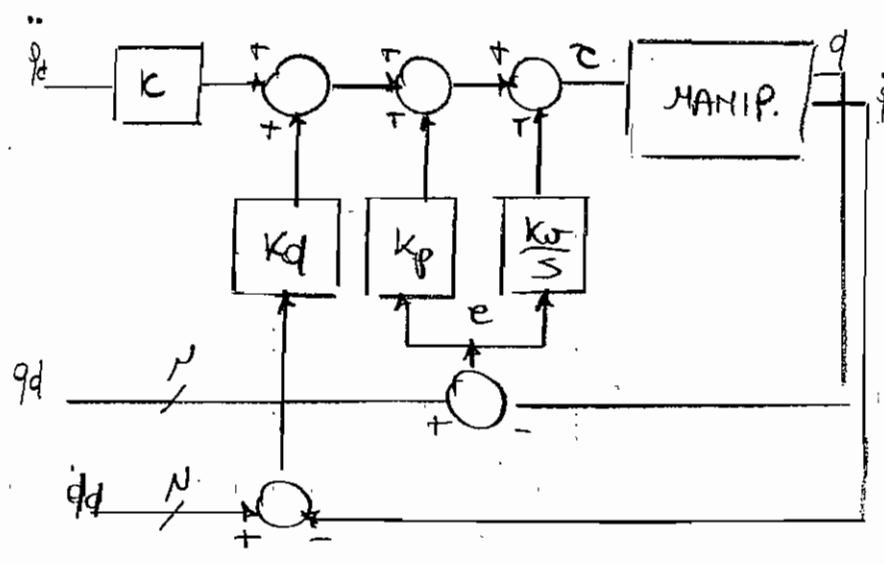
$$\tau = M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) + F(q, \dot{q}) \quad (4)$$



In questo problema abbiamo un momento desiderato. Occorre tipicamente minimizzare l'errore anche durante il transitorio.

Introduciamo delle azioni di prevedere le sezioni del guadagno. Osservi (4):

- Tante azioni di prevedere voglio, tanto oppure darò potere. Quanto prevedo per anticipare è richiesto da oppure di rivedere.



Non voglio che l'errore si verifica, ma che sia oppure un anticipo.

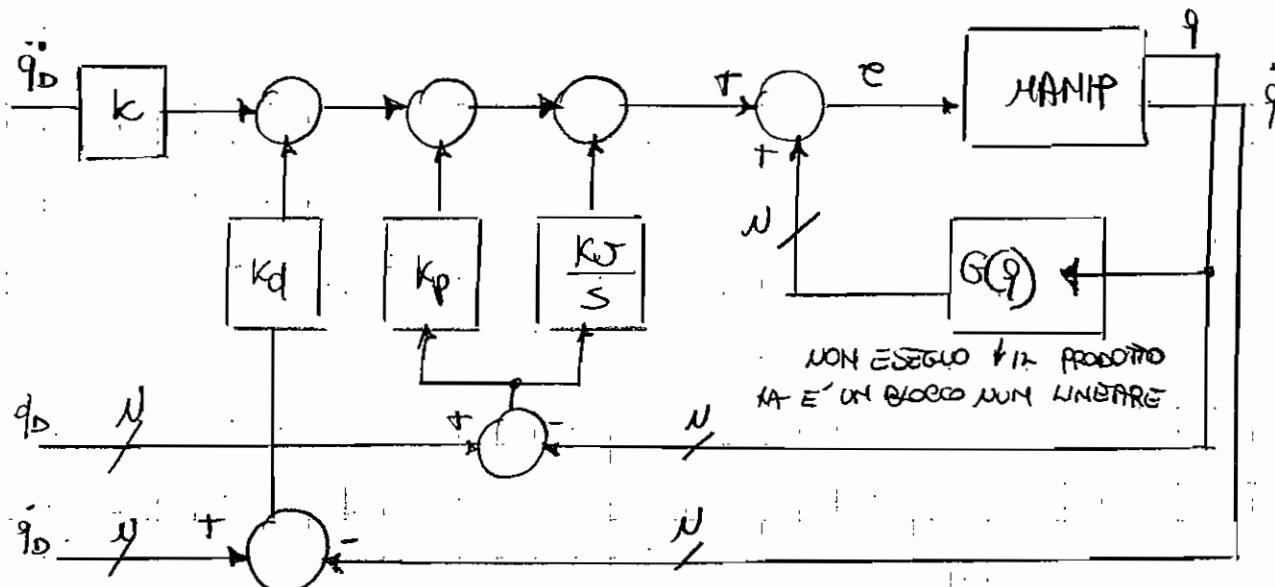
Se  $K$  è costante non riceve segnale:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & K_2 & 0 \\ 0 & & K_m \end{bmatrix}$$

Anche il  $K$  è possibile di essere varato per passi successivi.

$$c = K_p e + K_w \frac{e}{s} + K_d \dot{e} + \underline{\underline{K \ddot{q}_d}} \quad \text{AZIONE IN AVANTI o FEED FORWARD}$$

- 2) decidono perentoriamente copie su rotelle per bilanciare la forza di grante  
 (CONTROOLLO PID CON COMPENSATORI DI ORBITA)



VANTAGGIO: maggiore precisione in posizionamento

Svantaggio: 1) abbiamo sempre calcolato la funzione  $GCQ$ . Abbiamo ottenuto comunque il basso piatto del non-piattino.

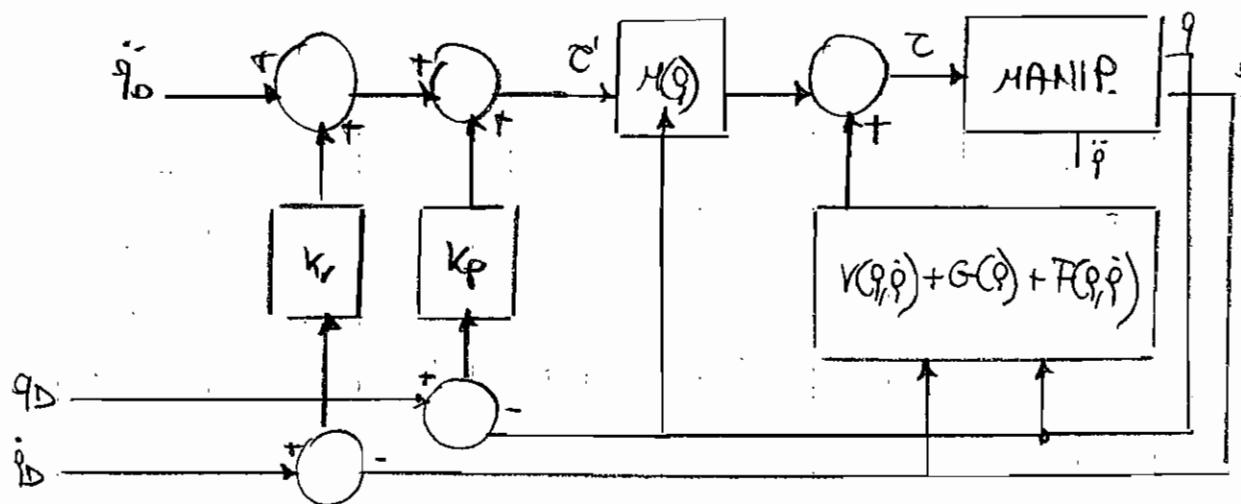
2) l'output delle  $N$  tensioni fornite da  $GCQ$  può potenzialmente dipendere da tutte le variabili di giunti. Allora non è più un controllo a giunti indipendente: abbiamo bisogno di un controllo a controllo.

$$c = k_p e + k_d \dot{e} + k_q \ddot{q} + GCQ$$

3) L'equazione del cappotto deserto:

$$\begin{cases} \ddot{q} = M(q)\ddot{q}' + V(q, \dot{q}) + G(q) + F(q, \dot{q}) \\ q' = k_r \dot{q} + k_p e + \ddot{q}_0 \end{cases}$$

Dentro al cappotto complesso è effettuata una decomposizione. Le due componenti oltre sono necessarie per questo tipo di cappotto.



$$\rightarrow LEGAME TRA \quad \ddot{q}' \equiv \ddot{q}$$

Confrontando l'equazione delle coppie del manipolatore e quella fornita dal cappotto, si vede che:

$$M(q)\ddot{q} = M(q)\ddot{q}' \quad \text{SIMMETRICA, DEFINITA POSITIVA}$$

Poté essere dimostrato che il manipolatore è sempre invertibile.

$$M(q)^{-1} M(q) \ddot{q} = M(q)^{-1} M(q) \ddot{q}' \Rightarrow \boxed{\ddot{q} = \ddot{q}'}$$

Stesso si oppone l'influenza del comportamento solo del blocco 1, se oppone il blocco 2 e viceversa. Si è ridotto il problema di controllo del manipolatore a quello del cappotto. Soltanto il cappotto deve essere controllato: dato c'è il segnale immediatamente, un solo controllo  $\ddot{q}$ . Poco dopo agire con un controllore lineare.

se comportamento a seguito delle tracce solo attese per più lunghe durata

Anziano a calcolare le dinamiche dell'errore

$$\begin{cases} \ddot{e} = K_r \dot{e} + K_p e + \ddot{q}_0 \\ \ddot{e} = \ddot{q} \end{cases} \Rightarrow \ddot{q} = \ddot{q}_0 + K_p e + K_r \dot{e} \Rightarrow \underbrace{(\ddot{q}_0 - \ddot{q})}_{\dot{e}} + K_p e + K_r \dot{e} = 0$$

EQUAZIONE DISTURBIO  
ELL'ERRORE

Troviamo quindi equazione con l'errore. Allora:

$$s^2 E(s) - s e(0) - \dot{e}(0) + K_r s E(s) + K_p E(s) - K_r e(0) = 0$$

EVOLUZIONE LIBERTÀ DEL  
SEGNALE DI ERRORE

$$E(s) = \frac{s e(0) + \dot{e}(0) + K_r e(0)}{s^2 + K_r s + K_p}$$

costanti

L'errore tende a zero? Se gli tutti i coefficienti sono differenti da zero. Perché  $K_r$  e  $K_p > 0$ . Inoltre perché  $K_r$  e  $K_p$  sono scelti in modo arbitrario la velocità con cui l'errore tende esponenzialmente a zero è definita a priori.

Le dinamiche di ciascun errore di misuramento non influisce sulla doppia altra errore.  
(in virtù del fatto che  $K_r$  e  $K_p$  sono diagonali)

VANTAGGI: predizione eccellenti

SVANTAGGI: 1) è costituzionale.

2) Richiede conoscenze perfette del meccanismo.

3) Del punto di vista computazionale è pesante; ad ogni istante di campionamento si calcolano tutte le dinamiche inverse del meccanismo.

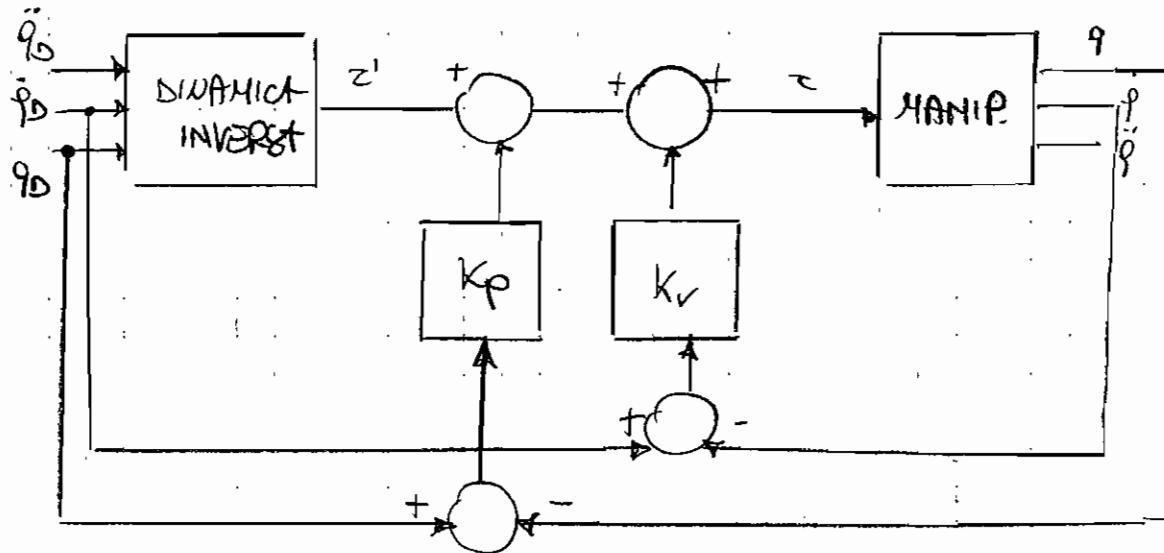
4) purché esista un consenso del modello del meccanismo perché ad es. discarica non compiuta sia diretta linea del meccanismo.

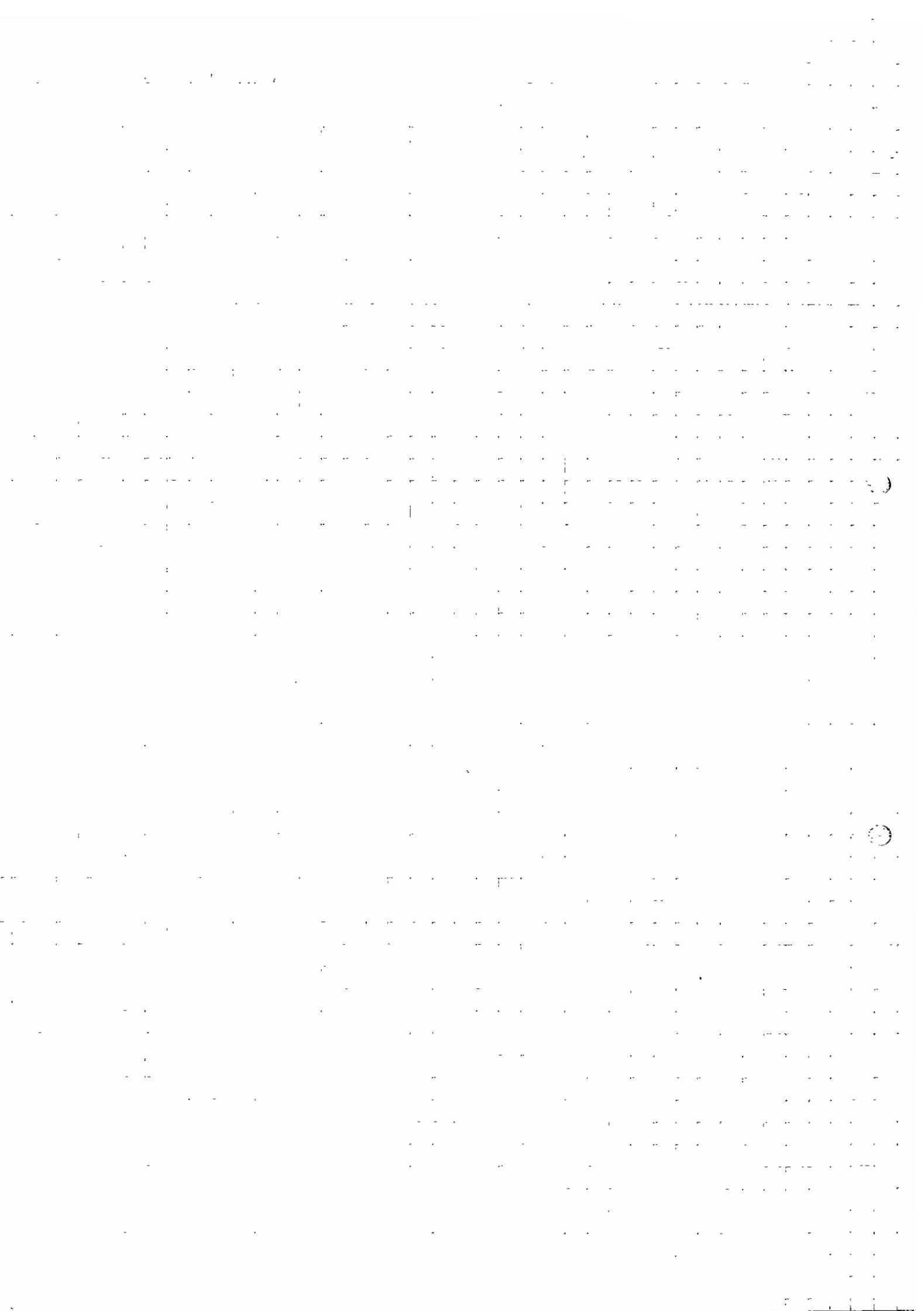
5) I dati non sono forniti dal meccanismo soltanto che c'è un contenuto pendente essa sia discaricate; perché il discaricamento totale non è calcolabile.

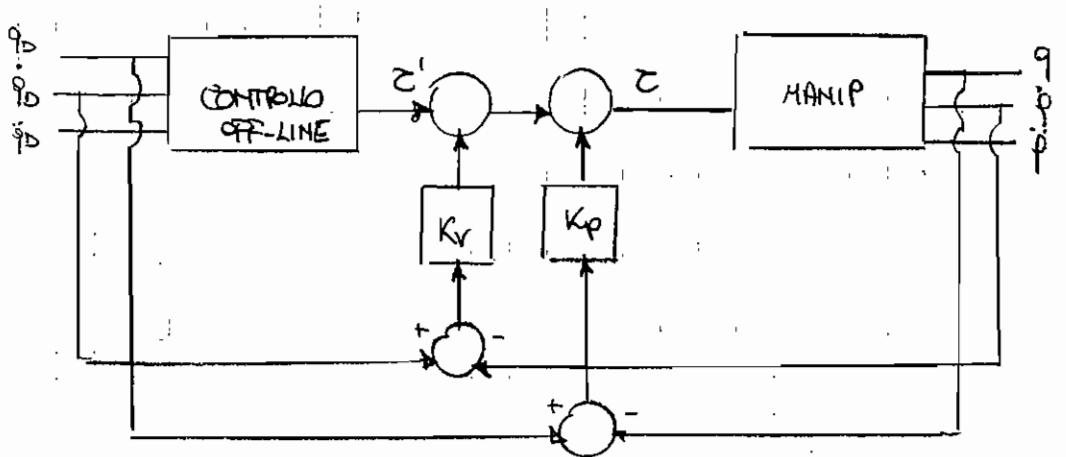
Per poter valutare le diverse forme di manipolazione nel tempo bisce:

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{\tau}} = M(\boldsymbol{q}_D) \ddot{\boldsymbol{q}}_D + V(\boldsymbol{q}_D, \dot{\boldsymbol{q}}_D) + G(\boldsymbol{q}_D) + F(\boldsymbol{q}_D, \dot{\boldsymbol{q}}_D) \rightarrow \\ \text{CALCOLABILI PRIMA CHE} \\ \text{IL MANIPOLATORE SI MUOVA,} \\ \text{POICHE' DEFINISCONO LA PRIORITA'} \\ \text{LA TRAETTORIA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{\tau}} = \ddot{\boldsymbol{\tau}}^* + K_r \dot{\boldsymbol{e}} + K_p \boldsymbol{e} \end{cases}$$







$$\begin{cases} \ddot{c}' = M(q_D) \ddot{q}_D + G(q_D) + V(q_D, \dot{q}_D) + F(q_D, \dot{q}_D) \\ \ddot{c} = \ddot{c}' + K_p e + K_r \dot{e} \end{cases} \quad \textcircled{A} \quad \textcircled{1}$$

$$\ddot{c} = M(q) \ddot{q} + G(q) + V(q, \dot{q}) + F(q, \dot{q}) \quad \textcircled{B}$$

Ricerca la dinamica dell'errore:

$$(\ddot{c}' - \ddot{c}) + K_p \dot{e} + K_r e = 0 \quad \text{dalla } \textcircled{1}$$

Confronto  $\textcircled{B}$  con  $\textcircled{1}$  per ottenere le tensioni  $\ddot{c}' - \ddot{c}$ . Ci mettiamo nelle condizioni ideali: assumiamo cioè che  $M(q)$  sia uguale a  $M(q_D)$  ed analogamente per le altre matrici:

$$\text{ipotesi: } M(q) \cong M(q_D) ; \quad G(q) \cong G(q_D) ; \quad F(q, \dot{q}) \cong F(q_D, \dot{q}_D)$$

Restiamo con le differenze di  $\textcircled{A} - \textcircled{B}$ :

$$\ddot{c}' - \ddot{c} = M(q_D) \ddot{q}_D - M(q) \ddot{q} + 0 = M(q) [\ddot{q}_D - \ddot{q}] = M(q) \ddot{e}$$

GLI ALTRI TERMINI  
SI ELIMINANO

Allora l'equazione dell'errore diventa:

$$M(q) \ddot{e} + K_p \dot{e} + K_r e = 0$$

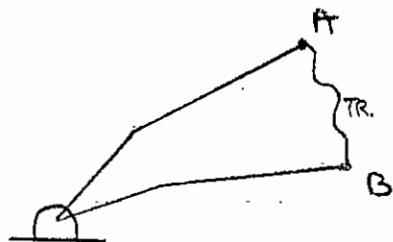
In questo caso non dobbiamo mettere disponibili come coefficienti in punto comune le matrici di rotazione  $M(t)$ . Questo tipo di controllo non è soltanto discapiente ma gli errori dei diversi bracci umani sono un punto di ripercussione su tutti gli altri.

Nel caso del precedente controllore si avranno effettioni lineari: ma invece  $M(t)$  è una matrice contenente seni e coseni. Allora effettioni non lineari e quindi la dinamica dell'errore è non lineare.

## ► TRAIETTORIA DI UN MANIPOLATORE

Dobbiamo disegnare la pianificazione delle traiettorie così da poter determinare il  $q(t)$  ovvero punto volgare utile per ottenere tutte le rotazioni di giunto.

Si può subito e più bene dare due dettettiore di punto finali ovvero determinatore dei valori set-point:  $q(u)$



I punti di inizio (A) e di punto finale (B) sono identificati dalle matrici:  $\overset{S}{T}(t_0)$  e  $\overset{S}{T}(t_f)$

In taluni casi si disegna anche punto di peraggio intermedio

PUNTO C:  $\overset{S}{T}(t_i)$

Si sono disegnate solo due punti o perle di TRAIETTORIE punto-punto oltremodo MULTIPUNTO.

Tipicamente si dice anche in quali istanti di tempo si rispetterà deve essere per A e B. Queste sono specificate  $t_0$  e  $t_f$ . Inoltre vogliamo che le traiettorie siano smooth ovvero lisce; le spigolosità delle traiettorie significano forte sollecitazione meccanica al maneggiatore.

Le traiettorie sono pianificate o nello spazio dei punti o nello spazio operativo.

► PIANIFICAZIONE NELLO SPAZIO DEI GIUNTI CON TRAIETTORIA PUNTO PUNTO

Sono note:  $\overset{S}{\underset{T}{\tau}} T(t_0)$  e  $\overset{S}{\underset{T}{\tau}} T(t_f)$

1) Si risolve il problema di cinematica inversa:

$$q_i = \begin{bmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ \vdots \\ q_{ni} \end{bmatrix} \quad q_f = \begin{bmatrix} q_{1f} \\ q_{2f} \\ \vdots \\ q_{nf} \end{bmatrix}$$

2) Si dovrà fare in modo che tutte le rotazioni di punto passino da  $q_i$  a  $q_f$ . Sono pianificate n. traiettorie indipendenti, una per ciascuna rotazione del punto.

A partire da punti punti elementari i pedici (indichino le diverse rotazioni del punto). Inoltre valutiamo il caso di punti coincidenti: è la Regola confederale punto permette.

$$\overset{\theta_0}{\underset{0 \text{ (TIPICAMENTE)}}{\overset{\theta_f}{\underset{\theta(t)}{\longrightarrow}}}}$$

Punto di partenza, regole orrette ferro: obbligo regole  
che:  $\dot{\theta}_0 = 0$  e  $\ddot{\theta}_0 = 0$

L'utente deve inoltre fissare il tempo di percorrenza della traiettoria: il  $t_f$ .

Ci possono essere diverse possibilità per la pianificazione della traiettoria:

a) con polinomio del terzo ordine:

$$\theta(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 \rightarrow \text{lo 4 coefficienti da regolare al esattamente 4 equazioni di controllo (punti più estremi)}$$

Se si cerca a definire questi coefficienti lo si deve immediatamente  $\theta(t)$  e  $\dot{\theta}(t)$  da un percorso per le controllate:

$$\theta(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2$$

$$\dot{\theta}(t) = 2\alpha_2 + 3\alpha_3 t$$

$$\theta(0) = \theta_0 = \theta_0$$

Se sostiene il limite nei coefficienti: 4 eq. in 4 incognite

$$A) \quad \theta(t_f) = \theta_0 + \alpha_1 t_f + \alpha_2 t_f^2 + \alpha_3 t_f^3 = \theta_f$$

$$\dot{\theta}(0) = \alpha_1 = 0$$

$$B) \quad \dot{\theta}(t_f) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t_f + 3\alpha_3 t_f^2 = 0$$

$$\begin{cases} \theta_0 = \theta_0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

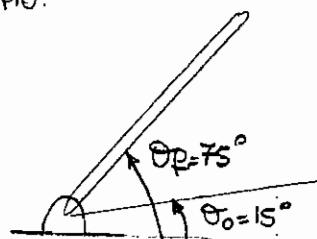
$$\theta_f = \theta_0 + \alpha_2 t_f^2 + \alpha_3 t_f^3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{-2\alpha_2 t_f}{3t_f^2} = -\frac{2\alpha_2}{3t_f}$$

$$\theta_f = \theta_0 + \alpha_2 t_f^2 - \frac{2}{3} \alpha_2 t_f^3 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{3(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}$$

Infine si ricava che:

$$\alpha_3 = \frac{-2(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}$$

ESEMPIO:



$$t_f = 3 \text{ secondi}$$

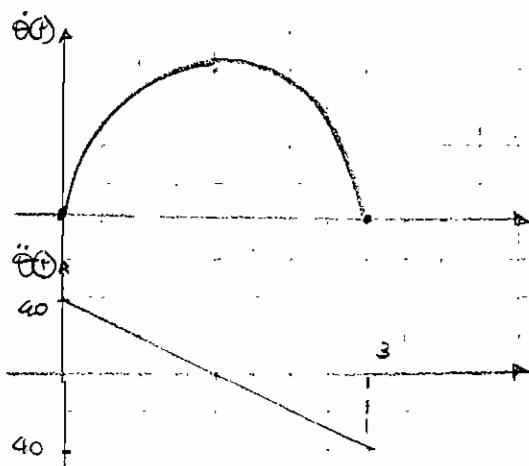
$$\begin{cases} \theta_0 = 15 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 20 \\ \alpha_3 = -4,44 \end{cases}$$

$$\theta(t) = 15 + 20t - 4,44t^3$$

Analizziamo queste espressioni:

$$\dot{\theta}(t) = 40t - 13,3t^2$$

$$\ddot{\theta}(t) = 40 - 26,6t$$



Nelle accelerazioni abbiano valori negativi

e quindi fatti colpi di coppe e fiumi

accelerazioni meccaniche del semipiatto.

## PIANIFICAZIONE NELLO SPAZIO DEI GIUNTI CON TRAETTORIE MULTI PUNTO

Nel punto intermedio non ci fermiamo e dunque:

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \neq 0$$

cioè imponiamo una pianificazione

$$\dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f \neq 0$$

più generale possibile.

In questo caso partiamo in movimento ed ottieniamo ancora un movimento.

$$\begin{cases} \theta_0 = \dot{\theta}_0 \\ \theta_0 + \alpha_1 t_f + \alpha_2 t_f^2 + \alpha_3 t_f^3 = \dot{\theta}_f \\ \alpha_2 = \dot{\theta}'_0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 t_f + 3\alpha_3 t_f^2 = \dot{\theta}'_f \end{cases}$$



$$\theta_0 = \dot{\theta}_0$$

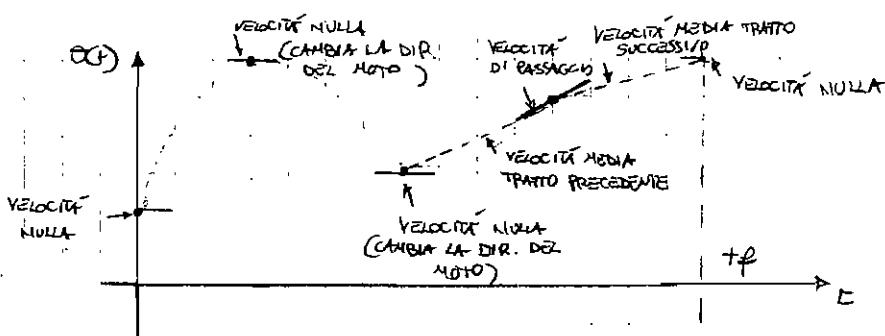
$$\alpha_1 = \dot{\theta}'_0$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{t_f^2} (\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_0) - \frac{2}{t_f} \dot{\theta}'_0 - \frac{1}{t_f^3} \dot{\theta}''_f$$

$$\alpha_3 = -\frac{2}{t_f^2} (\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_0) + \frac{1}{t_f^3} (\dot{\theta}''_f + \dot{\theta}'_0)$$

Si pone il problema del fissaggio delle velocità di passaggio. E sono tre possibili scelte:

- 1) scelta dell'operatore (solo in rare occasioni); FORNITA NELLO SPAZIO OPERATIVO  
USANDO LO JACOBIANO GEOMETRICO PER  
PASSARE A QUELLO NELLO SPAZIO DEI GIUNTI
- 2) si fissa la velocità zero nel moto  
dove cambia direzione; se invece ponere la direzione del moto a soglie la velocità media  
tra le due velocità medie estreme al tratto precedente e successivo.



- 3) si fissa in modo da ottenere traiettorie che puoi essere più continue, più dolci.  
Nel caso 2) potremo infatti avere discontinuità nelle accelerazioni. Vgono cioè contrarie  
delle traiettorie, delle velocità e delle accelerazioni. Implicano un spostamento deteso:

Analizziamo un caso semplice ma valido in generale:

$$\begin{array}{c} \theta_0 \xrightarrow{\dot{\theta}(t)} \theta_1 \xrightarrow{\ddot{\theta}(t)} \theta_f \\ t=0 \longrightarrow t_{f_1} \\ 0 \longrightarrow t_{f_2} \end{array}$$

Si mette per convenzione  
il tempo ad ogni percorso in punti  
intermedi

Saranno proposte due diverse traiettorie:

$$\theta_1(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$

$$\theta_2(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

è equazione, 8 coefficienti

Abbiamo bisogno di 8 condizioni di  
contorno

a)  $\theta_1(0) = \theta_0$

c)  $\theta_2(0) = \theta_0$

e)  $\dot{\theta}_1(t_f) = 0$

g)  $\dot{\theta}_1(t_f) = \dot{\theta}_2(t_f)$

b)  $\theta_1(t_f) = \theta_f$

d)  $\theta_2(t_f) = \theta_f$

f)  $\dot{\theta}_2(t_f) = 0$

h)  $\dot{\theta}_2(t_f) = \dot{\theta}_1(t_f)$

CONTINUITÀ DELLA  
VELOCITÀ

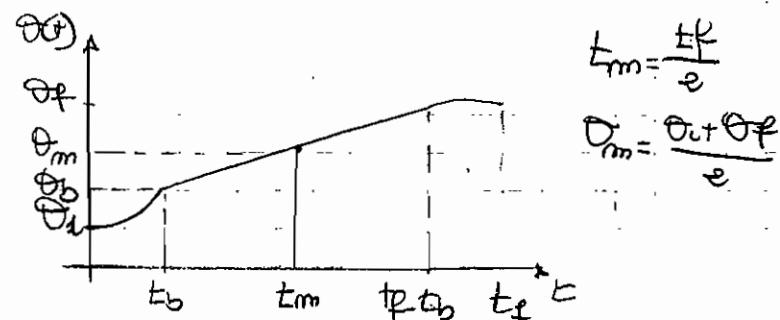
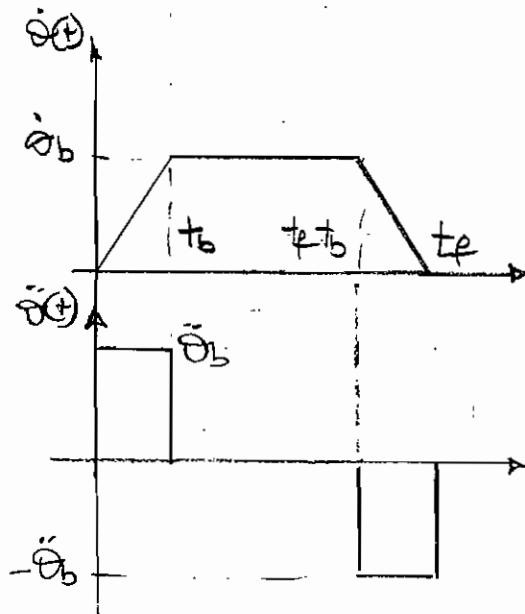
CONTINUITÀ DELLA  
ACCELERAZIONE

con le spline del 5° ordine non solo imponiamo la continuità di velocità ed accelerazione nel  
ma anche le accelerazioni nel punto iniziale e finale.

DA RICAVARE

- Un profilo nelle proiezioni può essere trovato se si conosce il  $t_f$  che permette di ottenere in modo  
che la velocità risulti costante.

#### ► TRAIETTORIA PUNTO-PUNTO CON PROFILO DI VELOCITÀ TRAESCRITTA



L'operazione fornisce il  $t_f$ ,  $\theta_i$  e  $\theta_f$  ed  
un ulteriore parametro scelto fra  $\theta_b$  o  
 $\ddot{\theta}_b$  (accelerazione iniziale)

► traiettoria nel piano Tutto:

$$\theta(t) = \theta_i + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_b t^2$$

$$\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_b t$$

$$\ddot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_b$$

$$\Rightarrow \theta(t_b) = \boxed{\theta_b = \ddot{\theta}_b t_b}$$

Ma possiamo calcolare  $\theta_b$  come pendente dell'arco della traiettoria nel tutto centrale:

$$\theta_b = \frac{\theta_m - \theta_i}{t_m - t_b} \Rightarrow \ddot{\theta}_b t_b = \frac{\frac{\theta_i + \theta_f}{2} - \theta_i - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_b t_b^2}{\frac{t_f}{2} - t_b}$$

da cui si ricava che:

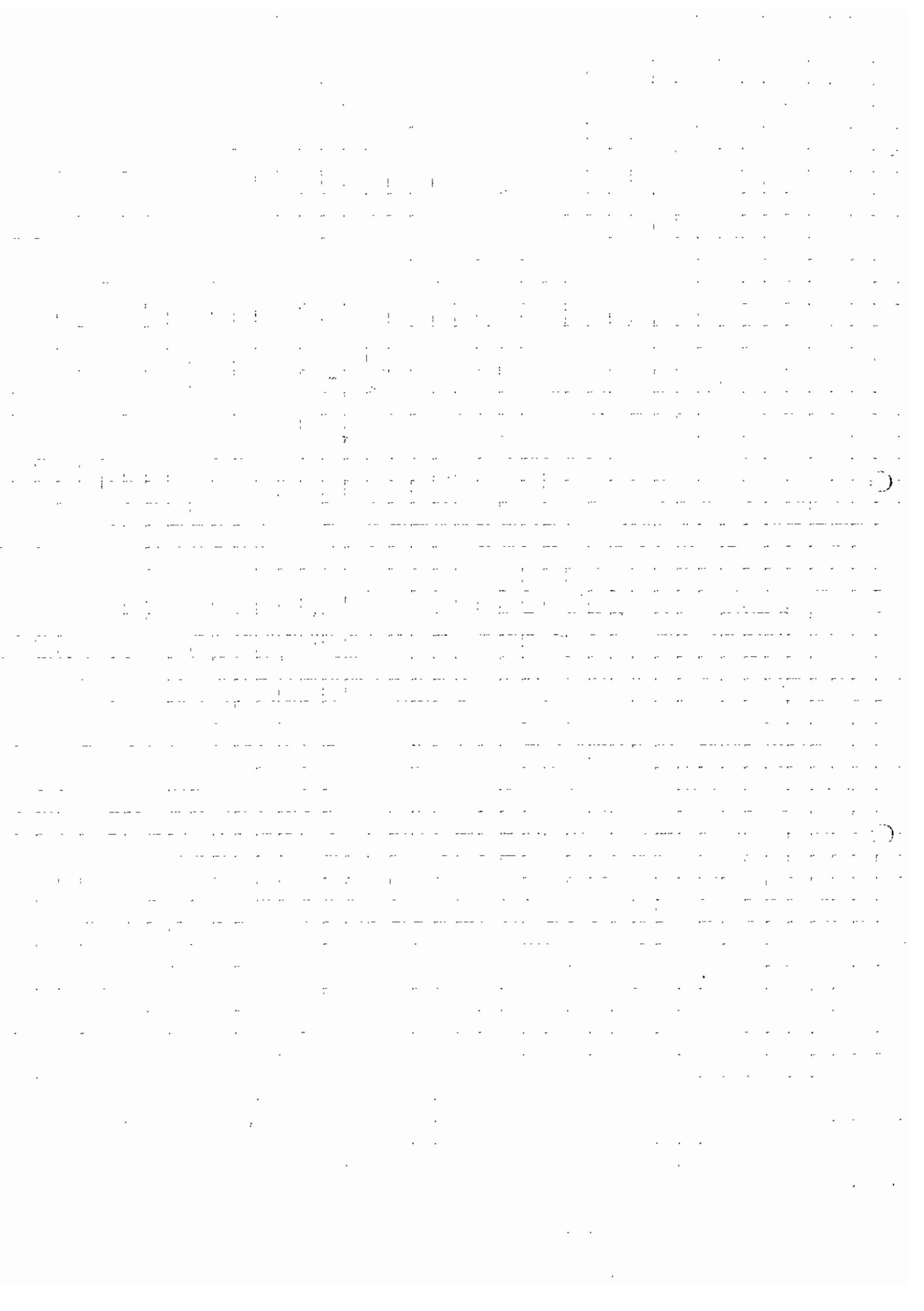
$$\ddot{\theta}_b t_b^2 - \ddot{\theta}_b t_f t_b + \theta_f - \theta_i = 0$$

L'unica根号 è  
 $t_b$ .

$$t_b = \frac{t_f}{2} \pm \sqrt{\frac{\ddot{\theta}_b^2 t_f^2 - 4 \ddot{\theta}_b (\theta_f - \theta_i)}{2 \ddot{\theta}_b}}$$

la soluzione con il + è da  
scartare perché  $t_b$  è sicuramente sempre  
minore di  $\frac{t_f}{2}$

A questo punto possiamo ricavare  $\theta_b$ .

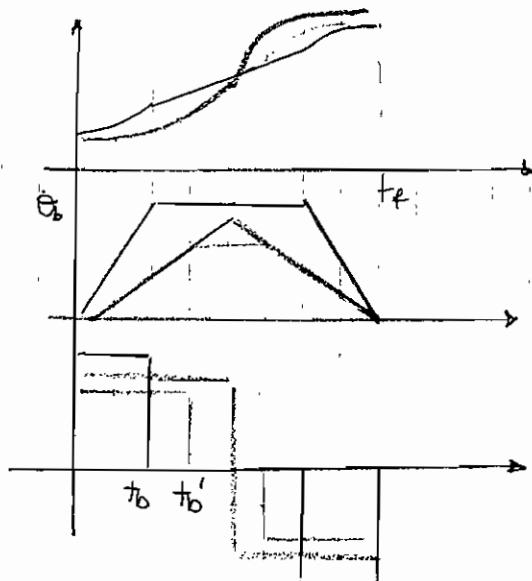


$$t_b = \frac{t_f}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}_b^2 t_f^2 - 4\ddot{\theta}_b(\theta_f - \theta_i)}}{2\ddot{\theta}_b}$$

Questa espressione non ha senso fuori il tempo scatto-arrivo  
dunque negativo.

$$\ddot{\theta}_b^2 t_f^2 - 4\ddot{\theta}_b(\theta_f - \theta_i) \geq 0 \rightarrow \ddot{\theta}_b \geq \frac{4(\theta_f - \theta_i)}{t_f^2}$$

c'è quindi un limite minimo di accelerazione dei percorsi. Perché?



Se diminuisce l'accelerazione ottengo un  $t_b$  più grande.  
Continua a scendere con l'accelerazione i due tratti  
rettangolari di accelerazione si incontrano in metà.  
Sogliate l'accelerazione ancora più bassa è che per le due  
trattate non si toccano nemmeno più.

Ricorso alla question del tratto rettangolare e parabolico finale.

• 2° tratto:  $t \in [t_b, t_f - t_b]$

$$\ddot{\theta}(t) = 0$$

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_b = \ddot{\theta}_b t_b$$

$$\theta(t) = \theta(t_b) + \int_{t_b}^t \dot{\theta}_b dt = \ddot{\theta}_b t_b (t - t_b) + \theta_b$$

Averemo ricavato che  $\theta_b = \theta_i + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_b t_b^2$ . Dunque:

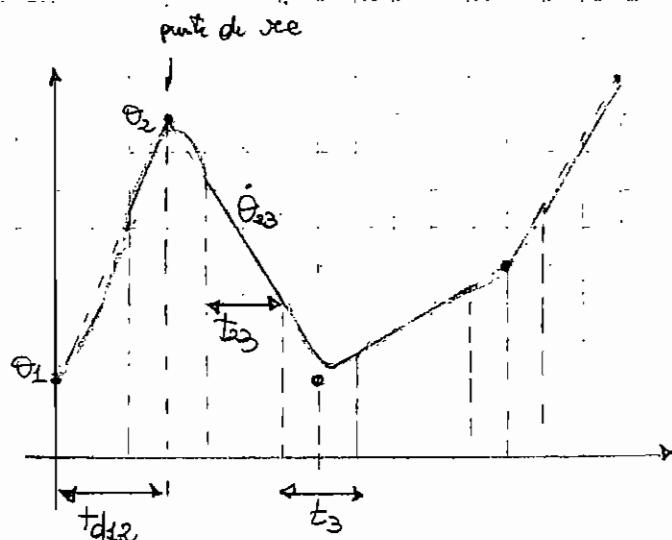
$$\boxed{\theta(t) = \theta_i + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_b t_b^2 + \dot{\theta}_b t_b t - \ddot{\theta}_b t_b^2 = \theta_i + \dot{\theta}_b t_b (t - \frac{1}{2} t_b)}$$

• 3° treno:  $t \in [t_p - t_b, t_p]$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\ddot{\theta}_b \\ \dot{\theta}(t) = -\ddot{\theta}_b t + \dot{\theta}_b t_p \\ \theta(t) = -\frac{1}{2} \ddot{\theta}_b (t_p - t)^2 + \theta_p \end{cases}$$

Queste espressioni si possono ottenere percorrendo dal punto finale delle traiettorie per infonderci di indietro.

#### ► TRAIETTORIA MULTIPUNTO CON RACCORDI LINEARI QUADRATICI

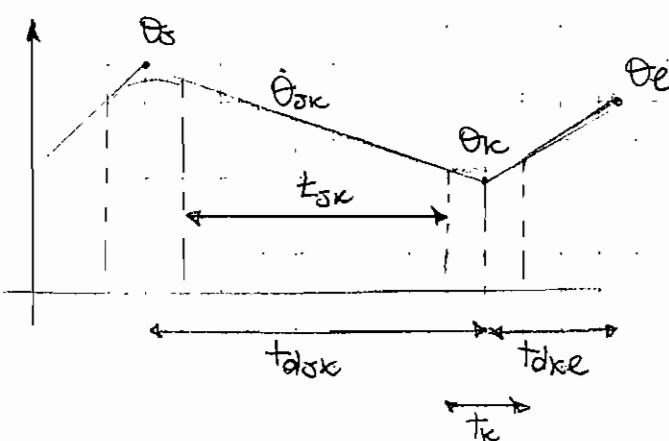


Sono dette punti di rite: un punto è singolare.  
I punti non vengono toccati, ma semplicemente sfiorati.  
Non sono dunque punti di perno.

Si specifica inoltre una accelerazione in modulus possibile per ogni record parabolico. |̈θ|.  
Dobbiamo calcolare le velocità lineari dei tratti intermedi ( $\dot{\theta}_{23}$ ), la durata del tratto parabolico ( $t_3$ ), e durata del tratto rettilineo ( $t_{23}$ )

Distinguiamo tre casi: Tratto intermedio, Tratto intermedio parabolico, Tratto finale.

#### - TRATTO INTERMEDIO



$$\dot{\theta}_{jk} = \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}} ; \quad \dot{\theta}_{kl} = \frac{\theta_l - \theta_k}{t_{dlk}}$$

per costituzioni geometriche

$\ddot{\theta}(t) = |\dot{\theta}_k| \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_k - \dot{\theta}_{jk})$  confronto è subito pure e dopo del punto intermedio considerato.

Le velocità dei vertici del tetto parabolico vale  $\dot{\theta}_{jk}$  e alla fine deve valere  $\dot{\theta}_{ke}$ . Allora

$$\dot{\theta}_{ke} = \dot{\theta}_{jk} + \dot{\theta}_{k\text{tric}} \rightarrow t_{\text{tric}} = \frac{\dot{\theta}_{ke} - \dot{\theta}_{jk}}{\dot{\theta}_k}$$

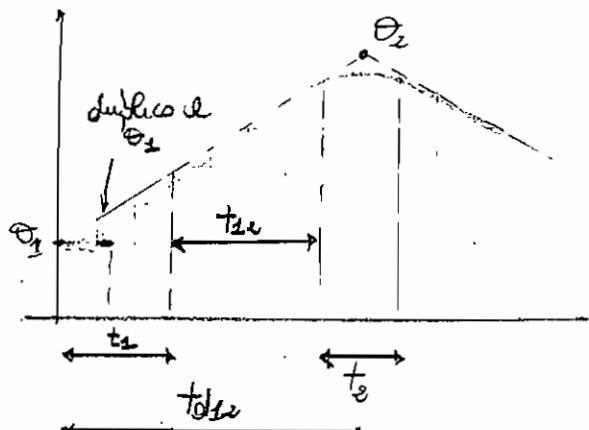
Le duree del tetto riflesivo sono:

$$t_{djk} = \left( \frac{1}{2} t_j + t_{dk} + \frac{1}{2} t_k \right)$$

Lo si può disegnare  
de cui

$$t_{jk} = t_{djk} - \frac{1}{2} t_j - \frac{1}{2} t_k$$

### TRATTO INIZIALE



Si pose il  $\theta_1$  all'inizio del tetto parabolico e non di entra cose orribili per i punti di voci

$$\ddot{\theta}(t) = |\ddot{\theta}_1| \operatorname{sgn}(\theta_2 - \theta_1)$$

Calcoliamo il tempo  $t_1$ .

$$\dot{\theta}_{12} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{djk} - t_{1/2}} = \ddot{\theta}_1 t_1$$

Allora abbiamo una voci. Magnete che è il  $t_1$  e sempre avremo col ottenerlo da:

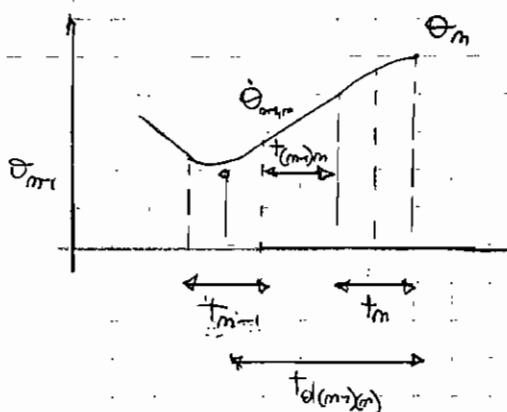
$$t_1 = t_{djk} - \sqrt{t_{djk}^2 - \frac{2(\theta_2 - \theta_1)}{\ddot{\theta}_1}}$$

$$\theta_{12} = \ddot{\theta}_1 t_1$$

$$t_2 = \frac{\theta_{23} - \theta_{12}}{\ddot{\theta}_1}$$

$$\text{Supponiamo che: } t_{d12} = t_1 + t_{12} + \frac{1}{2}t_2 \text{ da cui } t_{12} = t_{d12} - t_1 - \frac{1}{2}t_2$$

- TRATTO FINALE



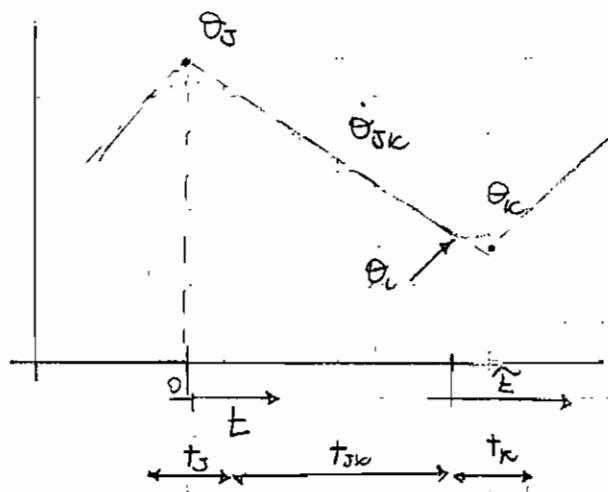
$$\dot{\theta}_m = |\ddot{\theta}_m| \operatorname{sign}(\theta_{m1} - \theta_m)$$

$$t_m = t_{d(m\rightarrow m)m} - \sqrt{t_{d(m\rightarrow m)m}^2 + \frac{2}{\ddot{\theta}_m} (\theta_m - \theta_{m1})}$$

$$\dot{\theta}_{(m\rightarrow m)m} = \frac{\theta_m - \theta_{m1}}{t_{d(m\rightarrow m)m} - \frac{1}{2}t_m}$$

$$\ddot{\theta}_{(m\rightarrow m)m} = t_{d(m\rightarrow m)m} - t_m - \frac{1}{2}t_{m-1}$$

\* punto di partenza e posizioni geometriche per il calcolo delle equazioni delle traiettorie:



Ogni volta che passa da un punto di ore  
cambia il tempo.

$$\ddot{\theta}(t) = 0$$

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_{JK}$$

$$\theta(t) = \theta_J + \dot{\theta}_{JK} t$$

$$t \in \left[ \frac{t_J}{2}, \frac{t_J}{2} + t_{JK} \right]$$

$$t \in \left[ \frac{t_J}{2} + t_{JK}, \frac{t_J}{2} + t_{JK} + t_K \right]$$

$$\ddot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_K$$

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_{JK} + \dot{\theta}_K t \quad \text{con } t \in [0, t_K]$$

$$\theta(t) = \theta_i + \int_0^t \dot{\theta}(c) dc = \theta_i + \int_0^t (\dot{\theta}_{JK} + \dot{\theta}_K c) dc = \theta_i + \left[ \dot{\theta}_{JK} t + \frac{\dot{\theta}_K}{2} t^2 \right]$$

$$\text{ma } \theta_i = \theta\left(\frac{t_J}{2} + t_{JK}\right) = \theta_J + \dot{\theta}_{JK} \left( \frac{t_J}{2} + t_{JK} \right) \text{ FINE DEL TRATTO RESTILINCO}$$

Allora sostituendo anche le tempi:  $\tilde{t} = t \left( \frac{t_J}{2} + t_{JK} \right)$

$$\Theta(t) = \Theta_J + \dot{\Theta}_{JK} \left( \frac{t_3}{2} + t_{JK} \right) + \ddot{\Theta}_{JK} \left( t - \frac{t_3}{2} - t_{JK} \right) + \frac{1}{2} \ddot{\Theta}_K \left( t - \frac{t_3}{2} - t_{JK} \right)^2 =$$

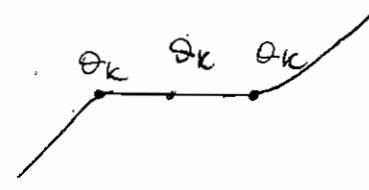
$$= \Theta_J + \dot{\Theta}_{JK} t_{JK} + \frac{1}{2} \ddot{\Theta}_K \left( t - \frac{t_3}{2} - t_{JK} \right)^2$$

$$\dot{\Theta}(t) = \dot{\Theta}_{JK} + \ddot{\Theta}_K \left( t - \frac{t_3}{2} - t_{JK} \right)$$

Anche per questo tipo di profilazione abbiamo controllato che l'accelerazione massima sufficiente per chiudere la traiettoria. (nel tratto intermedio punto  $t_{JK}$  dunque negativo)

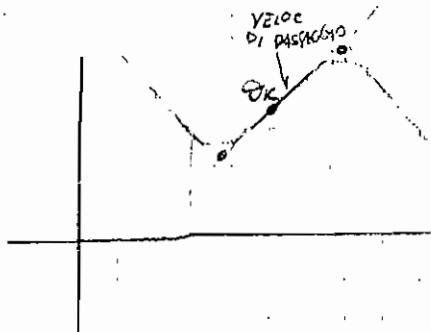
- per imparare le pesseggia nei punti intermedii useremo queste profilazioni ma più esemplificative:

- impara le fermette nel punto intermedio: sono orizzontali due punti fissati prima e dopo il punto.



Tipicamente si profilano congiunge le traiettorie in modo da non avere un tratto rettilineo (non siano tangenti nel punto  $\theta_K$ )

- onde se non ti vogliono fornire le tecniche dunque:



data è velocità di passaggio, facciamo le fermette  
e identifichiamo due punti fissati per l'applicazione  
dell'elastico.

## PIANTEZIONE DELLA TRAIETTORIA NELLO SPAZIO OPERATIVO

Con la piantazione studiate sono facili di posare su punti appartenenti ma non abbiano controllo sulla posizione delle traiettorie intermedie tra punti iniziali e finali.

In talune circostanze questa è più importante anche la traiettoria intermedia fra punti iniziali e finali: possono trovarsi rette, archi, ellissi...

Nel funzione di tracciamento di rette

Dobbiamo trovare le coordinate di seguito legge stessa:

$$\frac{s}{w} T(f) = \begin{bmatrix} s \\ w R(f) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ w P_w(f) \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

mi permette di  
trovare le rette e  
le altre curve

Il problema è diviso in due: federe del tracciamento delle rette e federe dell'orientamento.

Supposte note queste relazioni effettua discordanze:  $T=wc$  dunque

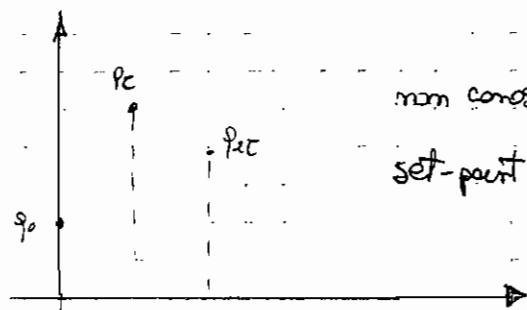
$$\frac{s}{w} T(f) \longrightarrow \frac{s}{w} T(wc) \rightarrow T(0), T(c), T(2c), \dots$$

da questo calcolo un insieme di set-point che devono essere rispettati dalla traiettoria.

Queste operazioni di deviazione per una matrice: risolvono le cinematiche inverse.

$$\begin{array}{ccc} T(0) & T(c) & T(mc) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ q(0) & q(c) & q(mc) \end{array}$$

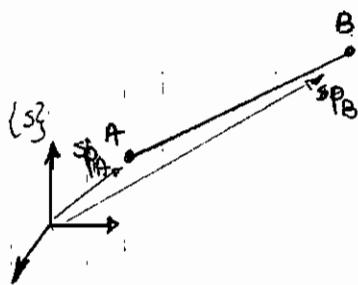
Dunque il controllo nello spazio spaziale è completamente controllato in quanto ad ogni istante di camminamento sono obbligati a risolvere le cinematiche inverse.



non conosciamo dunque le derivate prima e seconda del spazio set-point desiderato.

Risolviamo subito le rette.

$$SP_W(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}$$



$$P(t) = P_A + \frac{(P_B - P_A)}{t_f} t \rightarrow P(0) = P_A ; P(t_f) = P_A + P_B - P_A = P_B \quad t \in [0, t_f]$$

Queste rette non puo' essere in talte' usata. Calcoliamo le derivate prima e seconde:

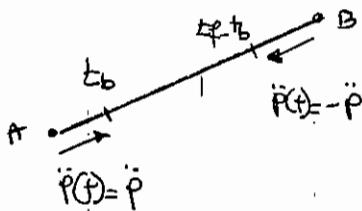
$$\dot{P}(t) = \frac{P_B - P_A}{t_f} \rightarrow \text{vettore costante diretto da } A \text{ verso } B$$

$$\ddot{P}(t) = 0$$

No questo non puo' essere: punto di partenza ed istantaneamente muo' punto a velocità costante al che significa che nell'istante iniziale e finale date avrà accelerazione infinita.

Possiamo un altro modo: accelerazione uniformemente in un piano retto delle traiettorie, per mu-

overe a velocità costante fino a  $t_f - t_0$ , quindi momento e decelerare.



$$t \in [0, t_f]$$

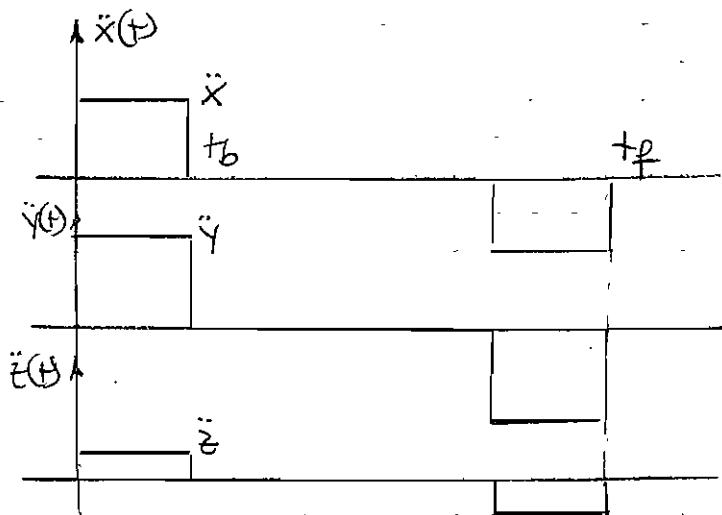
$$\ddot{P}(t) = \ddot{P}$$

$\dot{P}(t) = \ddot{P}t \rightarrow$  onde il vettore velocità è diretta lungo la retta con verso da A a B.

$$P(t) = P_A + \frac{1}{2} \ddot{P}t^2$$

Siamo alle prese con la progettazione creare quadratice per vettore (non puo' risolvere come in precedente).

Per vedere cose come nei due appunti (scritte in cattiva) avverrà la accelerazione.



Ricco a proiettare ciascuna di queste tre traiettorie conoscendo le posizioni iniziali, posizione finale, e tempo delle traiettorie, un punto pernottato fra  $t_b$ , accelerazione, velocità e legge.

Allora in questo caso otteniamo che noto le vetture di accelerazione diretta da A a B. Allora si

proiettare si ricorda che usare le stesse tecniche per solita applicate a ciascuna componente del vettore.

In realtà le cose più facile è scegliere come punto pernottato  $t_b$ . Tutto questo scelto si genera un vettore accelerazione diretta da A a B.

Problema che dal problema dell'orientamento: le  $\dot{\omega}_R(t)$ .

Le pene soluzioare intutte è:

$$R_A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} ; \quad R_B = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

NOTO

fare 3 proiezioni diverse, uno per ciascun elemento delle matrice di rotazione.

Procedere in questo modo e scegliere un punto le 3 proiezioni non potranno che essere ad un generico istante  $t$  ( $R(t)$ ) sia orthonormale proprie e quindi che siano effettivamente una matrice di rotazione.

Si sfrutterà la notazione matrice dell'orientamento.

1) soluzioano  $K_A = \begin{bmatrix} K_{A1} \\ K_{A2} \\ K_{A3} \end{bmatrix}$

$$K_B = \begin{bmatrix} K_{B1} \\ K_{B2} \\ K_{B3} \end{bmatrix}$$

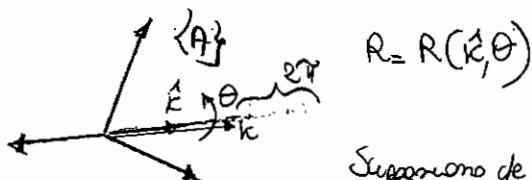
sai esprimono in notazione matrice la retta di rotazione (tipicamente quelle cosa -angolo).

In questo modo con il problema precedente in questo si ha elementi di uno stesso vettore non esiste

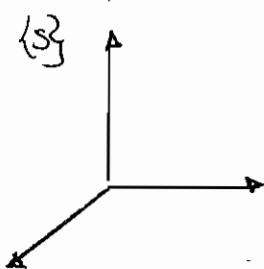
dare direzione diretta.

Pronificano allora 3 diverse traiettorie per il k che definiscono le leggi K(A). Quello da ottenere sarà sempre un orientamento.

Anche per questa pronificazione conviene scegliere delle coordinate quadrate.



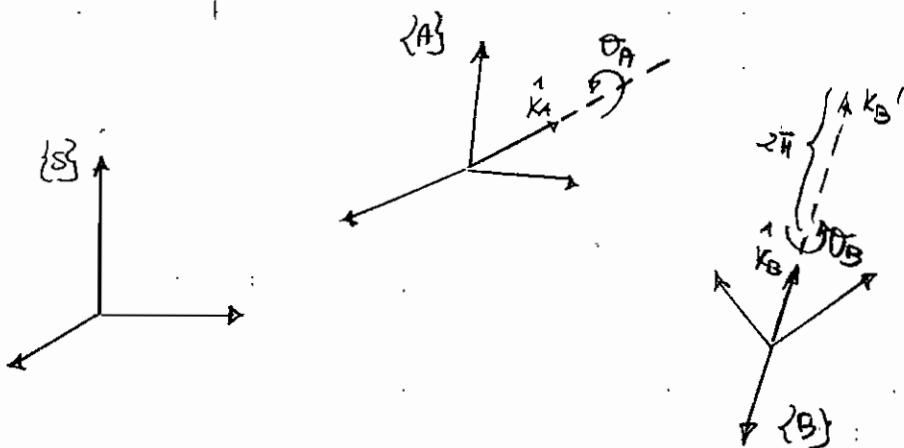
Supponiamo di inizio del vettore k sia dato da  $k'$ .



I vettori k e k' esprimono lo stesso orientamento. Ma anche un eventuale k'' più lungo di k rispetto a k' esprimerebbe lo stesso orientamento: esiste infatti rotazione.

Allora:

$$R = R(k, \theta) = R(k', \theta + c(2\pi)) \text{ con } c \text{ intero qualunque.}$$

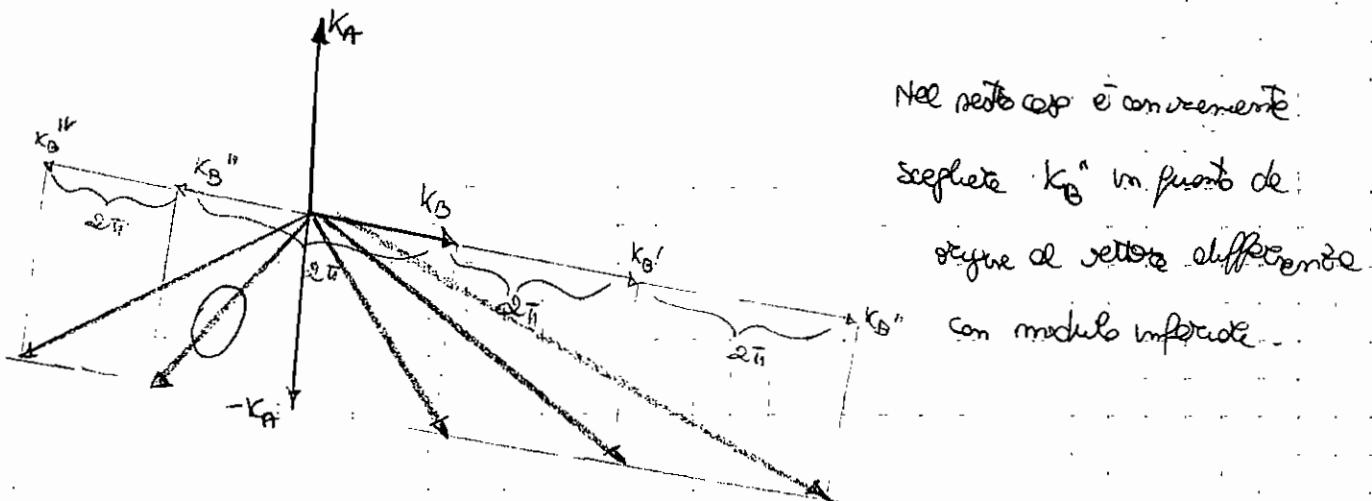


Ma chiede se nella pronificazione non convergono  $k_B$  o  $k_B'$  o qualcun altro vettore.

Se usi un vettore più lungo le tesse istanze completeggiate attorno ad'esso: con vettore più lungo di metà sarà in più facile.

Allora mi sceglie un generale  $\frac{k_B}{\|k_B\|}$  tale che  $|k_A - k_B|$  sia il più piccolo possibile.

## ESEMPIO

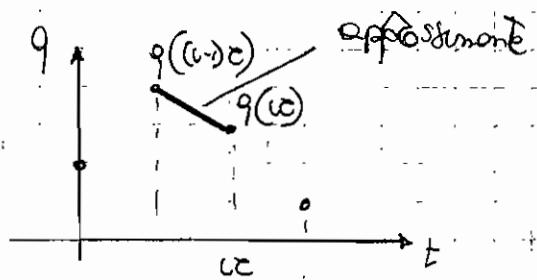


Nel resto cap è comodamente  
scrivere  $k_B''$  in fuori da:  
oggi al vettore effettivo  
con modulo inferiore.

## RIASSUNTO

$$\overset{s}{\underset{w}{\rightarrow}} T(\omega) \longrightarrow \overset{s}{\underset{w}{\rightarrow}} T(t_p)$$

$$\bar{x}_A = \begin{bmatrix} p_A \\ \dots \\ k_A \end{bmatrix}$$



PIANTIFICO

$$\bar{x}(t)$$

$$\bar{x}(c) \xrightarrow{\text{CINEMATIC INVERSE}} q(c)$$

$$\dot{q}(c) = \frac{q(c) - q((\omega)-c)}{c}$$

APPROXIMAZIONE

$$\dot{q}(c) = \frac{q(c) - \dot{q}((\omega)-c)}{c}$$

Se si vuole avere un controllo più preciso possa avere  $\dot{q}$  esatta e non approssimata. Nel diagramma si trova al punto A

$$\bar{x}(t) \xrightarrow{\downarrow} \bar{x}(c)$$

$$\text{Se era vero che } \dot{x} = J \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = J^{-1} \dot{x}$$

$$\dot{x}(t)$$

$$\dot{x}(c)$$

$$\text{Cm.} \downarrow \text{mette} \\ q(c)$$

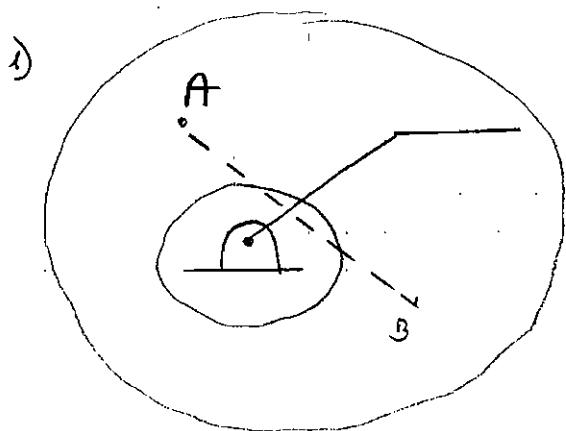
$$\dot{q}(c) = \frac{\dot{q}(c) - \dot{q}((\omega)-c)}{c}$$

$$\dot{q}(c) = J^{-1} \dot{x}$$

APPROXIMAZIONE  $\dot{q}(c) \rightarrow$  soluz. esatta!!

PROBLEMI DELL'ANALISI DI UNO SPazio APERTO:

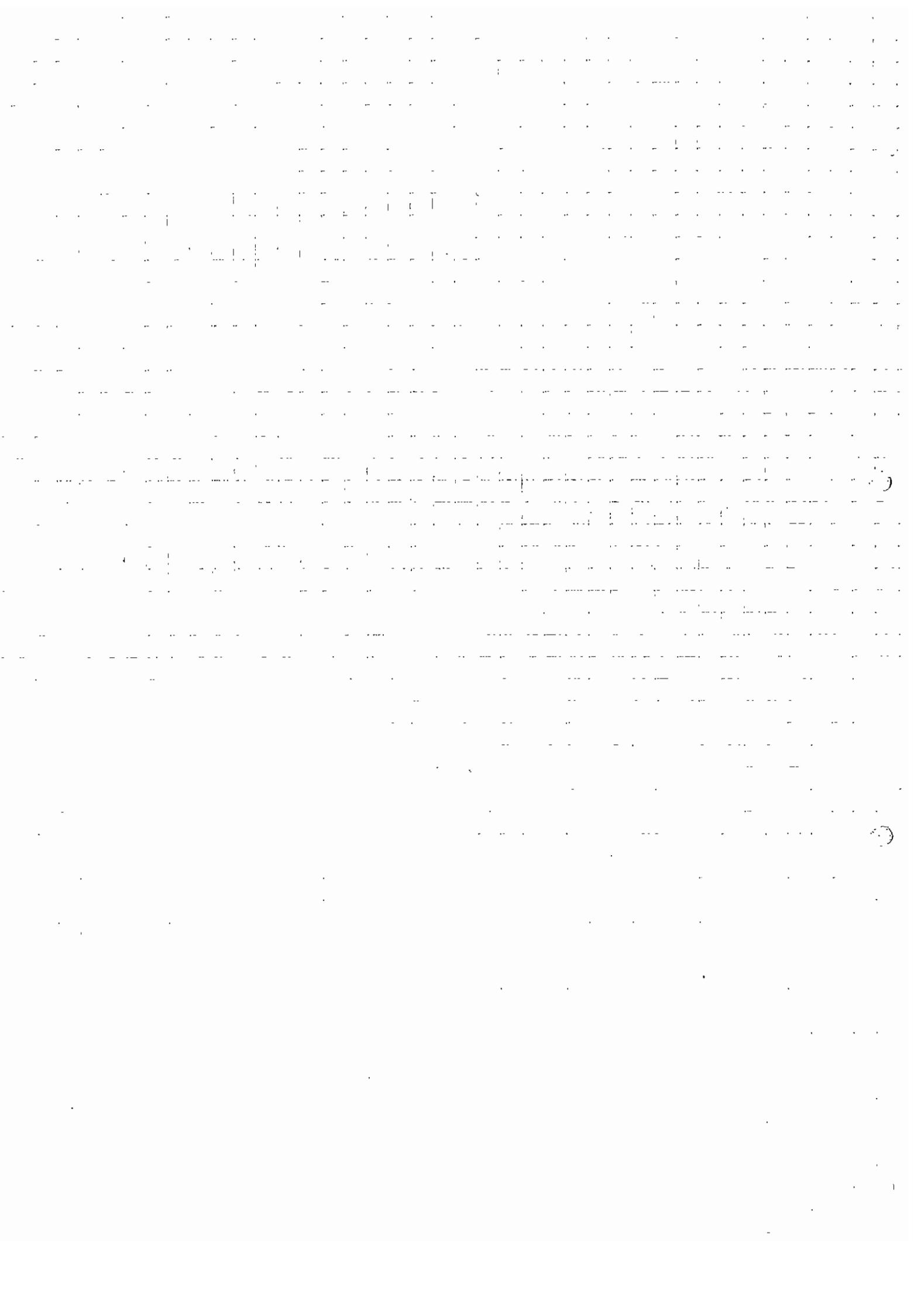
Sono sostanzialmente due:



la traiettoria passa per punti non appartenenti allo spazio (aperto) al costo equivalente del monopolio.

2) In questo tipo di proiezione possono non esistere che le traiettorie passate perpendicolarmente ad un punto di superficie centrale.

Se poi fosse obbligato passare vicino ad un punto di superficie - dobbiamo tollerare mettessimo il nostro movimento.



## Robotics Toolbox (MATLAB)

### • Descrizione di un ROBOT:

- 1) creiamo degli oggetti braccio con Link.

Nella creazione useremo posso un vettore a 4 elementi: i parametri cinematici del braccio nelle stesse  $d, a, \theta, d$ . Per default si prenderà essere il gomito di tipo standard. Se "modified" sarebbe per indicare che siamo usciti da notazione di Denavit-Hartenberg.

- 2) con  $L_1.m$  aggiungeremo la massa del braccio
- 3) con  $L_1.r$  descriviamo le posizioni del braccio.
- 4) con  $L_1.I$  introduciamo le tempi di mettere (sono sufficienti 3 valori)
- 5) creiamo il robot con Robot. Come parametri posso gli oggetti braccio.
- 6) con dwsrobot (moveRobot) lo si visualizzerà del manipolatore creato.

### • Simulazione del manipolatore: usiamo Simulink

Rendiamo gli elementi del Robotics Blocks.

- 1) inseriamo l'elemento ROBOT. Prendiamo a volte due blocchi e aggiungendo al robot precedentemente creato. Nota: quello che noi scriviamo è a 5 arti dobbiamo chiamarne uno degli arti del vettore.

