Esame di Teoria dei Segnali A
Ing. Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni

1 ottobre 2004

Esercizio 1

In una fabbrica è stato prodotto un lotto di 50 lampadine. Si sa che, per errore, tra le 50 lampadine vi sono 4 lampadine guaste. Le lampadine vengono poi confezionate in pacchi da 5. Supponendo di pescare due confezioni a caso, calcolare la probabilità che nella prima confezione vi sia una lampadina guasta e nella seconda ci siano 2 lampadine guaste. Si calcoli poi la probabilità che in una delle due scatole ci sia una lampadina guasta e nell'altra 2 lampadine guaste.

Soluzione

Notiamo che scegliere una scatola significa scegliere *a caso* 5 lampadine tra le lampadine non ancora estratte. Una volta estratta una scatola, le lampadine presenti nella scatola non vengono più riposte insieme alle rimanenti confezioni. Quindi *non* si a che fare con un esperimento di prove ripetute, siccome l'esito di una prova (cioè l'estrazione di una scatola) influenza, da un punto di vista statistico, l'esito delle prove successive. All'inzio, si hanno 46 lampadine funzionanti e 4 guaste.

Definiamo, per comodità notazionale, il seguente evento:

$$A_{\mathrm{e}-j}^{\mathrm{g}-i} = \{i \text{ lampadine guaste nella } j\text{−ma scatola estratta}\}\,. \tag{1}$$

La prima probabilità che si richiede di calcolare è $P_1 \triangleq P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-1}, A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-2}\}$. Per definizione di probabilità condizionata, si ha:

$$P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-1}, A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-2}\} = P\{A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-2}|A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-1}\}P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-1}\}. \tag{2}$$

Per calcolare $P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-1}\}$ è sufficiente notare che l'estrazione di 5 lampadine a caso fra il gruppo iniziale di 50 lampadine corrisponde ad un esperimento con uno spazio campione uniforme. In particolare, i casi favorevoli sono quelli con 1 lampadina guasta e 4 lampadine funzionanti. Quindi:

$$P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-1}\} = \frac{\#\,\text{casi favorevoli}}{\#\,\text{casi totali}} = \frac{\binom{4}{1}\binom{36}{4}}{\binom{50}{5}}. \tag{3}$$

A questo punto, *condizionatamente* al fatto che si è verificato $A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-1}$, la seconda estrazione corrisponde ad estrarre a caso 5 lampadine da un gruppo con 42 lampadine funzionanti e 3 lampadine guaste. I casi favorevoli sono quelli in cui ci sono 2 lampadine guaste e 3 funzionanti nel gruppo di 5 lampadine. Quindi:

$$P\{A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-2}|A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-1}\} = \frac{\binom{3}{2}\binom{42}{3}}{\binom{45}{5}}. \tag{4}$$

A questo punto, possiamo calcolare P_1:

$$P_1 = \frac{\binom{4}{1}\binom{36}{4}}{\binom{50}{5}} \times \frac{\binom{3}{2}\binom{42}{3}}{\binom{45}{5}} = \frac{20}{49 \times 47} \simeq 0.00868. \tag{5}$$

Passiamo ora a calcolare la seconda probabilità richiesta dal problema. Siccome si richiede che in una delle due scatole (non necessariamente la prima) ci sia una lampadina guasta, e nell'altra due lampadine guaste, la probabilità cercata può essere scritta come segue:

$$P_2 = P\{(A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-1}, A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-2}) \cup (A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-2}, A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-1})\} = P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-1}, A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-2}\} + P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-2}, A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-1}\} \tag{6}$$

dove la seconda uguaglianza segue dal fatto che i due eventi componenti sono ovviamente disgiunti. Per calcolare P_2 rimane da calcolare $P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-2}, A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-1}\}$. È immediato concludere che dovrà essere:

$$P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-1}, A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-2}\} = P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-2}, A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-1}\}. \tag{7}$$

Infatti, siccome le due scatole sono estratte a caso, non c'è motivo per cui l'ordine con cui si estraggono conti. Siccome siamo seguaci di San Tommaso, non crediamo all'intuizione, e ci fidiamo della sola matematica. Per definizione di probabilità condizionata, si ha:

$$P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-2}, A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-1}\} = P\{A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-1}|A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-2}\}P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-2}\}. \tag{8}$$

Ragionando come nel paragrafo precedente, segue che

$$P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-2}\} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 46 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix}} \tag{9}$$

$$P\{A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-1}|A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-2}\} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 43 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix}}. \tag{10}$$

Perciò si ottiene:

$$P\{A_{\mathrm{e}-1}^{\mathrm{g}-2}, A_{\mathrm{e}-2}^{\mathrm{g}-1}\} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 46 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix}} \times \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 43 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix}}. \tag{11}$$

E' facile provare che

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} 46 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 43 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 42 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{13}$$

e quindi si può concludere che (7) è vera. Per concludere:

$$P_2 = 2 \times P_1 = \frac{40}{49 \times 47} \simeq 0.017369. \tag{14}$$

Esercizio 2

Un viaggiatore attende in stazione l'arrivo di un treno che, rispetto all'orario previsto, ha un ritardo casuale distribuito in modo uniforme fra $-5'$ (cioè -5 minuti) e $5'$. Oltre al treno atteso deve arrivare in stazione un solo altro treno il cui arrivo è previsto 4 minuti dopo l'arrivo previsto per il treno di interesse. Questo secondo treno ha un ritardo distribuito in modo uniforme fra -2' e 4'. Il viaggiatore sale sul primo treno che arriva.

Il viaggiatore constata l'arrivo di un treno esattamente 3' dopo l'arrivo atteso per il primo treno. Qual è, dei due treni, quello osservato con maggior probabilità dal viaggiatore? Quanto vale tale probabilità?

Soluzione

Supponiamo di porre l'istante ufficiale di arrivo $t_1^{(u)}$ (una costante) del treno desiderato nell'origine dei tempi: $t_1^{(u)} = 0$. Indichiamo con T_1 il ritardo di tale treno. Per costruzione si ha $T_1 \sim \mathrm{Unif}(-5', 5')$. Indicando con $T_1^{(e)}$ l'istante di arrivo effettivo, si ha

$$T_1^{(e)} = t_1^{(u)} + T_1 = T_1. \tag{15}$$

Indicando con $t_2^{(u)}$ l'istante di arrivo ufficiale del secondo treno, rispetto al sistema di riferimento temporale considerato si ha $t_2^{(u)} = 4'$. L'istante effettivo di arrivo effettivo di tale treno è

$$T_2^{(e)} = t_2^{(u)} + T_2 = T_2 + 4'. \tag{16}$$

Essendo $T_2 \sim \mathrm{Unif}(-2', 4')$, segue (si ha a che fare con una trasformazione lineare da T_2 a $T_2^{(e)}$) che $T_2^{(e)} \sim \mathrm{Unif}(2', 8')$. Le funzioni densità di probabilità di $T_1^{(e)}$ e $T_2^{(e)}$ sono mostrate in Fig. 5.

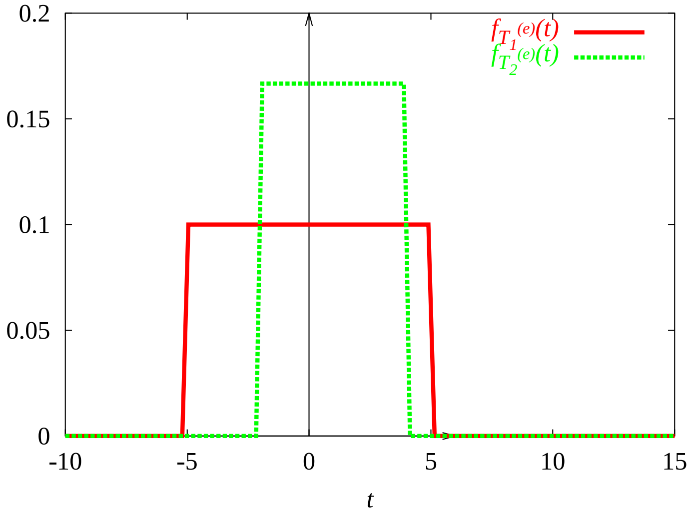

Figure 1: Funzioni densità di probabilità delle variabili aleatorie $T_1^{(e)}$ e $T_2^{(e)}$ nell'esercizio 2.

Il viaggiatore constata che l'orario effettivo di arrivo del treno (nel sistema di riferimento temporale considerato), cioè la realizzazione di $T^{(e)}$, è 3.5'. Consideriamo i seguenti eventi:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{il primo treno arrivato è il numero } 1\} \\
A_2 &= \{\text{il primo treno arrivato è il numero } 2\}.
\end{aligned}
$$

Per calcolare la probabilità che il treno arrivato sia il primo *dato che* l'istante di arrivo osservato è 3.5', si può applicare la regola di Bayes mista:

$$
\begin{aligned}
P\{A_1|T^{(e)} = 3.5'\} &= \frac{f_{T^{(e)}}(3.5'|A_1)P\{A_1\}}{f_{T^{(e)}}(3.5')} \\
&= \frac{f_{T_1^{(e)}}(3.5')P\{A_1\}}{f_{T^{(e)}}(3.5')}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

La funzione densità di probabilità non condizionata a denominatore si può calcolare utilizzando il teorema della probabilità totale per funzioni densità di probabilità:

$$
\begin{aligned}
f_{T^{(e)}}(3.5') &= f_{T^{(e)}}(3.5'|A_1)P\{A_1\} + f_{T^{(e)}}(3.5'|A_2)P\{A_2\} \\
&= f_{T_1^{(e)}}(3.5')P\{A_1\} + f_{T_2^{(e)}}(3.5')P\{A_2\}.
\end{aligned} \tag{18}
$$

A questo punto, rimangono da calcolare $P\{A_1\}$ e $P\{A_2\}$. Notando che $P\{A_2\} = 1 - P\{A_1\}$, è sufficiente concentrarsi sul calcolo di $P\{A_1\}$. In particolare, si ha:

$$
P\{A_1\} = P\{T_1^{(e)} < T_2^{(e)}\} = P\{T_1^{(e)} - T_2^{(e)} < 0\}. \tag{19}
$$

La variabile aleatoria $T_1^{(e)} - T_2^{(e)}$ si può reinterpretare come $T_1^{(e)} + (-T_2^{(e)})$, dove $-T_2^{(e)}$ è ovviamente uniformemente distribuita in (-8',-2'). Essendo $T_1^{(e)}$ e $T_2^{(e)}$ indipendenti, la pdf di $T_1^{(e)} - T_2^{(e)}$ si ottiene dalla convoluzione fra una pdf uniforme fra -5' e 5' ed una pdf uniforme fra -8' e -2'. Essendo le due pdf rettangolari e siccome una delle due ha una base maggiore dell'altra, si ha che il risultato della convoluzione è una pdf trapezoidale e, ovviamente, simmetrica rispetto al centro delle sue basi. In altre parole, la forma generica della pdf è quella in Fig. 2 (a). Per caratterizzare univocamente la pdf trapezoidale in Fig. 2 (a), basta determinare i valori delle 5 grandezze indicate. Considerando il metodo grafico per fare la convoluzione, ed immaginando che la pdf di $T_1^{(e)}$ rimanga fissa (quindi la pdf di $T_2^{(e)}$, cioè la pdf ribaltata di $-T_2^{(e)}$

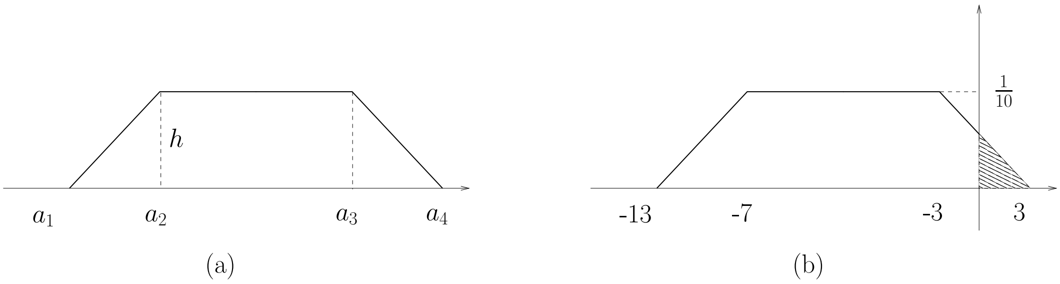

Figure 2: (a) Generica pdf trapezoidale e (b) caso particolare nell'esercizio 2.

scorra), si scopre:

$$a_1 = -13 \quad (20)$$
$$a_2 = -7 \quad (21)$$
$$a_3 = -3 \quad (22)$$
$$a_4 = 3 \quad (23)$$
$$h = \frac{1}{10}. \quad (24)$$

In particolare, l'altezza h del trapezio è semplicemente il risultato dell'integrale di convoluzione quando la pdf ribaltata di $-T_2^{(e)}$ è "all'interno" della pdf di $T_1^{(e)}$, quindi h è l'area di un rettangolo con base 6 ed altezza $\frac{1}{6} \times \frac{1}{10}$. La pdf di $T_1^{(e)} - T_2^{(e)}$ è mostrata in Fig. 2 (b)—la scale di valori non è corretta. Quindi:

$$P\{A_1\} = P\{T_1^{(e)} - T_2^{(e)} < 0\} = 1 - \text{Area triangolo tratteggiato in Fig. 2 (b)} = \frac{37}{40} \quad (25)$$

e ovviamente

$$P\{A_2\} = 1 - P\{A_1\} = \frac{3}{40}. \quad (26)$$

A questo, è possibile valutare $f_{T^{(e)}}(3.5')$ in (18), ottenendo:

$$f_{T^{(e)}}(3.5') = \frac{1}{10}\frac{37}{40} + \frac{1}{6}\frac{3}{40} = \frac{21}{200} \quad (27)$$

e, conseguentemente:

$$\begin{aligned} P\{A_1|T^{(e)} = 3.5'\} &= \frac{\frac{37}{400}}{\frac{21}{200}} = \frac{37}{41} \simeq 0.90 \\ P\{A_2|T^{(e)} = 3.5'\} &= 1 - P\{A_1|T^{(e)} = 3.5'\} \simeq 0.10. \end{aligned} \quad (28)$$

Si può quindi concludere che il treno osservato con maggior probabilità dal viaggiatore è il primo treno.

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria con la seguente funzione densità di probabilità (pdf):

$$f_X(x) = \frac{1}{4}\left[u(x) - u(x-2)\right] + \frac{1}{2}e^{-\lambda(x-3)}u(x-3)$$

dove

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Determinare la pdf di $Y = X^2$.

Si assuma quindi che X sia descritta dalla seguente pdf:

$$f_X^{\rm mod}(x) = \frac{1}{3}\delta(x+3) + \frac{2}{3} f_X(x).$$

Discutere qualitativamente (e, se possibile, quantitivamente) come cambia la pdf di $Y = X^2$ rispetto al caso precedente.

Soluzione

La trasformazione di variabile casuale in questo esercizio è descritta dalla funzione $y = g(x) = x^2$. Ovviamente, se $y < 0$ non ci sono soluzioni, e quindi $f_Y(y) = 0$. Notiamo che X, quando descritta da $f_X(x)$, è continua, e concentriamoci nel caso in cui $y > 0$. In questo caso, l'equazione $y = x^2$ presenta due soluzioni: $x_{1,2} = \pm\sqrt{y}$. Osservando la struttura di $f_X(x)$, come mostrata in Fig. 3, è evidente che i valori "critici" di y sono $2^2 = 4$ e $3^2 = 9$, rispettivamente. Notiamo anche preliminarmente che $f_X(x_1) = f_X(-\sqrt{y}) = 0$, $\forall\ y > 0$. Imponendo

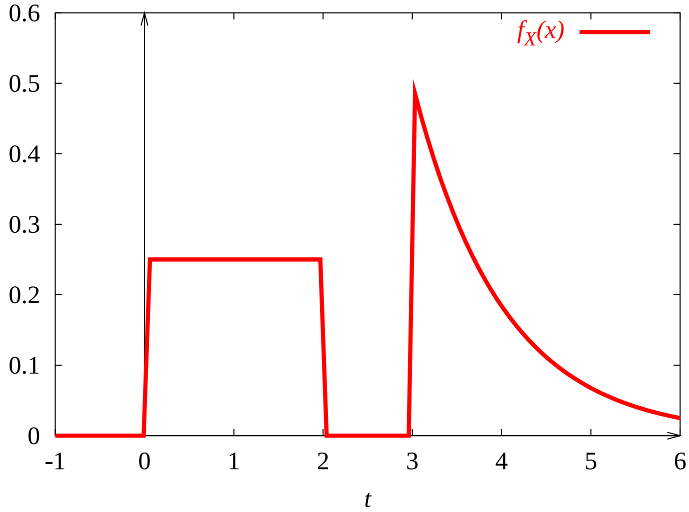

Figure 3: Pdf $f_X(x)$ nell'esercizio 3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{29}$$

è facile concludere che $\lambda = 1$. A questo punto, per determinare $f_Y(y)$, è quindi possibile applicare il teorema fondamentale, considerando i seguenti casi.

$y \geq 9$. In questo caso $x_2 = \sqrt{y} > 3$, quindi:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = \frac{\frac{1}{2}\exp(3-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = \frac{\exp(3-\sqrt{y})}{4\sqrt{y}} \tag{30}$$

$4 < y < 9$. In questo caso $x_2 = \sqrt{y} \in (2,3)$. Essendo $f_X(x_2) = 0$, si può concludere che $f_Y(y) = 0$.

$0 \leq y \leq 4$. In questo caso $x_2 = \sqrt{y} \in (0,2)$. Quindi:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = \frac{\frac{1}{4}}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{8\sqrt{y}} \tag{31}$$

Combinando insieme le varie espressioni di $f_Y(y)$, possiamo scrivere in modo compatto:

$$f_Y(y) = \frac{1}{8\sqrt{y}}[u(y) - u(y-4)] + \frac{\exp(3-\sqrt{y})}{4\sqrt{y}} u(y-9). \tag{32}$$

L'andamento di $f_Y(y)$ è mostrato in Fig. 4.

A questo punto, consideriamo il caso in cui X sia descritta da $f_X^{\rm mod}(x)$. In questo caso X è una variabile aleatoria mista. Per quanto riguarda la sua parte continua, la trasformazione agisce come al punto precedente. Essendo la parte

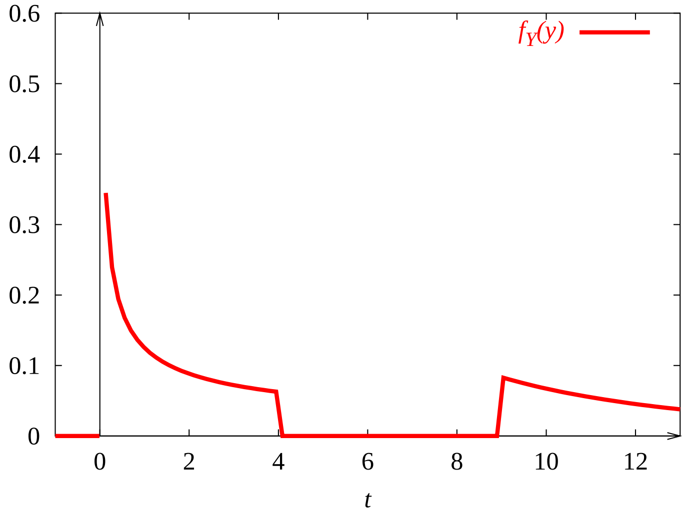

Figure 4: Pdf $f_Y(y)$ nell'esercizio 3.

continua una versione scalata (moltiplicata per 2/3) di $f_X(x)$, si ha che il risultato della trasformazione è una versione scalata (moltiplicata per 2/3) di $f_Y(y)$. A questo punto, la presenza di una delta, concentrata in $x = -3$, in $f_X^{\text{mod}}(x)$, indica una massa di probabilità, di peso 1/3, centrata in $x = -3$. Questa massa di probabilità da' luogo, nella pdf di Y, ad una massa di probabilità, ovviamente di peso 1/3, concentrata in $y = (-3)^2 = 9$. Quindi, la pdf di Y in questo caso, indicata come $f_Y^{\text{mod}}(y)$, ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} f_Y^{\text{mod}}(y) &= \frac{1}{3}\delta(y-9) + \frac{2}{3} f_Y(y) \\ &= \frac{1}{3}\delta(y-9) + \frac{1}{12\sqrt{y}}[u(y) - u(y-4)] + \frac{\exp(3-\sqrt{y})}{6\sqrt{y}} u(y-9). \end{aligned} \tag{33}$$

Esercizio 4

Siano date due variabili aleatorie X e Y indipendenti, con le seguenti funzioni densità di probabilità (pdf):

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{3}{4a^3}(a^2 - y^2) & -a \le x \le a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$

dove a è una costante reale positiva. Si definiscano $Z_1 \triangleq X + Y$ e $Z_2 \triangleq X - Y$. Esiste un valore di a per cui Z_1 e Z_2 sono incorrelate?

Soluzione

Le pdf di X e Y sono mostrate in Fig. 5 (a) e (b), rispettivamente—nel caso di $f_Y(y)$, si è considerato $a = 0.5$ come valore esemplificativo. Nel calcolare la correlazione fra Z_1 e Z_2, applichiamo la proprietà di linearità dell'aspettazione. Si ottiene:

$$\mathrm{E}[Z_1 Z_2] = \mathrm{E}[(X+Y)(X-Y)] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[Y^2]. \tag{34}$$

Si ha:

$$\mathrm{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2\, \mathrm{d}x = \frac{13}{12} \tag{35}$$

$$\mathrm{E}[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\, \mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} y^2 \frac{3}{4a^2}(a^2 - y^2)\, \mathrm{d}y = \frac{a^2}{5}. \tag{36}$$

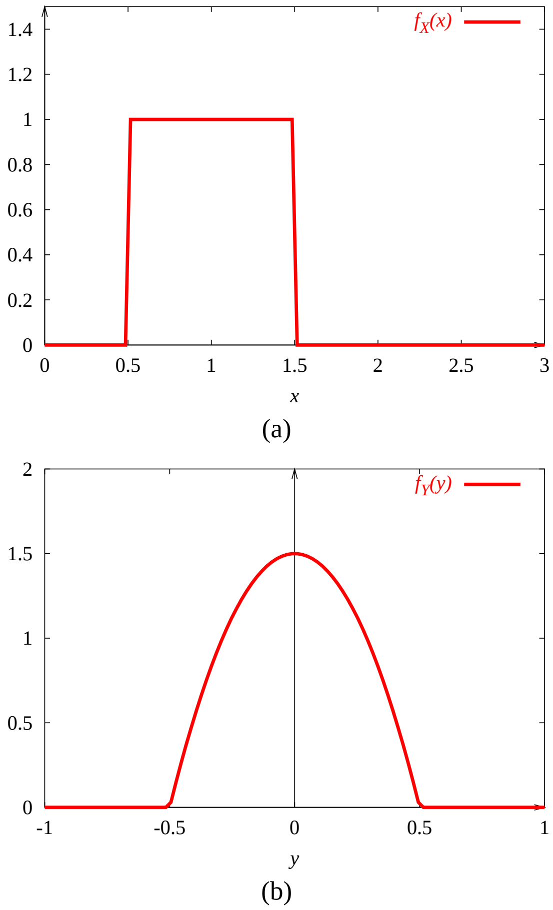

Figure 5: Pdf delle variabili aleatorie (a) X e (b) Y nell'esercizio 4.

Perchè Z_1 e Z_2 siano incorrelate, si deve verificare che $\mathrm{E}[Z_1Z_2] = \mathrm{E}[Z_1]\mathrm{E}[Z_2]$. Per linearità dell'operatore media e notando le evidenti simmetrie di $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ (si guardi Fig. 5), si ha:

$$\mathrm{E}[Z_1] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y] = 1 + 0 = 1 \tag{37}$$

$$\mathrm{E}[Z_2] = \mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[Y] = 1 - 0 = 1. \tag{38}$$

Quindi, la condizione di incorrelazione si può riscrivere come

$$\frac{13}{12} - \frac{a^2}{5} = 1 \tag{39}$$

da cui si ottiene che il valore di a che rende Z_1 e Z_2 incorrelate è $a = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \simeq 0.645$.