Soluzioni

1) Il signor Rossi possiede due telefonini. Assumendo che il tempo necessario perché, a partire da un certo istante $t = 0$, riceva la prima chiamata su un telefonino sia una v.c. esponenziale di parametro λ_1 per il primo e λ_2 per il secondo, rispettivamente, e che le chiamate sui due telefonini siano indipendenti, determinare la d.d.p. della v.c. T = "Tempo necessario perchè il signor Rossi riceva una chiamata". Di che tipo di variabile si tratta?

Soluzione

Dette T_i, $i = 1, 2$, le v.c. "Tempo necessario perché arrivi una chiamata sul telefonino i", abbiamo che $T = \min(T_1, T_2)$ e quindi $\{T \leq t\} = \{T_1 \leq t\} + \{T_2 \leq t\}$. Essendo gli eventi $\{T_1 \leq t\}$ e $\{T_2 \leq t\}$ non disgiunti, abbiamo che

$$P\{T \leq t\} = P\{T_1 \leq t\} + P\{T_2 \leq t\} - P(\{T_1 \leq t\}\{T_2 \leq t\})$$

che, per l'indipendenza di T_1 e T_2 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P\{T \leq t\} &= P\{T_1 \leq t\} + P\{T_2 \leq t\} - P\{T_1 \leq t\}P\{T_2 \leq t\} \\ &= F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)\,. \end{aligned}$$

Detta $u(t)$ la funzione "gradino unitario", derivando rispetto a t otteniamo:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= f_{T_1}(t) + f_{T_2}(t) - f_{T_1}(t)F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t)f_{T_2}(t) \\ &= [\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}(1 - e^{-\lambda_2 t}) - (1 - e^{-\lambda_1 t})\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}]\, u(t) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\, u(t) \end{aligned}$$

e dunque la v.c. T richiesta è ancora una esponenziale di parametro $(\lambda_1 + \lambda_2)$.

2) La d.d.p. congiunta delle v.c. X e Y è $f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 \leq x \leq 1\,;\, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$. Stabilire se le due v.c. sono statisticamente indipendenti, determinare $E\{X|Y = 1\}$, e calcolare il coefficiente di correlazione ρ_{XY}.

Soluzione

Calcolando le densità marginali:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dy = \begin{cases} \int_0^1 (x + y)dy = x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = f_Y(x)$$

ed osservando che $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, concludiamo che X e Y non sono indipendenti. Inoltre, osservando che

$$f_{X|Y}(x\,|\,y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{x+y}{y+1/2} & 0 \leq x \leq 1 \;\; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

per $y = 1$ abbiamo

$$E\{X|Y=1\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x\,|\,1)\, dx = \int_0^1 x\, \frac{2}{3}(x+1)dx = \frac{5}{9} \cong 0.55\,.$$

Per l'ultimo punto, usando $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$ calcoliamo

$$E[Y] = E[X] = \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \cong 0.58$$

e per il teorema fondamentale:

$$E[XY] = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy(x+y)dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{1}{3}$$

e dunque $Cov[X,Y] = 1/3 - (7/12)^2 \cong -0.0069$. Sevono ancora le varianze. Usando $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$ ci serve

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})dx = \frac{5}{12} \cong 0.41$$

per cui $Var[Y] = Var[X] = \frac{5}{12} + (\frac{7}{12})^2 = \frac{109}{144} \cong 0.0694$. Infine

$$\rho_{XY} = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} \cong -\frac{0.0069}{0.0694} \cong -0.1$$

3) Una slot machine è composta da 3 rulli identici, ciascuno recante S simboli, ed un display che mostra un simbolo per ogni rullo. Ad ogni giocata, che costa 1 euro, i rulli vengono ruotati indipendentemente e a caso. Se quando i tre rulli si fermano compaiono tre simboli identici sul display, il giocatore vince 200 euro. La slot machine costa 2000 euro al gestore, il quale prevede in media 5000 giocate l'anno. Qual è il minimo valore di S affinché il gestore della slot machine possa in un anno in media ammortizzare il prezzo della slot machine?

Soluzione

Definiamo la v.c. guadagno (in euro) del gestore alla i-esima giocata

$$G_i = \begin{cases} 1 & \text{se il giocatore perde} \\ 1 - 200 = -199 & \text{se il giocatore vince} \end{cases} .$$

Il numero di possibili triplette della slot machine è S^3, mentre il numero di triplette con simboli uguali è S, e pertanto $P\{\text{giocatore vince}\} = \frac{S}{S^3} = \frac{1}{S^2}$, mentre $P\{\text{giocatore perde}\} = 1 - \frac{1}{S^2}$. Quindi per il teorema della probabilità totale per le medie:

$$E[G_i] = \left(1 - \frac{1}{S^2}\right) \cdot 1 + \frac{1}{S^2} \cdot (-199) = 1 - \frac{200}{S^2}\,.$$

Il guadagno annuo G è la somma dei guadagni di tutte le giocate: $G = \sum_{i=1}^{N} G_i$, dove le G_i sono v.c. I.I.D. ed indipendenti da N, con $E[N] = 5000$. Pertanto, per il teorema della media condizionata si ha:

$$E[G] = E[E[G\,|\,N]] = E[N \cdot E[G_i]] = E[N] \cdot E[G_i]\,.$$

Imponendo che questo sia maggiore del costo $C = 2000$ della slot machine troviamo: $E[G_i] > 0.4$, ovvero $S \geq \sqrt{\frac{200}{0.6}} \cong 18.3$, da cui concludiamo che il minimo S per cui $E[G]$ supera C è $S = 19$.

4) Un giocatore di tiro al bersaglio fa $N = 400$ tiri, con probabilità di centrare il bersaglio $p = 0.2$. Ogni tiro gli costa 1 euro, e ad ogni centro ne guadagna 4. Qual è la probabilità che il giocatore dopo gli N tiri ci guadagni?

Soluzione

Definita la v.c. C=”numero di centri”, la v.c. G=“guadagno del giocatore” è una funzione del numero di centri: $G = C \cdot 4 - N \cdot 1$. La probabilità cercata è dunque $P\{G > 0\} = P\{C > N/4\} = P\{C > 100\}$. La v.c. C ha distribuzione binomiale con media $\eta_c = Np = 80$ e varianza $\mathrm{Var}[C] = \sigma_c^2 = Np(1-p) = 64$.

Per il teorema del limite centrale C converge ad una v.c. gaussiana con stessa media e varianza. Pertanto

$$
\begin{aligned}
P\{C > 100\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} \int_{100}^{\infty} e^{-\frac{(x-\eta_c)^2}{2\sigma_c^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\left(\frac{100-\eta_c}{\sigma_c}\right)}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \\
= Q\left(\frac{100-80}{8}\right) &= Q(2.5) \cong 0.0062
\end{aligned}
$$