Soluzioni

1) Si è di fronte a 5 porte chiuse e si ha un sacchetto con 5 chiavi: ogni chiave apre una delle 5 porte. Si ha a disposizione un solo tentativo per porta e, dopo il tentativo, bisogna rimettere la chiave scelta nel sacchetto. Qual è la probabilità di aprire almeno 4 porte? Qual è la probabilità di aprire le prime quattro porte (non importa se la quinta si apre oppure no)? Ripetere l'esercizio supponendo invece che, se una chiave pescata apre la porta corrispondente, essa non venga rimessa nel sacchetto.

Soluzione

Prima parte: È un problema di prove ripetute, in quanto, rimettendo le chiavi nel sacchetto, si hanno 5 esperimenti indipendenti in sequenza, con probabilità di successo (apertura porta) 1/5. Detti $E_A =$\{almeno 4 porte aperte\} ed $E_B =$\{le prime 4 porte aperte\} gli eventi cercati, si ha subito dalla distribuzione binomiale del numero di successi su $n = 5$ prove con probabilità di successo $p = 0.2$:

$$P\{E_A\} = \binom{5}{4} 0.2^4 (1-0.2)^1 + \binom{5}{5} 0.2^5 (1-0.2)^0 \simeq 0.00672;$$

e sulle prime $n = 4$ prove:

$$P\{E_B\} = \binom{4}{4} 0.2^4 (1-0.2)^0 \simeq 0.0016.$$

Un modo di calcolo alternativo, più lungo ma introduttivo alla seconda parte dell'esercizio, consiste nell'elencare gli eventi disgiunti la cui unione dà gli eventi cercati. Definiti gli eventi $E_i =$\{si apre la porta i-ma\}, $i = 1, ..., 5$, sui singoli sottoesperimenti, si ha

$$E_A = E_1E_2E_3E_4\overline{E}_5 + E_1E_2E_3\overline{E}_4E_5 + E_1E_2\overline{E}_3E_4E_5 + E_1\overline{E}_2E_3E_4E_5 + \overline{E}_1E_2E_3E_4E_5 + E_1E_2E_3E_4E_5$$

$$E_B = E_1E_2E_3E_4S_5$$

dove + indica unione di eventi, la barra indica complementazione, ed S_i è l'evento certo nel sottoesperimento i-mo. Per la regola della catena si ha:

$$\begin{aligned} P\{E_1E_2E_3E_4\overline{E}_5\} &= P\{E_1\}P\{E_2|E_1\}P\{E_3|E_1E_2\}P\{E_4|E_1E_2E_3\}P\{\overline{E}_5|E_1..E_4\} \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot(1-\frac{1}{5}) \end{aligned}$$

e lo stesso valore si ha per gli altri eventi con 4 porte aperte, poiché i risultati degli esperimenti precenti non cambiano lo spazio campione e la funzione probabilità dei singoli sottoesperimenti (prove indipendenti). È facile verificare che si riottengono i risultati già visti col metodo delle prove ripetute.

Seconda Parte: qui invece il lasciare la chiave vincente sulla porta aperta all'esperimento precedente diminuisce il numero di chiavi tra cui scegliere all'esperimento successivo, e quindi ne altera la funzione probbailità, per cui gli esperimenti non sono indipendenti. In questo caso i conti si fanno usando la regola della catena:

$$\begin{aligned} P\{E_1E_2E_3E_4\overline{E}_5\} &= P\{E_1\}P\{E_2|E_1\}P\{E_3|E_1E_2\}P\{E_4|E_1E_2E_3\}P\{\overline{E}_5|E_1..E_4\} \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{1}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{E_1E_2E_3\overline{E}_4E_5\} &= P\{E_1\}P\{E_2|E_1\}P\{E_3|E_1E_2\}P\{\overline{E}_4|E_1E_2E_3\}P\{E_5|E_1..\overline{E}_4\} \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2} \cong 0.0041 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{E_1E_2\overline{E}_3E_4E_5\} &= P\{E_1\}P\{E_2|E_1\}P\{\overline{E}_3|E_1E_2\}P\{E_4|E_1E_2\overline{E}_3\}P\{E_5|E_1..E_4\} \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \cong 0.0055 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{E_1\overline{E}_2E_3E_4E_5\} &= P\{E_1\}P\{\overline{E}_2|E_1\}P\{E_3|E_1\overline{E}_2\}P\{E_4|E_1\overline{E}_2E_3\}P\{E_5|E_1..E_4\} \\ &= \frac{1}{5}\cdot(1-\frac{1}{4})\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \cong 0.00625 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{\overline{E}_1E_2E_3E_4E_5\} &= P\{\overline{E}_1\}P\{E_2|\overline{E}_1\}P\{E_3|\overline{E}_1E_2\}P\{E_4|\overline{E}_1E_2E_3\}P\{E_5|\overline{E}_1..E_4\} \\ &= (1-\frac{1}{5})\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \cong 0.0066 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{E_1E_2E_3E_4E_5\} &= P\{E_1\}P\{E_2|E_1\}P\{E_3|E_1E_2\}P\{E_4|E_1E_2E_3\}P\{E_5|E_1..E_4\} \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 \cong 0.0083 \end{aligned}$$

e pertanto abbiamo $P\{E_A\} \cong 0.0309$ e $P\{E_B\} \cong 0.0083$

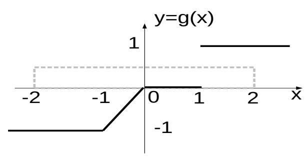
2) Sia X una variabile casuale uniformemente distribuita in (-2,2) e si consideri la sua trasformazione attraverso la seguente funzione:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -1 \\ x & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

Determinare la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $g(X)$ e disegnarne il grafico. Calcolarne quindi valor medio e varianza.

Soluzione

In figura vediamo il grafico di $y = g(x)$ e la densità di X, che vale 1/4 per $x \in [-2, 2]$.



Applicando il teorema fondamentale:

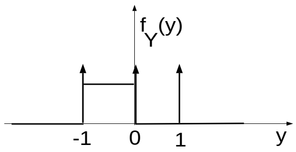
1) Fuori codominio: per $y < -1$ e $y > 0$ (ma $y \neq 1$) si ha $f_Y(y) = 0$.

2) Zone piatte: ce ne sono tre, una per $y = -1$, dove avremo una delta di area pari a $P\{Y = -1\} = P\{X < -1\} = 1/4$; poi una delta in $y = 0$, di area $P\{Y = 0\} = P\{0 < X < 1\} = 1/4$; infine una delta in $y = 1$, di area pari a $P\{Y = 1\} = P\{X > 1\} = 1/4$;

3) per ogni $y \in [-1, 0]$ nel codominio: esiste una soluzione $x_1 = y$ a derivata unitaria, e dunque

$$f_Y(y) = \frac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{1}{4}$$

e dunque la densità di Y si scrive: $f_Y(y) = c(y) + \frac{1}{4}(\delta(y+1) + \delta(y) + \delta(y-1))$, dove la parte senza delta vale $c(y) = 1/4$ per $y \in [-1, 0]$ e zero altrove. Il grafico di $f_Y(y)$ è mostrato in figura



Per il calcolo della media, possiamo usare la pdf di y:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-1}^{0} y c(y) dy + \frac{1}{4}((-1) + (0) + (1)) = -\frac{1}{8}$$

dove abbiamo usato la proprietà del campionamento delle delta, ed il fatto che la loro area è unitaria. Oppure possiamo procedere direttamente col teorema dell'aspettazione:

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} g(x) dx = -\frac{1}{8}$$

Similmente per il valore quadratico medio:

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_{-1}^{0} y^2 c(y) dy + \frac{1}{4}\left((-1)^2 + (0)^2 + (1)^2\right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

oppure col teorema dell'aspettazione:

$$E\{g^2(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) f_X(x) dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} g^2(x) dx = \frac{7}{12}$$

ed infine $VAR[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{7}{12} - \frac{1}{64} \cong 0.567$.

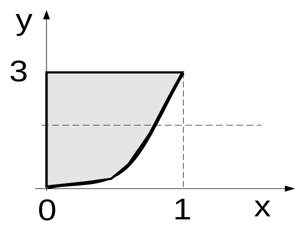
3) La funzione densità di probabilià congiunta della coppia di variabili casuali (X, Y) ha la seguente espressione:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/2 & 0 \le y \le 3, 0 \le x \le \sqrt{y/3} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Determinare la media condizionata $E[X|Y = y]$.

Soluzione

La pdf congiunta $f_{XY}(x, y)$ è costante e pari a 0.5 sul dominio a tratto mostrato in figura

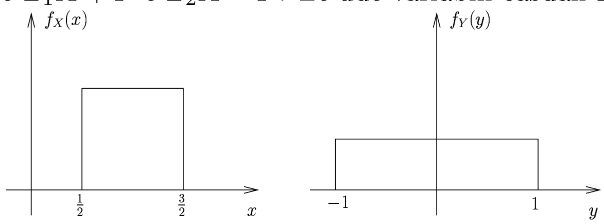


Calcoliamo la media condizionata come $E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x|Y=y)dx$, dove $f_X(x|Y=y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$ per $0 \le y \le 3, 0 \le x \le \sqrt{y/3}$ e zero altrove. La marginale si trova integrando rispetto ad x:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_0^{\sqrt{y/3}} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{3}}$$

per $0 \le y \le 3$, e zero altrove. Pertanto $f_X(x|Y=y) = \sqrt{\frac{3}{y}}$ per $0 \le x \le \sqrt{y/3}$ e zero altrove, cioè X dato Y=y ha una distribuzione uniforme su $0 \le x \le \sqrt{y/3}$ e dunque la sua media è $E[X|Y=y] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{3}}$.

4) Siano date due variabili casuali X e Y indipendenti, con funzioni densità di probabilità $f_X x)$ e $f_Y y)$ indicate in figura. Determinare le funzioni densità di probabilità (congiunta e marginali) delle due variabili aleatorie $Z_1 X+Y$ e $Z_2 X-Y$. Le due variabili casuali Z_1 sono indipendenti?



Soluzione

Il sistema di V.A.:

$$\begin{aligned} Z_1 &= X+Y \\ Z_2 &= X-Y \end{aligned}$$

ha come codominio tutto i possibili valori di (z_1, z_2) e, fissata tale coppia, una sola soluzione (x_1, y_1) ottenuta invertendo il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= (z_1+z_2)/2 \\ y_1 &= (z_1-z_2)/2 \end{aligned}$$

ed uno Jacobiano pari a:

$$J = det\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2$$

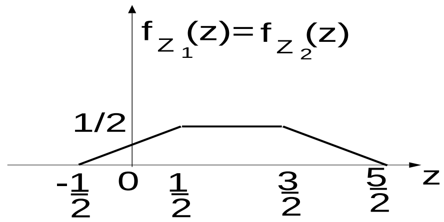
cosicché dal teorema fondamentale abbiamo:

$$f_{Z_1Z_2}(z_1,z_2) = \frac{f_{XY}(x_1,y_1)}{|J(x_1,y_1)|} = \frac{f_X(x_1)f_Y(y_1)}{2} = \frac{1}{4}$$

per $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{3}{2}, -1 < y_1 < 1$ (cioè $\frac{1}{2} < \frac{z_1+z_2}{2} < \frac{3}{2}, -1 < \frac{z_1-z_2}{2} < 1$) e zero altrove. Abbiamo sfruttato l'indipendenza di X e Y nello scrivere $f_{XY}(x_1,y_1) = f_X(x_1)f_Y(y_1)$. Il dominio su cui $f_{Z_1Z_2}$ è costante e pari a $1/4$ è un rettangolo di lati 1 e 4 sul piano (z_1,z_2), ruotato di 90 gradi rispetto agli assi. Avendo la pdf congiunta, si possono ricavare le marginali per integrazione rispetto alla variabile che non interessa. Alternativamente le pdf marginali di Z_1 e Z_2 si possono ottenere per convoluzione delle pdf marginali di X e Y:

$$\begin{aligned} f_{Z_1}(z) &= f_X \otimes f_Y(z) \\ f_{Z_2}(z) &= f_X \otimes f_W(z) \end{aligned}$$

dove $W = -Y$, e poiché si ha dal teorema fondamentale $f_W(u) = -f_Y(u) = f_Y(u)$ per la simmetria di $f_Y(y)$, concludiamo che $f_{Z_2}(z) = f_{Z_1}(z)$. Tale convoluzione facilmente si trova avere il grafico a trapezio mostrato in figura:



È pertanto evidente che $f_{Z_1}(z_1)f_{Z_2}(z_2)$ non può coincidere con $f_{Z_1Z_2}(z_1, z_2)$ trovata prima, la quale è costante e pari ad $1/4$ su un rettangolo del piano (z_1, z_2). Quindi Z_1 e Z_2 non sono indipendenti.