Soluzioni

1) Una scatola viene riempita lanciando un dado bianco (B) e uno nero (N) e mettendo nella scatola tante palline bianche quant'è il numero sulla faccia del dado B, e tante nere quant'è il numero sulla faccia del dado N. Dopo l'esperimento, si estraggono dalla scatola tre palline, di cui due bianche e una nera. Qual è la probabilità che il dado B avesse la faccia col numero tre?

Soluzione

Definiamo gli eventi:

$\mathcal{A} = \{$estratte 2 bianche e 1 nera$\}$ $\quad\mathcal{B} = \{$dado B con faccia 3$\}$

$\mathcal{B}_{ji} = \{$dado B con faccia j, dado N con faccia i$\}$. Cerchiamo $P\{\mathcal{B}\,|\,\mathcal{A}\}$.

Per il teorema di Bayes si ha

$$P\{\mathcal{B}\,|\,\mathcal{A}\} = \frac{P\{\mathcal{A}\mathcal{B}\}}{P\{\mathcal{A}\}}.$$

Notiamo che gli eventi disgiunti $\mathcal{B}_{ji}$, $j = 1...6$, $i = 1...6$ costituiscono una partizione dello spazio campione, e poiché i dadi sono non truccati, e l'esperimento di lancio ha dunque 36 possibili uscite, si ha per ogni i e j: $P\{\mathcal{B}_{ji}\} = 1/36$. Calcoliamo ora $P\{\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B}_{ji}\}$. Si tratta di calcolare la probabilità di estrarre 2 bianche e 1 nera dato che nella scatola ci sono j bianche e i nere. È chiaro che tale probabilità è nulla se $j = 1$, mentre negli altri casi ci sono $\binom{j+i}{3}$ modi di scegliere 3 palline tra quelle nella scatola, di cui $\binom{j}{2}\binom{i}{1}$ di sceglierne 2 bianche tra le j disponibili e una nera tra le i disponibili, per il principio di analisi combinatoria. Pertanto, per $j \geq 2$, si ha

$$P\{\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B}_{ji}\} = \frac{\binom{j}{2}\binom{i}{1}}{\binom{j+i}{3}} = \frac{3ij(j-1)}{(j+i)(j+i-1)(j+i-2)}$$

Quindi per il teorema della probabilità totale si ha

$$P\{\mathcal{A}\} = \sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{6} P\{\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B}_{ji}\}P\{\mathcal{B}_{ji}\} = \sum_{j=2}^{6}\sum_{i=1}^{6} \frac{3ij(j-1)}{36(j+i)(j+i-1)(j+i-2)} = \frac{5897}{15840} \cong 0.372$$

mentre, poiché $\mathcal{B}$ è l'unione degli eventi disgiunti $\mathcal{B}_{3i}$, $i = 1...6$, per il terzo assioma si ha:

$$P\{\mathcal{A}\mathcal{B}\} = P\{\mathcal{A}\cdot\bigcup_i \mathcal{B}_{3i}\} = \sum_i P\{\mathcal{A}\mathcal{B}_{3i}\} = \sum_{i=1}^{6} P\{\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B}_{3i}\}P\{\mathcal{B}_{3i}\} = \frac{7}{96} \cong 0.073$$

Pertanto

$$P\{\mathcal{B}\,|\,\mathcal{A}\} = \frac{0.073}{0.372} \cong 0.196$$

2) Sia X una variabile casuale con densità di probabilità esponenziale traslata $f_X(x) = e^{-(x+1)}U(x+1)$, dove $U(x)$ è la funzione gradino unitario. Si consideri la sua trasformazione attraverso la seguente

funzione:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ -0.5 & -2 < x \leq 0 \\ 1-e^{-x} & 0 < x \leq 1 \\ 1-e^{-1} & x > 1. \end{cases}$$

Determinare la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $Y = g(X)$ e disegnarne il grafico.

Soluzione

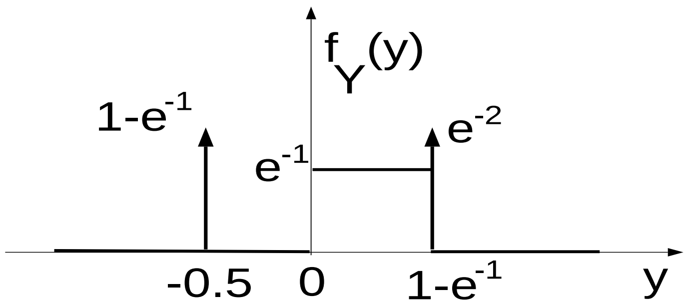
Si può applicare il teorema fondamentale. Fuori codominio: cioè per $y \notin [0, 1-e^{-1}] \bigcup \{-0.5\}$, si ha $f_Y(y) = 0$. Zone piatte: si hanno delle delta di Dirac in corrispondenza delle zone piatte di $g(x)$, calcoliamone il peso:

a) $P\{Y = -0.5\} = P\{-2 < X < 0\} = 1 - e^{-1}$
b) $P\{Y = 1 - e^{-1}\} = P\{X > 1\} = e^{-2}$.

Infine per ogni $y \in \{0, 1-e^{-1}\}$ si ha una sola soluzione $x_1 = -\ln(1-y)$, con $0 < x_1 < 1$. In tale intervallo $g'(x_1) = e^{-x_1}$ e dunque per il teorema fondamentale

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{e^{-(x_1+1)}}{e^{-x_1}} = e^{-1}$$

Il grafico di $f_Y(y)$ è mostrato in figura



3) Il taxi collettivo A effettua servizio navetta tra l'aeroporto e la stazione centrale. Il taxi arriva alle ore 0:00 all'aeroporto e comincia a ricevere clienti. Il numero di clienti $K(t)$ che arrivano nell'intervallo $[0, t]$ è una V. A. di Poisson con media λt, con $\lambda = 0.1$ clienti/min, e t è espresso in minuti. Il taxi parte quando a bordo ci sono 3 clienti. Le ore 0:00 sono anche l'orario previsto di arrivo dell'aereo su cui viaggia il Sig. Rossi. Il tempo di uscita del Sig. Rossi dall'aeroporto dopo l'ora d'arrivo prevista è una V. A. esponenziale negativa con media $\eta = 10$ minuti, indipendente da $K(t)$. Qual è la probabilità che il Sig. Rossi possa prendere il taxi A? [N.B.: per i calcoli è utile ricordare che $\int x e^{ax} dx = e^{ax}(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2})$ e che $\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax}(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3})$]

Soluzione

Definiamo le V. A.:

$T_R = \{$tempo uscita aeroporto Sig. Rossi$\}$, con PDF $f_{T_R}(t) = \frac{1}{\eta} e^{-t/\eta} U(t)$.

$T_A = \{$tempo partenza taxi A da aeroporto$\}$.

$K(t) = \{$n. clienti sul taxi A al tempo t$\}$, con PMF $P\{K(t) = i\} = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Cerchiamo $P\{T_A > T_R\}$, con T_A, T_R V. A. indipendenti. Ora, per il teorema della probabilità totale e sfruttando l'indipendenza si ha:

$$\begin{aligned}
P\{T_A > T_R\} &= \int_0^\infty P\{T_A > T_R \,|\, T_R = \tau\} f_{T_R}(\tau) d\tau \\
&= \int_0^\infty P\{T_A > \tau\} f_{T_R}(\tau) d\tau \\
&= \int_0^\infty P\{K(\tau) < 3\} f_{T_R}(\tau) d\tau \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{i=0}^2 \frac{(\lambda\tau)^i}{i!} e^{-\lambda\tau} \right) \frac{1}{\eta} e^{-\tau/\eta} d\tau \\
&= \frac{1}{\eta} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\frac{1}{\eta})\tau} \left(1 + \lambda\tau + \frac{(\lambda\tau)^2}{2!} \right) d\tau
\end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli troviamo

$$\begin{aligned}
P\{T_A > T_R\} &= \frac{1}{\eta(\lambda+\frac{1}{\eta})} \left[\int_0^\infty e^{-x} dx + \frac{\lambda \int_0^\infty x e^{-x} dx}{\lambda + \frac{1}{\eta}} + \frac{\lambda^2 \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx}{2(\lambda+\frac{1}{\eta})^2} \right] \\
&= \frac{(3\eta\lambda+2)^2}{4(\eta\lambda+1)^3} = \frac{25}{32} \cong 0.78
\end{aligned}$$

4) Sia U una V. A. uniforme in $[0,1]$.

a) Calcolare la sua funzione generatrice dei momenti (MGF) $\Phi_U(s)$.

b) Calcolare $E[U]$ sia direttamente col teorema dell'aspettazione, sia tramite il teorema dei momenti, verificando la coincidenza dei due risultati.

Soluzione

a) $\Phi_U(s) = E[e^{sU}] = \int_0^1 e^{su} du = \frac{1}{s}\int_0^s e^x dx = \frac{e^s-1}{s}$

b) teorema aspettazione: $E[U] = \int_0^1 u\, du = 1/2$

c) teorema momenti: $E[U] = \frac{d}{ds}\Phi_U(s)\Big|_{s=0} = \lim_{s\to 0} \frac{(s-1)e^s+1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{e^s+(s-1)e^s}{2s} = \frac{1}{2}$ dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato la regola de L'Hopital (derivato numeratore e denominatore).