Esame di Teoria dei Segnali A

Ing. Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni

12 luglio 2004

Esercizio 1

Un sacchetto A contiene 3 caramelle ai gusti fragola, limone e lampone. Un sacchetto B contiene 2 caramelle ai gusti fragola e limone. Si trasferisce, senza guardare, una caramella dal sacchetto A al sacchetto B e poi due caremelle dal sacchetto B al sacchetto A. Associando i tre gusti (fragola, limone e lampone) ai tre numeri interi 1, 2 e 3, rispettivamente, determinare la funzione massa di probabilità della variabile casuale X definita come "gusto delle caramelle nel sacchetto A."

Soluzione All'inizio le due scatole A e B contengono le seguenti caramelle:

$$\mathrm{A} \quad : \quad \mathrm{Fr, Li, La} \tag{1}$$

$$\mathrm{B} \quad : \quad \mathrm{Fr, Li.} \tag{2}$$

Consideriamo adesso l'albero delle scelte relativo alla distribuzione delle caramelle nelle due scatole a seguito del trasferimento *a caso* di una caramella dal sacchetto A al sacchetto B, e di due caramelle dal sacchetto B al sacchetto A—intuitivamente, si può già capire che in ogni configurazione finale nella scatola A ci saranno almeno una fragola ed un limone. Tale albero delle scelte è mostrato in Figura 1. In particolare:

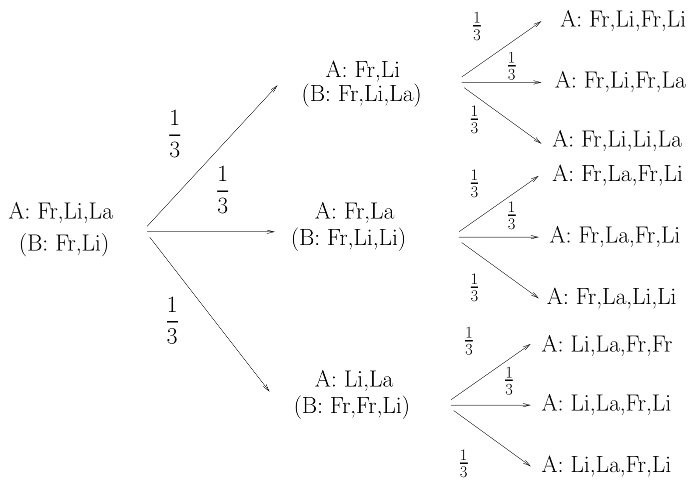

Figure 1: Albero delle scelte relativo alle decisioni nell'esercizio 1.

- i rami della prima sezione sono tutti associati ad una probabilità di salto di 1/3 (siccome corrispondono all'estrazione a caso di una pallina da una scatola con 3 palline);
- i rami della seconda sezione sono associati ad una probabilità di salto di $1/3 = 1/\binom{3}{2}$ (siccome ci sono $\binom{3}{2}$ modi di estrarre due palline a caso da un gruppo di tre).

Quindi ogni configurazione finale (ogni "foglia") nell'albero delle scelte indicato in Figura 1 ha probabilità $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Contando quante sono le configurazioni di uno stesso tipo (è immediato notare che ci sono 3 tipi possibil, siccome l'ordine non conta), si ottiene:

$$P\{\mathrm{Fr}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Li}, \mathrm{La}\} = \frac{4}{9} \triangleq P\{C_1\} \tag{3}$$

$$P\{\mathrm{Fr}, \mathrm{Li}, \mathrm{Li}, \mathrm{La}\} = \frac{4}{9} \triangleq P\{C_2\} \tag{4}$$

$$P\{\mathrm{Fr}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Li}, \mathrm{Li}\} = \frac{1}{9} \triangleq P\{C_3\}. \tag{5}$$

A questo punto, sappiamo che nella scatola A si possono avere, alla fine, le tre configurazioni C_1, C_2 e C_3 indicate sopra. La variabile casuale X assume valori 1 (corrispondente a fragola), 2 (corrispondente a limone) e 3 (corrispondente a lampone). La funzione massa di probabilità della variabile casuale X si ottiene calcolando la probabilità di estrarre un particolare frutto dalla scatola A alla fine dei due cambiamenti. In altre parole:

$$p\{X = 1\} = P\{\text{estraggo una fragola da A}\}. \tag{6}$$

Applicando il teorema della probabilità totale (condizionando sui tre eventi C_1, C_2 e C_3), si ottiene:

$$\begin{aligned} P\{X = 1\} &= P\{X = 1|C_1\}P\{C_1\} + P\{X = 1|C_2\}P\{C_2\} \\ &\quad + P\{X = 1|C_3\}P\{C_3\} \\ &= P\{\mathrm{Fr}|\mathrm{Fr}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Li}, \mathrm{La}\}\mathrm{P}\{\mathrm{Fr}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Li}, \mathrm{La}\} \\ &\quad + P\{\mathrm{Fr}|\mathrm{Fr}, \mathrm{Li}, \mathrm{Li}, \mathrm{La}\}\mathrm{P}\{\mathrm{Fr}, \mathrm{Li}, \mathrm{Li}, \mathrm{La}\} \\ &\quad + P\{\mathrm{Fr}|\mathrm{Fr}, \mathrm{Li}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Li}\}\mathrm{P}\{\mathrm{Fr}, \mathrm{Li}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Li}\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{7}{18}. \end{aligned} \tag{7}$$

Per motivi di simmetria, è immediato concludere che

$$P\{X = 2\} = P\{\mathrm{Li}\} = \mathrm{P\{X = 1\}} = \frac{7}{18} \tag{8}$$

e quindi

$$P\{X = 3\} = 1 - P\{X = 1\} - P\{X = 2\} = \frac{4}{18}. \tag{9}$$

Esercizio 2

Nel piano (x, y) è assegnato un dominio triangolare D, come indicato in in Figura 2. Si consideri una coppia di variabili aleatorie X e Y con densità di probabilità congiunta costante sul dominio D e nulla altrove.

1. Determinare le funzioni densità di probabilità marginali $f_X(x)$ ed $f_Y(y)$, e la funzione densità di probabilità condizionata $f_{Y|X}(y|x)$.
2. Detta Z la variabile aleatoria $Z = X + Y$, determinare la funzione densità di probabilità di Z. (Suggerimento: una possibile soluzione si basa sull'utilizzo di un risultato ottenuto al punto precendente.)

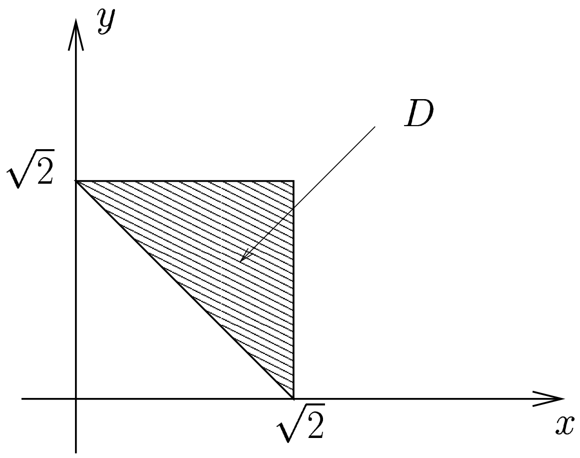

Figure 2: Dominio D della funzione densità di probabilità congiunta delle due variabili aleatorie X e Y nell'esercizio 2.

Soluzione

Secondo il problema, la funzione densità di probabilità (pdf) congiunta delle due variabili aleatorie X e Y si può scrivere come segue:

$$\begin{aligned} f_{XY}(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{1}{\text{Area}(D)} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}} = 1 & (x,y) \in D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & 0 < x < \sqrt{2}, -x + \sqrt{2} < y < \sqrt{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

1. Calcoliamo prima le pdf marginali. Per quanto riguarda X, si può scrivere:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy \\ &= \begin{cases} \int_{-x+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 1 dy & 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x & 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

Essendo il dominio D simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, si può concludere che $f_Y(y) = f_X(y)$, cioè:

$$f_Y(y) = \begin{cases} y & 0 < y < \sqrt{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{12}$$

A questo punto è possibile determinare l'espressione della pdf condizionata $f_{Y|X}(y|x)$. Notiamo che questa è definita per $x \in (0, \sqrt{2})$. Assumendo che x sia in tale intervallo, si può scrivere:

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{x} & -x + \sqrt{2} < y < \sqrt{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

2. Si vuole calcolare la pdf di $Z = X + Y$. Cerchiamo di calcolare prima la funzione distribuzione di probabilità (CDF) e poi la pdf. Notiamo preliminarmente che $Z \in (0, 2\sqrt{2})$. Quindi, possiamo già concludere che

$$F_Z(z) = 0 \quad \text{se} \quad z < 0 \tag{14}$$

$$F_Z(z) = 1 \quad \text{se} \quad z > 2\sqrt{2}. \tag{15}$$

Applicando il teorema della probabilità in forma continua, si ottiene:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{X + Y \leq Z\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X + Y \leq z | X = x\} f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} P\{Y \leq z - x | X = x\} x dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} x \underbrace{\int_{-\infty}^{z-x} f_{Y|X}(y|x) dy}_{g_z(x)} \, dx. \end{aligned} \tag{16}$$

A questo punto, dobbiamo investigare in maggior dettaglio l'espressione dell'integrale interno, definito come $g_z(x)$. La pdf condizionata $f_{Y|X}(y|x)$ è non nulla nell'intervallo $(-x + \sqrt{2}, \sqrt{2})$, e si sta integrando da $-\infty$ a $z - x$. A seconda del valore di $z - x$ (rispetto agli estremi dell'intervallo $(-x + \sqrt{2}, \sqrt{2})$) si hanno quindi varie possibilità per gli estremi di integrazione. In particolare, vediamo in che casi $z - x$ si sovrappone agli estremi dell'intervallo $(-x + \sqrt{2}, \sqrt{2})$:

$$\begin{aligned} z - x = -x + \sqrt{2} \quad &\Rightarrow \quad z = \sqrt{2} \\ z - x = \sqrt{2} \quad &\Rightarrow \quad z = x + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$
\begin{aligned}
g_z(x) &= \begin{cases} 0 & z < \sqrt{2} \\ \int_{-x+\sqrt{2}}^{z-x} \dfrac{1}{x} dy & z > \sqrt{2}, z < x + \sqrt{2} \\ \int_{-x+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \dfrac{1}{x} dy & z > \sqrt{2}, z > x + \sqrt{2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & z < \sqrt{2} \\ \dfrac{z-\sqrt{2}}{x} & z > \sqrt{2}, x > z - \sqrt{2} \\ 1 & z > \sqrt{2}, x < z - \sqrt{2}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{17}
$$

A questo punto, tenendo conto di quanto notato inizialmente in (15), si può scrivere:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \begin{cases} \int_0^{\sqrt{2}} g_z(x) x dx & z < 2\sqrt{2} \\ 1 & z > 2\sqrt{2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & z < \sqrt{2} \\ \int_0^{z-\sqrt{2}} x dx + \int_{z-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{z-\sqrt{2}}{x} x dx & \sqrt{2} < z < 2\sqrt{2} \\ 1 & z > 2\sqrt{2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & z < \sqrt{2} \\ (z-\sqrt{2}) \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{z}{2} \right) & \sqrt{2} < z < 2\sqrt{2} \\ 1 & z > 2\sqrt{2}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{18}
$$

La pdf di Z ha quindi la seguente espressione:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z} \\
&= \begin{cases} 0 & z < \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} - z & \sqrt{2} < z < 2\sqrt{2} \\ 0 & z > 2\sqrt{2}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{19}
$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria uniformemente distribuita in (-2,2) e sia data la seguente funzione:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -1 \\ x & -1 < x \leq 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

1. Calcolare valor medio e varianza della variabile aleatoria $g(X)$.
2. Determinare la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria $g(X)$ e disegnarne il grafico.

Soluzione
Per costruzione, si ha che:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -2 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{20}$$

Nel seguito, per comodità definiamo $Y = g(X)$.

1. Applicando il teorema fondamentale, si ha:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[g(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} g(x) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(-x|_{-2}^{-1} + \frac{x^2}{2}|_{-1}^{0} + x|_{1}^{2} \right) \\ &= -\frac{1}{8}. \end{aligned} \tag{21}$$

Siccome $\sigma_Y^2 = \mathrm{E}[Y^2] - \mathrm{E}^2[Y]$, calcoliamo il valore quadratico medio di Y applicando il teorema fondamentale:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y^2] = \mathrm{E}[g^2(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} g^2(x) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(x|_{-2}^{-1} + \frac{x^3}{3}|_{-1}^{0} + x|_{1}^{2} \right) \\ &= \frac{7}{12}. \end{aligned} \tag{22}$$

La varianza di Y è quindi:

$$\sigma_Y^2 = \frac{7}{12} - \frac{1}{64} = \frac{109}{192}. \tag{23}$$

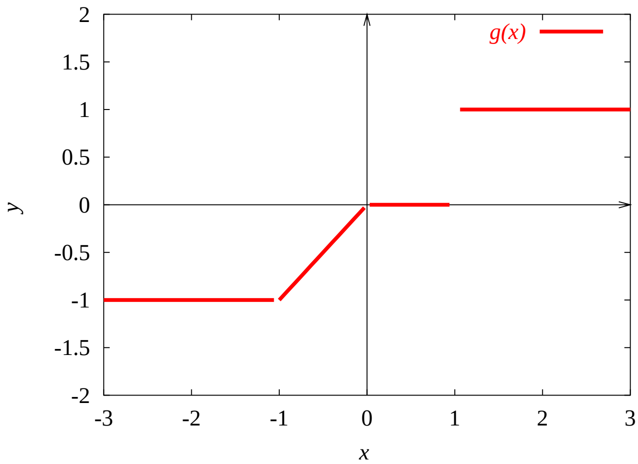

Figure 3: Funzione di trasformazione $g(x)$ nell'esercizio 3.

2. La funzione di trasformazione $g(x)$ è rappresentata in Figura 3. Ci sono tre tratti costanti (orizzontali), quindi nella pdf di Y ci potrebbero essere tre delta di Dirac, centrate in -1, 0 e 1. Calcoliamo i pesi di tali delta[1]:

$$P\{Y=-1\} = P\{X<-1\} = P\{-2<X<-1\} = \frac{1}{4} \tag{24}$$

$$P\{Y=0\} = P\{0<X<1\} = \frac{1}{4} \tag{25}$$

$$P\{Y=1\} = P\{X>1\} = P\{1<X<2\} = \frac{1}{4}. \tag{26}$$

A questo punto, rimane da analizzare l'intervallo $y \in (-1,0)$. In questo caso, essendo $g(x)$ non costante, è possibile applicare il teorema fondamentale. L'equazione $y = g(x)$ ha un'unica soluzione $x_1 = y$, quindi:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = f_X(y) = \frac{1}{4} \qquad y \in (-1,0). \tag{27}$$

Per concludere, la pdf di Y si può scrivere in modo compatto come segue:

$$f_Y(y) = \frac{1}{4}\left[u(y+1) - u(y) + \delta(y+1) + \delta(y) + \delta(y-1)\right]. \tag{28}$$

Il grafico della pdf di Y è mostrato in Figura 4.

Esercizio 4

La vostra ditta ha venduto una partita di 20 schede video e, dopo un anno,

[1] Si noti che siccome X è continua, gli uguali non contano

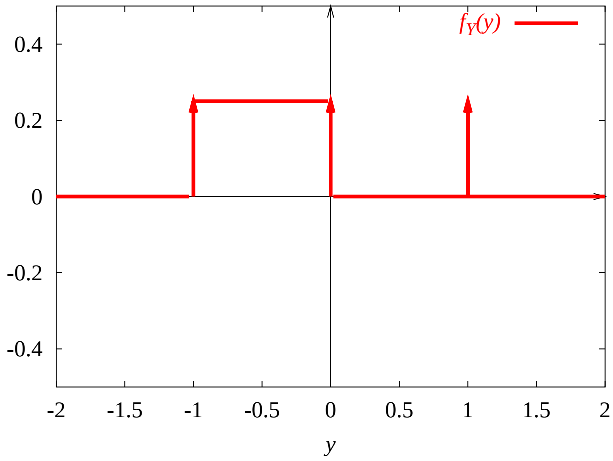

Figure 4: Pdf di Y nell'esercizio 3.

offre la riparazione gratuita delle schede guaste. Se il tempo di guasto di ogni scheda è una variabile aleatoria esponenziale con valor medio 5 anni, qual è la probabilità che il riparatore debba intervenire su due o più schede?

Soluzione

La probabilità richiesta dal problema si può riscrivere come segue:

$$\begin{aligned} P_I \triangleq P\{\text{intervento su due o più schede}\} &= P\{\text{due o più schede si sono rotte in un anno}\} \\ &= 1 - P\{\text{al più una scheda si è rotta in un anno}\} \\ &= 1 - P\{\text{nessuna scheda rotta}\} - P\{\text{una scheda rotta}\}. \end{aligned} \tag{29}$$

Definiamo la variabile aleatoria X come "numero di schede rotte in un anno." Si tratta di una variabile binomiale con $n = 20$ e con probabilità di "successo" p definita come segue:

$$p = P\{\text{una lampadina si rompe entro un anno}\}. \tag{30}$$

Essendo il tempo di vita T di una lampadina una variabile aleatoria esponenziale con tempo di vita medio 5 anni, la sua pdf ha la seguente espressione:

$$f_T(t) = \frac{1}{5} \exp\left(-\frac{t}{5}\right) u(t). \tag{31}$$

La probabilità di successo si può quindi scrivere come segue:

$$p = P\{T \leq 1\} = 1 - \exp\left(-\frac{1}{5}\right) \simeq 0.18. \tag{32}$$

La probabilità cercata si può quindi scrivere come segue:

$$\begin{aligned} P_I &= 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\} \\ &= 1 - \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) p^0 (1-p)^n - \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) p (1-p)^{n-1} \\ &= 1 - (0.82)^{20} - 20\,(0.18)\,(0.82)^{19} \simeq 0.9. \end{aligned} \tag{33}$$

Come si vede, la probabilità che ci siano almeno due schede da riparare è piuttosto alta.