Esame di Teoria dei Segnali A
Ing. Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni

13 febbraio 2009

Esercizio 1

Si hanno a disposizione un dado ed una moneta. Si lancia una volta la moneta: se esce testa bisogna lanciare il dado 2 volte, altrimenti 3 volte. Definita la variabile aleatoria "numero di volte in cui esce la faccia numero 3 del dado," tracciarne la funzione densità di probabilità e calcolarne la varianza.

Soluzione

Lanciando una volta una moneta, i possibili risultati sperimentali sono T={testa} e C={croce}. Siccome non viene detto niente, si ha che $P(\mathrm{T}) = P(\mathrm{C}) = 1/2$. Analogamente, per quanto riguarda il lancio del dado si ha $p_i \triangleq P\{\text{esce la faccia } i\} = 1/6,\ i = 1, \ldots, 6$.

Si definisca la variabile aleatoria (VA) N come "numero di volte che esce la faccia 3." Ovviamente, siccome al più si fanno 3 lanci della moneta, si può concludere che $N \in \{0, 1, 2, 3\}$. Essendo N discreta, possiamo già anticipare che la sua funzione densità di probabilità è un pettine di delta di Dirac. In particolare, è della forma:

$$f_N(n) = c_0\delta(n) + c_1\delta(n-1) + c_2\delta(n-2) + c_3\delta(n-3) \tag{1}$$

dove $a_i = P\{N = i\}$. Applicando il teorema della probabilità totale si ha:

$$f_N(n) = f_N(n|\mathrm{T})P(\mathrm{T}) + f_N(n|\mathrm{C})P(\mathrm{C}) = \frac{1}{2}\left[f_N(n|\mathrm{T}) + f_N(n|\mathrm{C})\right].$$

Nel caso in cui si verifichi testa, N può essere al più 2, e quindi:

$$f_N(n|\mathrm{T}) = a_0\,\delta(n) + a_1\,\delta(n-1) + a_2\,\delta(n-2)$$

dove:

$$\begin{aligned}
a_0 &= P\{\text{la faccia 3 non esce mai su 2 lanci}\} = \binom{2}{0}(1-p_3)^2 = \left(1-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}\\
a_1 &= P\{\text{la faccia 3 esce 1 volta su 2 lanci}\} = \binom{2}{1}(1-p_3)\,p_3 = 2\,\left(1-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{6} = \frac{10}{36}\\
a_2 &= P\{\text{la faccia 3 esce 2 volte su 2 lanci}\} = \binom{2}{2}p_3^2 = \frac{1}{36} = 1 - a_0 - a_1.
\end{aligned}$$

Nel caso in cui si verifichi croce, N può essere al più 3, e quindi:

$$f_N(n|\mathrm{C}) = b_0\,\delta(n) + b_1\,\delta(n-1) + b_2\,\delta(n-2) + b_3\,\delta(n-3)$$

dove:

$$\begin{aligned}
b_0 &= P\{\text{la faccia 3 non esce mai su 3 lanci}\} = \binom{3}{0}(1-p_3)^3 = \left(1-\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}\\
b_1 &= P\{\text{la faccia 3 esce 1 volta su 3 lanci}\} = \binom{3}{1}(1-p_3)^2\,p_3 = 3\,\left(1-\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{6} = \frac{75}{216}\\
b_2 &= P\{\text{la faccia 3 esce 2 volte su 3 lanci}\} = \binom{3}{2}(1-p_3)\,p_3^2 = \frac{15}{216}\\
b_3 &= P\{\text{la faccia 3 esce 2 volte su 2 lanci}\} = \binom{3}{3}p_3^3 = \frac{1}{216} = 1 - b_0 - b_1 - b_2.
\end{aligned}$$

Quindi, nella (1), si ha:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}(a_0 + b_0) = \frac{275}{432} \simeq 0.63\\
c_1 &= \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{135}{432} \simeq 0.31\\
c_2 &= \frac{1}{2}(a_2 + b_2) = \frac{21}{432} \simeq 0.048\\
c_3 &= \frac{1}{2}b_3 = \frac{1}{432} \simeq 0.0023.
\end{aligned}$$

A questo punto, è possibile calcalore il valore quadratico medio ed il valore medio:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[N^2] &= \sum_{i=0}^{3} i^2 \, c_i \simeq 0.52 \\
\mathrm{E}[N] &= \sum_{i=0}^{3} i \, c_i \simeq 0.416
\end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\mathrm{Var}[N] = \mathrm{E}[N^2] - \mathrm{E}^2[N] \quad \simeq \quad 0.354.$$

Esercizio 2

Si consideri una variabile aleatoria X con la seguente funzione densità di probabilità:

$$f_X(x) = \frac{2}{3} \, f_X^{\mathrm{c}}(x) + \frac{1}{3} \, \delta(x - 10)$$

dove

$$f_X^{\mathrm{c}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -3 \\ \dfrac{1}{6} & -3 < x \leq 0 \\ \dfrac{1}{10} & 0 < x \leq 5 \\ 0 & x > 5. \end{cases}$$

Si consideri la variabile aleatoria trasformata $Y = g(X)$, dove

$$g(x) = \begin{cases} 5x & x \leq 0 \\ -3x & 0 < x \leq 3 \\ x - 3 & x \geq 3. \end{cases}$$

Determinare la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria Y e tracciarne il grafico.

Soluzione

La funzione densità di probabilità di X e la trasformazione $g(x)$ considerata sono mostrate in Figura 1 e Figura 2, rispettivamente.

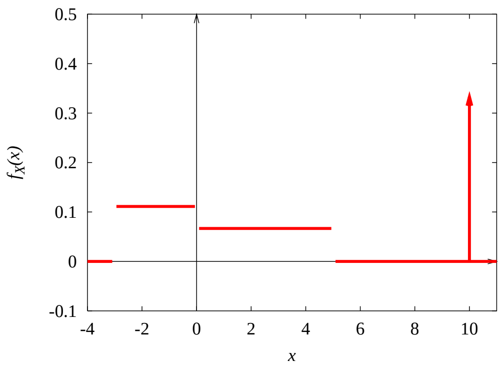

Figura 1: Densità di probabilità di X nell'esercizio 2.

In particolare, per la parte regolare della funzione densità di probabilità di X, cioè $f_X^{\mathrm{c}}(x)$, si deve applicare il teorema fondamentale. Siccome non ci sono tratti orizzontali nella funzione di trasformazione $g(x)$, si ha che dalla trasformazione di $f_X^{\mathrm{c}}(x)$ non si generano delta di Dirac. Indichiamo con $f_Y^{\mathrm{c}}(y)$ tale componente regolare della funzione densità di probabilità di Y. La massa di probabilità centrata in $x = 10$ della variabile aleatoria

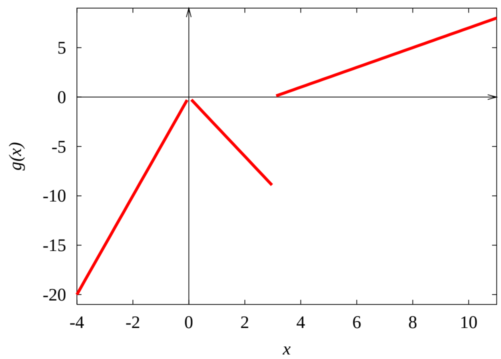

Figura 2: Funzione di trasformazione $g(x)$ nell'esercizio 2.

X si trasforma in una massa di probabilità centrata in $y = g(10) = 7$ nella funzione densità di probabilità di Y. In altre parole, si avrà:

$$f_Y(y) = \frac{2}{3}\, f_Y^{\mathrm{c}}(y) + \frac{1}{3}\, \delta(y-7).$$

A questo punto, determiniamo l'espressione esplicita di $f_Y^{\mathrm{c}}(y)$ applicando il teorema fondamentale.

- $y < -15$. L'equazione $y = g(x)$ presenta un'unica soluzione $x_1 = y/5 < -3$. Quindi:

$$f_Y(y) = \frac{f_X^{\mathrm{c}}(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{0}{5} = 0.$$

- $-15 \leq y < -9$. L'equazione $y = g(x)$ presenta un'unica soluzione $x_1 = y/5$, e si ha:

$$f_Y(y) = \frac{f_X^{\mathrm{c}}(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{1/9}{5} = \frac{1}{45}.$$

- $-9 \leq y < 0$. L'equazione $y = g(x)$ presenta due soluzioni $x_1 = y/5$ e $x_2 = -y/3$, e si ha:

$$f_Y(y) = \frac{f_X^{\mathrm{c}}(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X^{\mathrm{c}}(x_2)}{|g'(x_2)|} = \frac{1/9}{5} + \frac{1/15}{3} = \frac{1}{45} + \frac{1}{45} = \frac{2}{45}.$$

- $0 \leq y < 2$. L'equazione $y = g(x)$ presenta un'unica soluzione $x_1 = y + 3$, e si ha:

$$f_Y(y) = \frac{f_X^{\mathrm{c}}(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{1/15}{1} = \frac{1}{15}.$$

- $y > 2$. L'equazione $y = g(x)$ presenta un'unica soluzione $x_1 = y + 3 > 5$. Quindi:

$$f_Y(y) = \frac{f_X^{\mathrm{c}}(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{0}{1} = 0.$$

Si può quindi scrivere che

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{2}{3}\, f_Y^{\mathrm{c}}(y) + \frac{1}{3}\, \delta(y-7) \\ &= \begin{cases} 0 & y > 2 \\ \dfrac{1}{15} & 0 < y \leq 2 \\ \dfrac{2}{45} & -9 < y \leq 0 \\ \dfrac{1}{45} & -15 < y \leq -9 \\ 0 & y < -15. \end{cases} \end{aligned}$$

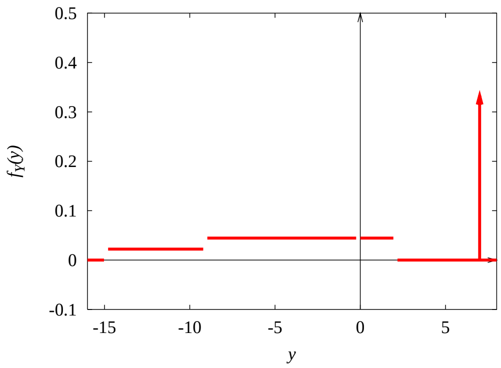

Figura 3: Densità di probabilità di Y nell'esercizio 2.

Il grafico di $f_Y(y)$ è mostrato in Figura 3.

Esercizio 3

Date due variabili casuali X e Y indipendenti, con funzioni densità di probabilità $f_X(x)$ ed $f_Y(y)$ mostrate in Figura 4, determinare la funzione densità di probabilità congiunta delle variabili aleatorie $Z_1 = X + Y$ e $Z_2 = X - Y$.

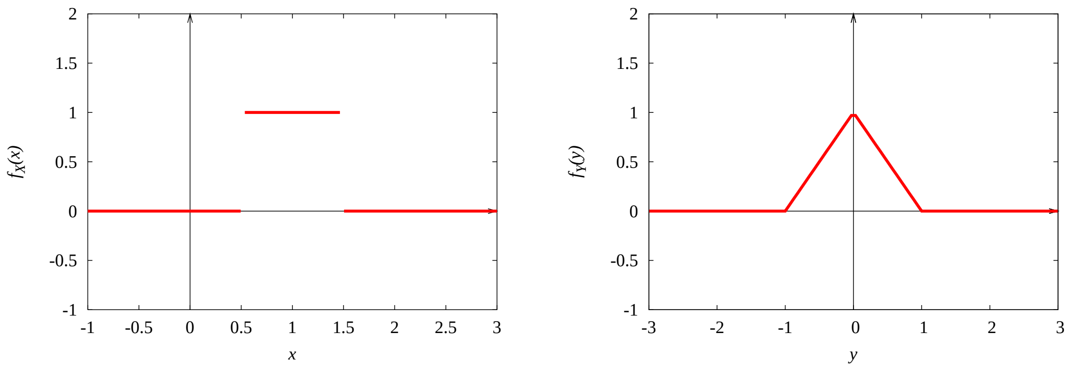

Figura 4: Densità di probabilità di X ed Y nell'esercizio 4.

Soluzione

Notiamo preliminarmente che dai grafici mostrati in Figura 4, le espressioni delle funzioni densità di probabilità di X e Y sono le seguenti:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+1 & -1 \leq y \leq 0 \\ -y+1 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{3}$$

Si ha a che fare con la seguente trasformazione lineare:

$$\begin{cases} z_1 = x + y \\ z_2 = x - y. \end{cases}$$

Dati valori specifici (z_1, z_2), il sistema ha la seguente unica soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{z_1+z_2}{2} \\ y_1 = \frac{z_1-z_2}{2}. \end{cases}$$

Applicando il teorema fondamentale e notando che lo Jacobiano della trasformazione è -2, ricordando che X e Y sono indipendenti, si ottiene:

$$\begin{aligned} f_{Z_1Z_2}(z_1,z_2) &= \frac{f_{XY}\left(x_1,y_1\right)}{|J(x_1,y_1)|} \\ &= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) f_Y\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right). \end{aligned}$$

In base alle espressioni (2) e (3), è possibile ottenere le seguenti espressioni per $f_{Z_1Z_2}(z_1,z_2)$, distinguendo a seconda dei valori di z_1 e z_2.

- $f_{Z_1Z_2}(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\, 1 \left(\frac{z_1-z_2}{2} - 1\right) = \frac{2+z_1-z_2}{4}$ se

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} < \dfrac{z_1+z_2}{2} < \dfrac{3}{2} \\ 0 < \dfrac{z_1-z_2}{2} < 1. \end{cases} \tag{4}$$

  Il sistema di disequazioni (4) può essere riscritto in modo equivalente come segue:

$$\begin{cases} z_2 < z_1 \\ z_2 > z_1 - 2 \\ z_2 < -z_1 + 3 \\ z_2 > -z_1 + 1. \end{cases} \tag{5}$$

  L'insieme di disequazioni in (5) corrisponde al dominio quadrato $\mathcal{D}_1$ mostrato in Figura 5.

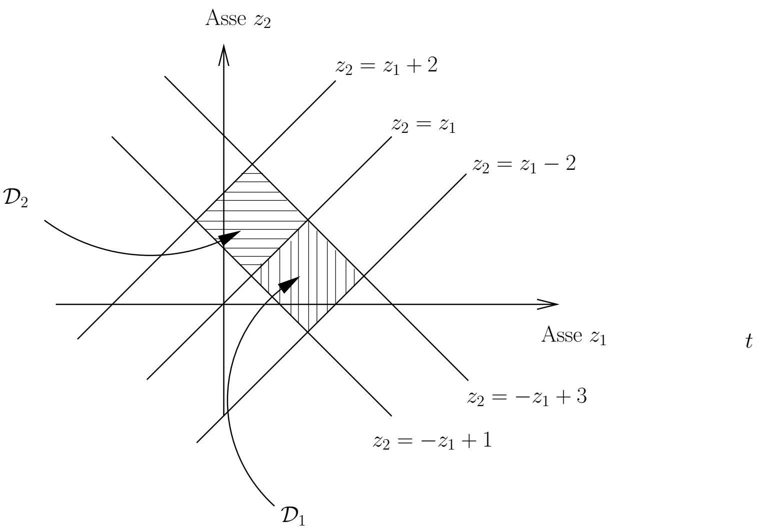

Figura 5: Densità di probabilità di Y nell'esercizio 2.

- $f_{Z_1Z_2}(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\, 1 \left(1 - \frac{z_1-z_2}{2}\right) = \frac{2-z_1+z_2}{4}$ se

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} < \dfrac{z_1+z_2}{2} < \dfrac{3}{2} \\ -1 < \dfrac{z_1-z_2}{2} < 0. \end{cases} \tag{6}$$

  Il sistema di disequazioni (6) può essere riscritto in modo equivalente come segue:

$$\begin{cases} z_2 > z_1 \\ z_2 < z_1 + 2 \\ z_2 < -z_1 + 3 \\ z_2 > -z_1 + 1. \end{cases} \tag{7}$$

L'insieme di disequazioni in (7) corrisponde al dominio quadrato $\mathcal{D}_2$ mostrato in Figura 5.

- $f_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2) = 0$ per altri valori di z_1 e z_2.

Riassumendo, si ha:

$$f_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2) = \begin{cases} \dfrac{2 + z_1 - z_2}{4} & (z_1, z_2) \in \mathcal{D}_1 \\ \dfrac{2 - z_1 + z_2}{4} & (z_1, z_2) \in \mathcal{D}_2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Esercizio 4

Si lanci un dado 3 volte. Sia $X \triangleq \{\text{Numero di "1" usciti}\}$ ed $Y \triangleq \{\text{Numero di "2" usciti}\}$, con $X, Y \in \{0, 1, 2, 3\}$. Trovare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

Soluzione

Si ha che $X, Y \sim \text{Bin}(n = 3, p = 1/6)$. Da teoria sappiamo che

$$\begin{aligned} \text{E}[X] = \text{E}[Y] &= \text{E}[Y] = np = \frac{1}{2} \\ \text{Var}[X] = \text{Var}[Y] &= n\,p\,(1-p) = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Siccome il prodotto XY può assumere valori in $\{0, 1, 2\}$, si ha:

$$\text{E}[XY] = 1 \cdot P\{X = 1, Y = 1\} + 2 \cdot (P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 1\}). \tag{8}$$

Calcoliamo le 3 probabilità che appaiono in (8).

- L'evento $\{X = 1, Y = 1\}$ corrisponde all'evento in cui in un lancio si ottiene "1", in un altro lancio si ottiene "2", e nel lancio rimanente non si ottiene nè "1" nè "2" (quindi si hanno 4 valori possibili). Quindi, una configurazione di questo tipo ha probabilità $4/6^3$. Siccome ci sono $\binom{3}{2}$ modi di scegliere una configurazione del tipo indicato, si può concludere che:

$$P\{X = 1, Y = 1\} = \binom{3}{2} \frac{4}{6^3} = \frac{1}{18}.$$

- L'evento $\{X = 1, Y = 2\}$ corrisponde all'evento in cui in un lancio si ottiene "1" e negli altri due lanci si ottiene "2". Quindi, una configurazione di questo tipo ha probabilità $1/6^3$. Siccome ci sono $\binom{3}{2}$ modi di scegliere una configurazione del tipo indicato, si può concludere che:

$$P\{X = 1, Y = 2\} = \binom{3}{2} \frac{1}{6^3} = \frac{1}{72}.$$

  Ovviamente, si può concludere anche che $P\{X = 2, Y = 1\} = P\{X = 1, Y = 2\}$.

Quindi:

$$\text{E}[XY] = 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \left(\frac{1}{72} + \frac{1}{72} \right) = \frac{1}{9}.$$

Quindi

$$\rho_{XY} = \frac{\text{E}[XY] - \text{E}[X]\,\text{E}[Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]\,\text{Var}[Y]}} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{12}\frac{5}{12}}} = -\frac{3}{8}.$$