

**Esame di Teoria dei Segnali A**  
**Ing. Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni**

16 febbraio 2007

**Esercizio 1**

C' un vecchio mazzo di carte (che dovrebbe avere 52 carte), da cui *forse* manca il tre di cuori. Essendo in dubbio sulla presenza di tale carta, stimiamo che la probabilità che essa sia effettivamente presente sia  $1/2$ .

Abbiamo a disposizione anche un nuovo mazzo di carte, che *di sicuro* non contiene il tre di cuori, cioè contiene le altre 51 carte. A questo punto, prima estraiamo 5 carte dal mazzo originale, poi 5 carte dal nuovo mazzo, e le rimettiamo nei due mazzi in modo invertito.

Cominciamo poi a sfogliare le carte del vecchio mazzo (dopo avere effettuato lo scambio di cui sopra e rimescolato) ed alla 17-ma carta non abbiamo ancora trovato il tre di cuori. Qual è, *a questo punto*, la probabilità che il tre di cuori non sia nel vecchio mazzo?

*Soluzione*

Sia definito il seguente evento:

$$3C' = \{\text{il } 3C \text{ è presente nel vecchio mazzo}\}.$$

Sappiamo che  $P(3C') = 1/2$  (probabilità *a priori*).

Dopo lo scambio di carte fra il vecchio mazzo ed il nuovo mazzo, calcoliamo la probabilità del seguente evento:

$$3C = \{\text{il } 3C \text{ è presente nel mazzo di partenza dopo lo scambio}\}.$$

In base al teorema della probabilità totale, possiamo scrivere:

$$P(3C) = P(3C|3C')P(3C') + P(3C|\overline{3C'})P(\overline{3C'}). \quad (1)$$

È facile concludere che

$$P(3C|\overline{3C'}) = 0$$

in quanto, in assenza del tre di cuori dal mazzo originario, non potrà essere presente dopo lo scambio. Inoltre,

$$P(3C|3C') = \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdots \frac{47}{48} = \frac{47}{52}$$

in quanto, nel caso il tre di cuori sia presente nel mazzo originale, la probabilità che rimanga dopo lo scambio coincide con la probabilità di non estrarlo a caso in 5 tentativi senza reinserimento. Da (1) si ottiene quindi:

$$P(3C) = P(3C|3C')P(3C') = \frac{1}{2} \cdot \frac{47}{52} = \frac{47}{104} \simeq 0.45.$$

Dopo lo scambio ed il rimescolamento, definiamo il seguente evento:

$$E = \{17 \text{ carte estratte senza il } 3C\}.$$

L'esercizio richiede di calcolare  $P(\overline{3C}|E) = 1 - P(3C|E)$ . Applicando la regola di Bayes si può scrivere:

$$P(3C|E) = \frac{P(E|3C)P(3C)}{P(E|3C)P(3C) + P(E|\overline{3C})P(\overline{3C})}$$

dove  $\overline{3C}$  è l'evento complementare di  $3C$ . Ovviamente  $P(E|\overline{3C}) = 1$  (condizionatamente al fatto che il  $3C$  non c'è, la probabilità di non trovarlo nelle prime 17 carte è 1). Rimane da calcolare la seguente:

$$P(E|3C) = P\{\text{Estraendo una carta 17 volte di fila, non esce il } 3C\}.$$

L'esperimento di estrazione alla base del calcolo di  $P(E|3C)$  non è un esperimento di prove ripetute, nel senso che i sottoesperimenti (singole estrazioni) non sono indipendenti. Tenendo conto che, condizionatamente all'evento  $3C$  il mazzo di carte ha 52 carte, si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 P(E|3C) &= P\{\text{non esce } 3C \text{ alla } 17\text{-ma estrazione} | \text{non è uscito alle prime } 16\} \\
 &\quad \cdot P\{\text{non esce } 3C \text{ alla } 16\text{-ma estrazione} | \text{non è uscito alle prime } 15\} \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \cdot P\{\text{non esce } 3C \text{ alla } 2\text{-da estrazione} | \text{non è uscito alla } 1\text{-ma}\} \cdot P\{\text{non è uscito alla } 1\text{-ma}\} \\
 &= \frac{51-17}{52-17} \cdot \frac{51-16}{52-16} \cdots \frac{51-1}{52-1} \cdot \frac{51}{52} = \frac{34}{35} \cdot \frac{35}{36} \cdots \frac{50}{51} \cdot \frac{51}{52} = \frac{34}{52} \simeq 0.65.
 \end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}
 P(\overline{3C}|E) = 1 - P(3C|E) &= 1 - \frac{P(E|3C)P(3C)}{P(E|3C)P(3C) + P(E|\overline{3C})P(\overline{3C})} \\
 &\simeq 1 - \frac{0.65 \cdot 0.45}{1 \cdot 0.45 + 0.65 \cdot 0.55} \simeq 0.64.
 \end{aligned}$$

## Esercizio 2

Si assuma che una variabile casuale  $X$  abbia la seguente funzione densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx \left|x - \frac{1}{2}\right| & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

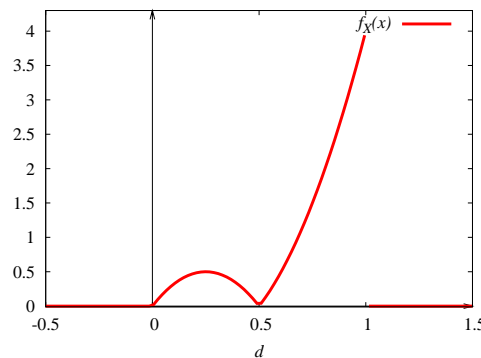
dove  $c$  è una costante di normalizzazione. Si consideri la trasformazione  $g(x) = |x - \frac{1}{2}|$ . Determinare la funzione densità di probabilità della variabile casuale  $Y = g(X)$  e tracciarne il grafico.

*Soluzione*

Imponendo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = c \cdot \left[ \int_0^{1/2} x \left(\frac{1}{2} - x\right) dx + \int_{1/2}^1 x \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \right] = 1 \quad (2)$$

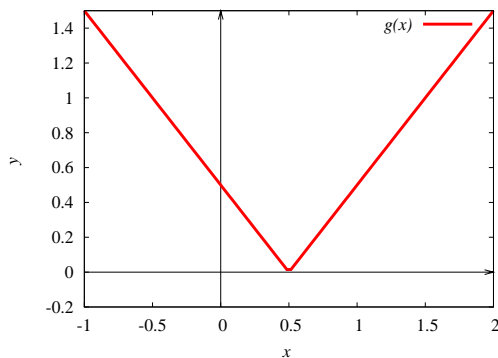
è immediato trovare che  $c = 8$ . La funzione densità di probabilità della variabile aleatoria  $X$  è mostrata in Figura 1. Si tratta, ovviamente, di una variabile casuale continua.



**Figura 1:** Funzione densità di probabilità della variabile aleatoria  $X$  nell'Esercizio 2.

La funzione  $g(x)$  che caratterizza la trasformazione da  $X$  a  $Y$  è mostrata in Figura 2.

- Ovviamente, per  $y < 0$  l'equazione  $y = g(x)$  non ha soluzione, e quindi  $f_Y(y) = 0$ .
- Rimane da investigare cosa succede per  $y > 0$  (il caso  $y = 0$  non è rilevante perchè  $X$  è una variabile aleatoria continua). Notiamo preliminarmente che in questo caso l'equazione  $y = g(x)$  presenta sempre 2



**Figura 2:** Funzione di trasformazione  $g(x)$  nell'esercizio 2.

soluzioni  $\{x_1, x_2\}$  simmetriche rispetto ad  $1/2$ , e più precisamente  $x_1 = \frac{1}{2} - y$  ed  $x_2 = 1 - x_1 = \frac{1}{2} + y$ . Per il teorema fondamentale, concludiamo:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = f_X\left(\frac{1}{2} - y\right) + f_X\left(\frac{1}{2} + y\right)$$

dove si è usato il fatto che  $|g'(x_1)| = |g'(x_2)| = 1$ . A questo punto, distinguiamo due sottocasi.

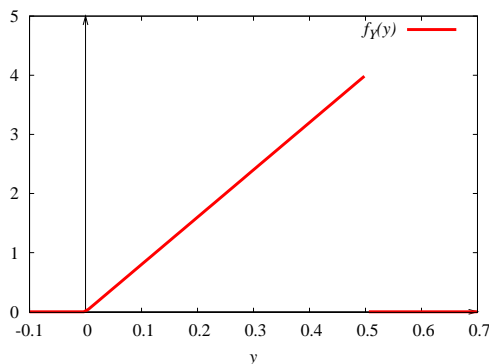
- Se  $y > 1/2$ , si ha che  $x_1 < 0$  ed  $x_2 > 1$ , quindi  $f_X(x_1) = f_X(x_2) = 0$  e  $f_Y(y) = 0$ .
- Se  $0 < y < 1/2$ , si ottiene:

$$f_Y(y) = 8\left(\frac{1}{2} - y\right)y + 8\left(\frac{1}{2} + y\right)y = 8y.$$

Per concludere, si ha:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 8y & \text{se } 0 < y < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

La funzione densità di probabilità della variabile aleatoria  $Y$  è mostrata in Figura 3.



**Figura 3:** Funzione densità di probabilità della variabile aleatoria  $Y$  nell'esercizio 2.

### Esercizio 3

Siano date due variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$  indipendenti con  $X$  uniformemente distribuita in  $[0, 1]$  ed  $Y$  con la seguente PDF:

$$f_Y(y) = \begin{cases} c(y - y^2) & \text{se } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Dopo aver determinato  $c$ , si trovi l'espressione della PDF di  $Z = X - Y$  e se ne tracci il grafico.

*Soluzione*

Imponendo la condizione di normalizzazione della PDF di  $Y$ , cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy = \int_0^1 c(y - y^2) dy = c \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{c}{6} = 1$$

è immediato ottenere che  $c = 6$ .

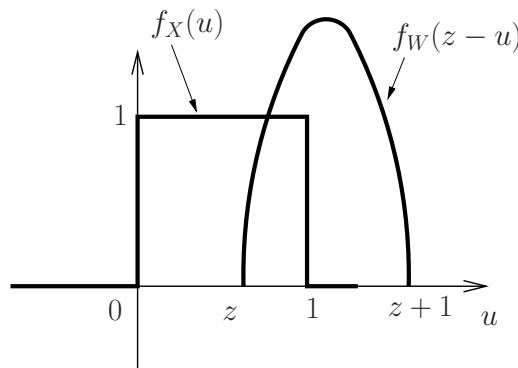
Poniamo a questo punto  $W = -Y$ . Ovviamente, si avrà

$$f_W(w) = \begin{cases} -6(w + w^2) & \text{se } -1 < w < 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

A questo punto, siccome  $Z = X + W$ , si conclude che

$$f_Z(z) = (f_X \otimes f_W)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_W(z - u) du$$

cioè la PDF di  $Z$  si ottiene facendo la convoluzione fra la PDF di  $X$  e la PDF di  $W$ . In Figura 4 è mostrata la generica situazione delle due funzioni che compaiono ad argomento dell'integrale di convoluzione per il valore di  $z$  indicato. A questo punto, a seconda del valore di  $z$  è possibile valutare  $f_Z(z)$ .



**Figura 4:** Valutazione grafica dell'integrale di convoluzione per la determinazione della PDF di  $Z$  nell'esercizio 2.

- Per  $z < -1$  o  $z > 1$ , si ha che  $f_Z(z) = 0$ , in quanto  $f_X(u)$  ed  $f_X(z-u)$  non sono mai contemporaneamente non nulle.
- Per  $-1 < z < 0$ ,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^{z+1} f_X(u) f_W(z-u) du \\ &= -6 \int_0^{z+1} [z-u + (z-u)^2] du \\ &\stackrel{t=z-u}{=} 6 \int_z^{-1} (t+t^2) dt \\ &= 6 \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_z^{-1} \\ &= 1 - 2z^3 - 3z^2 = (z+1)^2(1-2z). \end{aligned}$$

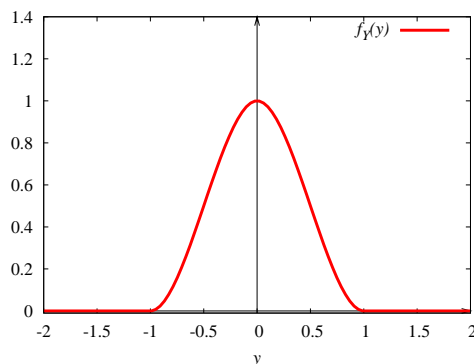
- Per  $0 < z < 1$ ,

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \int_z^1 f_X(u) f_W(z-u) \, du \\
 &= -6 \int_z^1 [z-u + (z-u)^2] \, du \\
 &\stackrel{t=z-u}{=} 6 \int_0^{z-1} (t+t^2) \, dt \\
 &= 6 \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_0^{z-1} \\
 &= (z-1)^2(1+2z).
 \end{aligned}$$

Riassumendo, si ottiene:

$$f_Z(z) = \begin{cases} (z+1)^2(1-2z) & \text{se } -1 < z < 0 \\ (z-1)^2(1+2z) & \text{se } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Il grafico della PDF di  $Z$  è mostrato in Figura 5.



**Figura 5:** Funzione densità di probabilità della variabile aleatoria  $Z$  nell'esercizio 3.

#### Esercizio 4

Si supponga di tirare una moneta: a testa si associa un punteggio uguale a “1” ed a croce si associa un punteggio pari a “0.” Si continua a tirare la moneta, sommando i punteggi corrispondenti, fino a che il punteggio totale è uguale a 2. Definendo  $N$  come il numero di lanci, determinare il valor medio di  $N$ . (*Suggerimento:* si usi il fatto che  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p^{n-2} = 2/(1-p)^3$ , con  $0 < p < 1$ .)

*Soluzione*

Ovviamente,  $N$  può assumere valori in  $\{2, 3, 4, \dots\}$ . In generale, denotando con  $p = 1/2$  la probabilità di “testa”, si ha:

$$\begin{aligned}
 P(N = n) &= P\{1 \text{ testa nei primi } n-1 \text{ lanci, 1 testa all}'n\text{-mo lancio}\} \\
 &= \left[ \binom{n-1}{1} p(1-p)^{n-2} \right] \cdot p \\
 &= \binom{n-1}{1} \left( \frac{1}{2} \right)^n \\
 &= (n-1) \left( \frac{1}{2} \right)^n.
 \end{aligned}$$

Il valore medio cercato è quindi:

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot P(N = n) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \left( \frac{1}{2} \right)^n. \quad (3)$$

Come da suggerimento, è noto che  $\sum_{i=0}^{\infty} p^i = (1-p)^{-1}$ . Derivando entrambi i membri rispetto a  $p$ , si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$$

e derivando un'ulteriore volta:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p^{n-2} = \frac{2}{(1-p)^3}.$$

Utilizzando l'ultima espressione trovata in (3), si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N] &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 4. \end{aligned}$$