Esame di Teoria dei Segnali A

Ing. Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni

16 gennaio 2009

Esercizio 1

C'è un vecchio mazzo di carte (che dovrebbe avere 52 carte), da cui *forse* manca il tre di cuori. Essendo in dubbio sulla presenza di tale carta, stimiamo che la probabilità che essa sia effettivamente presente sia 1/2.

Abbiamo a disposizione anche un nuovo mazzo di carte, che *di sicuro* non contiene il tre di cuori, cioè contiene le altre 51 carte. A questo punto, prima estraiamo 5 carte dal mazzo originale, poi 5 carte dal nuovo mazzo, e le rimettiamo nei due mazzi in modo invertito.

Cominciamo poi a sfogliare le carte del vecchio mazzo (dopo avere effettuato lo scambio di cui sopra e rimescolato) ed alla 17-ma carta non abbiamo ancora trovato il tre di cuori. Qual è, *a questo punto*, la probabilità che il tre di cuori non sia nel vecchio mazzo?

Soluzione

Sia definito il seguente evento:

$$3C' = \{\text{il 3C è presente nel vecchio mazzo}\}.$$

Sappiamo che $P(3C') = 1/2$ (probabilità *a priori*).

Dopo lo scambio di carte fra il vecchio mazzo ed il nuovo mazzo, calcoliamo la probabilità del seguente evento:

$$3C = \{\text{il 3C è presente nel mazzo di partenza dopo lo scambio}\}.$$

In base al teorema della probabilità totale, possiamo scrivere:

$$P(3C) = P(3C|3C')P(3C') + P(3C|\overline{3C'})P(\overline{3C'}). \tag{1}$$

È facile concludere che

$$P(3C|\overline{3C'}) = 0$$

in quanto, in assenza del tre di cuori dal mazzo originario, non potrà essere presente dopo lo scambio. Inoltre,

$$P(3C|3C') = \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdots \frac{47}{48} = \frac{47}{52}$$

in quanto, nel caso il tre di cuori sia presente nel mazzo originale, la probabilità che rimanga dopo lo scambio coincide con la probabilità di non estrarlo a caso in 5 tentativi senza reinserimento. Da (1) si ottiene quindi:

$$P(3C) = P(3C|3C')P(3C') = \frac{1}{2} \cdot \frac{47}{52} = \frac{47}{104} \simeq 0.45.$$

Dopo lo scambio ed il rimescolamento, definiamo il seguente evento:

$$E = \{\text{17 carte estratte senza il 3C}\}.$$

L'esercizio richiede di calcolare $P(\overline{3C}|E) = 1 - P(3C|E)$. Applicando la regola di Bayes si può scrivere:

$$P(3C|E) = \frac{P(E|3C)P(3C)}{P(E|3C)P(3C) + P(E|\overline{3C})P(\overline{3C})}$$

dove $\overline{3C}$ è l'evento complentare di $3C$. Ovviamente $P(E|\overline{3C}) = 1$ (condizionatamente al fatto che il 3C non c'è, la probabilità di non trovarlo nelle prime 17 carte è 1). Rimane da calcolare la seguente:

$$P(E|3C) = P\{\text{Estraendo una carta 17 volte di fila, non esce il 3C}\}.$$

L'esperimento di estrazione alla base del calcolo di $P(E|3C)$ *non* è un esperimento di prove ripetute, nel senso che i sottoesperimenti (singole estrazioni) *non* sono indipendenti. Tenendo conto che, condizionatamente all'evento $3C$ il mazzo di carte ha 52 carte, si può scrivere:

$$\begin{aligned}
P(E|3C) &= P\{\text{non esce 3C alla 17-ma estrazione}|\text{non è uscito alle prime 16}\}\\
&\quad \cdot P\{\text{non esce 3C alla 16-ma estrazione}|\text{non è uscito alle prime 15}\}\\
&\ \vdots\\
&\quad \cdot P\{\text{non esce 3C alla 2-da estrazione}|\text{non è uscito alla 1-ma}\} \cdot P\{\text{non è uscito alla 1-ma}\}\\
&= \frac{51-17}{52-17} \cdot \frac{51-16}{52-16} \cdots \frac{51-1}{52-1} \cdot \frac{51}{52} = \frac{34}{35} \cdot \frac{35}{36} \cdots \frac{50}{51} \cdot \frac{51}{52} = \frac{34}{52} \simeq 0.65.
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}
P(\overline{3C}|E) = 1 - P(3C|E) &= 1 - \frac{P(E|3C)P(3C)}{P(E|3C)P(3C) + P(E|\overline{3C})P(\overline{3C})}\\
&\simeq 1 - \frac{0.65 \cdot 0.45}{0.65 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.55} \simeq 0.6528.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Si assuma che una variabile casuale X abbia la seguente funzione densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,x \left|x - \frac{1}{2}\right| & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove c è una costante di normalizzazione. Si consideri la trasformazione $g(x) = |x - \frac{1}{2}|$. Determinare la funzione densità di probabilità della variabile casuale $Y = g(X)$ e tracciarne il grafico.

Soluzione

Imponendo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \left[\int_0^{1/2} x\left(\frac{1}{2} - x\right)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1} x\left(x - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x\right] = 1 \tag{2}$$

è immediato trovare che $c = 8$. La funzione densità di probabilità della variabile aleatoria X è mostrata in Figura 1. Si tratta, ovviamente, di una variabile casuale continua.

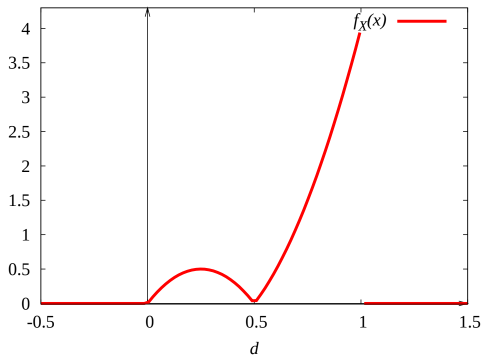

Figura 1: Funzione densità di probabilità della variabile aleatoria X nell'Esercizio 2.

La funzione $g(x)$ che caratterizza la trasformazione da X a Y è mostrata in Figura 2.

- Ovviamente, per $y < 0$ l'equazione $y = g(x)$ non ha soluzione, e quindi $f_Y(y) = 0$.
- Rimane da investigare cosa succede per $y > 0$ (il caso $y = 0$ non è rilevante perchè X è una variabile aleatoria continua). Notiamo preliminarmente che in questo caso l'equazione $y = g(x)$ presenta sempre 2

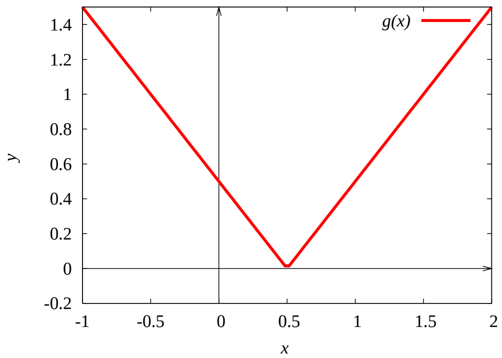

Figura 2: Funzione di trasformazione $g(x)$ nell'esercizio 2.

soluzioni $\{x_1, x_2\}$ simmetriche rispetto ad $1/2$, e più precisamente $x_1 = \frac{1}{2} - y$ ed $x_2 = 1 - x_1 = \frac{1}{2} + y$. Per il teorema fondamentale, concludiamo:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = f_X\left(\frac{1}{2} - y\right) + f_X\left(\frac{1}{2} + y\right)$$

dove si è usato il fatto che $|g'(x_1)| = |g'(x_2)| = 1$. A questo punto, distinguiamo due sottocasi.

- Se $y > 1/2$, si ha che $x_1 < 0$ ed $x_2 > 1$, quindi $f_X(x_1) = f_X(x_2) = 0$ e $f_Y(y) = 0$.
- Se $0 < y < 1/2$, si ottiene:

$$f_Y(y) = 8\left(\frac{1}{2} - y\right)y + 8\left(\frac{1}{2} + y\right)y = 8y.$$

Per concludere, si ha:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 8y & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

La funzione densità di probabilità della variabile aleatoria Y è mostrata in Figura 3.

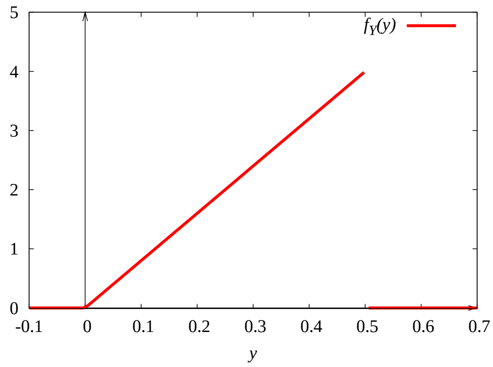

Figura 3: Funzione densità di probabilità della variabile aleatoria Y nell'esercizio 2.

Esercizio 3

Siano date due variabili aleatorie X ed Y indipendenti con X uniformemente distribuita in $[0, 1]$ ed Y con la seguente PDF:

$$f_Y(y) = \begin{cases} c(y - y^2) & \text{se } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Dopo aver determinato c, si trovi l'espressione della PDF di $Z = X - Y$ e se ne tracci il grafico.

Soluzione

Imponendo la condizione di normalizzazione della PDF di Y, cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 c(y - y^2))\,\mathrm{d}y = c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{c}{6} = 1$$

è immediato ottenere che $c = 6$.

Poniamo a questo punto $W = -Y$. Ovviamente, si avrà

$$f_W(w) = \begin{cases} -6(w + w^2) & \text{se } -1 < w < 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

A questo punto, siccome $Z = X + W$, si conclude che

$$f_Z(z) = (f_X \otimes f_W)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_W(z - u)\,\mathrm{d}u$$

cioè la PDF di Z si ottiene facendo la convoluzione fra la PDF di X e la PDF di W. In Figura 4 è mostrata la generica situazione delle due funzioni che compaiono ad argomento dell'integrale di convoluzione per il valore di z indicato. A questo punto, a seconda del valore di z è possibile valutare $f_Z(z)$.

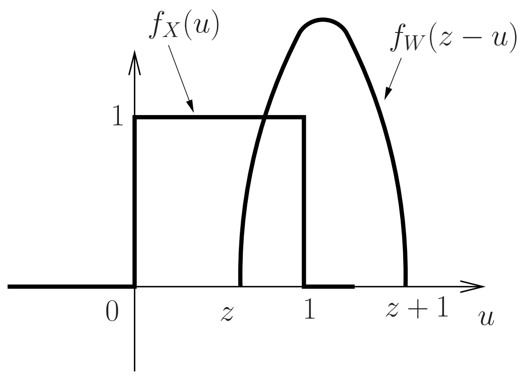

Figura 4: Valutazione grafica dell'integrale di convoluzione per la determinazione della PDF di Z nell'esercizio 2.

- Per $z < -1$ o $z > 1$, si ha che $f_Z(z) = 0$, in quanto $f_X(u)$ ed $f_X(z-u)$ non sono mai contemporaneamente non nulle.
- Per $-1 < z < 0$,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^{z+1} f_X(u) f_W(z-u)\,\mathrm{d}u \\ &= -6\int_0^{z+1} \left[z - u + (z-u)^2\right]\,\mathrm{d}u \\ &\overset{t=z-u}{=} 6\int_z^{-1} \left(t + t^2\right)\,\mathrm{d}u \\ &= 6\left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_z^{-1} \\ &= 1 - 2z^3 - 3z^2 = (z+1)^2(1-2z). \end{aligned}$$

- Per $0 < z < 1$,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_z^1 f_X(u) f_W(z-u)\,\mathrm{d}u \\ &= -6\int_z^1 \left[z-u+(z-u)^2\right]\,\mathrm{d}u \\ &\overset{t=z-u}{=} 6\int_0^{z-1} \left(t+t^2\right)\,\mathrm{d}u \\ &= 6\left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^{z-1} \\ &= (z-1)^2(1+2z). \end{aligned}$$

Riassumendo, si ottiene:

$$f_Z(z) = \begin{cases} (z+1)^2(1-2z) & \text{se } -1 < z < 0 \\ (z-1)^2(1+2z) & \text{se } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Il grafico della PDF di Z è mostrato in Figura 5.

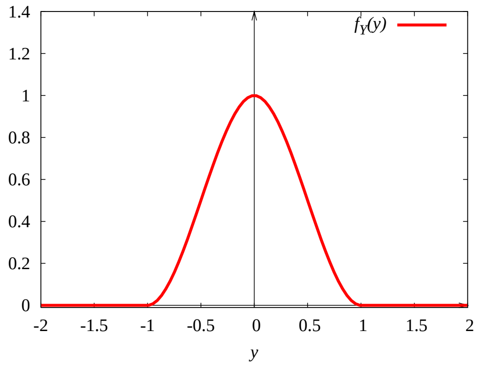

Figura 5: Funzione densità di probabilità della variabile aleatoria Z nell'esercizio 3.

Esercizio 4

Una casa produttrice d'auto dichiara che, per un suo modello, la distanza D percorsa fino al primo guasto al motore è una variabile aleatoria (VA) con media di 52500 km, con deviazione standard pari a 52500 km.

i) Si chiarisca perché ciascuna delle tre seguenti distribuzioni:

1. Gaussiana;
2. uniforme su $[0, D_{\max}]$;
3. esponenziale negativa;

può o non può essere fisicamente accettabile per la VA D.

ii) Detta $\overline{D}$ la media campione della distanza percorsa fino al primo guasto formata su un campione indipendente di 100 auto di quel modello (si ricordi la definizione di media campione $\overline{D} \triangleq \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} D_i$), si calcoli la probabilità che $\overline{D}$ sia superiore a 65000 km.

Soluzione

i) (a) La gaussiana si esclude perchè fissata la media $\mathbb{E}[D] = 52500$ km e la deviazione standard $\sigma_D = 52500$ km, la distribuzione ha molta massa di probabilità a valori negativi, che non sono fisicamente accettabili per una distanza. (b) Per avere $\mathbb{E}[D]$ richiesto nella uniforme, occorre che $D_{\max} = 2\mathbb{E}[D]$. Ma la varianza della uniforme su $[0, D_{\max}]$ è $\sigma_D^2 = \frac{D_{\max}2}{12}$ e dunque la deviazione standard non è quella fornita dal costruttore. (c) per l'esponenziale negativa di parametro μ la media è $\mathbb{E}[D] = 1/\mu$ e la varianza è $\sigma_D^2 = \frac{1}{\mu 2}$ e dunque si ha $\sigma_D = \mathbb{E}[D]$, coerentemente coi dati del costruttore. Quindi delle tre distribuzioni elencate, solo l'esponenziale va bene.

ii) Dette D_i , $i = 1, \ldots, 100$ le VA indipendenti ed identicamente distribuite corrispondenti alle distanze percorse fino al primo guasto delle 100 auto del campione, la media campionaria è definita come $\overline{D} \triangleq \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} D_i$. Invocando il teorema del limite centrale, possiamo approssimare la distribuzione di $\overline{D}$ con una gaussiana di media (per la linearità dell'operatore valor medio)

$$\mathbb{E}[\overline{D}] = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \mathbb{E}[D_i] = \mathbb{E}[D] = 52500 \text{ km}$$

e varianza (per la linearità della varianza nel caso di VA indipendenti):

$$\text{Var}[\overline{D}] = \frac{1}{100^2} \sum_{i=1}^{100} \text{Var}[D_i] = \frac{\text{Var}[D]}{100}$$

e dunque una deviazione standard $\sigma_{\overline{D}} = \frac{\sigma_D}{10} = \frac{52500}{10} = 5250$ km. Pertando invocando la nota formula per la valutazione delle code della gaussiana, abbiamo che la probabilità richiesta è:

$$P\{\overline{D} > 65000\} \cong Q\left(\frac{6500 - \mathbb{E}[\overline{D}]}{\sigma_{\overline{D}}}\right) = Q\left(\frac{12500}{5250}\right) = Q(2.38) \cong 0.0087.$$