Esame di Teoria dei Segnali A

Ing. Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni

19 gennaio 2007

Esercizio 1

C'è un vecchio mazzo di carte (che dovrebbe avere 52 carte), da cui *forse* manca il tre di cuori. Essendo in dubbio sulla presenza di tale carta, stimiamo che la probabilità che essa sia effettivamente presente sia 1/2.

Si comincia a sfogliare le carte ed alla 17-ma carta non abbiamo ancora trovato il tre di cuori. Qual è, *a questo punto*, la probabilità che il tre di cuori non sia nel mazzo?

Soluzione

Siano definiti i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} 3C &= \{\text{il 3C è presente nel mazzo}\} \\ E &= \{\text{17 carte estratte senza il 3C}\}. \end{aligned}$$

Sappiamo che $P(3C) = 1/2$ (probabilità *a priori*).

L'esercizio richiede di calcolare $P(\overline{3C}|E) = 1 - P(3C|E)$. Applicando la regola di Bayes si può scrivere:

$$P(3C|E) = \frac{P(E|3C)P(3C)}{P(E|3C)P(3C) + P(E|\overline{3C})P(\overline{3C})}$$

dove $\overline{3C}$ è l'evento complentare di $3C$. Siccome $P(\overline{3C}) = 1/2$, si ottiene

$$P(3C|E) = \frac{P(E|3C)}{P(E|3C) + P(E|\overline{3C})}.$$

Ovviamente $P(E|\overline{3C}) = 1$ (condizionatamente al fatto che il 3C non c'è, la probabilità di non trovarlo nelle prime 17 carte è 1). Rimane da calcolare la seguente:

$$P(E|3C) = P\{\text{Estraendo una carta 17 volte di fila, non esce il 3C}\}.$$

L'esperimento di estrazione alla base del calcolo di $P(E|3C)$ *non* è un esperimento di prove ripetute, nel senso che i sottoesperimenti (singole estrazioni) *non* sono indipendenti. Tenendo conto che, condizionatamente all'evento $3C$ il mazzo di carte ha 52 carte, si può scrivere:

$$\begin{aligned} P(E|3C) &= P\{\text{non esce 3C alla 17-ma estrazione| non è uscito alle prime 16}\} \\ &\quad \cdot P\{\text{non esce 3C alla 16-ma estrazione| non è uscito alle prime 15}\} \\ &\vdots \\ &\quad \cdot P\{\text{non esce 3C alla 2-da estrazione| non è uscito alla 1-ma}\}P\{\text{ non è uscito alla 1-ma}\} \\ &= \frac{51-17}{52-17} \cdot \frac{51-16}{52-16} \cdots \frac{51-1}{52-1} \cdot \frac{51}{52} = \frac{34}{35} \cdot \frac{35}{36} \cdots \frac{50}{51} \cdot \frac{51}{52} = \frac{34}{52} \simeq 0.65. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$P(\overline{3C}|E) = 1 - P(3C|E) = 1 - \frac{P(E|3C)}{P(E|3C) + P(E|\overline{3C})} \simeq 1 - \frac{0.65}{1 + 0.65} \simeq 0.61.$$

Esercizio 2

Nel piano (x, y) è assegnato il dominio $\mathcal{D}$ indicato in Figura 1. Si consideri una coppia di variabili aleatorie X

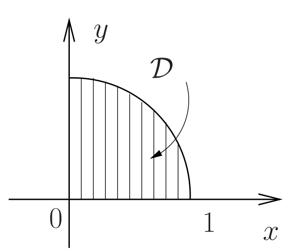

Figura 1: Dominio $\mathcal{D}$ della funzione densità di probabilità congiunta delle due variabili aleatorie X e Y nell'Esercizio 2.

e Y con funzione densità di probabilità (PDF) congiunta costante sul dominio D e nulla altrove. Date (X, Y):

1. si ricavi la PDF della distanza del punto $\mathrm{P} = \binom{X}{Y}$ dall'origine;

2. si tracci il grafico della PDF trovata al precedente punto.

Soluzione
Per costruzione, la PDF congiunta delle variabili aleatorie X ed Y ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} f_{XY}(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{1}{\text{Area}(\mathcal{D})} & (x,y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi} & (x,y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Definiamo con $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$ la distanza del punto di coordinate (X, Y), che indichiamo come P, dall'origine. Applichiamo il metodo della funzione cumulativa di distribuzione (CDF). Come mostrato in Figura 2, l'evento $\{D \leq d\}$ corrisponde all'evento in cui il punto P cade all'interno della porzione di cerchio di lato d. Tenendo conto della PDF congiunta di X ed Y, si può scrivere:

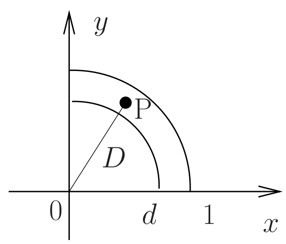

Figura 2: Punto P, di coordinate X e Y, e sua distanza D dall'origine nell'Esercizio 2.

$$\begin{aligned} F_D(d) = P\{D \leq d\} &= \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ \dfrac{\pi d^2}{4} \cdot \dfrac{4}{\pi} & 0 < d \leq 1 \\ 1 & d > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ d^2 & 0 < d \leq 1 \\ 1 & d > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$f_D(d) = P\{D \leq d\} = \begin{cases} 2d & 0 < d \leq 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Un metodo alternativo si basa sul passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari. Infatti, indicando con Θ l'angolo (in senso antiorario) rispetto al semiasse positivo delle ascisse, è facile ottenere che

$$\begin{aligned} f_{D\Theta}(d,\theta) &= \begin{cases} d \cdot f_{XY}(d\cos\theta, d\sin\theta) & 0 < d < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi\, d}{4} & 0 < d < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

da cui si ottiene, come sopra:

$$f_D(d) = \int_0^{\pi/2} f_{D\Theta}(d,\theta)\, \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2d & 0 < d < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Il grafico della PDF di D è mostrato in Figura 3.

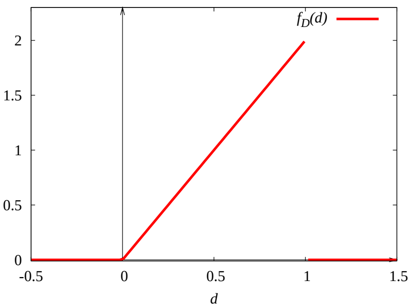

Figura 3: PDF di D nell'Esercizio 2.

Esercizio 3

Con riferimento a Figura 4, scelto "a caso" un punto P sul bordo del quadrato di lato 2 centrato nell'origine mostrato in figura, si ricavi la funzione densità di probabilità (PDF) della variabile aleatoria Z pari alla lunghezza del segmento fra P ed l'origine. Si tracci quindi il grafico della PDF trovata. (Suggerimento: considerando il bordo del quadrato come una linea, la posizione del punto è uniformemente distribuita.)

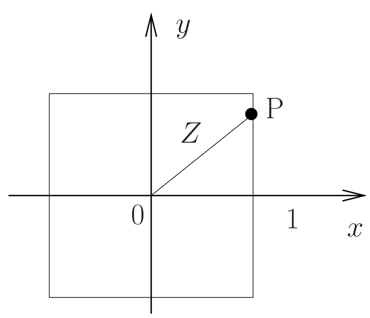

Figura 4: Punto P sul bordo del quadrato di lato 2 ed il segmento, di lunghezza Z, fra il punto P e l'origine nell'Esercizio 3.

Soluzione

Proponiamo due metodi per la soluzione.

Metodo 1

Indicando con X ed Y le coordinate del punto P, si ha che la sua distanza dall'origine si può scrivere come segue:

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Da notare che X ed Y hanno una PDF congiunta non nulla solo sul bordo del quadrato. Tale PDF corrisponde cioè ad una PDF impulsiva bidimensionale. Considerare l'utilizzo del teorema fondamentale non è banale.

Utilizzando il metodo della CDF e sfruttando la simmetria del dominio (rispetto all'origine), è facile concludere che $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = 1$ se $z \geq \sqrt{2}$ e $F_Z(z) = 0$ se $z \leq 1$. Rimane da studiare cosa succede per $z \in (1, \sqrt{2})$. Come si vede in Figura 5, in corrispondenza di un valore di z fra 1 e $\sqrt{2}$, ci sono 4 segmenti sul bordo del quadrato (indicati in grassetto in figura e ciascuno di lunghezza $2\sqrt{z^2-1}$) la cui unione forma l'insieme in cui può cadere il punto P corrispondente all'evento $\{Z \leq z\}$. Essendo per ipotesi la distribuzione del punto P uniforme sul bordo del quadrato, la probabilità che il punto P cada in uno di questi 4 segmenti è:

$$F_Z(z) = \frac{\text{lunghezza complessiva dei segmenti}}{\text{lunghezza del bordo}} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{z^2-1}}{2 \cdot 4} = \sqrt{z^2-1}.$$

Si ottiene quindi:

$$F_Z(z) \quad = \quad \begin{cases} 0 & z \leq 1 \\ \sqrt{z^2-1} & 1 < z < \sqrt{2} \\ 1 & z \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

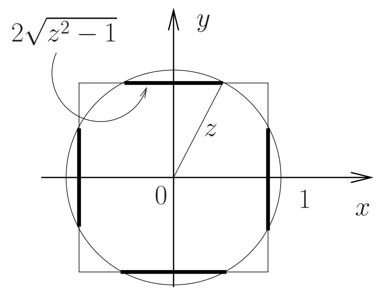

Figura 5: Segmenti (in grassetto), sul bordo del quadrato di lato 2, per valori di z compresi fra 1 e $\sqrt{2}$ nell'Esercizio 3.

da cui segue:

$$f_Z(z) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{z}{\sqrt{z^2-1}} & 1 < z < \sqrt{2} \\ 1 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Il grafico della PDF di Z è mostrato in Figura 6.

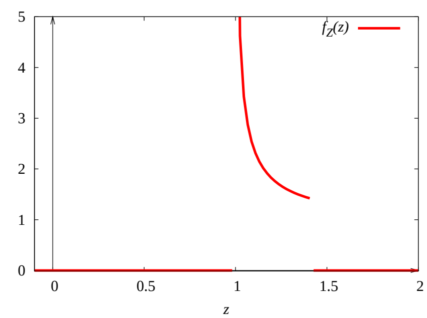

Figura 6: PDF di Z nell'Esercizio 3.

Metodo 2

Per simmetria geometrica del problema, è sufficiente limitarsi a studiare le statistiche di Z considerando che il punto P si possa muovere su un mezzo lato, per esempio fra il punto (0,0) ed il punto (0,1). In questo caso, possiamo scrivere:

$$Z = g(U) = \sqrt{1+U^2}$$

dove U è la distanza, sul mezzo lato indicato sopra, dal punto (0,0) (cioè la distanza fra il punto (0,0) ed il punto $(0,U)$). Ovviamente, $U \sim \text{Unif}(0,1)$. La trasformazione $g(u)$ è monotona crescente, dato che

$$g'(u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} > 0.$$

Per $z \in (1,\sqrt{2})$, l'equazione $z = g(u)$ ammette quindi un'unica soluzione $u_1 = g^{-1}(z) = \sqrt{z^2-1}$. Applicando il teorema fondamentale, per $z \in (1,\sqrt{2})$ si ottiene:

$$f_Z(z) = \frac{f_U(u_1)}{|g'(u_1)|} = \frac{z}{z^2-1}$$

che coincide con il risultato ottenuto con il primo metodo.

Esercizio 4

Si supponga di tirare un dado e di sommare i punteggi relativi alle facce che escono. Qual è il numero *medio* di lanci tale che il corrispondente punteggio complessivo (medio) è uguale a 24?

Una volta trovato il numero medio di lanci, si consideri il minimo intero, che denotiamo con L, maggiore o uguale a tale numero. Si calcoli la probabilità che dopo L lanci il punteggio sia almeno 24.

Soluzione

Indichiamo con D_i il risultato del lancio i-mo. Si ha che $\{D_i\}$ sono indipendenti ed identicamente distribuite, con $D_i \sim \text{Unif}\{1,2,3,4,5,6\}$. Il punteggio complessivo dopo N lanci è

$$Y_N = \sum_{i=1}^{N} D_i.$$

Nell'esperimento in corso, N è una variabile aleatoria discreta che assume valori fra 4 (quando escono tutti "6" nei lanci) e 24 (quando escono tutti "1" nei lanci). Applicando il teorema della media condizionata, si ha:

$$\mathbb{E}[Y_N] = \mathbb{E}_N[\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} D_i]] = \mathbb{E}[D_i] \cdot \mathbb{E}[N].$$

Imponendo che il punteggio medio complessivo sia 24, cioè $\mathbb{E}[Y_N] = 24$, e notando che $\mathbb{E}[D_i] = 3.5\, \forall i$, si ottiene:

$$\mathbb{E}[D_i] = \frac{\mathbb{E}[Y_N]}{\mathbb{E}[D_i]} = \frac{24}{3.5} \simeq 6.86.$$

Sulla base del risultato ottenuto, si ha $L = \lceil 6.86 \rceil = 7$. A questo punto, vogliamo calcolare $P\{Y_L \geq 24\}$. Cerchiamo di calcolare tale probabilità in modo rigoroso. La variabile aleatoria Y_L assume valori fra $L = 7$ (ottengo "1" in tutti gli L lanci consecutivi) ed $6L = 42$ (ottengo "6" in tutti i lanci). Ogni possibile valore $y \in \{7, 8, \ldots, 42\}$ corrisponde ad una particolare configurazione di risultati nei lanci. Per esempio:

$$\{Y_L = 12\} = \{6 \text{ “1” ed } 1 \text{ “6”}\} + \{5 \text{ “1”, } 1 \text{ “3”, ed } 1 \text{ “4”}\} + \ldots$$

e si può scrivere:

$$\begin{aligned} P\{Y_L = 12\} &= P\{6 \text{ “1” ed } 1 \text{ “6”}\} + P\{5 \text{ “1”, } 1 \text{ “3”, ed } 1 \text{ “4”}\} + \ldots \\ &= \binom{7}{6,1}\left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} + \binom{7}{5,1,1}\left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \ldots \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left[\binom{7}{6,1} + \binom{7}{5,1,1} + \ldots\right] \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^7 [\text{numeri di possibili combinazioni}]. \end{aligned}$$

La probabilità cercata si può quindi scrivere come segue:

$$P\{Y_L \geq 24\} = \sum_{i=24}^{42} P\{Y_L = i\}.$$

Come si può intuire dall'espressione di $P\{Y_L = 12\}$ sopra, il calcolo *esatto* di $P\{Y_L \geq 24\}$ è complicato. Siccome $\{D_i\}$ sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, avendo una funzione massa di probabilità (PMF) simmetrica rispetto al valore medio (hanno una distribuzione uniforme), segue che la PMF di Y_L è anch'essa simmetrica rispetto al suo valore medio $\mathbb{E}[Y_L] = 24.5$. Di conseguenza, si ottiene:

$$P\{Y_L \geq 24\} = P\{Y_L = 24\} + \underbrace{P\{Y_L \geq 25\}}_{0.5} = P\{Y_L = 24\} + 0.5$$

dove la seconda probabilità a secondo membro è esattamente $1/2$ a causa della simmetria della PMF. Applicando il teorema del limite centrale (grazie all'indipendenza delle variabili aleatorie $\{D_i\}$), si può scrivere:

$$P\{Y_L = 24\} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}[Y_L]}} \exp\left(-\frac{(24 - \mathbb{E}[Y_L])^2}{2\text{Var}[Y_L]}\right)$$

dove

$$\text{Var}[Y_L] = \sum_{i=1}^{L} \text{Var}[D_i] = L \cdot \text{Var}[D_i] \simeq 549.15$$

siccome

$$\mathrm{Var}[D_i] = \mathbb{E}[D_i^2] - (\mathbb{E}[D_i])^2 = 91 - 12.25 \simeq 78.75.$$

Si ottiene, per finire:

$$P\{Y_L = 24\} \simeq \frac{1}{\sqrt{1098 \cdot \pi}} \exp\left[-\frac{(24 - 24.5)^2}{1098}\right] \simeq 0.017$$

e quindi

$$P\{Y_L \geq 24\} \simeq 0.017 + 0.5 = 0.517.$$