Esame di Teoria dei Segnali A
Ing. Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni

7 settembre 2007

Esercizio 1

Siete invitati ad un matrimonio. Ci sono $N = 100$ invitati, distribuiti a caso (ed in modo indipendente l'uno dall'altro) su $n = 10$ tavoli circolari. All'interno di ogni tavolo si viene distribuiti a caso su N/n posti.

Tra gli invitati c'è una persona che vi sta molto antipatica. Qual è la probabilità che vi sediate allo stesso tavolo della persona antipatica? Qual è la probabilità che vi sediate vicino a questa persona?

Soluzione

Nell'esercizio in questione, ci sono $N/n = 10$ posti in ogni tavolo. Definiamo con $\mathcal{E}_i$ l'evento {io e la persona antipatica siamo seduti al tavolo i}, $i = 1, \ldots, n$. Siccome le persone si siedono in modo indipendente, si ha

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{E}_i\} &= P\{\text{io seduto al tavolo } i, \text{persona antipatica seduta al tavolo } i\} \\ &= P\{\text{io seduto al tavolo } i\}\, P\{\text{persona antipatica seduta al tavolo } i\} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{100} \qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Definendo $\mathcal{E} \triangleq$ {io e la persona antipatica siamo seduti allo stesso tavolo}, si può scrivere:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_n$$

cosicchè

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{E}\} &= P\{\mathcal{E}_1\} + P\{\mathcal{E}_2\} + \ldots + P\{\mathcal{E}_n\} \\ &= nP\{\mathcal{E}_i\} = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Definendo con $\mathcal{V}$ l'evento {io e la persona antipatica siamo seduti vicino}, si ha:

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{V}\} &= P\{\mathcal{V}|\mathcal{E}\} \underbrace{P\{\mathcal{E}\}}_{\frac{1}{n}} + \underbrace{P\{\mathcal{V}|\mathcal{E}^C\}}_{0} P\{\mathcal{E}^C\} \\ &= \frac{P\{\mathcal{V}|\mathcal{E}\}}{n} \end{aligned}$$

dove si è ovviamente notato che la probabilità di essere seduti vicino dato che non si è seduti allo stesso tavolo è nulla. Rimane da calcolare $P\{\mathcal{V}|\mathcal{E}\}$. Siccome si hanno N/n posti per ogni tavolo, lo spazio campione ridotto dal condizionamento da $\mathcal{E}$ è uniforme. Quindi:

$$P\{\mathcal{V}|\mathcal{E}\} = \frac{\#\ \text{casi favorevoli}}{\#\ \text{casi possibili}} = \frac{\frac{N}{n} \cdot 2}{\frac{N}{n}(\frac{N}{n} - 1)} = \frac{2n}{N - n}.$$

Si ottiene quindi:

$$P\{\mathcal{V}\} = \frac{2n}{N - n}\frac{1}{n} = \frac{2}{N - n} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}.$$

Esercizio 2

Si consideri una variabile aleatoria (VA) X con la seguente funzione densità di probabilità (PDF):

$$f_X(x) = \frac{1}{4}\delta(x + 1) + \frac{1}{4}\delta(x - 1) + \frac{1}{2}e^{-(x-2)}U(x - 2).$$

Tale VA viene trasformata in una VA $Y = g(X)$, con $g(x) = ||x| - 1|$. Si determini l'espressione e si tracci il grafico della PDF di Y. Ci calcoli quindi $\mathbb{E}[Y]$.

Soluzione

Il grafico della funzione $g(x)$ caratterizzante la trasformazione è mostrato in Figura 1. Siccome la VA X è

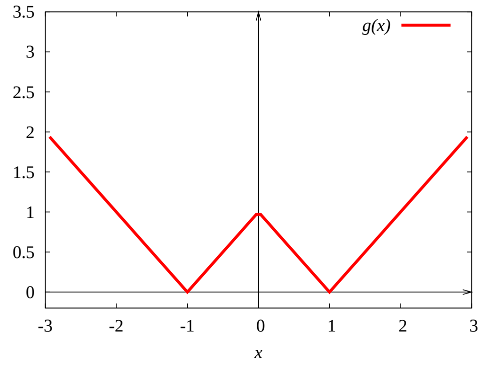

Figura 1: Funzione di trasformazione $g(x)$ nell'Esercizio 2.

una VA mista, tale sarà anche la VA Y.

Le masse di probabilità di X concentrate in ± 1 vengono mappate in $g(\pm 1) = 0$: di conseguenza, Y ha una massa di probabilità di peso $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ centrata in $y = 0$. Si noti che possiamo a questo punto concludere che non ci sono altri contributi nel peso della delta centrata in 0 nella PDF di Y, siccome $g(x)$ non presenta tratti orizzontali ad altezza 0.

Per quanto riguarda la parte senza delta della PDF di X, cioè $f_X^{(c)} = \frac{1}{2}e^{-(x-2)}U(x-2)$, applichiamo il teorema fondamentale per capire come si trasforma. Notiamo preliminarmente che per $x > 1$ si ha $g(x) = x - 1$ ($g'(x) = 1$). L'equazione $g(x) = y$ non presenta soluzioni per $y < 0$. Per $y \geq 0$ tale equazione presenta un'unica soluzione $x_1 = y + 1$, da cui segue

$$f_Y^{(c)}(y) = \frac{f_X^{(c)}(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{1}{2}e^{-(y-1)}U(y-1).$$

Possiamo quindi concludere che la PDF di Y ha la seguente espressione:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{2}e^{-(y-1)}U(y-1)$$

ed il suo grafico è mostrato in Figura 2. Il valore medio di Y è quindi il seguente:

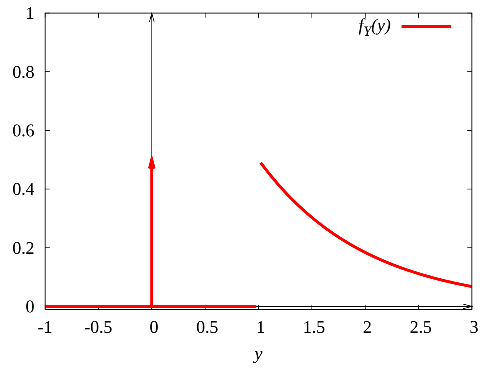

Figura 2: Funzione densità di probabilità della variabile aleatoria Y nell'esercizio 3.

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y\delta(y)\,\mathrm{d}y}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-(y-1)}U(y-1)\,\mathrm{d}y}_{1+1} = 1$$

dove si sono sfruttate la proprietà campionatrice della delta ed il fatto che il secondo integrale rappresenta il valore medio di una variabile esponenziale a parametro 1 traslata di 1, cioè 2.

Esercizio 3

Con riferimento a Figura 3, scelti "a caso" ed indipendentemente due punti P_1 e P_2 sulla circonferenza di raggio unitario, si ricavi la funzione densità di probabilità (PDF) della variabile aleatoria Z che rappresenta la lunghezza della corda tra P_1 e P_2. (*Suggerimento:* si ricordi che $\cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ e che $\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos 2x}{2}$.)

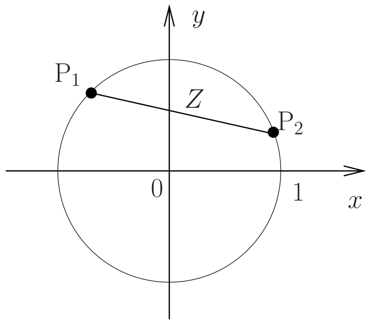

Figura 3: Punti P_1 e P_2 sulla circonferenza di raggio unitario e corda, di lunghezza Z, fra tali punti nell'Esercizio 3.

Soluzione

Si ha che le coordinate di P_1 e P_2 possono essere espresse come segue:

$$(X_1, Y_1) = (\cos\Theta_1, \sin\Theta_1) \qquad (X_2, Y_2) = (\cos\Theta_2, \sin\Theta_2)$$

con Θ_1 e Θ_2 uniformemente distribuite in $[0, 2\pi)$. La distanza Z fra i 2 punti si può esprimere come segue:

$$\begin{aligned}
Z &= \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} \\
&= \sqrt{(\cos\Theta_1 - \cos\Theta_2)^2 + (\sin\Theta_1 - \sin\Theta_2)^2} \\
&= \sqrt{2[1 - (\cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2 + \sin\Theta_1 \cdot \sin\Theta_2)]} \\
&= \sqrt{2[1 - (\cos\Theta_1 \cdot \cos\Theta_2 + \sin\Theta_1 \cdot \sin\Theta_2)]} \\
&= \sqrt{2[1 - \cos(\Theta_1 - \Theta_2)]} \\
&= \sqrt{4\,\frac{1 - \cos(\Theta_1 - \Theta_2)}{2}} \\
&= \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2}\right)} = 2|\sin X|
\end{aligned}$$

dove $X \triangleq \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2}$. Siccome $-\Theta_2$ è una variabile uniformemente distribuita in $(-2\pi, 0]$, $\Theta_1 - \Theta_2$ è una variabile triangolare fra -2π e 2π e quindi X è una variabile triangolare fra $-\pi$ e π. È facile verificare che

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left(1 - \dfrac{|x|}{\pi}\right) & \text{se } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Studiamo quindi la trasformazione $Z = g(X)$, dove $g(x) = 2|\sin x|$. Per come è fatta la PDF di X ci interessano solamente i due lobi di $g(x)$ fra $-\pi$ e π, come mostrato in Figura 4. Applichiamo il teorema fondamentale.

- Se $z > 2$ o $z < 0$, l'equazione $z = g(x)$ non ha soluzione, e quindi $f_Z(z) = 0$.
- Se $0 < z < 2$, l'equazione $z = g(x)$ ha 4 soluzioni distinte $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ fortemente simmetriche. In particolare: due soluzioni sono positive ($0 < x_1 < \pi/2$ e $\pi/2 < x_2 < \pi$) e due negative ($-\pi < x_4 < -\pi/2$ e $-\pi/2 < x_3 < 0$); le soluzioni sono simmetriche rispetto all'origine $x_3 = -x_1$ ed $x_4 = -x_2$; le soluzioni positive sono simmetriche rispetto a $\pi/2$ ($x_2 = \pi - x_1$) e quelle negative rispetto a $-\pi/2$ ($x_4 = -\pi - x_3$). A questo punto, notando che $x_1 = \text{asin}(z/2)$, si possono ricavare in modo univoco tutte le altre soluzioni. Notando inoltre che $|g'(x)| = 2|\cos x|$, è possibile concludere che

$$|g'(x_i)| = 2\sqrt{1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

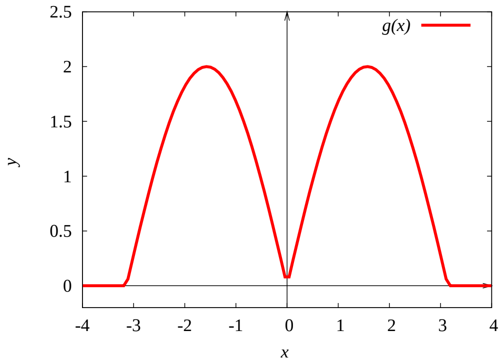

Figura 4: Funzione di trasformazione $g(x)$ nell'esercizio 3.

Per simmetria, si può scrivere:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) = \sum_{i=1}^{4} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} &= \frac{2}{|g'(x_1)|}(f_X(x_1) + f_X(x_2)) \\
&= \frac{2}{|g'(x_1)|}\left[\frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{x_1}{\pi}\right) + \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{x_2}{\pi}\right)\right] \\
&= \frac{2}{|g'(x_1)|}\left[\frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{x_1}{\pi}\right) + \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{\pi - x_1}{\pi}\right)\right] \\
&= \frac{2}{|g'(x_1)|}\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2}}.
\end{aligned}
$$

In definitiva, si ottiene:

$$
f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2}} & \text{se } 0 < z < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
$$

ed il corrispondente grafico è mostrato in Figura 5.

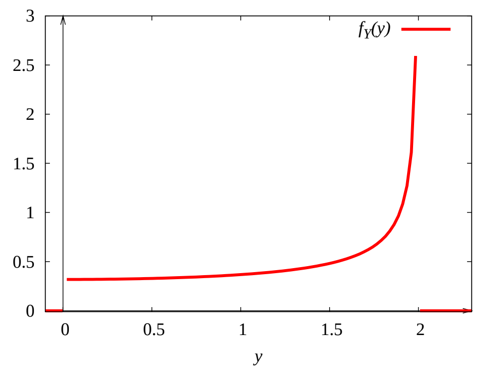

Figura 5: Funzione densità di probabilità della variabile aleatoria Z nell'esercizio 3.

Esercizio 4

Si considerino 2 variabili aleatorie $X \sim \exp(1)$ e $Y \sim \exp(3/2)$. Si indichi con β la correlazione fra tali variabili aleatorie e si assuma che $\beta > 0$. Detto $Z \triangleq (X - Y)^2$, si calcoli $\mathbb{E}[Z]$ e si determini il valore di β che minimizza $\mathbb{E}[Z]$ e, di conseguenza, il valore minimo di $\mathbb{E}[Z]$. (Suggerimento: si tenga conto della disuguaglianza di Schwartz.)

Soluzione
Per costruzione, sappiamo che la correlazione fra X e Y è β, cioè $\mathbb{E}[XY] = \beta$. Si ha:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X^2 - 2XY + Y^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2] = 2 - 2\beta + \frac{8}{9} = \frac{26}{9} - 2\beta$$

dove si sono usati i fatti che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{[-x^2 e^{-x}]_0^\infty}_{0} + 2\underbrace{\int_0^\infty x e^{-x}\,\mathrm{d}x}_{1} = 2 \\
\mathbb{E}[Y^2] &= \int_0^\infty y^2 \frac{3}{2} e^{-\frac{3y}{2}}\,\mathrm{d}y = \underbrace{[-y^2 e^{-\frac{3y}{2}}]_0^\infty}_{0}\, 2\underbrace{\int_0^\infty y e^{-\frac{3y}{2}}\,\mathrm{d}y}_{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

A questo punto, per minimizzare $\mathbb{E}[Z]$ si deve massimizzare β. Ricordando la diseguaglianza di Schwartz, sappiamo che

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[Y^2]} = \sqrt{2 \cdot \frac{8}{9}} = \frac{4}{3}.$$

Siccome per ipotesi $\mathbb{E}[XY] = \beta > 0$, si ha che il valore massimo di β è quindi $\frac{4}{3}$, da cui segue che il valore minimo di $\mathbb{E}[Z]$ è $\frac{26}{9} - \frac{8}{3} = \frac{2}{9}$.