Esame di Teoria dei Segnali A

Ing. Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni

8 settembre 2006

Esercizio 1

Si consideri di dover ordinare i nomi di 5 persone, indicate come A, B, C, D ed E. Nell'ordinamento di devono rispettare i seguenti vincoli:

1. A deve sempre precedere B;
2. E non può essere primo;
3. A non può essere secondo.

Assumendo che tutte le sequenze (ordinate) possibili siano equiprobabili, qual'è la probabilità che una sequenza abbia A come primo nome?

Soluzione.

Siccome tutte le sequenze ordinate sono equiprobabili, l'esperimento di interesse può essere caratterizzato con uno spazio campione uniforme e la probabilità di un qualsiasi evento si può scrivere come il rapporto fra il numero di casi favorevoli a quell'evento ed il numero di casi totale.

Iniziamo con il determinare il numero di casi totale, cioè il numero di possibili sequenze ordinate. Per fare questo costruiamo l'albero delle scelte relativo all'esperimento in questione. Tale albero è mostrato in Figura 1, e la sua struttura si deriva come segue, procedendo per livelli di profondità crescente (le foglie corrispondono al livello 5).

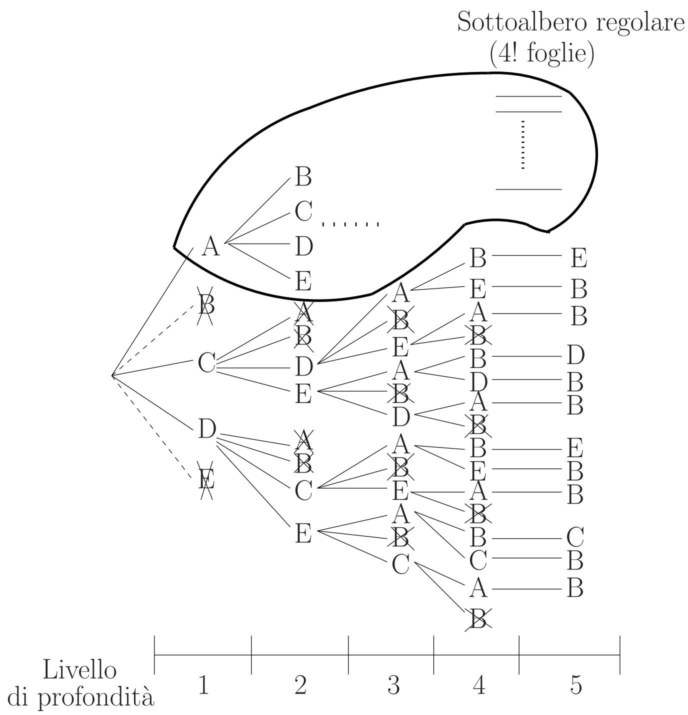

Figura 1: Albero delle scelte per ordinamento delle parole nell'Esercizio 1.

- A livello 1 le scelte possibili sono A, C e D. Infatti: (i) E non può essere scelto, perchè questo sarebbe in contrasto con il secondo vincolo; (ii) B non può essere scelto, in quanto A dovrebbe seguirlo e questo violerebbe il primo vincolo. Nel caso in cui la lettera scelta sia A, tutti i vincoli sono rispettati, e di conseguenza il sottoalbero che parte da A è pieno, cioè avrà $4!$ foglie (principio di analisi combinatoria). Notando che, per motivi di simmetria, i due sottoalberi che si sviluppano da C e D devono avere lo stesso numero di foglie, allora nel seguito ci concentriamo solo sul sottoalbero che si sviluppa da C.

- A livello 2 non possono essere scelti A e B, in quanto (i) scegliendo A si violerebbe il terzo vincolo, mentre (ii) scegliendo B si violerebbe, successivamente, il primo vincolo. Quindi, a livello 2 si hanno 2 foglie.

- A livello 3, non è possibile scegliere B, siccome si violerebbe il primo vincolo ai livelli successivi. Rimangono quindi 4 foglie.

- A livello 4, non è possibile selezionare B in quei sottoalberi dove non è ancora stato scelto A. Sopravvivono 6 foglie. Tale numero di foglie si conserva anche a livello 5.

Riassumendo, siccome il sottoalbero che parte da A a livello 1 ha $4! = 24$ foglie e ognuno dei due sottoalberi che partono da C e D a livello 1 hanno 6 foglie, il numero totale di foglie è 36. Siccome il numero di sottosequenze con A al primo posto corrisponde al numero di foglie del sottoalbero che si sviluppa da A a livello 1, si può concludere che la probabilità cercata è $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 2

Con riferimento a Figura 2, scelto un punto “a caso” P sulla circonferenza di raggio unitario, si ricavi la funzione densità di probabilità (PDF) della variabile aleatoria $Y =$ lunghezza della corda tra il punto P ed il punto di coordinate $(1, 0)$.

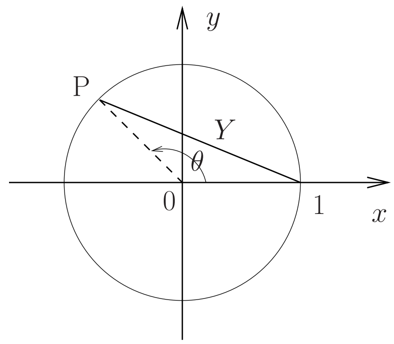

Figura 2: Punto P sulla circonferenza di raggio unitario e corda, di lunghezza Y, fra il punto P ed il punto della circoferenza sul semiasse x positivo di nell’Esercizio 2.

Soluzione.

Indicando con θ l’angolo, in senso antiorario rispetto al semiasse positivo orizzontale, il punto P ha coordinate $(\cos\Theta, \sin\Theta)$, dove Θ è una variabile uniformemente distribuita in $[-\pi, \pi)$. La variabile aleatoria Y può essere espressa come segue:

$$
\begin{aligned}
Y &= \sqrt{(1-\cos\Theta)^2 + \sin^2\theta} \\
&= \sqrt{2 - 2\cos\Theta} \\
&= 2\sqrt{\frac{1-\cos\Theta}{2}} = 2|\sin X|
\end{aligned}
$$

dove $X \triangleq \Theta/2$ e si è utilizzata una nota proprietà trigonometrica. Ovviamente X è una variabile aleatoria uniformemente distribuita in $[-\pi/2, \pi/2)$. Per determinare le statistiche di Y analizziamo la trasformazione $Y = g(X)$ dove $g(x) \triangleq 2|\sin x|$.

- Se $y < 0$ o $y > 2$, l’equzione $y = g(x)$ non ha soluzioni, e quindi $f_Y(y) = 0$.
- Se $0 < y < 2$, l’equazione $y = g(x)$ presenta le due soluzioni $x_{1,2} = \pm\text{asin}(y/2)$.

Siccome

$$g'(x_{1,2}) = 2|\cos x_{1,2}| = 2\sqrt{1-\sin^2 x_{1,2}} = 2\sqrt{1-\left(\frac{y}{2}\right)^2}$$

segue che

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \\
&= \frac{2/\pi}{2\sqrt{1-\left(\frac{y}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{2}\right)^2}}.
\end{aligned}
$$

Il grafico di $f_Y(y)$ è mostrato in Figura 3

Esercizio 3

Nel piano (x, y) è assegnato il dominio $\mathcal{D}$ indicato in Figura 4. Si consideri una coppia di variabili aleatorie X e Y con densità di probabilità congiunta costante sul dominio $\mathcal{D}$ e nulla altrove.

1. Determinare le funzioni densità di probabilità marginali $f_X(x)$ ed $f_Y(y)$, e tracciarne il grafico.
2. Verificare se X e Y sono indipendenti oppure no.

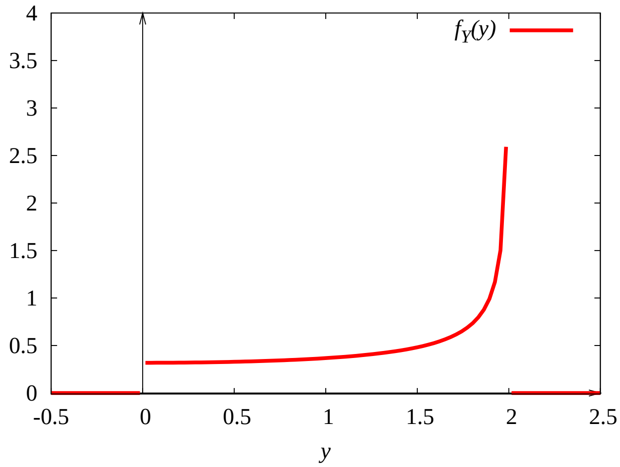

Figura 3: PDF di Y nell'Esercizio 2.

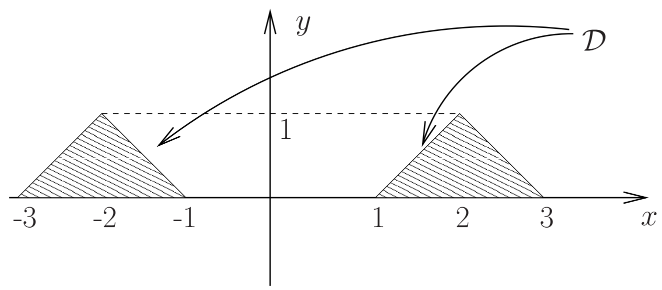

Figura 4: Dominio $\mathcal{D}$ della funzione densità di probabilità congiunta delle due variabili aleatorie X e Y nell'Esercizio 3.

3. Calcolare $\mathrm{Cov}[X, Y]$.

Soluzione.
Per costruzione, la PDF congiunta di X ed Y può essere espressa come segue:

$$
\begin{aligned}
f_{XY}(x, y) &= \begin{cases} \dfrac{1}{\text{Area}(\mathcal{D})} & \text{se } (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se } (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
\end{aligned}
$$

1. Determiniamo per prima la PDF di X. Per simmetria, siccome possiamo concludere che $f_X(-x) = f_X(x)$, limitiamoci a studiare il comportamento di $f_X(x)$ per $x > 0$:

   - $f_X(x) = 0$ per $0 < x < 1$ e $x > 3$;
   - $f_X(x) = \int_0^{x-1} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y = (x-1)/2$ per $1 < x < 2$;
   - $f_X(x) = \int_0^{3-x} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y = (3-x)/2$ per $2 < x < 3$.

   La PDF di X si può quindi scrivere, in modo compatto, come segue:

$$
f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|-1}{2} & 1 < |x| < 2 \\ \dfrac{3-|x|}{2} & 2 < |x| < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
$$

   ed il suo grafico è mostrato in Figura 5.

   Per quanto riguarda la PDF di Y, questa è non nulla solo se $0 < y < 1$, nel qual caso si ha, sfruttando la simmetria della PDF congiunta:

$$
f_Y(y) = 2\int_{y+1}^{3-y} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 2(1-y).
$$

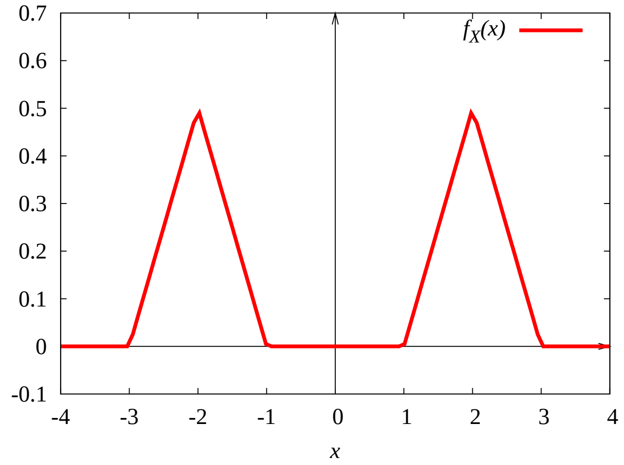

Figura 5: PDF di X nell'Esercizio 3.

La PDF di Y è mostrata in Figura 6.

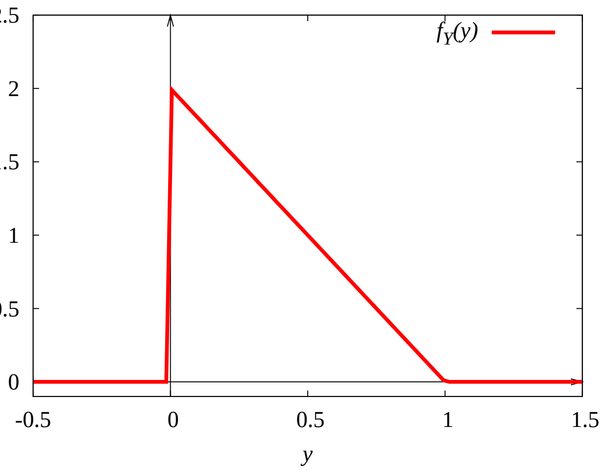

Figura 6: PDF di Y nell'Esercizio 3.

Essendo $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{XY}(x,y)$, segue che X ed Y non sono indipendenti.

2. Ricordiamo preliminarmente che

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY]$$

dove, nel secondo passaggio, si è sfruttato il fatto che la PDF di X è pari, e quindi $\mathbb{E}[X] = 0$. Si ha:

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[XY] \quad = \quad \iint_{\mathcal{D}} xy \frac{1}{2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Essendo il dominio $\mathcal{D}$ pari e la funzione integranda (cioè xy) dispari, segue immediatamente che l'integrale ad ultimo membro di (1) è zero, cioè $\mathrm{Cov}[X,Y] = 0$. Si conclude quindi che X ed Y sono incorrelate.

Esercizio 4

Siano date due variabili aleatorie $X \sim \exp(1)$ ed $Y \sim \exp(2)$ indipendenti. Si consideri $Z = X^2 + Y$, e si calcoli $\mathbb{E}[Z]$ e $\mathrm{Var}[Z]$.

Soluzione.

Per linearità dell'operatore valor medio, si ha:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y].$$

Ricordiamo che la funzione generatrice dei momenti (MGF) di una variabile aleatoria esponenziale a parametro μ è data da $\mu/(\mu - s)$. Di conseguenza, la derivata n-ma di tale MGF si può scrivere come $\phi^{(n)}(s) = \frac{n!\mu}{(\mu-s)^{n+1}}$. Per il teorema dei momenti, si ha:

$$\mathbb{E}[X^2] = \phi_X^{(2)}(0) = \frac{2}{\mu^2} = 2$$

essendo 1 il parametro di X. Essendo $\mathbb{E}[Y] = 1/2$, segue che

$$\mathbb{E}[Z] = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Essendo X ed Y indipendenti, si ha:

$$\mathrm{Var}[Z] = \mathrm{Var}[X^2] + \mathrm{Var}[Y]$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 \\
&= \phi_Y^{(2)}(0) - [\phi_Y^{(1)}(0)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\
\mathrm{Var}[X^2] &= \mathbb{E}[X^4] - (\mathbb{E}[X^2])^2 \\
&= \phi_X^{(4)}(0) - [\phi_X^{(2)}(0)]^2 \\
&= 4! - 2^2 = 24 - 4 = 20.
\end{aligned}$$

La varianza cercata è quindi:

$$\mathrm{Var}[Z] = 20 + \frac{1}{4} = \frac{81}{4}.$$