

Primo Compitino di Teoria dei Segnali A
Ing. Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni

28 aprile 2007

Esercizio 1

Al tiro a segno, un tiro costa $c = 0.1$ Euro. Tra coloro che sparano, il 10% hanno probabilità $p_1 = 0.8$ di colpire il bersaglio (tipo 1); il 40 % hanno probabilità $p_2 = 0.5$ di colpire il bersaglio (tipo 2); il 50 % hanno probabilità $p_3 = 0.1$ di colpire il bersaglio (tipo 3).

1. Si calcoli la probabilità che un cliente colpisca il bersaglio in un singolo tiro.
2. Un cliente spara 5 volte: le prime 4 manca il bersaglio ed alla quinta volta lo colpisce. Qual è la probabilità che il cliente sia di tipo 1? Di tipo 2? Di tipo 3?

Soluzione.

1. Definiamo il seguente evento:

$$\mathcal{C} = \{\text{Il cliente fa centro in una prova}\}.$$

Indicando con T_1 , T_2 e T_3 il tipo del cliente, in base al teorema della probabilità totale possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}) &= P(\mathcal{C}|T_1)P(T_1) + P(\mathcal{C}|T_2)P(T_2) + P(\mathcal{C}|T_3)P(T_3) \\ &= p_1 \cdot 0.1 + p_2 \cdot 0.4 + p_3 \cdot 0.5 = 0.33 \end{aligned}$$

dove si è notato che il fatto che il 10 % delle persone è di tipo 1 significa che $P(T_1) = 0.1$ (e similmente per $P(T_2)$ e $P(T_3)$) e, ovviamente, $P(\mathcal{C}|T_i) = p_i$, $i = 1, 2, 3$.

2. Definiamo il seguente evento:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{\text{Il cliente fa centro al quinto tiro}\} \\ &= \{4 \text{ insuccessi nelle prime 4 prove ed 1 successo alla quinta prova}\}. \end{aligned}$$

Applicando il teorema della probabilità totale possiamo scrivere¹:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}) &= P(\mathcal{E}|T_1)P(T_1) + P(\mathcal{E}|T_2)P(T_2) + P(\mathcal{E}|T_3)P(T_3) \\ &= \underbrace{(1-p_1)^4 p_1}_{0.00128} \cdot 0.1 + \underbrace{(1-p_2)^4 p_2}_{0.03125} \cdot 0.4 + \underbrace{(1-p_3)^4 p_3}_{0.06561} \cdot 0.5 \simeq 0.045433. \end{aligned}$$

A questo punto, applicando il teorema di Bayes, possiamo concludere:

$$\begin{aligned} P(T_1|\mathcal{E}) &= \frac{P(\mathcal{E}|T_1)P(T_1)}{P(\mathcal{E})} \simeq \frac{0.000128}{0.045433} \simeq 0.0028 \\ P(T_2|\mathcal{E}) &= \frac{P(\mathcal{E}|T_2)P(T_2)}{P(\mathcal{E})} \simeq \frac{0.0125}{0.045433} \simeq 0.2751 \\ P(T_3|\mathcal{E}) &= 1 - P(T_1|\mathcal{E}) - P(T_2|\mathcal{E}) \simeq 0.720. \end{aligned}$$

A questo punto, possiamo concludere che, *dato che* un cliente che spara 5 volte le prime 4 manca il bersaglio ed alla quinta volta lo colpisce, è più probabile che sia di tipo 3.

Esercizio 2

Si gioca a poker con 32 carte: ci sono 8 tipi (7,8,9,10,J,Q,K,A) per seme, e 4 semi (C,Q,F,P). Alla prima mano, avete le seguenti carte: K_F , K_P , Q_F , Q_P , J_F . Decidete di cambiare le tre carte Q_F , Q_P , J_F (cioè di tenere la coppia di K).

Qual è la probabilità che le tre nuove carte che vi vengono date siano un tris (ovviamente non di K), cioè che alla fine abbiate un full con la coppia di K iniziale? (Nota: quando si cambiano le carte a poker, le proprie carte da cambiare

¹Da notare che è sbagliato calcolare $P(\mathcal{E}) = (1 - P(\mathcal{C}))^4 P(\mathcal{C}) \simeq 0.066$, in quanto non si ha a che fare con prove indipendenti. L'esperimento è dato da due sottosperimenti: i) scelta del tipo e ii) 5 prove ripetute, ed il secondo esperimento dipende dal risultato del primo.

vengono messe da parte)

Soluzione.

Soluzione 1: si conta senza ordine

Una volta che abbiamo messo da parte le tre carte (Q_F , Q_P , J_F), l'estrazione delle tre nuove carte si può considerare come l'estrazione a caso di tre carte da un mazzo formato da 27 carte (quelle ottenute dal mazzo iniziale escludendo quelle che si avevano inizialmente in mano). Si ha quindi a che fare con un esperimento in uno spazio campione uniforme. La probabilità che stiamo cercando può essere espressa come segue:

$$P(\text{tris non di K}) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi totali}}.$$

Ci sono $\binom{27}{3}$ modi di scegliere 3 carte da un mazzo di 27 (senza ordine). A questo punto contiamo il numero di casi favorevoli all'evento di interesse. Ovviamente, potremo avere un tris (non di K) con 8-2 tipi di carte: tutti i tipi esclusi il K (per scelta) ed il Q (siccome abbiamo messo da parte 2 Q e quindi non potremo estrarre un tris). C'è però una differenza fra il J e gli altri tipi.

- Per quanto riguarda il J, abbiamo messo da parte il J_F , quindi rimane 1 sola configurazione di tris di J, precisamente (J_C, J_Q, J_P) .
- Per quanto riguarda gli altri 5 tipi di carte (esclusi il K, il Q ed il J), ci sono $\binom{4}{3}$ modi di scegliere le combinazioni di semi per ogni tipo.

Dal ragionamento sopra possiamo concludere che il numero di casi favorevole all'evento in questione è $\binom{4}{3} \cdot 5 + 1$. Per concludere, la probabilità cercata è:

$$P(\text{tris non di K}) = \frac{\binom{4}{3} \cdot 5 + 1}{\binom{27}{3}} \simeq 0.0071.$$

Soluzione 1: si conta con ordine

Contando in modo ordinato, si può scrivere:

$$\begin{aligned} P(\text{tris non di K}) &= P(\text{tris non di K e di J}) + P(\text{tris di J}) \\ &= P(\text{tris di 7}) + \dots + P(\text{tris di 10}) + P(\text{tris di A}) + P(\text{tris di J}) \\ &= \underbrace{\frac{4}{27} \cdot \frac{3}{26} \cdot \frac{2}{25} + \dots + \frac{4}{27} \cdot \frac{3}{26} \cdot \frac{2}{25}}_{5 \text{ tipi}} + \frac{3}{27} \cdot \frac{2}{26} \cdot \frac{1}{25} \\ &\simeq 0.0071 \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che tris di diversi tipi sono eventi disgiunti.

Esercizio 3

Si consideri una trasformazione $Y = g(X)$, dove $X \sim \exp(1)$ e

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 2 \\ 3 - x & x > 2. \end{cases}$$

Determinare la funzione densità di probabilità (PDF) di Y e disegnarla qualitativamente.

Soluzione.

La funzione $g(x)$ è mostrata in Figura 1. Per ipotesi, si ha che la funzione densità di probabilità (PDF) di X è:

$$f_X(x) = e^{-x}U(x).$$

Essendo la variabile aleatoria X continua, applichiamo il teorema della probabilità totale, distinguendo fra i vari casi possibili.

- Se $y > 1$, l'equazione $y = g(x)$ non ha soluzioni e, di conseguenza, $f_Y(y) = 0$.

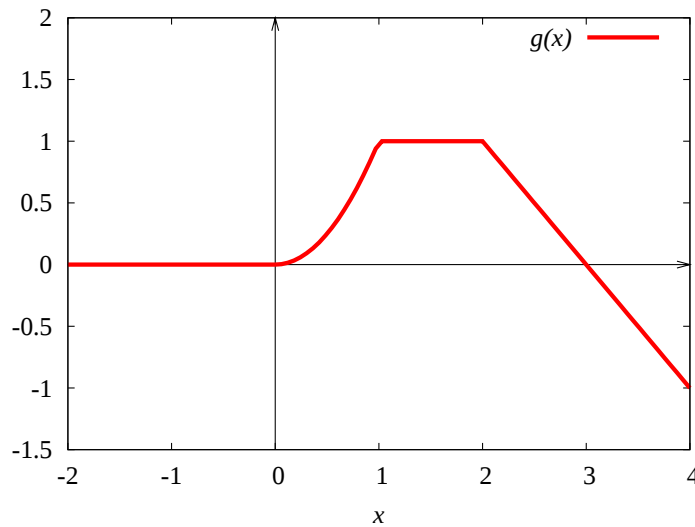


Figura 1: Funzione di trasformazione $g(x)$ nell'Esercizio 3.

- La funzione $g(x)$ presenta 2 tratti orizzontali in corrispondenza di 0 e 1. Di conseguenza, la PDF di Y può presentare e masse di probabilità. Analizziamo le possibili masse di probabilità in questi punti:

$$P\{Y = 0\} = P\{X \leq 0\} = 0$$

$$P\{Y = 1\} = P\{1 \leq X \leq 2\} = \int_1^2 e^{-x} dx = e^{-1} - e^{-2} \simeq 0.232.$$

Abbiamo scoperto che, per come è fatta la PDF di X , non c'è nessuna massa di probabilità, nella PDF di Y , concentrata in 0. C'è invece una massa di probabilità concentrata in 1.

- Dal grafico in Figura 1, si evince che se $0 < y < 1$, l'equazione $y = g(x)$ presenta due soluzioni: $x_1 = \sqrt{y}$ ed $x_2 = 3 - y$. Siccome $g'(x_1) = 2x_1$ e $g'(x_2) = -1$, segue:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} \\ &= \frac{e^{-\sqrt{y}}}{|2\sqrt{y}|} + \frac{e^{-(3-y)}}{|-1|} \\ &= \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} + e^{y-3}. \end{aligned}$$

- Se $y < 0$, l'equazione $y = g(x)$ presenta un'unica soluzione $x_* = 3 - y$ (stessa espressione della soluzione x_2 al punto precedente). Siccome $g'(x_*) = -1$, segue:

$$f_Y(y) = e^{y-3}.$$

Definendo:

$$c(y) \triangleq \begin{cases} e^{y-3} & \text{se } y < 0 \\ \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} + e^{y-3} & \text{se } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e combinando insieme i risultati ottenuti, la PDF di Y ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= c(y) + P\{Y = 1\}\delta(y - 1) \\ &= c(y) + (e^{-1} - e^{-2})\delta(y - 1). \end{aligned}$$

Il grafico della PDF di Y è mostrato in Figura 2.

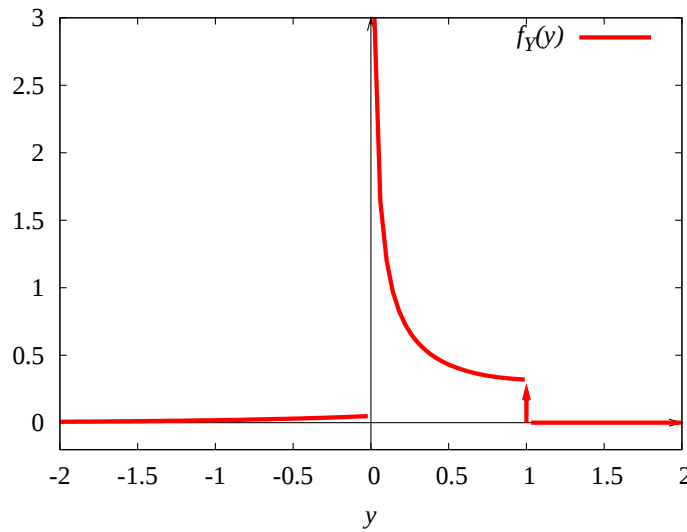


Figura 2: Funzione densità di probabilità $f_Y(y)$ nell'Esercizio 3.

Esercizio 4

La tensione ai capi di una resistenza di 1 Ohm è una variabile aleatoria (VA) X (espressa in Volt) con la seguente PDF:

$$f_X(x) = f_X^{(r)}(x) + \frac{1}{8}\delta(x+1) + \frac{3}{8}\delta(x-2)$$

dove la parte regolare della PDF ha la seguente espressione:

$$f_X^{(r)}(x) = \frac{1}{2}f_N(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]$$

dove $f_N(x)$ è la PDF di una VA Gaussiana $\mathcal{N}(0, 1)$ a media zero e varianza unitaria.

1. Si valuti il valor medio $\mathbb{E}[X]$.
2. Si calcoli la probabilità $P\{X > 1\}$.
3. La potenza dissipata su tale resistenza è la VA $Y = X^2$ [Watt]. Si calcoli la PDF di Y e ne tracci un grafico qualitativo.

Si ricordi che per ogni $x \geq 0$ vale

$$Q(x) \triangleq \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2) dy \simeq \frac{1}{[-(-\sqrt{x^2+b}+x) \cdot a+x] \cdot \sqrt{2\pi}e^{x^2}}$$

dove $a = 0.344$ e $b = 5.334$.

Soluzione.

La PDF della VA X è mostrata in Figura 3.

1. Applichiamo la definizione di valor medio:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[f_X^{(r)}(x) + \frac{1}{8}\delta(x+1) + \frac{3}{8}\delta(x-2) \right] dx \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X^{(r)}(x) dx}_{\text{dispari}} + \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x+1) dx + \frac{3}{8} \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x-2) dx \\ &= 0 + \frac{1}{8} \cdot (-1) + \frac{3}{8} \cdot (2) = \frac{5}{8} = 0.625 \end{aligned}$$

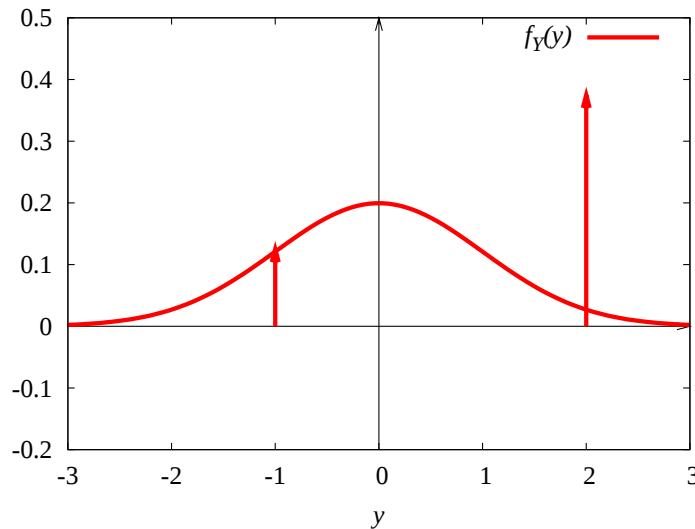


Figura 3: PDF della VA X nell'Esercizio 4.

dove si è utilizzato il fatto che l'integrale di una funzione dispari su di un intervallo simmetrico rispetto all'origine è zero e si è sfruttata la proprietà campionatrice della delta.

2. Si ha:

$$\begin{aligned}
 P\{X > 1\} &= \int_1^{\infty} f_X(x) dx \\
 &= \int_1^{\infty} \left[f_X^{(r)}(x) + \frac{1}{8}\delta(x+1) + \frac{3}{8}\delta(x-2) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} f_N(x) dx + \frac{1}{8} \int_1^{\infty} \delta(x+1) dx + \frac{3}{8} \int_1^{\infty} \delta(x-2) dx \\
 &= \frac{1}{2} Q\left(\frac{1-0}{1}\right) + 0 + \frac{3}{8} \\
 &= \frac{1}{2} Q(1) + \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

dove si è notato che $\delta(x+1)$ cade al di fuori dell'intervallo di integrazione $(1, \infty)$. Utilizzando la formula approssimata per il calcolo di $Q(1)$, si ha:

$$Q(1) \simeq \frac{1}{[-(-\sqrt{1+5.334}+1) \cdot 0.344+1] \cdot \sqrt{2\pi e^1}} \simeq 0.1594$$

da cui segue

$$P\{X > 1\} = \frac{1}{2}Q(1) + \frac{3}{8} \simeq 0.454.$$

3. Consideriamo la VA $Y = g(X) = X^2$ (potenza dissipata). Siccome X è una variabile aleatoria mista, consideriamo prima come si trasformano le delta presenti nella PDF di X e poi come si trasforma la parte regolare (attraverso il teorema fondamentale).

- Le masse di probabilità concentrate in -1 e 2 vengono trasformate in $g(-1) = 1$ e $g(2) = 4$, rispettivamente. Si può quindi concludere che

$$\begin{aligned}
 P\{Y = 1\} &= P\{X = -1\} = \frac{1}{8} \\
 P\{Y = 4\} &= P\{X = 2\} = \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

In generale si potrebbe concludere che $P\{Y = 1\} \geq P\{X = -1\}$ e $P\{Y = 4\} \geq P\{X = 2\}$. Siccome però la trasformazione non presenta tratti orizzontali, sicuramente dalla trasformazione della parte regolare non si formeranno delle delta nella PDF di Y .

- Per quanto riguarda la trasformazione della parte regolare, applichiamo il teorema fondamentale. Denotiamo come $f_Y^{(r)}(y)$ la parte regolare della PDF di Y ottenuta trasformando $f_X^{(r)}(x)$.
 - Se $y < 0$, l'equazione $y = g(x)$ non ha soluzioni e, di conseguenza, $f_Y^{(r)}(y) = 0$.
 - Come notato sopra, non ci sono tratti orizzontali in $g(x)$.
 - $\forall y > 0$, l'equazione $y = g(x)$ presenta due soluzioni: $x_1 = -\sqrt{y}$ ed $x_2 = \sqrt{y}$. Siccome $g'(x) = 2x$, segue:

$$\begin{aligned} f_Y^{(r)}(y) &= \frac{f_X^{(r)}(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X^{(r)}(x_2)}{|g'(x_2)|} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(-\sqrt{y})^2}}{|-2\sqrt{y}|} + \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{y})^2}}{|2\sqrt{y}|} \\ &= \frac{e^{-y}}{2\sqrt{2\pi y}}. \end{aligned}$$

Quindi, la parte regolare della PDF di Y si può scrivere in modo compatto come

$$f_Y^{(r)}(y) = \frac{e^{-y}}{2\sqrt{2\pi y}} U(y).$$

La PDF complessiva della VA Y è quindi:

$$f_Y(y) = \frac{e^{-y}}{2\sqrt{2\pi y}} U(y) + \frac{1}{8} \delta(y - 1) + \frac{3}{8} \delta(y - 4).$$

Il grafico della PDF di Y è mostrato in Figura 4.

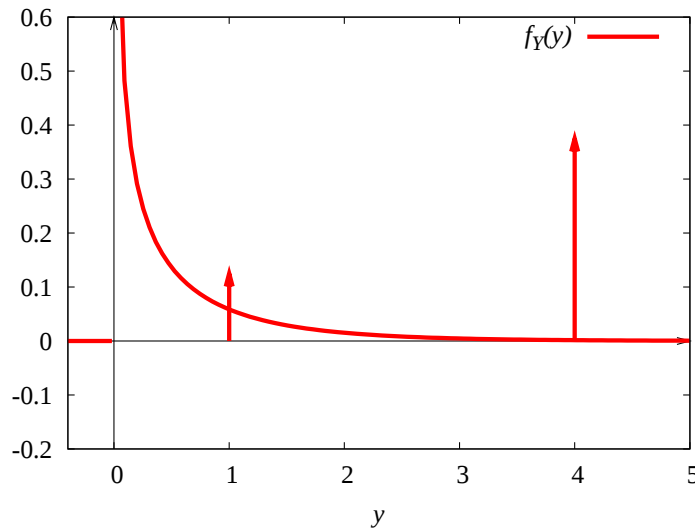


Figura 4: Funzione densità di probabilità $f_Y(y)$ nell'Esercizio 4.