Secondo Compitino di Teoria dei Segnali A
Ing. Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni

16 giugno 2006

Esercizio 1

Si consideri una variabile aleatoria X con la seguente funzione densità di probabilità (PDF):

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}e^{-(x-3)}U(x-3)$$

dove $U(x)$ è la funzione gradino unitario. Si consideri quindi la seguente trasformazione:

$$g(x) = \begin{cases} |x| & |x| \leq 1 \\ 1 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Determinare l'espressione analitica della PDF di $Y = g(X)$ e tracciarne il grafico. Calcolare quindi $\mathrm{E}[Y]$ e $\mathrm{Var}[Y]$.

Soluzione.

La PDF di X è mostrata in Figura 1. La funzione $g(x)$ che caratterizza la trasformazione ha l'andamento mostrato in

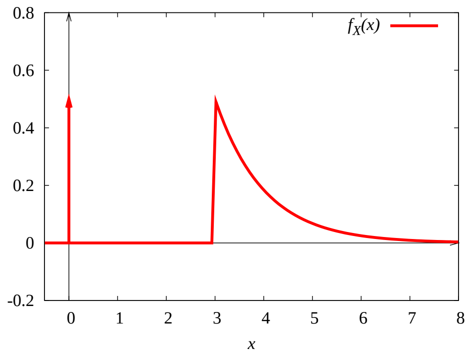

Figura 1: Funzione densità di probabilità $f_X(x)$ nell'Esercizio 1.

Figura 2. Per determinare l'espressione di $f_Y(y)$ applichiamo il teorema fondamentale. Notiamo preliminarmente che X

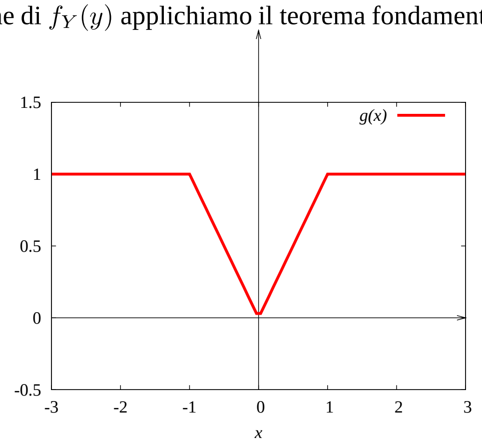

Figura 2: Funzione di trasformazione $g(x)$ nell'Esercizio 1.

è una variabile aleatoria mista, con PDF che può essere scritta come segue:

$$f_X(x) = d(x) + f_X^{\mathrm{c}}(x)$$

dove

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{1}{2}\delta(x) \\ f_X^{\mathrm{c}}(x) &= \frac{1}{2}e^{-(x-3)}U(x-3). \end{aligned}$$

- Siccome nella PDF $f_X(x)$ c'è una massa di probabilità di peso $1/2$ concentrata in 0, si avrà una massa di probabilità dello stesso peso, nella PDF di Y, concentrata in $g(0) = 0$.
- Per determinare il contributo, in $f_Y(y)$, della componente $f_X^{\mathrm{c}}(x)$, si può applicare il teorema fondamentale. Siccome tutta la massa di probabilità (di peso complessivo 1/2) in $f_X^{\mathrm{c}}(x)$ si concentra per $x > 3$ e siccome $g(x) = 1$ per $x > 3$ (cioè si ha un tratto costante), si può concludere che in $f_Y(y)$ ci sarà una delta, di peso $1/2$, centrata in $y = 1$.

Riassumendo, si ha che

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{2}\delta(y-1)$$

cioè Y è una variabile di Bernoulli a parametro $p = 1/2$ ed il grafico della PDF è dato da due delta, di altezza 1/2, centrate in 0 ed 1. È quindi immediato concludere che $\mathrm{E}[Y] = p = 1/2$ e $\mathrm{Var}[Y] = p(1-p) = 1/4$.

Esercizio 2

Nel piano (x, y) è assegnato il dominio $\mathcal{D}$ indicato in Figura 3. Si consideri una coppia di variabili aleatorie X e Y con

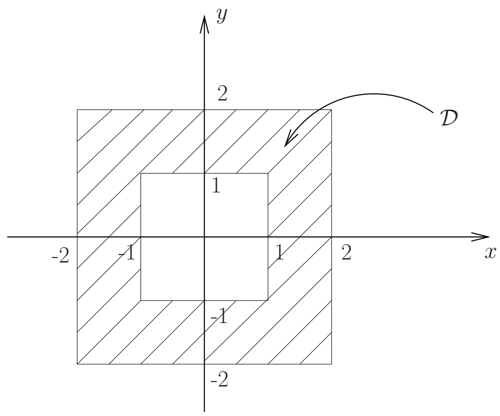

Figura 3: Dominio $\mathcal{D}$ della funzione densità di probabilità congiunta delle due variabili aleatorie X e Y nell'Esercizio 2.

densità di probabilità congiunta costante sul dominio D e nulla altrove.

1. Determinare le funzioni densità di probabilità marginali $f_X(x)$ ed $f_Y(y)$, e tracciarne il grafico.
2. Verificare se X e Y sono indipendenti oppure no.
3. Calcolare $\mathrm{Cov}[X, Y]$.

Soluzione.

Il dominio $\mathcal{D}$ si può pensare come ottenuto dal quadrato esterno (di lato 4) che è stato "bucato" con un buco quadrato interno (di lato 2). L'area complessiva del dominio $\mathcal{D}$ è quindi $4^2 - 2^2 = 12$. Si ha quindi:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{se } (x,y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Iniziamo con il calcolo di $f_X(x)$. Tenendo conto della struttura del dominio $\mathcal{D}$ e del fatto che $f_{XY}(x, y)$ è costante sul dominio $\mathcal{D}$, si ha:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 2 \\ \int_{-2}^{2} \frac{1}{12}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3} & \text{se } 1 < |x| < 2 \\ 2 \cdot \int_{1}^{2} \frac{1}{12}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{6} & \text{se } 0 < |x| < 1. \end{cases}$$

La PDF di X è mostrata in Figura 4. Essendo il dominio $\mathcal{D}$ simmetrico rispetto all'origine *ed* essendo $f_{XY}(x, y)$ costante su $\mathcal{D}$, è immediato concludere che $f_Y(y) = f_X(y)$, cioè le PDF marginali delle variabili aleatorie X e Y sono uguali.

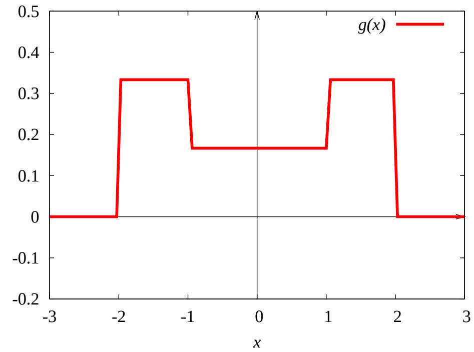

Figura 4: Funzione densità di probabilità marginale $f_X(x)$ nell'Esercizio 2.

2. Siccome $f_X(0)f_Y(0) = 1/36$ e $f_{XY}(0,0) = 0$, è immediato concludere che $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{XY}(x,y)$, cioè X e Y non sono indipendenti.

3. Si ha $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[XY]$, siccome le PDF di X e Y sono pari (e quindi $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] = 0$). Siccome il dominio $\mathcal{D}$ è simmetrico rispetto all'origine e $f_{XY}(x,y)$ è costante su $\mathcal{D}$, è immediato concludere che $\mathrm{E}[XY] = 0$ (infatti, per ogni punto (x,y) appartente al dominio, si ha che il punto $(-x,y)$ appartiene al dominio). Dimostriamolo matematicamente. Dividendo in modo opportuno il dominio di integrazione, per la proprietà additiva dell'operazione di integrazione si può scrivere:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[XY] &= \iint_{\mathcal{D}} xy f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{12}\left(\underbrace{\int_{-2}^{-1}\int_{-2}^{2} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{-1}^{+1}\int_{-2}^{-1} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x}_{I_2}\right. \\ &\qquad \left. + \underbrace{\int_{-1}^{+1}\int_{1}^{2} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x}_{I_3} + \underbrace{\int_{1}^{2}\int_{-2}^{2} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x}_{I_4}\right).\end{aligned}$$

A questo punto, considerando il cambio di variabile $w = -x$ nel quarto integrale, è facile rendersi conto che $I_4 = -I_1$. Eseguendo il cambio di variabile $z = -y$ nel terzo integrale, è facile rendersi conto che $I_3 = -I_2$.

Esercizio 3

Ci sono 2 scatole che contengono lampadine. I tempi di vita delle lampadine nelle due scatole sono distribuiti come segue:

1. nella scatola A ci sono metà delle lampadine con tempo di vita$\sim$exp(1) ed metà delle lampadine con tempo di vita$\sim$exp(1/3);

2. nella scatola B ognuna delle lampadine ha un tempo di vita$\sim$exp(1/2).

Si sceglie a caso una scatola e poi si estrae a caso una lampadina da tale scatola. Si accende la lampadina e si constata che il tempo di vita è maggiore di 2. Da quale scatola è più probabile che la lampadina sia stata estratta?

Soluzione.

Indichiamo con A e B le due scatole, mentre T indica il tempo di vita generico di una lampadina. Il problema chiede di valutare $P(\mathrm{A}|T \geq 2)$ e $P(\mathrm{B}|T \geq 2) = 1 - P(\mathrm{A}|T \geq 2)$ e di scegliere la maggiore. Applicando la formula di Bayes, si ottiene:

$$P(\mathrm{A}|T \geq 2) = \frac{P\{T \geq 2|\mathrm{A}\}P(\mathrm{A})}{P\{T \geq 2\}}. \tag{1}$$

Siccome la scatola è scelta a caso, si ha $P(\mathrm{A}) = 1/2$. La probabilità $P\{T \geq 2|\mathrm{A}\}$ corrisponde alla probabilità che il tempo di vita di una lampadina estratta a caso dalla scatola A sia maggiore o uguale a 2. Restringendo lo spazio campione alla scatola A, una partizione è costituita dai due tipi di lampadine presenti nella scatola A. Denotando questi due tipi di lampadine come A_1 ed A_2, applicando il teorema della probabilità totale allo spazio campione ridotto, si ottiene:

$$\begin{aligned} P\{T \geq 2|\mathrm{A}\} &= P\{T \geq 2|\mathrm{A}, \mathrm{A}_1\}P\{\mathrm{A}_1|\mathrm{A}\} + P\{T \geq 2|\mathrm{A}, \mathrm{A}_2\}P\{\mathrm{A}_2|\mathrm{A}\} \\ &= P\{T \geq 2|\mathrm{A}_1\}\frac{1}{2} + P\{T \geq 2|\mathrm{A}_2\}\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

dove A, A_1 sta per $\mathrm{A}\cap\mathrm{A}_1$ (similmente $\mathrm{A}, \mathrm{A}_2 = \mathrm{A}\cap\mathrm{A}_2$) e, nella seconda riga, si sono utilizzati i risultati: (i) $\mathrm{A}\cap\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_1$ (similmente, $\mathrm{A}\cap\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_2$) e (ii) metà della lampadine nella scatola A sono del primo tipo: $P\{\mathrm{A}_1|\mathrm{A}\} = P\{\mathrm{A}_2|\mathrm{A}\} = 1/2$. A questo punto, siccome

$$\begin{aligned} P\{T \geq 2|\mathrm{A}_1\} &= \int_2^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-2} \\ P\{T \geq 2|\mathrm{A}_2\} &= \int_2^\infty \frac{1}{3}e^{-t/3}\,\mathrm{d}t = e^{-2/3} \end{aligned}$$

da (2) segue che

$$P\{T \geq 2|\mathrm{A}\} = \frac{1}{2}\left(e^{-2} + e^{-2/3}\right).$$

Siccome nella scatola B c'è un solo tipo di lampadine, si ha:

$$P\{T \geq 2|\mathrm{B}\} = \int_2^\infty \frac{1}{2}e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = e^{-1}.$$

Applicando il teorema della probabilità totale considerando la partizione formata da A e B, la probabilità a denominatore di (1) si può calcolare come segue:

$$\begin{aligned} P\{T \geq 2\} &= P\{T \geq 2|\mathrm{A}\}P(\mathrm{A}) + P\{T \geq 2|\mathrm{B}\}P(\mathrm{B}) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(e^{-2} + e^{-2/3}\right) + e^{-1}\right]. \end{aligned}$$

La probabilità (1) è quindi

$$P(\mathrm{A}|T \geq 2) = \frac{e^{-2} + e^{-2/3}}{e^{-2} + e^{-2/3} + 2e^{-1}} \simeq 0.46.$$

Di conseguenza, essendo $P(\mathrm{B}|T \geq 2) = 1 - P(\mathrm{A}|T \geq 2) \simeq 0.54$, si può concludere che è più probabile che la lampadina sia stata scelta dalla scatola B.

Esercizio 4

Siano date le due VA indipendenti $X \sim \mathrm{Unif}(-1, 1)$ e Y con $f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$. Si considerino $Z = X + Y$ e $W = X^2Y$. Si calcoli $\mathrm{Cov}[Z, W]$.

Soluzione.

Applicando la proprietà di bilinearità della covarianza e per definizione di covarianza, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[Z, W] &= \mathrm{Cov}[X + Y, X^2Y] = \mathrm{Cov}[X, X^2Y] + \mathrm{Cov}[Y, X^2Y] \\ &= \mathrm{E}[X^3Y] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[X^2Y] + \mathrm{E}[X^2Y^2] - \mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[X^2Y]. \end{aligned} \tag{3}$$

A questo punto, notando che $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] = 0$ (le PDF di X e Y sono pari) e sfruttando l'indipendenza fra X e Y, da (3) si ottiene:

$$\mathrm{Cov}[Z, W] = \mathrm{E}[X^2]\mathrm{E}[Y^2].$$

Essendo (teorema dell'aspettazione, parità delle PDF, ed integrazione per parti):

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X^2] &= 2\int_0^1 x^2\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \\ \mathrm{E}[Y^2] &= 2\int_0^{+\infty} y^2\frac{1}{2}e^{-y}\,\mathrm{d}y = 2\left(\underbrace{\left[-e^{-y}\frac{y^2}{2}\right]_0^\infty}_{0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,\mathrm{d}y}_{1}\right) = 2 \end{aligned}$$

si ottiene, finalmente, che $\mathrm{Cov}[Z, W] = 2/3$.